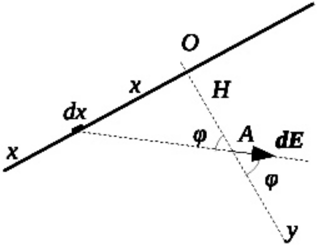
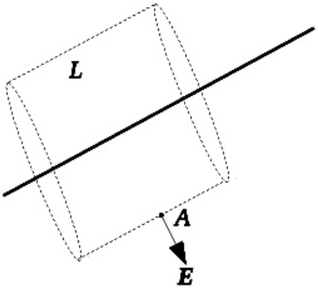
Τρία παραδείγματα

1. Άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου λ

Θεωρούμε την γραμμική κατανομή φορτίου στον άξονα των x και ζητάμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A που απέχει H από την κατανομή. Το στοιχειώδες τμήμα dx της κατανομής στη θέση x έχει στοιχειώδες φορτίο $dq = \lambda dx$.





Στο σημείο A, το ηλεκτρικό πεδίο από αυτό το στοιχειώδες φορτίο είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{H^2 + x^2}$$

Η συμμετρία του προβλήματος οδηγεί στο ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να είναι στην διεύθυνση την κάθετη στην γραμμική κατανομή (έστω y). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι x-συνιστώσες της συνεισφοράς από όλα τα στοιχειώδη φορτία θα αλληλοαναιρούνται και θα μένουν μόνο οι y-συνιστώσες. Οπότε

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda dx}{H^2+x^2}\,\cos\phi$$

Γράφοντας

$$\frac{x}{H} = \tan\phi \Rightarrow dx = \frac{H}{\cos^2\phi}\,d\phi$$

και

$$\cos\phi = \frac{H}{\sqrt{H^2+x^2}} \Rightarrow H^2+x^2 = \frac{H^2}{\cos^2\phi}$$

παίρνουμε $(-\infty < x < \infty \Rightarrow -\pi/2 < \phi < \pi/2)$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{H}{\cos^2\phi}\,d\phi\,\frac{\cos^2\phi}{H^2}\,\cos\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 H}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 H}$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss

Όπως αναφέραμε, λόγω συμμετρίας το πεδίο σε σημείο A θα πρέπει να είναι κάθετο στην γραμμική κατανομή και να εξαρτάται μόνο από την απόσταση του A από την κατανομή. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια κυλίνδρου με άξονα την κατανομή, ακτίνα βάσης ίση με την απόσταση H του A από την κατανομή και ύψος L (με την απαίτηση το τελικό αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητο από το L). Επομένως, το σημείο A θα είναι στην παράπλευρη επιφάνεια της επιφάνειας Gauss. Η ροή από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι μηδενική μιας και το πεδίο είναι παράλληλο με τις βάσεις. Η ροή από τη παράπλευρη επιφάνεια είναι

$$\Phi = \int_{\text{παράπλευρη}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = E_y 2\pi H L$$

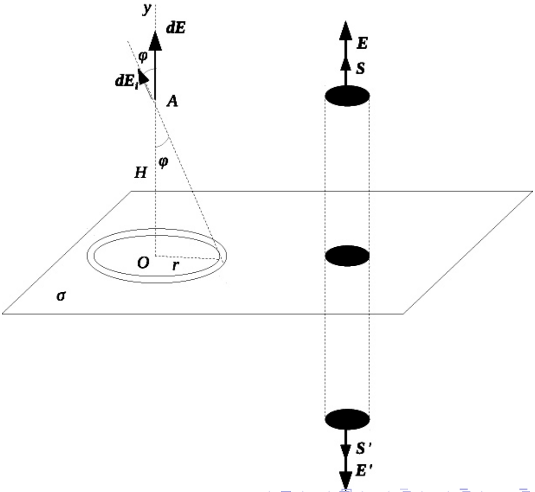
μιας και το πεδίο είναι παντού κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια και ίδιου μέτρου. Στο εσωτερικό αυτής της επιφάνειας το φορτίο είναι

$$Q = \lambda\, L$$

Οπότε, από τον νόμο του Gauss θα έχουμε

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_y 2\pi HL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 H}$$

