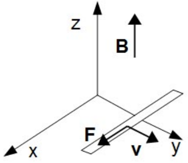
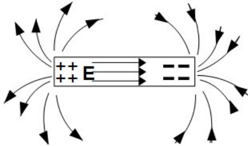
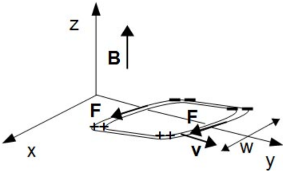
Η ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ **MAXWELL**

Επαγωγή. Θεωρήστε μία αγώγιμη ράβδο, τοποθετημένη παράλληλα με τον άξονα x ενώ στο χώρο υπάρχει και ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Στο πρώτο βήμα η ράβδος είναι ακίνητη, και αν θεωρήσουμε ότι η μέση ταχύτητα των φορέων της είναι μηδενική, δεν παρατηρούμε τίποτα. Στο δεύτερο βήμα η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}}$, παραμένοντας παράλληλη με τον εαυτό της. Αν θεωρήσουμε ότι ο κάθε φορέας της ράβδου έχει μέση ταχύτητα αυτήν της ράβδου, θα ασκηθεί πάνω του δύναμη από το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{F} = qvB\hat{\mathbf{x}}$, η οποία και θα μαζέψει θετικά φορτία (υποθέτοντας $q > 0$) στην μια άκρη της ράβδου με αντίστοιχη εμφάνιση αρνητικού φορτίου στην άλλη άκρη της.





Αυτή η κατανομή των φορέων της ράβδου δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο τόσο στο εσωτερικό της ράβδου όσο και στο χώρο.

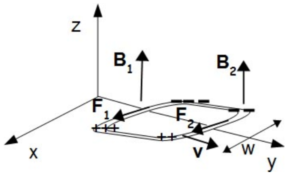


Τώρα αντικαθιστούμε τη ράβδο με (κινούμενο) λεπτό ορθογώνιο πλαίσιο με w την διάστασή του που είναι παράλληλη με τον άξονα x. Στα τμήματα αυτά του πλαισίου θα εμφανιστεί πάλι η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο που θα μαζέψει τα θετικά και αρνητικά φορτία. Μπορούμε να αμελήσουμε το φαινόμενο αυτό στις άλλες δύο πλευρές του πλαισίου. Αν φανταστούμε ένα φορτίο q να κινείται γύρω στο πλαίσιο, το (κλειστό) επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης που ασκείται πάνω του θα είναι

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = Fw - Fw = 0$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο *δεν* είναι ομογενές στο χώρο και $\mathbf{B}_1$ και $\mathbf{B}_2$ είναι η τιμή του στην περιοχή των πλευρών του πλαισίου που είναι παράλληλες με τον άξονα των x. Τότε, αν θεωρήσουμε πάλι ένα φορτίο q που κινείται γύρω στο πλαίσιο (αρκετά γρήγορα ώστε το πλαίσιο να μην κινηθεί πολύ!!) θα έχουμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = (F_1 - F_2)\, w \neq 0$$

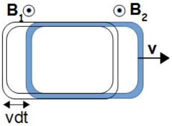


Ορίζουμε ως *ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)* $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$$

η οποία έχει βέβαια διαστάσεις δυναμικού, Volt (V).

Αν το πλαίσιο έχει αντίσταση R, τότε θα κυκλοφορήσει ρεύμα $I = \mathcal{E}/R$.



Στο πλαίσιο, όπου $F = qvB$, θα έχουμε για την ΗΕΔ

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} qv \left(B_1 - B_2\right) w = v \left(B_1 - B_2\right) w$$

Αν ορίσουμε, για το μαγνητικό πεδίο, την μαγνητική ροή από μια επιφάνεια ανάλογα με αυτήν για το ηλεκτρικό πεδίο, εύκολα φαίνεται από το σχήμα ότι ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής από το πλαίσιο είναι

$$d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B_2 wv\, dt - B_1 wv\, dt = w \left(B_2 - B_1\right) vdt \Rightarrow$$

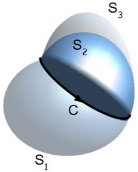
$$\frac{d\Phi}{dt} = w \left(B_2 - B_1\right) v$$

όπου εδώ θεωρήσαμε ότι η επιφάνεια για την ροή είναι το επίπεδο του πλαισίου.

