ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ας υποθέσουμε ότι στο χώρο έχουμε κάποιο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ που οφείλεται σε (μη κινούμενα) φορτία (σημειακά ή κατανομές), αλλά έχουμε και ρεύματα (κινούμενα φορτία). Άν έχουμε ένα φορτίο q που κινείται στον χώρο αυτό με ταχύτητα $\mathbf{v}$, τι δύναμη δέχεται;

Το πείραμα δείχνει ότι το φορτίο μας δέχεται δύναμη

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Δηλαδή, πέραν του πρώτου όρου (που περιμέναμε) υπάρχει και δεύτερος όρος. Αυτή η δύναμη εμφανίζεται αν υπάρχουν ρεύματα στον χώρο και αν το φορτίο μας q κινείται ($\mathbf{v} \neq 0$), είναι κάθετη στην ταχύτητα (λόγω του εξωτερικού γινόμενου) και εξαρτάται από το (νέο) μέγεθος $\mathbf{B}$ που θα καλούμε ένταση του μαγνητικού πεδίου. Αν έχουμε ένα λεπτό μακρύ ευθύγραμμο σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα I, το $\mathbf{B}$ βρίσκεται να έχει μέτρο

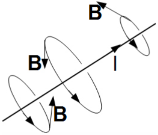
$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{I}{2\pi r}$$

όπου r η απόσταση του φορτίου q από το ευθύγραμμο σύρμα.

Αν ορίσουμε μια νέα σταθερά $\mu_0 = \left(\epsilon_0 c^2\right)^{-1}$, τότε ξαναγράφουμε

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

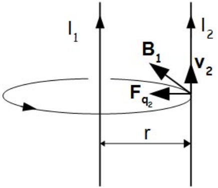
και οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κύκλοι σε επίπεδα κάθετα στο ρεύμα I και με κέντρο το ρεύμα και φορά δεξιόστροφης βίδας.



Ας βρούμε τη δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων και ομόρροπων ρευμάτων I_1 και I_2. Σε ένα φορτίο q_2 που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}_2$ (και το οποίο συμμετέχει στο ρεύμα I_2), ασκείται δύναμη

$$\mathbf{F}_{q_2} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 \Rightarrow F_{q_2} = q_2 v_2 B_1$$

Αν έχουμε n_2 αριθμό φορέων φορτίου *ανά μονάδα μήκους* στο σύρμα I_2, τότε η δύναμη *ανά μονάδα μήκους* που ασκείται στο σύρμα I_2 θα είναι



$$F_2/(\text{μήκος}) = q_2 n_2 v_2 B_1$$

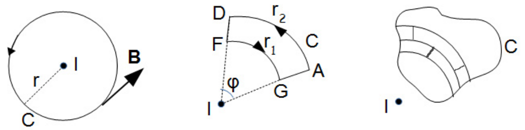
Το ρεύμα I_2, είναι ίσο με $I_2 = qn_2 v_2$, οπότε η δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται στο σύρμα με το ρεύμα I_2 από το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα I_1 είναι

$$F_2/(\text{μήκος}) = I_2 B_1 = I_2\, \mu_0\, \frac{I_1}{2\pi r}$$

όπου r η απόσταση των δύο συρμάτων. Η συμμετρία ως προς I_1 και I_2 μας λέει άμεσα ότι το ρεύμα I_2 ασκεί δύναμη (ανά μονάδα μήκους) ίδιου μέτρου στο σύρμα με το I_1.

Ας δούμε ιδιότητες που πληροί το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε ρεύμα I που διαρρέει ευθύγραμμο σύρμα απείρου μήκους. Ποιο είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου **B** ενός ευθύγραμμου σύρματος πάνω στην καμπύλη C που είναι περιφέρεια κύκλου, κάθετου στο σύρμα και με κέντρο στο σύρμα;

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \oint_C B\, ds = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_C ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$



Τώρα ας θεωρήσουμε την καμπύλη C που δεν περικλείει το ρεύμα και αποτελείται από δύο τόξα (AD) και (FG), που αντιστοιχούν στην ίδια γωνία ϕ ομόκεντρων κύκλων (ακτίνων r_2 και r_1), και δύο ευθύγραμμα τμήματα (DF) και (GA), στην διεύθυνση των τοπικών ακτίνων. Τα τελευταία δύο ευθύγραμμα τμήματα δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα μιας και είναι κάθετα στο πεδίο **B**.