2. Άπειρο επίπεδο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ



Το στοιχειώδες φορτίο μέσα στο δακτύλιο με ακτίνες r και $r + dr$ είναι $dq = \sigma 2\pi r dr$. Κάθε ‘‘σημειακό’’ φορτίο αυτού του δακτυλίου δημιουργεί στο σημείο A (που απέχει H από το άπειρο επίπεδο) ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{dE}_i$, που σχηματίζει γωνία ϕ με την κάθετη στο επίπεδο διεύθυνση (έστω την y). Οπότε, όλα τα ‘‘σημειακά’’ φορτία που αποτελούν τον απειροστό δακτύλιο θα δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{dE}$ μόνο στον άξονα των y

$$\begin{aligned} dE =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{H^2 + r^2} \cos\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{H^2 + r^2} \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}} = \\ =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma H 2\pi r dr}{(H^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

έχοντας θεωρήσει θετική πυκνότητα φορτίου. Και το συνολικό $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma H 2\pi r dr}{(H^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma H}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(H^2 + r^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\sigma H}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d(r^2)}{(H^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma H}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (-2) \frac{1}{\sqrt{H^2 + r^2}} \Bigg|_0^\infty = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sigma H}{2\epsilon_0}(-\frac{1}{H}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss

Λόγω συμμετρίας περιμένουμε το πεδίο να είναι κάθετο στο επίπεδο, να εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το επίπεδο και να είναι συμμετρικό σε κάθε πλευρά του επιπέδου. Επιλέγουμε μια επιφάνεια Gauss σε σχήμα κυλίνδρου, κάθετου στο επίπεδο, με εμβαδόν βάσης S, συμμετρικά τοποθετημένο ως προς το επίπεδο και η μια βάση του να περιέχει το σημείο A. Η ροή του πεδίου από αυτήν την επιφάνεια θα είναι μόνο στις βάσεις, μιας και το πεδίο είναι παράλληλο στην κυλινδρική επιφάνεια

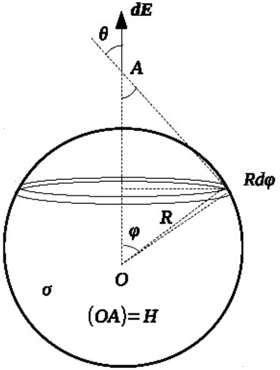
$$\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E}' \cdot \mathbf{S}' = 2ES$$

μιας και $\mathbf{E} = -\mathbf{E}'$ και $\mathbf{S} = -\mathbf{S}'$. Προσέξτε ότι το διάνυσμα της επιφάνειας κατευθύνεται πάντοτε προς ''τα έξω'' της κλειστής επιφάνειας. Από τον Νόμο του Gauss γνωρίζουμε ότι η ροή από μια κλειστή επιφάνεια είναι ίση με το φορτίο που περιέχεται σ' αυτή (δια τον παράγοντα ϵ_0). Επομένως

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

3.1. Επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R με σταθερή πυκνότητα φορτίου σ

Για σημείο A σε απόσταση $H > R$.



Το στοιχειώδες φορτίο dq που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ''παραλλήλους'' που αντιστοιχούν σε γωνίες ϕ και $\phi + d\phi$ είναι

$$dq = \sigma(2\pi R \sin\phi)(R d\phi)$$

Λόγω της συμμετρίας περιμένουμε ότι τα σημειακά φορτία που αποτελούν αυτό το στοιχειώδες φορτίο θα δίνουν ένταση στο A στην ακτινική διεύθυνση, αφού οι συνιστώσες που είναι κάθετες σ΄ αυτήν την διεύθυνση αλληλοαναιρούνται. Το τετράγωνο της απόστασης κάθε τέτοιου σημειακού φορτίου από το A είναι

$$(R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2$$

Και το πεδίο θα είναι

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2} \cos\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R\sin\phi)(R d\phi)}{(R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2} \cos\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R\sin\phi)(Rd\phi)}{(R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2} \frac{H - R\cos\phi}{\sqrt{(R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R^2 (H - R\cos\phi)\sin\phi d\phi}{((R\sin\phi)^2 + (H - R\cos\phi)^2)^{3/2}}$$

Γράφοντας $\sin\phi d\phi = -d\cos\phi$, και αλλάζοντας μεταβλητή $y = R\cos\phi$, θα πάρουμε

$$dE = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{(H - y)dy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}}$$

