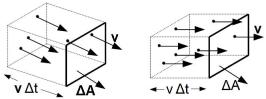
PEΥMATA

Ηλεκτρικό ρεύμα είναι κίνηση φορέων φορτίου.
Κίνηση φορέων φορτίου εννοούμαι το ''καθαρό'' φορτίο.
Η μεταφορά φορτίου περιγράφεται από την *πυκνότητα ρεύματος*.
Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα και ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ίδια σημειακά φορτία q που όλα κινούνται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v}$. Η πυκνότητα των φορτίων είναι n (αριθμός σωματιδίων που φέρουν φορτίο στην μονάδα του όγκου). Πόσο φορτίο διέρχεται από την επιφάνεια ΔA που τοποθετείται κάθετα στην ταχύτητα;

$$\Delta Q = [(\Delta A)\, v\, (\Delta t)]\; n\, q$$



Αν το ρεύμα I είναι φορτίο ανά μονάδα χρόνου θα έχουμε

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (\Delta A)\,(vnq) = (\Delta A)\, J$$

Το $J \equiv nqv$ είναι η *πυκνότητα ρεύματος*, που έχει διαστάσεις (ρεύμα/επιφάνεια).

Αν γενικεύσουμε και η επιφάνεια ΔA *δεν* είναι κάθετη στην ταχύτητα, τότε ο όγκος του, πλάγιου πια, παραλληλεπίπεδου δεν είναι $(\Delta A)\, v\, (\Delta t)$ αλλά $(\boldsymbol{\Delta A}) \cdot (\mathbf{v}(\Delta t))$ και ανάλογα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$\Delta Q = [(\boldsymbol{\Delta A}) \cdot \mathbf{v}(\Delta t)]\; n\, q \Rightarrow I = (\boldsymbol{\Delta A}) \cdot (\mathbf{v}\, n\, q) \Rightarrow \mathbf{J} = nq\mathbf{v}$$

Για απειροστές επιφάνειες **da** θα έχουμε

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

και το ρεύμα από μια επιφάνεια S, όπου η πυκνότητα **J** μπορεί να μην είναι σταθερή

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

Σε περίπτωση που έχουμε διαφόρων ειδών φορείς με φορτία q_i, πυκνότητες n_i και ταχύτητες $\mathbf{v}_i$, η πυκνότητα ρεύματος θα γράφεται

$$J = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

Στην πιο απλή (αλλά πιο συνηθισμένη) περίπτωση που έχουμε ένα είδος φορτίου q, αλλά οι φορείς έχουν μια τυχαία κατανομή ταχυτήτων, μπορούμε να θεωρήσουμε ομάδες φορέων με συναφείς ταχύτητες $\mathbf{v}_i$ και αντίστοιχες πυκνότητες n_i. Τότε η μέση ταχύτητα θα δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \sum_i n_i \mathbf{v}_i$$

όπου N είναι η συνολική πυκνότητα. Σ' αυτήν την περίπτωση, η πυκνότητα ρεύματος γράφεται

$$\mathbf{J} = q \sum_i n_i \mathbf{v}_i = qN\bar{\mathbf{v}}$$

Εξίσωση συνέχειας. Θεωρούμε κατ' αρχάς *στατικά* ρεύματα, δήλαδή ρεύματα σταθερά με το χρόνο. Αν πάρουμε μια *κλειστή* επιφάνεια S σε χώρο που υπάρχει ένα στατικό ρεύμα, τότε το ρεύμα από την επιφάνεια αυτή, δηλ. το $I = \oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$, δίνει το φορτίο ανά μονάδα χρόνου που φεύγει από την (μπαίνει στην) επιφάνεια S για $I > 0$ ($I < 0$).

Αν μέσα στην επιφάνεια S δεν έχουμε πηγή (καταβόθρα) φορτίου, ο όγκος μέσα στην επιφάνεια θα άδειαζε (γέμιζε) από φορτίο. Αυτό θα μπορούσε να γίνει αν το ρεύμα ήταν συνάρτηση του χρόνου. Για στατικά ρεύματα όμως

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{da} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$$

Αν το ρεύμα είναι συνάρτηση του χρόνου, τότε το ρεύμα που βγαίνει από την επιφάνεια θα είναι ίσο με την ρυθμό μείωσης του φορτίου Q_S μέσα στο χώρο της επιφάνειας

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{da} = -\frac{dQ_S}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{V(S)} \rho dv\right) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Αυτή είναι η εξίσωση συνέχειας που είναι η ποσοτική έκφραση της διατήρησης του φορτίου.

