Εύκολα φαίνεται ότι (δεν σημειώνουμε πλέον την διαδρομή!)

$$V_{B/O} - V_{A/O} = -\int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} + \int_O^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} - \int_A^O \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$
$$= -\left(\int_A^O \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} + \int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}\right) = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \Delta V_{A\to B}$$

Από το ορισμό της συνάρτησης δυναμικού πέρνουμε την σχέση που μας δίνει την απειροστή μεταβολή

$$dV(x,y,z) = -\mathbf{E}(x,y,z)\cdot\mathbf{dl}$$

Αλλά, γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση ισχύει

$$dV(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} V(x,y,z)\cdot\mathbf{dl}$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{E}(x,y,z) = -\boldsymbol{\nabla} V(x,y,z)}$$

Δηλαδή, αν $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$,

$$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_3 = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

Επανερχόμαστε στο θέμα της ανεξαρτησίας της συνάρτησης δυναμικού από την διαδρομή. Θυμόμαστε από το μάθημα της Μηχανικής ότι μπορούμε να ελέγξουμε κατά πόσο μια διανυσματική συνάρτηση (δύναμη, ηλεκτρικό πεδίο ...) είναι διατηρητική. Αποδεικνύεται ότι αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, τότε το πεδίο είναι διατηρητικό ή αστρόβιλο (θα δούμε παρακάτω την έννοια του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου)

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{\partial E_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\partial E_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{\partial E_3}{\partial y}$$

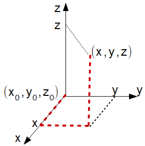
Ας δούμε τώρα πώς αντιμετωπίζουμε το γενικό πρόβλημα: Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(x,y,z)$ και ζητάμε την συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$ ως προς το σημείο $O(x_0,y_0,z_0)$.

1. Ελέγχουμε αν το πεδίο μας είναι διατηρητικό χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Αν είναι διατηρητικό προχωράμε. Αν όχι, δεν έχει έννοια να ορίσουμε συνάτηση δυναμκού.

2. Θα πρέπει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου από το αρχικό σημείο $O(x_0,y_0,z_0)$ στο τυχαίο (x,y,z)

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \left(E_1(x,y,z)dx + E_2(x,y,z)dy + E_3(x,y,z)dz\right)$$

Μπορούμε να επιλλέξουμε όποια διαδρομή θέλουμε μιας και το πεδίο είναι διατηρητικό. Επιλέγουμε την παρακάτω



$$(x_0,y_0,z_0) \to (x,y_0,z_0) \to (x,y,z_0) \to (x,y,z)$$

Ουσιαστικά είναι κίνηση παράλληλα με τους τρεις άξονες.

Στην πρώτη κίνηση ($(x_0, y_0, z_0) \to (x, y_0, z_0)$) το x μεταβάλλεται από x_0 έως x ενώ τα y και z παραμένουν σταθερά. Επομένως $dy = dz = 0$.
Στην δεύτερη κίνηση ($(x, y_0, z_0) \to (x, y, z_0)$) το y μεταβάλλεται από y_0 έως y, ενώ το x και το z παραμένουν σταθερά και ίσα με x και z_0 αντίστοιχα. Επομένως, $dx = dz = 0$.
Στην τρίτη κίνηση ($(x, y, z_0) \to (x, y, z)$) το z μεταβάλλεται από z_0 έως z, ενώ το x και το y παραμένουν σταθερά και ίσα με x και y αντίστοιχα. Επομένως, $dx = dy = 0$.
Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα σπάει σε τρία ολοκληρώματα (ένα για κάθε κίνηση), αλλά σε καθένα από αυτά μόνο ένα διαφορικό από τα dx, dy και dz, είναι διάφορο του μηδενός

$$\int_{x_0}^{x} E_1(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} E_2(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} E_3(x, y, z)dz$$