Επομένως

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Η επιλογή της επίπεδης επιφάνειας του πλαισίου για τον υπολογισμό της ροής μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε επιφάνεια καταλήγει στην κλειστή καμπύλη που ορίζει το πλαίσιο. Θα το δείξουμε πιο γενικά. Θα δείξουμε δηλαδή ότι από οποιαδήποτε επιφάνεια S που καταλήγει (έχει όριο) στην ίδια καμπύλη C, η μαγνητική ροή είναι ίδια.



Στο Σχήμα βλέπουμε την *κλειστή* καμπύλη C που είναι το όριο των επιφανειών S_2 και S_3 από την μια ''μεριά'' της καμπύλης και την S_1 από την άλλη (η ''πλευρά'' καθορίζεται από τη φορά που καλύπτεται η C και τον κανόνα της δεξιόστροφης βίδας).

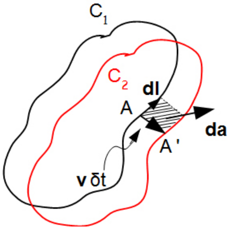
Υπενθυμίζουμε ότι η απουσία μαγνητικών φορτίων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές. Δεν ''ξεκινάνε'' ούτε ''καταλήγουν'', αντίθετα από το ηλεκτρικό πεδίο όπου οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές ξεκινούν και καταλήγουν στα ηλεκτρικά φορτία ή στο άπειρο). Αυτό σημαίνει ότι η μαγνητική ροή από κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε μηδέν (όσες γραμμές μπαίνουν στην κλειστή επιφάνεια, βγαίνουν από αυτήν). Επομένως, μιας και τα ζευγάρια των επιφανειών $S_1 + S_2$ και $S_1 + S_3$ συνιστούν δύο κλειστές επιφάνειες, θα έχουμε

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} + \int_{S_2} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = 0$$
$$\oint_{S_1+S_3} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} + \int_{S_3} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = 0$$

οπότε καταλήγουμε στην

$$\oint_{S_2} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = \oint_{S_3} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da}$$

Ας δείξουμε τώρα στην γενική περίπτωση ότι η ΗΕΔ που αναπτύσσεται γύρω από μια κλειστή καμπύλη είναι ίσο με το ρυθμό της μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά κάθε επιφάνεια που καταλήγει στην δεδομένη καμπύλη.



Στο Σχήμα φαίνονται δύο χρονικά στιγμιότυπα της καμπύλης που κινείται με ταχύτητα **v** σε χώρο όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο **B**. Την πρώτη χρονική στιγμή t έχουμε την καμπύλη C_1 και την δεύτερη χρονική στιγμή $t+\delta t$ την C_2 (το σημείο A μετατοπίζεται στο σημείο A'). Προσέξτε η σχεδίαση είναι στο χώρο. Θεωρείστε την μαγνητική ροή Φ_{C_1}, την χρονική στιγμή t, από μια οποιαδήποτε επιφάνεια που καταλήγει στην C_1.

Για την αντίστοιχη ροή Φ_{C_2}, την χρονική στιγμή $t+\delta t$, θεωρείστε για επιφάνεια που καταλήγει στην C_2 την ίδια με αυτήν που καταλήγει στην C_1 συν την ''λωρίδα'' που σχηματίζεται ανάμεσα στις δύο θέσεις της καμπύλης. Οπότε, η διαφορά της ροής θα είναι η ροή του μαγνητικού πεδίου από αυτήν την ''λουρίδα''.

$$\delta\Phi = \Phi_{C_2} - \Phi_{C_1} = \int_{\text{λουρίδα}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{da}$$

όπου $\mathbf{da}$ το διάνυσμα του στοιχειώδους εμβαδού στην λουρίδα $\mathbf{da} = \mathbf{v}\delta t \times \mathbf{dl}$. Γράφοντας

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{da} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{dl})\,\delta t = (\mathbf{B}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{dl}\,\delta t = -\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{dl}\,\delta t$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του τριπλού γινόμενου $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. Και ο ρυθμός μεταβολής της ροής γίνεται

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = -\int(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{dl} = -\frac{1}{q}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = -\mathcal{E}$$

