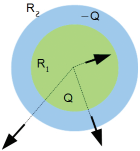
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 1.

Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε σφαιρικό χώρο ακτίνας R_1. Φορτίο $-Q$ κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ των σφαιρικών επιφανειών ακτίνας R_1 και R_2. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στις τρεις περιοχές α. $0 < r < R_1$, β. $R_1 < r < R_2$ και γ. $R_2 < r$.



ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε πρώτα τις χωρικές πυκνότητες φορτίου στις διάφορες περιοχές του χώρου. Λόγω ομοιόμορφης κατανομής θα έχουμε

$$\rho_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}, \quad 0 < r < R_1,$$

$$\rho_2 = -\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)}, \quad R_1 < r < R_2,$$

$$\rho_3 = 0, \quad r > R_2$$

Έχουμε ακτινική συμμετρία, επομένως το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού ακτινικό. Χρησιμοποιούμε το νόμο του Gauss για σφαίρα ακτίνας r και σταθερή πυκνότητα φορτίου

$$\mathbf{0 < r < R_1}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dv \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

$$E = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} r$$

$$\mathbf{R_1 < r < R_2}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\rho_2 \frac{4}{3} \pi \left(r^3 - R_1^3 \right) + \rho_1 \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right] \Rightarrow$$

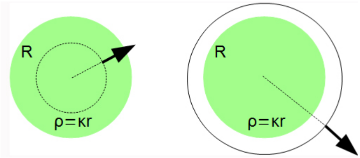
$$E = \frac{1}{3\epsilon_0 r^2} \left[\rho_2 r^3 + R_1^3 \left(\rho_1 - \rho_2 \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$\mathbf{r > R_2}$$

$$E 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$$

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 2

Μια σφαιρική στατική κατανομή φορτίου με χωρική πυκνότητα $\rho(r) = \kappa r$, όπου κ θετική σταθερά και r η απόσταση από το κέντρο της κατανομής, εκτείνεται μέχρι μια ακτίνα R. (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο **E** σε όλα τα σημεία του χώρου ($r < R$ και $r > R$). (β) Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ του κέντρου της κατανομής και ενός σημείου σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση από την κατανομή.



ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία και επομένως το πεδίο θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο και θα έχει ακτινική διεύθυνση. Για $r < R$, επιλέγουμε σφαιρική επιφάνεια και η ροή από αυθτήν θα είναι

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \oint_S E\, da = E 4\pi r^2$$

Τώρα θα πρέπει να βρούμε το φορτίο που περικλείει αυτή η επιφάνεια

$$\int_{V(S)} \rho(r) dv = \int_0^r \kappa r 4\pi r^2 dr = 4\pi\kappa \int_0^r r^3 dr = \pi\kappa r^4$$

Επομένως, από τον νόμου του Gauss θα έχουμε

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho(r) dv \Rightarrow E = \frac{\kappa r^2}{4\epsilon_0}$$

Για $r > R$, παίρνοντας σφαιρική επιφάνεια, το φορτίο που περικλείεται είναι ίσο με

$$\int_{V(S)} \rho(r) dv = \int_0^R \kappa r 4\pi r^2 dr = 4\pi\kappa \int_0^R r^3 dr = \pi\kappa R^4$$

και εξισώνοντας με την ροή από αυτήν την επιφάνεια

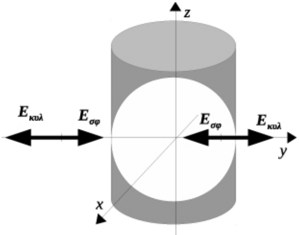
$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \pi\kappa R^4 \Rightarrow E = \frac{\kappa R^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

Η διαφορά δυναμικού

$$
\begin{aligned}
V &= -\int_{\infty}^{O} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\int_{\infty}^{O} (-E\, dl) = -\int_{\infty}^{O} E\, dr = \\
&= -\int_{\infty}^{R} \frac{\kappa R^4}{4\epsilon_0 r^2} dr - \int_{R}^{0} \frac{\kappa r^2}{4\epsilon_0} dr = \\
&= \frac{\kappa R^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{\kappa}{12\epsilon_0} R^3 = \frac{1}{3}\kappa R^3
\end{aligned}
$$

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 3

Κυλινδρική χωρική κατανομή φορτίου ακτίνας R και απείρου μήκους έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου $+\rho$. Μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R δημιουργείται στην κατανομή με κέντρο O πάνω στον άξονα του κυλίνδρου (άξονας z). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ως συνάρτηση της απόστασης y από το O κατά μήκος του άξονα y, εντός και εκτός της κοιλότητας.



ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία μια πλήρους (χωρίς σφαιρικό κενό) κυλινδρικής κατανομής φορτίου ρ και μια σφαιρικής κατανομής με πυκνότητα $-\rho$.

Για την κυλινδρική κατανομή

$$y < R, \quad E2\pi yL = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\pi y^2 L \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}y$$
$$y > R, \quad E2\pi yL = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\pi R^2 L \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 y}$$

Για την σφαιρική κατανομή

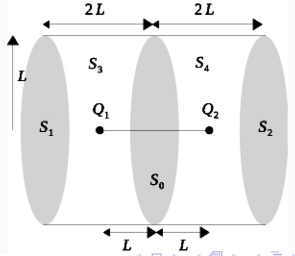
$$y < R, \quad E4\pi y^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi y^3 \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}y$$
$$y > R, \quad E4\pi y^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 y^2}$$

και για τις δύο περιπτώσεις το πεδίο είναι πάνω στον άξονα των y αλλά με αντίθετη φορά. Επομένως

$$y < R, \quad E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}y - \frac{\rho}{3\epsilon_0}y = \frac{\rho}{6\epsilon_0}y$$
$$y > R, \quad E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 y} - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 y^2} = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0 y}\left(3 - 2\frac{R}{y}\right)$$

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 4

Φορτία Q_1 και Q_2 απέχουν απόσταση $2L$. Θεωρήστε τις κυκλικές επιφάνειες S_0, S_1, S_2 (ακτίνας L, και προσανατολισμένες κάθετα στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία), των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στον άξονα που συνδέει τα δύο φορτία (όπως στο σχήμα), καθώς και τις κυλινδρικές επιφάνειες S_3 και S_4 που συνδέουν τις $S_0 - S_1$ και $S_0 - S_2$ αντίστοιχα. Υπολογίστε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου (α) από την επιφάνεια S_0 για τις περιπτώσεις (α1) $Q_1 = Q_2$ και (α2) $Q_1 = -Q_2$, και (β) από τη συνολική επιφάνεια $S_{o\lambda} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ για τις περιπτώσεις (β1) $Q_1 = Q_2$ και (β2) $Q_1 = -Q_2$.



ΛΥΣΗ

(α1) Αν $Q_1 = Q_2$, η ροή από την επιφάνεια S_0 μηδενίζεται μιας και κάθε φορτίο προκαλεί κατά μέτρο ίση ροή από την συγκεκριμένη επιφάνεια, αλλά με αντίθετο πρόσιμο.
(α2) Αν $Q_1 = -Q_2$, τότε η ροή αθροίζεται οπότε θα πρέπει να βρούμε τη ροή από ένα από τα δύο φορτία. Επιλέγουμε στοιχειώδη επιφάνεια αυτήν ανάμεσα σε δύο κύκλους με ακτίνες r και $r + dr$. Η στοιχειώδης ροή είναι

$$d\Phi_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{da} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(L^2 + r^2)} 2\pi r dr \cos\theta =$$
$$= \frac{Q_1 r dr}{2\epsilon_0(L^2 + r^2)} \frac{L}{(L^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{Q_1 r L dr}{2\epsilon_0(L^2 + r^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας

$$\Phi_1 = \int_0^L \frac{Q_1 r L dr}{2\epsilon_0(L^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Q_1 L}{2\epsilon_0} \int_0^L \frac{r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{Q_1 L}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{2}L} \right) = \frac{Q_1}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \left(\sqrt{2} - 1 \right)$$

και η συνολική ροή θα είναι διπλάσια

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\Phi_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{2}\epsilon_0}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

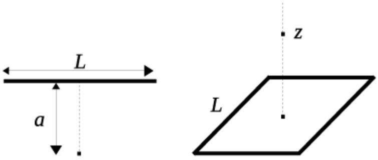
(β1)Από τον νόμου του Gauss, από την κλειστή επιφάνεια $S_{o\lambda}$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q_1 + Q_2\right) = \frac{2Q_1}{\epsilon_0}$$

(β2) Πάλι από τον νόμου του Gauss, η συνολική ροή θα είναι μηδέν μιας και το ολικό φορτίο είναι μηδενικό.