Ηλεκτρική αγωγιμότητα και ο νόμος του Ohm. Θεωρούμε αγώγιμο υλικό με ατομικό πλέγμα και φορείς φορτίου που κινούνται μέσα στο πλέγμα. Τα φορτία αυτά συγκρούονται και αλλάζει η ταχύτητά τους. Μετά από κάποιο (πεπερασμένο) χρονικό διάστημα (και ορισμένο αριθμό συγκρούσεων) η ταχύτητα τους δεν θα ''θυμάται'' την αρχική ταχύτητα. Απλοποιούμε την κατάσταση και θεωρούμε ότι ήδη από την πρώτη σύγκρουση, ο φορέας έχει τυχαία ταχύτητα. Αν τώρα έχουμε ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E στο υλικό, η ορμή ενός φορέα φορτίου στον χρόνο t μετά μια σύγκρουση θα είναι

$$M\mathbf{v} = M\mathbf{v}_o + q\mathbf{E}t$$

με $\mathbf{v}_o$ η ταχύτητα μετά ακριβώς τη σύγκρουση. Και σε μέσες τιμές

$$M\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N}\sum_i^N (M\mathbf{v}_{io} + q\mathbf{E}t_i) = \frac{1}{N}\sum_i^N q\mathbf{E}t_i = q\mathbf{E}\bar{t}$$

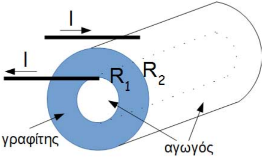
μιας και η ταχύτητα μετά την σύγκρουση είναι τυχαία.

Η ουσία της παραπάνω έκφρασης (και του αντίστοιχου μοντέλου) είναι ότι η ταχύτητα είναι ανάλογη της δύναμης ($q\mathbf{E}\bar{t}$). Και για την πυκνότητα του ρεύματος

$$\mathbf{J} = nq\bar{\mathbf{v}} = nq\,\frac{1}{M}q\mathbf{E}\bar{t} = \sigma\mathbf{E}$$

όπου $\sigma = nq^2\bar{t}/M$ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού. Αυτός είναι ο νόμος του Ohm που μας λέει ότι η πυκνότητα του ρεύματος είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου που την προκαλεί.
Ηλεκτρική αγωγιμότητα μετάλλων. Οι φορείς στα μέταλλα είναι τα ''ελεύθερα'' ηλεκτρόνια. Για $\sigma = 2,5\ 10^7\ (\Omega\mathrm{m})^{-1}$, το $\bar{t}$, για θερμοκρασίες δωματίου, είναι $\bar{t} = \sigma m_e/(Ne^2) = 3\ 10^{-14}$ s. Αν η μέση ταχύτητα $\bar{v} \sim 10^5$ m/s, παίρνουμε ότι η ελεύθερη διαδρομή του ηλεκτρονίου είναι περίπου 30 Å (10 αποστάσεις πλέγματος).

Αντίσταση αγωγών. Η αντίσταση R έχει έννοια μόνο για τελείως καθορισμένη ροή ρεύματος. Δηλαδή, θα πρέπει να καθοριστούν οι ακροδέκτες (από πού εισέρχεται και από πού εξέρχεται το ρεύμα) για να ορίσουμε την R.
Να βρούμε την R μιας κυλινδρικής αντίστασης.



Θεωρούμε την αντίσταση των αγωγών είναι πολύ μικρότερη από αυτήν του γραφίτη. Επίσης, λόγω συμμετρίας περιμένουμε το πεδίο E να είναι ανάλογο του $1/r$, $E = k/r$. Τότε

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k}{r}\, dr = k \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow k = \frac{\Delta V}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

και

$$E = \frac{\Delta V}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}$$

Ο νόμος του Ohm δίνει

$$J = \sigma E = \frac{\sigma \Delta V}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}$$

και μιας και η επιφάνεια που διαρρέει το ρεύμα είναι η παράπλευρη επιφάνεια, $2\pi rL$ (με L το μήκος του κυλίνδρου) θα έχουμε για το ρεύμα I

$$I = J\,2\pi rL = \frac{\sigma \Delta V}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r} 2\pi rL = \frac{2\pi\sigma\Delta V}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L\sigma}$$

Να βρούμε τώρα την αντίσταση κυλινδρικού σύρματος, μήκους L, διατομής A και αγωγιμότητας σ. Αν βάλουμε μια διαφορά δυναμικού ΔV στις δύο άκρες του θα αναπτυχθεί στο εσωτερικό του ένα ομογενές πεδίο **E**. Οπότε, αρχίζοντας από τον νόμο του Ohm γράφουμε

