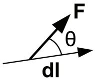
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

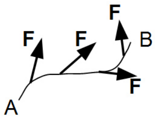
Έργο δύναμης

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = F\, dl\, \cos\theta$$



Το συνολικό έργο σε μια καμπύλη C από το σημείο A ως το σημείο B θα είναι

$$W_{A\to B} = \int_{A(C)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$$



Ας θεωρήσουμε, για ευκολία, ότι η καμπύλη μας C είναι στο επίπεδο (x, y) και περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$. Η ίδια καμπύλη μπορεί να περιγραφεί και από το ζευγάρι $(x = f_1(t), y = f_2(t))$ όπου t είναι μια παράμετρος (σκεφτείται ότι αν είχαμε κίνηση ενός κινητού πάνω στην καμπύλη, η παράμετρος t θα μπορούσε να είναι ο χρόνος).

Το ότι τα σημεία A και B, με συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B, y_B) αντίστοιχα, είναι τα άκρα της καμπύλης σημαίνει ότι

$$y_A = f(x_A),\ y_B = f(x_B),$$

$$\text{ή} \quad x_A = f_1(t_A)\,, y_A = f_2(t_A),\ x_B = f_1(t_B)\,, y_B = f_2(t_B)$$

όπου t_A και t_B είναι οι τιμές της παραμέτρου που αντιστοιχούν στα σημεία A και B.

Το στοιχειώδες έργο $\mathbf{dl}$ και η δύναμη $\mathbf{F}$ γράφονται σε συνιστώσες

$$\mathbf{dl} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} = (dx, dy)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\hat{\mathbf{x}} + F_2(x, y)\hat{\mathbf{y}} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Προσέξτε: στην γενική περίπτωση η x-συνιστώσα της δύναμης μπορεί να εξαρτάται από το x και από το y και το ίδιο ισχύει και για την y-συνιστώσα.

Επομένως

$$W_{A\to B} = \int_{A(C)}^{B} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int_{A(C)}^{B} (F_1(x, y), F_2(x, y))\cdot(dx, dy)$$

$$= \int_{A(C)}^{B} (F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy)$$

Άλλά είμαστε ‘‘υποχρεωμένοι’’ να κινηθούμε πάνω στην καμπύλη C, δηλαδή θα πρέπει $y = f(x)$ και τότε

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx = f'(x)\,dx$$

Επομένως

$$W_{A\to B} = \int_{x_A}^{x_B} \left[F_1(x, f(x))\,dx + F_2(x, f(x))\,f'(x)\,dx\right]$$

όπου πια η ολοκλήρωση είναι ως προς x με όρια τα x_A και x_B. Αν δουλεύαμε με την παράμετρο t για την περιγραφή της καμπύλης

$$dx = f_1'(t)\,dt, \qquad dy = f_2'(t)\,dt$$

και

$$W_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \left[F_1(f_1(t), f_2(t))\,f_1'(t)\,dt + F_2(f_1(t), f_2(t))\,f_2'(t)\,dt\right]$$

όπου τώρα η ολοκλήρωση είναι στην παράμετρο t.

Η γενίκευση στις 3 διαστάσεις γίνεται (τώρα είναι προτιμώτερη η χρήση της παραμέτρου t για την περιγραφή της καμπύλης C)

$$(x = f_1(t),\, y = f_2(t),\, z = f_3(t))$$

και το έργο

$$\begin{aligned} W_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} & \big[F_1(f_1(t), f_2(t), f_3(t))\, f_1'(t)\, dt \\ + \quad & F_2(f_1(t), f_2(t), f_3(t))\, f_2'(t)\, dt \\ + \quad & F_3(f_1(t), f_2(t), f_3(t))\, f_3'(t)\, dt\big] \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Δίνεται

$$\mathbf{F} = (x + y, x), \qquad C: \quad y = 2x^2, \qquad A(0,0)\,, B(1,2)$$

Τότε

$$W_{A\to B} = \int_{A(C)}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\left(x + 2x^2\right) dx + x\, y'(x)\, dx\right]$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x + 2x^2\right) + 4x^2\right] dx = \int_0^1 \left(x + 6x^2\right) dx = 2,5$$