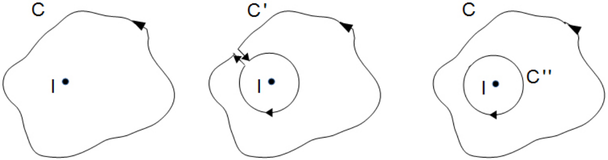
Μένουν τα δύο τόξα, στα οποία βέβαια το πεδίο είναι εφαπτομενικό και με σταθερό μέτρο για κάθε τόξο

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \int_{AD} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{ds} + \int_{FG} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{ds} = \int_{AD} B_2\, ds - \int_{FG} B_1\, ds =$$
$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \int_{AD} ds - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \int_{FG} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\, \phi r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\, \phi r_1 = 0$$

Οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C που δεν περιέχει το ρεύμα, μπορεί "μοιραστεί" σε παρόμοια τόξα, οπότε το γενικό συμπέρασμα είναι ότι: το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου για οποιαδήποτε καμπύλη που δεν περιέχει το ρεύμα, είναι μηδενικό

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = 0, \qquad \text{η } C \text{ δεν περιέχει το ρεύμα}$$

Τώρα θέλουμε να βρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για τυχαία κλειστή καμπύλη C που περιέχει το ρεύμα.



Θεωρούμε την καμπύλη C' η οποία *δεν* περιέχει το ρεύμα (επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου μηδενίζεται). Το ‘‘εξωτερικό’’ τμήμα της C' είναι σαν την C αλλά έχει και ένα κυκλικό τμήμα που περιβάλλει το ρεύμα (με το ρεύμα στο κέντρο του). Το δύο ίσα μικρά ευθύγραμμα τμήματα θεωρούνται απειροστά κοντά. Οπότε, τα δύο αυτά ευθύγραμμα τμήματα δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα γιατί έχουν αντίθετες φορές κάλυψης (αντίθετα **ds**). Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην C' είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στις καμπύλες C και C''

$$\oint_{C'} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \oint_{C+C''} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \oint_{C} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = -\oint_{C''} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Στην περίπτωση που έχουμε πολλά σύρματα/ρεύματα, από την επαλληλία θα έχουμε

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \mu_0 I_{(C)} = \mu_0 \sum_{i(C)} I_i$$

όπου $I_{(C)}$ είναι τα ρεύματα που περικλείονται από την κλειστή καμπύλη μας.
Να γενικεύσουμε χρησιμοποιώντας την πυκνότητα ρεύματος **J**

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{S(C)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

όπου $S(C)$ είναι οποιαδήποτε επιφάνεια καταλήγει στην καμπύλη C (προσέξτε ότι οποιοδήποτε ρεύμα περικλείεται από την καμπύλη C θα διασχίσει οποιαδήποτε επιφάνεια καταλήγει στην C). Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα του Stokes

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \int_{S(C)} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{da}$$

θά έχουμε

$$\int_{S(C)} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{da} = \mu_0 \int_{S(C)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

Όπως είπαμε η σχέση αυτή ισχύει για οποιαδήποτε επιφάνεια S καταλήγει στην C. Επομένως θα πρέπει

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

η οποία αποτελεί την διαφορική μορφή της (ολοκληρωτικής) σχέσης

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \mu_0 \int_{S(C)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

Σε αντιστοιχία με τον νόμου τους Gauss, περιμένουμε ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου να μας δίνει την πυκνότητα του *μαγνητικού* φορτίου. Αλλά, στην φύση δεν παρατηρούμε μαγνητικά φορτία (μαγνητικά μονόπολα) αντίστοιχα με τα ηλεκτρικά. Επομένως