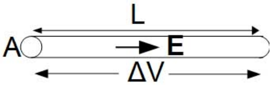
$$J = \sigma E \Rightarrow JA = \sigma EA \Rightarrow I = \sigma EA \Rightarrow E = \frac{I}{\sigma A}$$

και

$$\Delta V = E\,L = \frac{I}{\sigma A}\,L \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{L}{A}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την ειδική αντίσταση $\rho = 1/\sigma$, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται και

$$R = \rho\,\frac{L}{A}$$



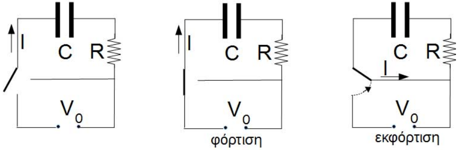
Απώλεια ενέργειας κατά τη ροή ρεύματος. Για την διέλευση του ρεύματος από υλικό με αντίσταση απαιτείται δύναμη για την μετατόπιση του φορέα. Στις συγκρούσεις των φορέων με το πλέγμα, οι φορείς διατηρούν την ορμή τους αλλά χάνουν ενέργεια. Αυτή μετατρέπεται σε θερμότητα. Αν έχουμε ένα ρεύμα I σημαίνει ότι σε χρόνο Δt από κάποια επιφάνεια περνά φορτίο $Q = I\Delta t$ και αυτή η κίνηση οφείλεται σε μια διαφορά δυναμικού $\Delta V = IR$. Τότε

$$\Delta V = \frac{\Delta W}{Q} \Rightarrow \Delta W = Q\Delta V = I\Delta t\, IR = I^2 R\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta t} = I^2 R$$

Αυτή είναι η *ισχύς* που καταναλίσκεται πάνω στην αντίσταση R που διαρρέεται από ρεύμα I.

Φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή. Στην φόρτιση θα έχω τις παρακάτω σχέσεις

$$V_C = \frac{Q_C}{C}\,(i), \quad I = \frac{dQ_C}{dt}\,(ii), \quad I = \frac{V_R}{R},\,(iii) \quad V_C + V_R = V_0\,(iv)$$



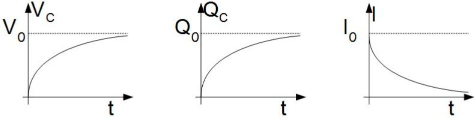
Θέλουμε να βρούμε το V_C ως συνάρτηση του χρόνου.

$$\overset{(i)}{\rightarrow} \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ_C}{dt} \overset{(ii)}{=} \frac{1}{C} I \overset{(iii)}{=} \frac{1}{CR} V_R \overset{(iv)}{=} \frac{1}{CR}(V_0 - V_C)$$

δηλαδή

$$\frac{dV_C}{V_0 - V_C} = \frac{dt}{CR} \Rightarrow -\ln\,(V_0 - V_C)|_0^{V_C} = \frac{t}{CR}$$

$$\frac{V_0 - V_C}{V_0} = e^{-\frac{t}{CR}} \Rightarrow V_C = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$



Το φορτίο του πυκνωτή Q_C και το ρεύμα I θα δίνονται από τις σχέσεις

$$Q_C = CV_C = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right),$$

$$I = \frac{dQ_C}{dt} = Q_0\left[-e^{-\frac{t}{CR}}\left(1\frac{1}{CR}\right)\right] = \frac{Q_0}{CR}e^{-\frac{t}{CR}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{CR}} = I_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

Για την εκφόρτιση θα έχουμε τις σχέσεις

$$V_C = \frac{Q_C}{C}\,(i), \quad I = -\frac{dQ_C}{dt}\,(ii), \text{ προσοχή στο } -,\ Q + Q_C = \text{σταθερό}$$

$$I = \frac{V_R}{R},\,(iii) \quad V_C = V_R\,(iv)$$

Οπότε

$$\xrightarrow{(i)} \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}\,\frac{dQ_C}{dt} \overset{(ii)}{=} -\frac{1}{C}\,I \overset{(iii)}{=} -\frac{1}{CR}\,V_R \overset{(iv)}{=} -\frac{V_C}{CR}$$

και

$$\frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{CR} \Rightarrow \ln V_C\Big|_{V_0}^{V_C} = -\frac{t}{CR} \Rightarrow V_C = V_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

Το φορτίο Q_C και το ρεύμα I

$$Q_C = CV_C = CV_0 e^{-\frac{t}{CR}},\ I = -\frac{dQ_C}{dt} = -CV_0 e^{-\frac{t}{CR}}\left(-\frac{1}{CR}\right) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$