Προσοχή: στο δεύτερο ολοκλήρωμα το x είναι σταθερό και ίσο με το αντίστοιχο x του τελικού μας σημείου. Το ίδιο και στο τρίτο ολοκλήρωμα για τα x και y. Οπότε

$$V_{/O}(x,y,z) = - \left[\int_{x_0}^{x} E_1(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} E_2(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} E_3(x,y,z)dz \right]$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα:
Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(x,y,z) = C(2xyz, x^2z, x^2y)$ όπου το C έχει κατάλληλες μονάδες, και ζητάμε να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού ως προς το σημείο (1,1,1).
Ελέγχουμε πρώτα αν το πεδίο μας είναι διατηρητικό

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial y} &= 2xz, & \frac{\partial E_2}{\partial x} &= 2xz \quad \checkmark \\ \frac{\partial E_1}{\partial z} &= 2xy, & \frac{\partial E_3}{\partial x} &= 2xy \quad \checkmark \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} &= x^2, & \frac{\partial E_3}{\partial y} &= x^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Οπότε το πεδίο είναι διατηρητικό.

Επιλέγουμε τη διαδρομή

$$(1,1,1) \to (x,1,1) \to (x,y,1) \to (x,y,z)$$

Με βάση αυτά που είπαμε παραπάνω θα έχουμε

$$\begin{aligned}
V_{/(1,1,1)} &= -\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \\
&= -\int_1^x E_1(x,1,1)dx - \int_1^y E_2(x,y,1)dy - \int_1^z E_3(x,y,z)dz = \\
&= -C\int_1^x 2x\,dx - C\int_1^y x^2\,1\,dy - C\int_1^z x^2y\,dz = \\
&= -C(x^2-1) - Cx^2(y-1) - Cx^2y(z-1) = C - Cx^2yz
\end{aligned}$$

Προσοχή: στο δεύτερο ολοκλήρωμα το x είναι σταθερό, ενώ στο τρίτο ολοκλήρωμα το x και το y είναι σταθερά.

Έλεγχος: Πράγματι $V(1,1,1) = 0$ και επίσης ελέγχουμε ότι $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = C2xyz, \qquad -\frac{\partial V}{\partial y} = Cx^2 z, \qquad -\frac{\partial V}{\partial z} = Cx^2 y$$

που είναι οι τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου.
Άλλος τρόπος (πιο ``μαθηματικός'' και πιο ``επίπονος''!!).
Από τη σχέση $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ έχουμε

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = E_1 = C2xyz, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = E_2 = Cx^2 z, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = E_3 = Cx^2 y$$

Ξεκινάμε από την πρώτη ισότητα (βέβαια μπορούμε να ξεκινήσουμε από όποια ισότητα από τις τρεις προτιμάμε, κάνοντας βέβαια τις κατάλληλες/αντίστοιχες ``κινήσεις'' στη συνέχεια).

$$-V(x,y,z) = C\int 2xyz\,dx = x^2yz + C_1(y,z)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x και η ''σταθερά'' C_1 είναι συνάρτηση των y και z. Άρα, σε πρώτη μας προσέγγιση έχουμε

$$-V(x,y,z) = Cx^2yz + C_1(y,z)$$

Προχωράμε στην εύρεση της $C_1(y,z)$. Παραγωγίζοντας αυτήν την σχέση ως προς y θα πρέπει να μας δίνει το $E_2 = Cx^2z$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V}{\partial y} = Cx^2z + \frac{\partial C_1}{\partial y} = E_2 = Cx^2z \Rightarrow \\
\frac{\partial C_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \\
C_1(y,z) = C_2(z)
\end{aligned}$$

Άρα, σε νέα μας προσέγγιση έχουμε

$$-V(x,y,z) = Cx^2yz + C_2(z)$$

Προχωράμε στην εύρεση της $C_2(z)$. Παραγωγίζοντας αυτήν την σχέση ως προς z θα πρέπει να μας δίνει το $E_3 = Cx^2y$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial z} &= Cx^2y + \frac{\partial C_2}{\partial z} = E_2 = Cx^2y \Rightarrow \\ \frac{\partial C_2}{\partial z} &= 0 \Rightarrow \\ C_2(z) &= C_0 \end{aligned}$$