Τα όρια της ϕ είναι $0 \to \pi$. Τα όρια του y είναι $R \to -R$. Έχουμε λοιπόν δύο ειδών ολοκληρώματα

$$\int_R^{-R} \frac{dy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \int_R^{-R} \frac{ydy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\int_R^{-R} \frac{dy}{(R^2+H^2-2Hy)^{3/2}} = -\frac{1}{2H}(-2)\frac{1}{\sqrt{R^2+H^2-2Hy}}\Bigg|_R^{-R} =$$

$$= \frac{1}{H}\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{H-R}\right) = -\frac{2R}{H}\,\frac{1}{H^2-R^2}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα

$$\int_R^{-R} \frac{ydy}{(R^2+H^2-2Hy)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2H}\int_R^{-R} \frac{(R^2+H^2-2Hy-(R^2+H^2))dy}{(R^2+H^2-2Hy)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2H}\int_R^{-R} \frac{dy}{\sqrt{R^2+H^2-2Hy}} +$$

$$+ \frac{1}{2H}(R^2+H^2)\int_R^{-R} \frac{dy}{(R^2+H^2-2Hy)^{3/2}} =$$

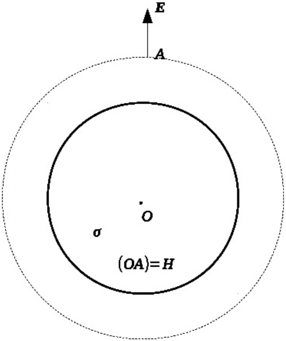
$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2H}\,(-\frac{1}{2H})\,2\sqrt{R^2+H^2-2Hy}\Big|_R^{-R} + \\
&\qquad + \frac{1}{2H}(R^2+H^2)\left(-\frac{2R}{H}\,\frac{1}{H^2-R^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2H^2}\left((R+H)-(H-R)\right) - \frac{R}{H^2}\,\frac{R^2+H^2}{H^2-R^2} = \\
&= -\frac{R}{H^2}\,\frac{2R^2}{H^2-R^2}
\end{aligned}
$$

όπου, στην τρίτη σειρά από το τέλος, χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του πρώτου ολοκληρώματος. Προσέξτε ότι $H > R$ οπότε $\sqrt{R^2+H^2-2HR} = H - R$.

Οπότε το πεδίο θα δίνεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\,\frac{1}{R}\int_R^{-R} \frac{(H-y)dy}{(R^2+H^2-2Hy)^{3/2}} = \\
&= -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\left[H\left(-\frac{2R}{H}\,\frac{1}{H^2-R^2}\right) + \frac{R}{H^2}\,\frac{2R^2}{H^2-R^2}\right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\frac{R^2}{H^2}
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss



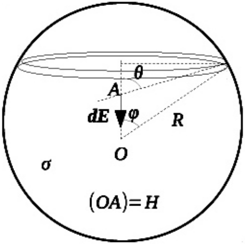
Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, το **E** θα είναι παντού ακτινικό και θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού. Επιλέγω σφαιρική επιφάνεια Gauss, ομόκεντρη με τον φλοιό που περνά από το σημείο A (επομένως με ακτίνα H). Η ροή του πεδίου από αυτήν την επιφάνεια είναι

$$\Phi = E\,4\pi H^2$$

Το φορτίο μέσα σ' αυτήν την επιφάνεια είναι όλο το φορτίο του φλοιού: $\sigma\, 4\pi R^2$. Επομένως

$$E\, 4\pi H^2 = \frac{\sigma\, 4\pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{H^2}$$

Για σημείο A σε απόσταση $H < R$.