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ 5

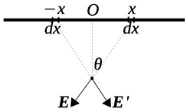
(α) Δείξτε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, σε απόσταση a, κάθετα στο μέσον ευθύγραμμης γραμμικής κατανομής μήκους L και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ, είναι ίση με $E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{a^2+L^2/4}}$, και σχολιάστε τις οριακές συμπεριφορές όταν $a << L$ και $a >> L$. (β) Φορτίο Q είναι μοιρασμένο ομοιόμορφα στις τέσσερις πλευρές τετραγώνου πλευράς L. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, κατά μήκος του άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου και περνά από το κέντρο του, σε απόσταση z από το κέντρο του, και να μελετήσετε τις οριακές συμπεριφορές όταν $z << L$ και όταν $z >> L$.



ΛΥΣΗ

(α) Το μέτρο του στοιχειώδους ηλεκτρικού πεδίου που προκαλεί το στοιχειωδες τμήμα dx σε απόσταση x είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)}$$



Αναλύοντας το διάνυσμα αυτό σε συνιστώσα παράλληλη με την κατανομή και κάθετη στην κατανομή, η συμμετρία του προβλήματος δείχνει ότι η συνολική παράλληλη με την κατανομή συνιστώσα μηδενίζεται και παραμένει μόνη η κάθετη. Χρησιμοποιώντα το ζεύγος των στοιχειωδών τμημάτων στις συμμετρικές θέσεις x και $-x$ θα έχουμε για την κάθετη συνιστώσα

$$dE = 2\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)} \cos\theta = 2\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Το συνολικό πεδίο προκύπτει από την ολόκλήρωση του x από 0 έως $L/2$

$$E = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = \frac{a d\theta}{\cos^2\theta}$$

παίρνουμε

$$E = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0}\int_0^{\theta_1}\frac{a d\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0}\int_0^{\theta_1}\frac{a d\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta =$$
$$= \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0}\left(\sin\theta\right)\Big|_0^{\theta_1} = \frac{\lambda}{2a\pi\epsilon_0}\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{L/2}{a\sqrt{a^2+L^2/4}} =$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{L}{a\sqrt{a^2+L^2/4}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $1 + \tan^2\theta = \cos^{-2}\theta$.
Στο όριο που $a >> L$ το πεδίο γίνεται

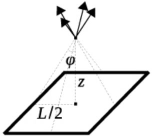
$$E = \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0}\frac{L}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{a^2}$$

που αντιστοιχεί στο πεδίο του φορτίου $Q = \lambda L$ (το συνολικό φορτίο της ράβδου) σε απόσταση a.
Στο όριο $L >> a$ θα πάρουμε

$$E = \frac{\lambda}{4a\pi\epsilon_0}\frac{L}{L/2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}$$

που είναι το ηλεκτρικό πεδίο απείρου μήκους κατανομή με γραμμική πυκνότητα λ σε απόσταση a από την κατανομή.
(β) Βάσει της προηγούμενης ανάλυσης κάθε πλευρά του τετραγώνου δημιουργεί στο σημείο του άξονα σε απόσταση z από το επίπεδο του τετραγώνου, πεδίο

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2/4}\sqrt{(z^2 + L^2/4) + L^2/4}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2/4}\sqrt{z^2 + L^2/2}}$$



όπου $z^2 + L^2/4$ είναι το τεράγωνο της απόστασης του συγκεκριμένου σημείου από την πλευρά του τετραγώνου. Κάθε πλευρά δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο ίδιου μέτρου αλλά διαφορετικής διεύθυνσης. Το συνολικό πεδίο, από τη συμμετρία του σχήματος θα είναι στον άξονα τον κάθετο στο επίπεδο του τετραγώνου. Οπότε, το συνολικό πεδίο θα είναι

$$
\begin{aligned}
E &= 4\,\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2/4}\sqrt{z^2+L^2/2}}\cos\phi = \\
&= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\,\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2/4}\sqrt{z^2+L^2/2}}\,\frac{z}{\sqrt{z^2+L^2/4}} = \\
&= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\,\frac{Lz}{(z^2+L^2/4)\sqrt{z^2+L^2/2}}
\end{aligned}
$$

Για $z >> L$ καταλήγουμε

$$E = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{Lz}{z^3} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\lambda L}{z^2}$$

Για $L >> z$ παίρνουμε

$$E = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{L}{L^2/4}\frac{z}{\sqrt{z^2+L^2/4}} = 4\,\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{L/2}\frac{z}{\sqrt{z^2+L^2/4}}$$

Αυτό είναι το πεδίο από 4 απείρου μήκους γραμμικές κατανομές σε συμμετρικό σημείο που απέχει $L/2$ από κάθε κατανομή ενώ το τελευταίο κλάσμα είναι το συνημίτονο της γωνίας, όπως και στην αρχική περίπτωση (που βέβαια είναι πολύ μικρό στην περίπτωση όπου $L >> z$ και το E τείνει στο μηδέν).