Αυτός είναι ο *νόμος της επαγωγής* ή *νόμος του Faraday*

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

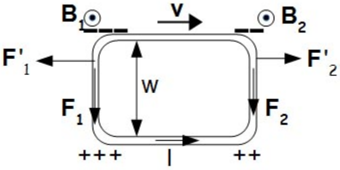
που μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής δημιουργεί ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ). Το μείον υποδεικνύει την φορά της ΗΕΔ, είναι ο λεγόμενος νόμος του Lenz, και είναι απλά απόρροια της διατήρησης της ενέργειας: η αναπτυσσόμενη ΗΕΔ είναι τέτοια ώστε να εμποδίσει την μεταβολή της ροής. Ας το δούμε αυτό στο πλαίσιό μας. Υποθέτουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο πλαίσιό μας και $B_1 > B_2$. Τότε και η αντίστοιχη δύναμη που ασκείται σε φορτίο q στις δυο πλευρές που είναι κάθετες στην ταχύτητα $\mathbf{v}$

$$(F_1 = qvB_1, \quad F_2 = qvB_2) \Rightarrow F_1 > F_2$$

Το μέτρο της αναπτυσσόμενης ΗΕΔ είναι

$$\mathcal{E} = vw\,(B_1 - B_2)$$

και αν το πλαίσιο έχει αντίσταση R, θα κυκλοφορήσει ρεύμα $I = \mathcal{E}/R$.



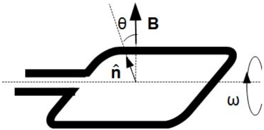
Ποια είναι η φορά του ρεύματος; Μιας και $F_1 > F_2$, στην αριστερή πλευρά μαζεύονται πιο πολλά θετικά/αρνητικά φορτία από ό,τι στη δεξιά. Επομένως, το ρεύμα θα κυκλοφορήσει με τη διεύθυνση που δείχνει το Σχήμα. Τώρα έχουμε όμως ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε μαγνητικό πεδίο, και γνωρίζουμε ότι τότε ασκείται δύναμη στον αγωγό ίση με $Iw\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ με το $\hat{\mathbf{r}}$ στην διεύθυνση και φορά του ρεύματος. Επομένως αναπτύσσονται δυνάμεις $\mathbf{F}_1'$ και $\mathbf{F}_2'$ όπου $F_1' > F_1'$. Η συνολική δύναμη είναι αντίθετη από την ταχύτητα του πλαισίου και το επιβραδύνει.

Αν $B_1 < B_2$ θα καταλήγαμε στο $F_1' < F_2'$ αλλά λόγω αλλαγής της διεύθυνσης του ρεύματος, οι δυνάμεις είναι αντίθετες, οπότε πάλι έχουμε επιβράδυνση του πλαισίου.
Ποιο είναι το έργο που καταναλίσκεται από τις F_1' και F_2'; Σε χρόνο dt το πλαίσιο μετατοπίζεται κατά $\mathbf{dl} = \mathbf{v}\, dt$ και

$$\Delta F'\, dl = Iw\,(B_1 - B_2)\, dl = Iw\,(B_1 - B_2)\, v\frac{dl}{v} =$$
$$= I\left(\frac{w\,(B_1 - B_2)\, v}{R}\right) R\, dt = I\frac{\mathcal{E}}{R}Rdt = I^2Rdt$$

Αυτό το έργο παρουσιάζεται ως θερμότητα στην αντίσταση του πλαισίου.
Αρχή της ηλεκτρικής γεννήτριας. Αγώγιμο ορθογώνιο πλαίσιο εμβαδού A περιστρέφεται γύρω από άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$. Η ροή από το πλαίσιο είναι $\Phi = A\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}$ όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου. Λόγω περιστροφής θα έχουμε

$$\Phi = AB\cos\theta = AB\cos(\omega t)$$



Λόγω μεταβολής της ροής από το πλαίσιο θα εμφανιστεί στα άκρα του AA' ΗΕΔ με τιμή

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = AB\omega \sin(\omega t)$$

Οπότε, αν με μηχανικό ρόπο περιστρέφουμε το πλαίσιο, θα εμφανιστεί στα άκρα του μια ημιτονοειδής τάση.
Με χρήση των σχέσεων μετασχηματισμού του μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου αποδεικνύεται ότι μόνο η σχετική κίνηση έχει σημασία. Το κινούμενο πλαίσιο με το ανομοιογενές, χρονικά σταθερό, μαγνητικό πεδίο μπορεί να ‘‘αντικατασταθεί’’ με ακίνητο πλαίσιο και κινούμενη πηγή του μαγνητικού πεδίου, ή ακόμα και με χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Αυτό που έχει σημασία είναι η χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής.