Άρα, σε νέα μας προσέγγιση έχουμε

$$-V(x,y,z) = Cx^2yz + C_0$$

Η εύρεση της σταθεράς C_0 βρίσκεται από την απαίτηση $V(1,1,1) = 0$. Οπότε

$$V(x,y,z) = -Cx^2yz + C$$

Προσοχή: το ότι $\frac{\partial C_1}{\partial z} = 0$ και $\frac{\partial C_2}{\partial z} = 0$ οφείλεται στο απλό παράδειγμά μας. Σε γενική περίπτωση δεν είναι μηδενικές οι παράγωγοι αυτοί!

Δυναμικό σημειακού φορτίου. Είχαμε υπολογίσει ότι: παρόντος ενός σημειακού φορτίου Q στο σημείο O, το έργο που χρειαζόμαστε για να φέρουμε ένα άλλο φορτίο q από το άπειρο ως ένα σημείο A που απέχει απόσταση r από το O είναι

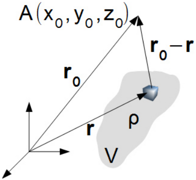
$$W = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qQ}{r}$$

Άρα, το δυναμικό (ή συνάρτηση δυναμικού) για το σημειακό φορτίο Q, ως προς το άπειρο, είναι

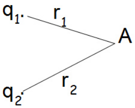
$$V_{/\infty}(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr} = -\frac{1}{q}\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{r}$$

Μπορούμε να γράψουμε και τον γενικό τύπο που δίνει το δυναμικό για μια κατανομή φορτίου $\rho(x,y,z)$ που εκτείνεται στον όγκο V.

$$V(x_0, y_0, z_0)_{/\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x, y, z)\, dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

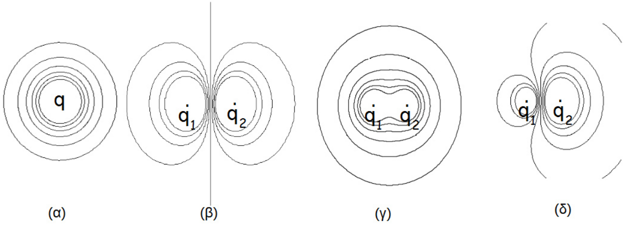


Δυναμικό δύο σημειακών φορτίων. Από την επαλληλία θα έχουμε



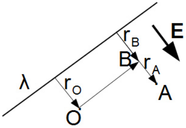
$$V_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Τα σημεία του επιπέδου (χώρου) με σταθερή τιμή του δυναμικού αποτελούν τις ισοδυναμικές καμπύλες (επιφάνειες).



Στο Σχήμα σχεδιάζουμε τις ισοδυναμικές καμπύλες για
(α) ένα σημειακό φορτίο q, οπότε περιμένουμε ότι θα είναι κύκλοι (σφαίρες στο χώρο),
(β) δύο σημειακά φορτία $q_1 = q_2$,
(γ) δύο σημειακά φορτία $q_1 = -q_2$,
(δ) δύο σημειακά φορτία $2q_1 = -q_2$.