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Το ζευγάρι των διαφορικών εξισώσεων

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

ορίζουν μονοσήμαντα το $\mathbf{B}$. Να το δείξουμε. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο λύσεις: $\mathbf{B}$ και $\mathbf{B}'$ που πληρούν τις δύο διαφορικές εξισώσεις. Ορίζουμε το νέο πεδίο $\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{B}'$ και

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Από τη δεύτερη σχέση (θυμηθείτε τον στατικό ηλεκτρισμό) σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\mathbf{D} = \nabla f$$

Αλλά τότε

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow \nabla^2 f = 0$$

δηλαδή, η f πληροί την διαφορική εξίσωση του Laplace. Η συνάρτηση αυτή, σε κάποια απομακρυσμένη περιοχή (σύνορο), θα αποκτήσει σταθερή τιμή, $f = c$. Από την μοναδικότητα της λύσης της Laplace όμως, σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι *παντού* σταθερή, $f = c$. Επομένως, εφ' όσον $\mathbf{D} = \nabla f$, θα έχουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{D} = 0$, ή $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, δηλαδή οι δύο λύσεις μας είναι ταυτόσημες.

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Β′ Η ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΩΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Τι χρειαζόμαστε:
Συστολή μήκους
Λεπτός κανόνας *σε ηρεμία* έχει μήκος l_0. Αν ο κανόνας κινείται με ταχύτητα v_1 παράλληλη με τον κανόνα, τότε το μήκος l_1 που μετράμε είναι

$$l_1 = l_0\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$$

Προσοχή: το μήκος l_0 είναι το μήκος που μετράμε όταν ο κανόνας βρίσκεται σε ηρεμία.
Οπότε, αν l_1 είναι το μήκος που μετράμε όταν ο κανόνας κινείται με ταχύτητα v_1 και l_2 είναι το μήκος που μετράμε όταν ο κανόνας κινείται με ταχύτητα v_2, θα ισχύει

$$l_2 = l_0\sqrt{1 - v_2^2/c^2}, \quad l_1 = l_0\sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \quad \Rightarrow l_2 = l_1\frac{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

Μετασχηματισμός ταχύτητας

Αν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ ως προς το σύστημα αναφοράς O, τότε ώς προς το σύστημα O' που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ ως προς το O (θεωρώντας τις δύο ταχύτητες συγγραμμικές), θα έχει ταχύτητα

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v_0}/c^2}$$

Επομένως, αν οι ταχύτητες $\mathbf{v}$ και $\mathbf{v_0}$ είναι ομόρροπες το μέτρο v' θα είναι

$$v' = \frac{v - v_0}{1 - vv_0/c^2}$$

ενώ αν είναι αντίρροπες

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}$$

Θυμηθείτε ότι στην Νευτώνια μηχανική, στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα έχουμε

$$v' = v - v_0, \qquad v' = v + v_0$$

Μετασχηματισμός δύναμης
Στο σύστημα O θεωρούμε ότι ένα σώμα ηρεμεί (δηλ. έχει μηδενική ταχύτητα) και δέχεται δύναμη $\mathbf{F}$. Αν το σύστημα O' κινείται ως προς το O με ταχύτητα $\mathbf{v_0}$, τότε δύναμη που δέχεται το σώμα στο τονούμενο σύστημα είναι

$$F'_{||} = F_{||}, \qquad F'_{\perp} = F_{\perp}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$$