Ουσιαστικά είναι τα ίδια ολοκληρώματα με την διαφορά όπου πριν είχαμε $H - R\cos\phi$ τώρα θα έχουμε $-H + R\cos\phi$. Οπότε

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R^2(-H + R\cos\phi)\sin\phi d\phi}{((R\sin\phi)^2 + (-H + R\cos\phi))^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{(-H + y)dy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}}$$

Όμοια λοιπόν

$$\int_R^{-R} \frac{dy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}} = -\frac{1}{H}\left(\frac{1}{R - H} - \frac{1}{R + H}\right) = -\frac{2}{R^2 - H^2}$$

και

$$\int_R^{-R} \frac{ydy}{(R^2 + H^2 - 2Hy)^{3/2}} = -\frac{1}{H} + \frac{1}{H}\frac{R^2 + H^2}{R^2 - H^2} = \frac{2H}{R^2 - H^2}$$

Και τελικά

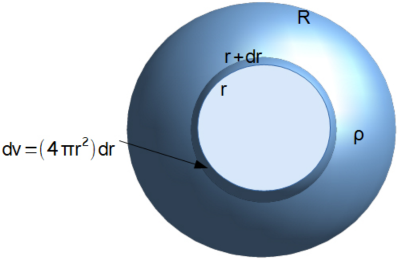
$$E = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\left[\frac{-2H}{R^2 - H^2} + \frac{2H}{R^2 - H^2}\right] = 0$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss

Αν επιλέξουμε την σφαιρική επιφάνεια Gauss να περνά και πάλι από το σημείο A που είναι τώρα μέσα στον φλοιό, η ροή θα είναι και πάλι $\Phi = E\,4\pi H^2$, αλλά το περικλειόμενο φορτίο είναι μηδέν. Άρα, $E = 0$.

3.2. Σφαίρα ακτίνας R με σταθερή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ

Για σημείο A σε απόσταση $H > R$.



Λόγω συμμετρίας περιμένω παντού το πεδίο να είναι ακτινικό και να εξαρτάται από την απόσταση του συγκεκριμένου σημείου από το κέντρο της κατανομής. Το στοιχειώδες φορτίο που βρίσκεται ανάμεσα στις ακτίνες r και $r + dr$ (με $r < R$) θα είναι

$$dq = \rho\, 4\pi r^2\, dr$$

και αντιστοιχεί σε μια επιφανειακή πυκνότητα

$$d\sigma = \frac{dq}{4\pi r^2} = \rho dr$$

Με βάση την προηγούμενη παράγραφο, το στοιχειώδες πεδίο στο σημείο A, που απέχει H από το κέντρο της κατανομής, από αυτό το φορτίο θα είναι

$$dE = \frac{\rho dr}{\epsilon_0} \frac{r^2}{H^2}$$

και ολοκληρώνοντας

$$E = \frac{\rho}{H^2 \epsilon_0} \int_0^R r^2\, dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{H^2}$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss

Επιλέγουμε επιφάνεια Gauss την επιφάνεια σφαίρας με ίδιο κέντρο με την κατανομή και ακτίνας H. Λόγω την σφαιρικής συμμετρίας η ροή από αυτήν την επιφάνεια θα είναι

$$\Phi = E4\pi H^2$$

μιας και το πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια Gauss και με σταθερό μέτρο. Το φορτίο που περιέχεται σ' αυτήν τη επιφάνεια είναι το συνολικό φορτίο της κατανομής : $\rho\frac{4}{3}\pi R^3$. Επομένως, από τον νόμο του Gauss

$$E4\pi H^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,\frac{R^3}{H^2}$$

Προσέξτε, αν ξαναγράψω την παραπάνω σχέση ως

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\rho(4/3)\pi R^3}{H^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{H^2}$$

όπου Q το συνολικό φορτίο της κατανομής μας. Δηλαδή, αν είμαστε εκτός της **σφαιρικά συμμετρικής** κατανομής, το πεδίο είναι το ίδιο με σημειακό φορτίο στο κέντρο της κατανομής.

Για σημείο Α σε απόσταση $H < R$.
Από την παράγραφο με τους φλοιούς γνωρίζουμε ότι αν είμαστε μέσα σε σφαιρικό φλοιό με σταθερή πυκνότητα το πεδίο είναι μηδέν. Επομένως, αν το σημείο μας είναι μέσα στην σφαιρική κατανομή, μόνο το φορτίο που βρίσκεται σε απόσταση από το κέντρο μικρότερης του H συνεισφέρει στο πεδίο. Οπότε, βάσει του προηγούμενου, θέτοντας $R = H$ παίρνουμε

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} H$$

Χρησιμοποιώντας το Νόμο του Gauss
Ανάλογα, βάζοντας $R = H$ θα έχουμε

$$E 4\pi H^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi H^3 \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} H$$