Αν θέλουμε να περιγράψουμε την καμπύλη με την παράμετρο θα έχουμε

$$x = t, \quad y = 2t^2, \qquad t_A = 0,\ t_B = 1$$

και

$$W_{A\to B} = \int_{t=0}^{t=1} \left[\left(t + 2t^2\right)\, 1\, dt + t\, 4t\, dt\right] = \int_0^1 \left(t + 6t^2\right) dt = 2,5$$

ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)$. Το διαφορικό της

$$df = \frac{df}{dx}\, dx$$

Αν έχουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, $f(x, y)$ πώς γράφουμε το διαφορικό της;

$$\Delta f = \left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_{y=\text{σταθερό}} \cdot \Delta x + \left.\frac{\Delta f}{\Delta y}\right|_{x=\text{σταθερό}} \cdot \Delta y$$

Πηγαίνοντας στο όριο για απειροστά Δx και Δy θα πάρουμε το διαφορικό

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

όπου οι παρενθέσεις είναι οι *μερικές παράγωγοι* της f ως προς x και y.

Παράδειγμα

$$f = 3x^2y^5 + xe^{2y}, \qquad df = \left(6xy^5 + e^{2y}\right)\, dx + \left(15x^2y^4 + 2xe^{2y}\right)\, dy$$

Η γενίκευση σε 3-διαστάσεις είναι προφανής

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

Τα dx, dy και dz αποτελούν τις συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{dl} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$df = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathbf{dl}$$

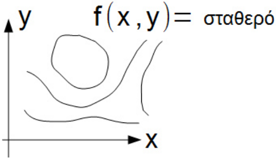
όπου **ορίζουμε** το διάνυσμα $\boldsymbol{\nabla} f$ ως

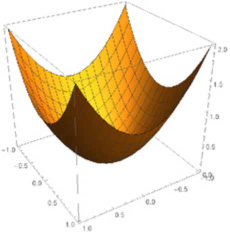
$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}$$

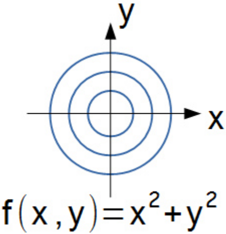
Αυτή είναι η *βαθμίδα της συνάρτησης* $f(x, y, z)$.

ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ II

Ας ορίσουμε (ξανά) την βαθμίδα λίγο πιο "μαθηματικά".
Να ξεκινήσουμε πάλι με μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$.
Η σχεδίασή της βέβαια απαιτεί ένα σύστημα τριών διαστάσεων.
Πολλές φορές μπορούμε να παραστήσουμε στο επίπεδο (x, y) τις *ισουψείς* της συνάρτησης. Αυτές γενικά είναι καμπύλες όπου η τιμή της συνάρτησης είναι σταθερή.

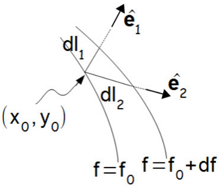






Για παράδειγμα, στην συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ οι ισουψείς είναι κύκλοι.

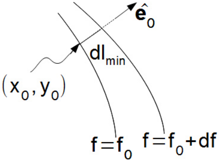
Ας ορίσουμε τώρα την *κατεθυνόμενη παράγωγο*.



Σχεδιάζουμε δύο ισουψείς καμπύλες με απειροστή διαφορά στην τιμή της συνάρτησης. Επιλέγουμε το σημείο (x_0, y_0) πάνω στην ισουψή. Επιλέγοντας διάφορες κατευθύνσεις που ορίζονται από τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_i$, σχηματίζουμε του ‘‘λόγους’’

$$\left.\frac{df}{dl_1}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{df}{dl_2}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{df}{dl_3}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \cdots$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος αυτός γίνεται μέγιστος αν το dl_i γίνει ελάχιστο.