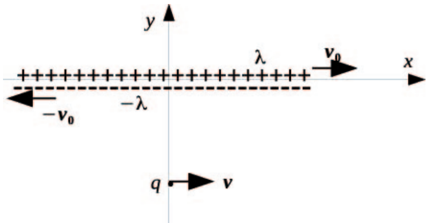
όπου $F_{||}$ είναι η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη με την ταχύτητα $\mathbf{v_0}$ και $F_{\perp}$ η συνιστώσα της δύναμης που είναι κάθετη στην $\mathbf{v_0}$.
Ηλεκτρικό ρεύμα και γραμμική πυκνότητα φορτίου
Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια γραμμική (απείρου μήκους) πυκνότητα φορτίου λ (φορτίο ανά μονάδα μήκους) και τα φορτία κινούνται με ταχύτητα v, τότε το ρεύμα I (φορτίο που διέρχεται από ένα σημείο ανά μονάδα χρόνου) που δημιουργούν αυτά τα φορτία είναι (Δl είναι το στοιχειώδες μήκος πάνω στην κατανομή)

$$\mathrm{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta l}\,\frac{\Delta l}{\Delta t} = \lambda\, v$$

Τέλος να θυμηθούμε ότι μια γραμμική κατανομή φορτίου λ απείρου μήκους δημιουργεί στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο με κυλινδρική συμμετρία και μέτρο $\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$, όπου r η απόσταση από την γραμμική κατανομή.

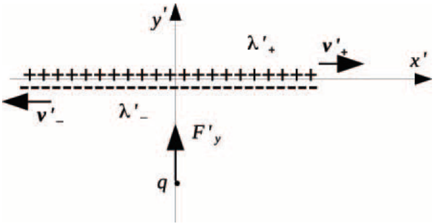
Θεωρούμε ότι έχουμε δύο γραμμικές κατανομές φορτίου λ και $-\lambda$, παράλληλες με τον άξονα των x και πάνω στην ίδια ευθεία. Τα φορτία στις κατανομές κινούνται με ταχύτητες $\mathbf{v_0}$ και $-\mathbf{v_0}$ αντίστοιχα. Το ρεύμα που αντιστοιχεί είναι

$$\mathrm{I} = \lambda v_0 + (-\lambda)(-v_0) = 2\lambda v_0$$



Θεωρούμε επίσης ότι έχουμε και ένα σημειακό φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ παράλληλη με τον άξονα των x.

Ζητάμε να βρούμε την δύναμη που ασκούν οι δύο κατανομές φορτίων στο κινούμενο σημειακό φορτίο q.
Προσέξτε: αν το φορτίο ήταν ακίνητο η συνολική δύναμη είναι μηδενική καθώς κάθε θετικό φορτίο της κατανομής εξασκεί μια ίση κατά μέτρο και αντίθετη φορά με ένα αρνητικό φορτίο της άλλης κατανομής. Γνωρίζουμε ότι σε ακίνητο φορτίο, η δύναμη που ασκείται είναι ανάλογη του φορτίου (το φορτίο είναι αναλλοίωτη σχετικιστικά ποσότητα) επί το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο που είναι το φορτίο. Επομένως, πηγαίνουμε στο σύστημα ηρεμίας του φορτίου. Ας βρούμε σ' αυτό το νέο σύστημα (όπου θα γράφουμε τα μεγέθη τονούμενα) την ταχύτητα κίνησης των φορτίων των δύο γραμμικών κατανομών



$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v v_0/c^2}, \qquad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v v_0/c^2} \tag{11}$$

Προσέξτε ότι οι δύο ταχύτητες δεν έχουν πια το ίδιο μέτρο. Ποιες είναι τώρα οι δύο νέες γραμμικές πυκνότητες; Η γραμμική πυκνότητα αλλάζει λόγω αλλαγής της μονάδας μήκους στην κατεύθυνση της κίνησης. Θυμηθείτε πάλι ότι το φορτίο είναι αναλλοίωτη σχετικιστικά ποσότητα. Πώς συνδέονται τα μήκη στις δύο περιπτώσεις; Με βάση αυτά που αναφέραμε στην αρχή, το μήκος l (παράλληλο με τον άξονα των x) στο αρχικό σύστημα (όπου τα φορτία των γραμμικών κατανομών κινούνται με ταχύτητες v_0 και $-v_0$) και στο νέο σύστημα (όπου τα φορτία των γραμμικών κατανομών κινούνται με ταχύτητες v'_+ και v'_-) συνδέονται με τις σχέσεις

$$l'_+ = l\,\frac{\sqrt{1 - {v'_+}^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad l'_- = l\,\frac{\sqrt{1 - {v'_-}^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