Δυναμικό οφειλόμενο σε μακριά γραμμική κατανομή φορτίου λ.
Γνωρίζουμε το πεδίο από μακρυά (άπειρη) γραμμική κατανομή φορτίου



$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

με διεύθυνση κάθετη στην ευθεία της κατανομής. Υπολογίζουμε το δυναμικό στο τυχαίο σημείο A (που ορίζεται μόνο από την απόστασή του r_A από την ευθεία) ως προς το σημείο O που χαρακτηρίζεται από το r_O.

$$V_{A/O}(r_A) = -\int_O^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} - \int_B^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} =$$

$$-\int_{r_B}^{r^A} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_B} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_O}$$

Προσέξτε ότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το δυναμικό ως προς το άπειρο στην συγκεκριμένη περίπωση. Ο λόγος είναι ότι α κατανομή μας εκτείνεται ή ίδια ως το άπειρο!!
Μπορούμε να ελέγξουμε τώρα αν το δυναμικό που υπολογίσαμε για τυχαίο σημείο που απέχει απόσταση r από την γραμμική κατανομή

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{r_O} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r_O = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + C$$

μας δίνει το πεδίο της ευθύγραμμης κατανομής.
Χρησιμοποιώντας την μορφή της *βαθμίδας σε κυλινδρικές συντεταγμένες*, και μιας και το V είναι συνάρτηση μόνο του r και όχι των z και ϕ, θα πάρουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

που πράγματι είναι το πεδίο της ευθύγραμμης κατανομής.

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = C(-x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}})$. Αφού ελέξετε ότι είναι ηλεκτροστατικό, βρείτε το δυναμικό ως προς το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε την συνάρτηση που ικανοποιούν οι ισοδυναμικές και οι δυναμικές γραμμές στο επίπεδο (x, y).

Στο επίπεδο, απλά χρειάζεται να ελέγξουμε τις δύο σχέσεις

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Επομένως, πράγματι το πεδίο είναι ηλεκτροστατικό.

Για να βρούμε το δυναμικό, βρίσκουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου από το αρχικό σημείο $(0, 0)$ στο τυχαίο (x, y) ακολουθώντας την διαδρομή $(0, 0) \to (x, 0) \to (x, y)$

$$\begin{aligned} V(x, y)_{/(0,0)} &= -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \\ &= C\int_{(0,0)}^{(x,0)} x\,dx - C\int_{(x,0)}^{(x,y)} y\,dy = C\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Ισοδυναμικές γραμμές

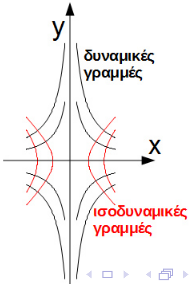
$$C\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)=V_0 \qquad \text{υπερβολή}$$

Δυναμικές γραμμές. Το **E** είναι εφαπτομενικό στις δυναμικές γραμμές. Άρα

$$\frac{E_y}{E_x}=f'(x)\Rightarrow -\frac{y}{x}=f'(x)=\frac{dy}{dx}\Rightarrow$$

Άρα

$$-\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}\Rightarrow -\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow -\ln x+K=\ln y\Rightarrow y=\frac{L}{x}$$



Επομένως, έχουμε

$$\text{δυν. γραμμές:} \quad y = \frac{L}{x}, \qquad \text{ισο-δυν. γραμμές:} \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = D$$

Να δείξουμε ότι στο τυχαίο σημείο (x, y), η δυναμική και η ισοδυναμική γραμμή που περνούν από το σημείο αυτό είναι κάθετες μεταξύ τους. Δηλαδή το γινόμενο των παραγώγων είναι ίσο με (-1). Πράγματι

$$y_P = \frac{L}{x} \Rightarrow \frac{dy_P}{dx} = -\left.\frac{L}{x^2}\right|_{x_0} = -\frac{L}{x_0^2}$$

και για τις ισοδυναμικές

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y_{EP}^2}{2} = C \Rightarrow x - y_{EP}\frac{dy_{EP}}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy_{EP}}{dx} = \left.\frac{x}{y_{EP}}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{L/x_0}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι μιας και η δυναμική γραμμή περνά από το σημείο (x_0, y_0) θα ισχύει $y_0 = L/x_0$. Και βέβαια, φαίνεται άμεσα ότι

$$\frac{dy_P}{dx}\,\frac{dy_{EP}}{dx} = -\frac{L}{x_0^2}\,\frac{x_0^2}{L} = -1$$