Ορίζουμε την βαθμίδα της συνάρτησης **grad**f ή ∇f, το διάνυσμα με

α) μέτρο ίσο με $\dfrac{df}{dl_{min}}$

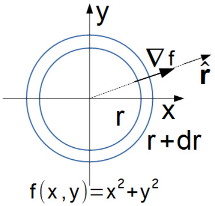
β) φορά και διεύθυνση αυτή του αντίστοιχου μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{e}}_0$

$$\boxed{\nabla f = \frac{df}{dl_{min}}\,\hat{\mathbf{e}}_0}$$

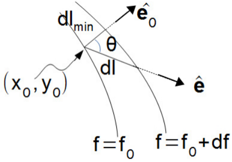
Σημειώστε ότι το $\hat{\mathbf{e}}_0$ είναι κάθετο στις τοπικές ισουψείς και κατευθύνεται προς την αύξηση της τιμής της f.

Άρα, η θαθμίδα μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο είναι πάντοτε κάθετη στην τοπική καμπύλη με σταθερή την τιμή της συνάρτησης. Να σημειώσουμε επίσης ότι στον χώρο οι *καμπύλες* σταθερής τιμής της συνάρτησης γίνονται *επιφάνειες* σταθερής τιμής.
Στο παράδειγμά μας, $f = x^2 + y^2$, θα έχουμε για μια ακτινική διεύθυνση, που πράγματι είναι η διεύθυνση που είναι κάθετη στους κύκλους (ισουψείς)

$$\frac{df}{dr} = \frac{(r+dr)^2 - r^2}{dr} = 2r, \qquad \boldsymbol{\nabla} f = 2r\hat{\mathbf{r}} = 2(x, y)$$



Η μορφή της βαθμίδας στα διάφορα συστήματα.



Από το σχήμα φαίνεται, μιας και το dl_{min} είναι κάθετο στις καμπύλες

$$dl_{min} = dl \cos\theta$$

όπου dl είναι σε τυχαία διεύθυνση, και επομένως

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dl_{min}} \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta =$$

$$|\nabla f| (\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \hat{\mathbf{e}}) = (|\nabla f| \hat{\mathbf{e}}_0) \cdot \hat{\mathbf{e}} = \nabla f \cdot \frac{\mathbf{dl}}{dl} \Rightarrow$$

$$\boxed{df = \nabla f \cdot \mathbf{dl}}$$

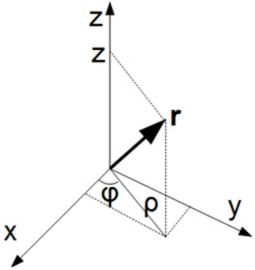
Αυτή είναι η βασική σχέση απ΄ όπου μπορούμε να βρούμε τι μορφή παίρνει η θαθμίδα σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.

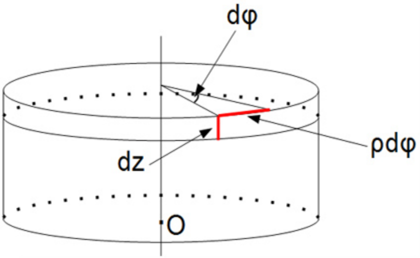
Για τις καρτεσιανές

$$\left.\begin{aligned} df &= (\nabla f)_x\, dx + (\nabla f)_y\, dy + (\nabla f)_z\, dz \\ df &= \tfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}\, dz \\ \mathbf{dl} &= (dx, dy, dz) \end{aligned}\right\} \quad \nabla f = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Για τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z)

$$\mathbf{dl} = d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\, \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \hat{\mathbf{k}}$$

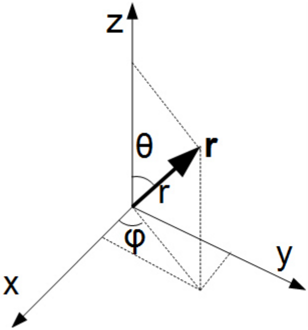


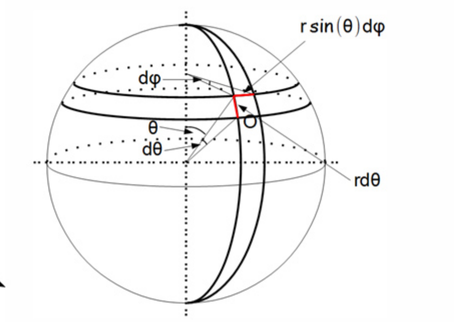


Για τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{dl} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$





ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Έστω ότι σε κάθε σημείο του χώρου (x, y, z) επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_1(x, y, z)\,\hat{\mathbf{x}} + E_2(x, y, z)\,\hat{\mathbf{y}} + E_3(x, y, z)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Αν έχουμε ένα σημειακό φορτίο q, πάνω του ασκείται δύναμη $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Το έργο που εμείς χρειαζόμαστε για να μετακινήσουμε το q από το σημείο $A(x_A, y_A, z_A)$ στο σημείο $B(x_B, y_B, z_B)$, *διαιρεμένο με το φορτίο*, πάνω στην καμπύλη C, είναι

$$-\int_{A(C)}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{A(C)}^{B} \left(E_1(x, y, z)\,dx + E_2(x, y, z)\,dy + E_3(x, y, z)\,dz\right)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό *ορίζεται* ως η διαφορά δυναμικού $\Delta V_{A\to B}$ από το A στο B. Η καμπύλη περιγράφεται από τις

$$x(t), \qquad y(t), \qquad z(t) \qquad \text{όπου } t \text{ μια παράμετρος}$$

και t_A, t_B οι τιμές της παραμέτρου για να πάρουμε τα σημεία A και B.

Τα διαφορικά

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt, \qquad dy = \frac{dy}{dt}\,dt, \qquad dz = \frac{dz}{dt}\,dt,$$

και τότε

$$\begin{aligned}
&-\int_{A(C)}^{B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} \\
&= -\int_{t_{A(C)}}^{t_B} \Bigg(E_1(x(t), y(t), z(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt \\
&\qquad\qquad + E_2(x(t), y(t), z(t))\,\frac{dy}{dt}\,dt \\
&\qquad\qquad\qquad + E_3(x(t), y(t), z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt \Bigg)
\end{aligned}$$

ένα ολοκλήρωμα ως προς t.

Αν ορίσουμε ένα αρχικό σημείο O, τότε μπορούμε να ορίσουμε το *δυναμικό* (ή την *συνάρτηση δυναμικού*) $V(x,y,z)_{/O}$ *ως προς αυτό το σημείο* O, που είναι μια συνάρτηση του πάνω ορίου.

$$V(x,y,z)_{/O} = -\int_{O(C)}^{(x,y,z)} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$

Είναι φανερό ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα γενικά εξερτάται από την διαδρομή C. Σ' αυτήν την περίπτωση ο παραπάνω ορισμός του μεγέθους *δυναμικό ως προς* O δεν θα είχε αξία. Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα αυτό *δεν* εξαρτάται από την καμπύλη C, παρά μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο. Αυτήν την ιδιότητα την έχουν τα διατηρητικά πεδία. Θυμηθείται ότι η δύναμη Coulomb είναι διατηρητική δύναμη και το ηλεκτρικό πεδίο από (ακίνητα) φορτία δεν είναι τίποτα άλλο παρά δύναμη Coulomb δια φορτίο. Επομένως, πράγματι το ολοκλήρωμά μας είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή C και ο ορισμός του δυναμικού έχει αξία.

Εύκολα φαίνεται ότι (δεν σημειώνουμε πλέον την διαδρομή!)

$$V_{B/O} - V_{A/O} = -\int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} + \int_O^A \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} - \int_A^O \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}$$
$$= -\left(\int_A^O \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} + \int_O^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}\right) = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \Delta V_{A\to B}$$

Από το ορισμό της συνάρτησης δυναμικού πέρνουμε την σχέση που μας δίνει την απειροστή μεταβολή

$$dV(x,y,z) = -\mathbf{E}(x,y,z)\cdot\mathbf{dl}$$

Αλλά, γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση ισχύει

$$dV(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} V(x,y,z)\cdot\mathbf{dl}$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{E}(x,y,z) = -\boldsymbol{\nabla} V(x,y,z)}$$