και οι αντίστοιχες γραμμικές πυκνότητες φορτίου

$$\lambda'_{+} = \frac{\Delta q}{\Delta l'_{+}} = \frac{\Delta q}{\Delta l} \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - {v'_{+}}^2/c^2}} = \lambda \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - {v'_{+}}^2/c^2}}$$

και ανάλογα

$$\lambda'_{-} = -\lambda \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - {v'_{-}}^2/c^2}}$$

Βλέπουμε ότι ενώ στο αρχικό σύστημα είχαμε ίσες (κατά μέτρο) γραμμικές κατανομές (λ και $-\lambda$), τώρα δεν είναι πια ίσες. Η συνολική γραμμική πυκνότητα είναι

$$\lambda'_{+} - \lambda'_{-} = \lambda \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - {v'_{+}}^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - {v'_{-}}^2/c^2}} \right)$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες v'_{+} και v'_{-} από την (11) και μια σειρά απλών πράξεων καταλήγουμε στην

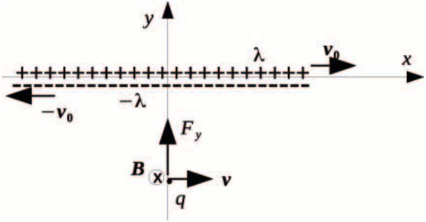
$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \lambda\sqrt{1 - v_0^2/c^2}\left(-2\frac{v_0 v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) =$$
$$= -2\lambda\frac{v_0 v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Αυτή ή ΜΗ μηδενική γραμμική κατανομή φορτίου, στο σημείο που βρίσκεται το ΑΚΙΝΗΤΟ σημειακό φορτίο q δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο

$$E'_y = \frac{|\lambda'_+ - \lambda'_-|}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda v v_0}{\pi\epsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

όπου r η απόσταση του σημειακού φορτίου από τις γραμμικές κατανομές και η δύναμη κατευθύνεται προς την θετική πλευρά του άξονα των y. Η δύναμη στο σημειακό φορτίο θα είναι

$$F'_y = qE'_y = \frac{q\lambda v v_0}{\pi\epsilon_0 c^2 r}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Και τώρα επιστρέφουμε στο αρχικό μας σύστημα αναφοράς, όπου το σημειακό μας φορτίο κινείται με ταχύτητα **v**. Η δύναμή μας είναι κάθετη στην ταχύτητα αυτή, οπότε ο μετασχηματισμός μας δίνει

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{q\lambda v v_0}{\pi \epsilon_0 c^2 r}$$

Αυτή η δύναμη μπορεί να ξαναγραφεί

$$F_y = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{2\lambda v_0}{2\pi r} q\, v = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\mathrm{I}}{2\pi r} q\, v$$

Αν ονομάσουμε

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \qquad B = \mu_0 \, \frac{\mathrm{I}}{2\pi r}$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε

$$F_y = B \, q \, v$$

Αν μάλιστα γράψουμε

$$\mathbf{B} = B(-\hat{\mathbf{z}})$$

η δύναμη γράφεται

$$\mathbf{F} = q \, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Αλλάζοντας την διεύθυνση της ταχύτητας του σημειακού φορτίου μπορούμε να δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος είναι γενικός.

Το **B** είναι το **μαγνητικό πεδίο** που δημιουργείται από το ρεύμα I σε απόσταση r

$$B = \mu_0 \, \frac{\mathrm{I}}{2\pi r}$$

και λόγω κυλινδρικής συμμετρίας με άξονα το ρεύμα, οι δυναμικές γραμμές του περιμένουμε να είναι κύκλοι.