Γράφοντας την ΗΕΔ και τη μαγνητική ροή με τη γενική τους μορφή, ο νόμος του Faraday γράφεται

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}}$$

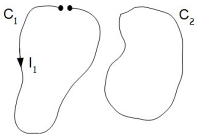
που με την χρήση του θεωρήματος του Stokes γράφεται σε διαφορική μορφή

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

Θυμηθείτε ότι στον στατικό ηλεκτρισμό, ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζεται. Παρουσία όμως χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι πλέον διατηρητικό πεδίο.

Αμοιβαία επαγωγή. Αν έχουμε δύο ξεχωριστά αγώγιμα σύρματα C_1 και C_2 και στο πρώτο διοχετεύουμε, μέσω μιας πηγής, ρεύμα I_1, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_1$ ανάλογο του I_1, $\mathbf{B}_1 \propto I_1$. Επομένως, από την C_2 έχουμε μαγνητική ροή $\Phi_2 \propto \mathbf{B}_1 \propto I_1$. Ο συντελεστής αναλογίας M_{21} είναι ο *συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής*, $\Phi_2 = M_{12} I_1$. Αν το ρεύμα I_1 μεταβάλλεται, η αντίστοιχη μεταβολή του Φ_2 θα δημιουργήσει λόγω επαγωγής μιαν ΗΕΔ στο C_2

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$



Αν βάλουμε ρεύμα I_2 στο C_2, η προκαλούμενη ΗΕΔ στο C_1 θα είναι

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Αποδεικνύεται ότι $M_{12} = M_{21}$.

Να βρούμε για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής. Το σύστημά μας είναι δύο ομοεπίπεδοι, ομόκεντροι κυκλικά αγώγιμοι δακτύλιοι με ακτίνες R_1 και R_2, όπου $R_2 << R_1$. Αν ο C_1 διαρρέεται από ρεύμα I_1, θα έχουμε μαγνητικό πεδίο στο χώρο. Επειδή $R_2 << R_1$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μικρός δακτύλιος είναι όλος στο κέντρο του μεγάλου δακτυλίου, όπου λόγω του ρεύματος το μαγνητικό πεδίο είναι $B_1 = \mu_0 I/(2R_1)$, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δακτυλίων. Και η ροή από το μικρό δακτύλιο θα είναι

$$\Phi_2 = B_1\,\pi R_2^2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}\,I_1 = M_{21} I_1$$

επομένως

$$M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Βέβαια, αν είχαμε ρεύμα στο μικρό δακτύλιο και βρίσκαμε την μαγνητική ροή από τον μεγάλο, θα βγάζαμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αλλά η γενική έκφραση του μαγνητικού πεδίου από κυκλικό δακτύλιο δεν είναι τόσο απλή και θα ήταν δύσκολο να βρούμε τη ροή αυτού του πεδίου από τον μεγάλο δακτύλιο.

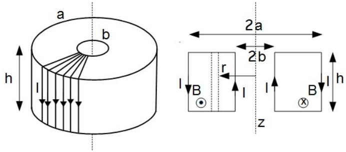
Αυτεπαγωγή. Αν έχουμε μόνο ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα I, το μαγνητικό πεδίο B που δημιουργείται προκαλεί ροή από το ίδιο το σύρμα. Επομένως, μεταβολή του ρεύματος θα δημιουργήσει μεταβολή ροής και επομένως εμφάνιση ΗΕΔ στον ίδιο το σύρμα. Όπως και πριν, $B \propto I \rightarrow \Phi \propto B$

$$\Phi = L\, I$$

όπου L είναι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής. Και βέβαια

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Ένα παράδειγμα εύρεσης του L. Πηνίο με τετραγωνική διατομή



και συνολικά N σπείρες. Το μαγνητικό πεδίο έχει για δυναμικές γραμμές κύκλους με επίπεδο κάθετο στον άξονα z και το μέτρο είναι

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} N$$

όπου r η απόσταση από τον άξονα. Να βρούμε τη ροή από μια σπείρα. Στο στοιχειώδες εμβαδόν $h\,dr$ η στοιχειώδης ροή είναι

$$d\Phi_1 = B\,da = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} N\,h\,dr$$

και ολοκληρώνοντας

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$$

και η ροή από τις N σπείρες του πηνίου μας θα είναι $\Phi = N\Phi_1$. Και

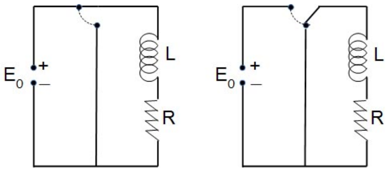
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$$

