“**Κάτι λείπει**”. Γνωρίζουμε ότι, νόμος του Gauss,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ο οποίος ισχύει και για την περίπτωση που $\rho(t)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η διατήρηση του φορτίου περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ο νόμος του Ampère περιγράφεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

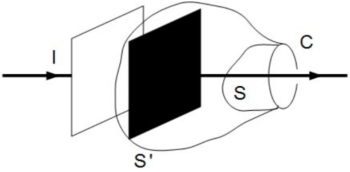
Γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{S}) = 0$ για κάθε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{S}$. Οπότε

$$\mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = 0$$

Αυτό ισχύει μόνο για σταθερά ρεύματα ($J \neq f(t)$). Τι γίνεται όμως αν δεν έχουμε σταθερά ρεύματα; Πώς συμβιβάζεται ό νόμος του Ampère με την εξίσωση συνέχειας; Θα πρέπει να λείπει κάποιος όρος από το νόμο του Ampère.

Ας το δούμε κι αλλιώς. Ας δούμε έναν πυκνωτή κατά τη διάρκεια εκφόρτισής του, οπότε και υπάρχει ρεύμα I στα σύρματα που καταλήγουν στους οπλισμούς του. Αν πάρουμε την κλειστή καμπύλη C θα πρέπει

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \int_{S(C)} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}\, \mathbf{da} = \mu_0 \int_{S(C)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da} = \mu_0 I$$



όπου η πρώτη ισότητα είναι το θεώρημα του Stokes. Όπως έχουμε πει, η $S(C)$ είναι *οποιαδήποτε* επιφάνεια καταλήγει στην C. Αν αυτήν την επιφάνεια την ‘‘διαπερνά’’ το $\mathbf{J}$ έχει καλώς. Αν όμως επιλέξω την επιφάνεια S' που καταλήγει στην C, αυτήν την επιφάνεια *δεν* την διαπερνά το $\mathbf{J}$.

Επομένως περιμένω κάποιο άλλον όρο

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + ???$$

που θα συνεισφέρει ακριβώς στην περίπτωση που η επιφάνεια που επέλεξα δεν διαπερνάται από το ρεύμα. Ας προσπαθήσουμε να φανταστούμε τον όρο αυτό. Ο νόμος του Faraday μας λέει

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Η συμμετρία του **E** και του **B** από τη σχετικότητα, ''προτείνει'' στον νόμο του Ampère να έχω και κάποιο όρο της μορφής $\partial \mathbf{E}/\partial t$

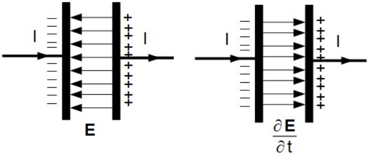
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Για να δούμε αν ''φτιάξαμε'' την εξίσωση της συνέχειας

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Επομένως, πράγματι η προσθήκη του νέου όρου οδηγεί στην εξίσωση συνέχειας.



Γυρίζοντας στον πυκνωτή που εκφορτίζεται, ανάμεσα στους οπλισμούς, τον ''ρόλο'' του ρεύματος παίζει ο ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου, $\partial \mathbf{E}/\partial t$. Ο Maxwell ονόμασε τον όρο αυτό ρεύμα μετατόπισης

$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

και ο νόμος του Ampère ξανα-γράφεται

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_d \right)$$

Μαζεύοντας λοιπόν τους νόμους του Maxwell θα έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Η ‘‘φαινομενική’’ ασυμμετρία μεταξύ **E** και **B** οφείλεται στην ανυπαρξία μαγνητικών φορτίων και αντίστοιχων ρευμάτων. Αν ξαναγράψουμε τις εξισώσεις του Maxwell για την περίπτωση που δεν έχουμε ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

η συμμετρία είναι προφανής!! Αυτές ακριβώς οι εξισώσεις δίνουν το δικαίωμα ύπαρξης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων!

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Κατ΄ αρχή να θυμηθούμε, έστω και απλοϊκά, ότι κύμα είναι μια χρονική διαταραχή (μεταβολή) ενός μεγέθους που διαδίδεται στο χώρο. Δηλαδή περιμένουμε το μέγεθος που μεταβάλλεται να είναι μια συνάρτηση του χρόνου και της θέσης, $\Psi(x, y, z, t)$. Αν θεωρήσουμε ότι η διάδοση είναι σε μια χωρική διεύθυνση, για παράδειγμα την z, και η ταχύτητα διάδοσης v είναι σταθερή, περιμένουμε η συνάρτησή μας να εκφράζεται ως $\Psi(t - \frac{z}{v})$. Αυτό φαίνεται εύκολα αν σκεφτούμε ότι η διαταραχή τη χρονική στιγμή t_1 στο σημείο z_1, θα πρέπει να είναι η ίδια με την διαταραχή την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t$ στο σημείο $z_2 = z_1 + v\Delta t$

$$t_2 - \frac{z_2}{v} = (t_1 + \Delta t) - \frac{z_1 + v\Delta t}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v}$$

Με αυτή την παρατήρηση, αν $\Psi(f)$, με $f = t - \frac{z}{v}$, παίρνοντας τις μερικές παραγώγους της Ψ ως προς t και z

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{d\Psi}{df}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d\Psi}{df}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{d^2\Psi}{df^2}$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{d\Psi}{df}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\Psi}{df}(-\frac{1}{v}), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{d^2\Psi}{df^2}(-\frac{1}{v})^2$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το εξής σύστημα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}} = B_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{y}}$$