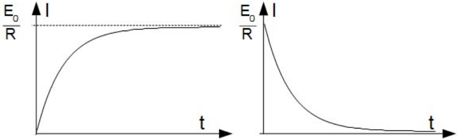
Κύκλωμα με αυτεπαγωγή. Στον χρόνο $t = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη και η πηγή με τάση E_0 παρέχει ρεύμα στο κύκλωμα που περιέχει μια αντίσταση R και ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L.

$$E_0 + \mathcal{E} = IR \Rightarrow E_0 - L\frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow L\frac{dI}{dt} = E_0 - IR \Rightarrow$$
$$dI = \frac{1}{L}\left(E_0 - IR\right) dt \Rightarrow \int_0^I \frac{dI}{E_0 - IR} = \frac{1}{L}\int_0^t dt \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{R}\ln\frac{E_0 - IR}{E_0} = \frac{t}{L} \Rightarrow E_0 - IR = E_0\, e^{-Rt/L}$$

και τελικά

$$I = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$





Αφού το ρεύμα πάρει την τελική του τιμή E_0/R, απομονώνουμε την πηγή E_0 και έχουμε ένα κύκλωμα με την αντίσταση και το πηνίο. Οπότε

$$IR = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow I = I_0\, e^{-Rt/L}$$

όπου $I_0 = E_0/R$.

Ενέργεια αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο. Τι ενέργεια καταναλίσκεται στην αντίσταση (υπό μορφή θερμότητας) όταν ανοίγουμε τον διακόπτη και το ρεύμα μειώνεται;

$$dU = I^2 R dt \Rightarrow U = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2Rt/L}dt = \frac{1}{2}RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2Rt/L}d(2t) =$$

$$= \frac{1}{2}RI_0^2\left(-\frac{L}{R}\right) e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Ποιος παρέχει αυτήν την ενέργεια; Το μαγνητικό πεδίο! Όταν κλείνουμε τον διακόπτη, και αρχίζει το ρεύμα να κυκλοφορεί, χρειάζεται έργο για να κινηθούν τα φορτία αντίθετα από την αναπτυσσόμενη τάση $\mathcal{E}$ από επαγωγή. Το στοιχειώδες έργο dU σε χρόνο dt είναι

$$dU = \mathcal{E} I \, dt = L \frac{dI}{dt} I \, dt = \frac{1}{2} L \, d(I^2) \Rightarrow U = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Αυτή η ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται στο πηνίο.
Στο ηλεκτρικό πεδίο είχαμε δει ότι η ενέργεια του πεδίου **E** σε όγκο V γράφεται ως

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dv$$

Αντίστοιχα, για το μαγνητικό πεδίο **B** είναι

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv$$

Θα δείξουμε την παραπάνω σχέση ότι πράγματι ισχύει για το πηνίο που χρησιμοποιήσαμε ως παράδειγμα για να βρούμε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής. Δηλαδή θα δείξουμε ότι χρησιμοποιώντας το τύπο για το μαγνητικό πεδίο

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} N$$

η ενέργεια του πεδίου είναι ίση με $(1/2)LI^2$. Ο στοιχειώδης όγκος dv είναι ο όγκος ανάμεσα σε δύο κυλίνδρους ύψους h, ο ένας με ακτίνα βάσης r και ο άλλος με $r + dr$: $dv = (2\pi r\, dr)h$. Το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό στο χώρο εκτός των σπειρών.

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \frac{\mu_0^2 I^2 N^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r h\, dr = \frac{1}{2}\, \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\, I^2\, \ln \frac{b}{a}$$

Είχαμε βρει ότι

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\, \ln \frac{b}{a}$$

οπότε πράγματι

$$U = \frac{1}{2} L\, I^2$$

Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και στο απλό μακρύ σωληνοειδές με κυκλική διατομή εμβαδού A, μήκος d και n^* σπείρες ανά μήκος. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό είναι ομογενές και ίσο με $B = \mu_0 I n^*$. Η ροή που διαπερνά κάθε σπείρα είναι $\Phi_1 = BA = \mu_0 I n^* A$ και επομένως

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 I n^* A N}{I} = \mu_0 n^* (n^* d) A = \mu_0 (n^*)^2 A d$$

όπου N οι συνολικές σπείρες και βέβαια $N = n^* d$. Η ενέργεια U του πεδίου θα είναι

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} B^2 (Ad) = \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 I n^*\right)^2 Ad = \frac{1}{2} L I^2$$

μιας και το πεδίο είναι σταθερό και ό όγκος είναι Ad.