ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΑ 1. 2. 3. 4.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ — ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1975

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΑ 1. 2. 3. 4.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΑ 1. 2. 3. 4.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ — ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κατὰ τὸ 1902 ὁ περίφημος Οὔγγρος μαθηματικὸς Bolyai, εἷς ἐκ τῶν ἱδρυτῶν τῆς ὑπερβολικῆς γεωμετρίας, ἔγραψεν, ὅτι εἶχε διαπιστώσει 1700 ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἰς διαφόρους γλώσσας καὶ ἐντὸς διαστήματος 1900 ἐτῶν. Γενικῶς ὅμως πιστεύεται, ὅτι αἱ ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπερβαίνουν κατὰ πολὺ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως ἐξ ἀραβικῶν ἐκδόσεων. Ἅπασαι αὗται ἐστηρίζοντο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων γενομένην ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸν 4ον μ.Χ. αἰῶνα ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος, πατρὸς τῆς μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας. Κατὰ τὸ 1808 μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ Βατικανοῦ ὑπὸ τοῦ Ναπολέοντος εἰς Παρισίους πολλοὶ ἑλληνικοὶ κώδικες, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ F. Peyrard ἀνεκάλυψεν ἕνα, φερόμενον σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα κῶδιξ Βατικανὸς ὑπ' ἀριθ. 190, ὅστις περιεῖχε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ κῶδιξ οὗτος ἐστηρίζετο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων πολὺ παλαιοτέραν τῆς ἐκδόσεως τοῦ Θέωνος (ὁ κῶδιξ ἐπεστράφη εἰς τὸ Βατικανὸν τὸ 1814). Ἀπὸ τὸν κώδικα τοῦτον διεπιστώθησαν τὸ πρῶτον αἱ μεταβολαί, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐπιφέρει ὁ Θέων, καὶ ἐσημειώθησαν αὗται ὑπὸ τοῦ E. F. August κατὰ τὴν ἔκδοσιν ὑπὸ τούτου τῶν Στοιχείων τὴν γενομένην κατὰ τὸ 1829. Κατὰ τὸ 1882 - 1888 ὁ Δανὸς I. L. Heiberg τῇ συνεργασίᾳ τοῦ Γερμανοῦ H. Menge ἐξέδωκεν ἐν Λειψίᾳ τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου. Ἐκ τοῦ προλόγου τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων ὑπὸ τοῦ I. L. Heiberg παραθέτομεν ἐδῶ τὰ σπουδαιότερα μέρη.

«Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τρεῖς σχεδὸν αἰῶνας εἶχον ὡς κριτικόν των θεμέλιον τὴν πρωταρχικὴν (διὰ τοῦ τύπου) ἔκδοσιν, ἡ ὁποία εἶδε τὸ φῶς ἐν Βασιλείᾳ κατὰ τὸ 1533. Διότι ὁ Gregorius εἰς τὰ Στοιχεῖα ἐξαρτᾶται ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὴν ἔκδοσιν ἐκείνην. Τίνος ποιότητος ὑπῆρξε τὸ θεμέλιον ἐκεῖνο κατανοεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ Βασιλειανὴ ἔκδοσις, συμφώνως πρὸς τὴν συνήθειαν τῶν χρόνων ἐκείνων, ἐγένετο ἀκολουθοῦσα πιστῶς ἐλαχίστους καὶ οὐχὶ τοὺς ἀρίστους κώδικας, καίτοι ὑπάρχουν κώδικες τῶν Στοιχείων ἀρχαιότατοι καὶ ἄριστοι εἰς ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον δυσκόλως ἀνέρχονται οἱ κώδικες οἱουδήποτε ἄλλου Ἕλληνος συγγραφέως. Ὅθεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνός μας (19ου) ὁ F. Peyrard προσέφερεν ὑψίστην εὐεργεσίαν εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἐπειδὴ ἐχρησιμοποίησεν ἕνα κώδικα ἀρχαῖον καὶ ὑπεραρχαιότατον ἐν συγκρίσει πρὸς ὅλους, πρὸς διόρθωσιν τῆς Βασιλειανῆς ἐκδόσεως, ἐφ' ὅσον ὁ κῶδιξ οὗτος περιεῖχε κριτικὴν ἀναθεώρησιν παλαιοτέραν τῆς τοῦ Θέωνος. Τὸ ὅτι τὸν κώδικα

τοῦτον ἔφερεν εἰς φῶς ἐκ τῶν ἀδύτων τοῦ Βατικανοῦ καὶ τὸ ὅτι διέγνωσε τὴν ὑπεροχήν του, τοῦτο ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ F. Peyrard, ἥτις δὲν πρέπει νὰ ἐκτιμηθῇ ὡς μικρά. Ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησε πανταχοῦ ὀρθὴν καὶ σταθερὰν κρίσιν ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀληθινῆς γραφῆς καὶ κατὰ πρῶτον λόγον, διότι ἐστερεῖτο καλῶν κωδίκων τῆς ἀναθεωρήσεως τοῦ Θέωνος, οὔτε ἐκρατήθη σταθερῶς εἰς τὸ εὕρημά του, οὔτε καὶ ὀρθῶς τὸ ἐξετίμησε. Εἰς τοῦτο προστίθεται, ὅτι ἡ ἔκδοσίς του καὶ δύσχρηστος εἶναι καὶ κατὰ τοὺς χρόνους μας εἶναι λίαν σπανία. Οὔτε ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι μετὰ τὸν Peyrard ἐξέδωκαν τὰ Στοιχεῖα ἐπηύξανον τὰ κριτικὰ βοηθήματα καὶ οὐδόλως διεχειρίσθησαν οὕτω τὴν ὑπόθεσιν, ὥστε τὸ κείμενον τῶν Στοιχείων νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καταστῇ φανερόν, ὅτι χρησιμοποιεῖ ἀρκετὰ βέβαιον καὶ κατάλληλον πρὸς χρῆσιν κριτικὸν θεμέλιον. Εἶναι δὲ ἀρκούντως ὡμολογημένον, ὅτι ὡς πρὸς τὰ λοιπὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἐγένοντο πολὺ χειρότερα. Ἐπειδὴ ἔβλεπον, ὅτι ταῦτα κατενοοῦντο ἀπὸ πολλούς, ἀπεφάσισα νὰ προσθέσω εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὴν ἔκδοσιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ πρὸς ἀνάληψιν τοῦ κόπου τούτου, τὸν ὁποῖον ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐν τῇ διανοίᾳ μου ἀνεπόλουν, παρωρμήθην κατὰ τοσοῦτον μᾶλλον, καθ' ὅσον ἔβλεπον, ὅτι ἡ ἔκδοσις τοῦ Ἀρχιμήδους ἐγένετο δεκτὴ ὑπὸ τῶν λογίων ἀνδρῶν εὐμενῶς. Ἀλλ' ἀμέσως ἔγινε καταφανές, ὅτι οὔτε τὰ μέσα οὔτε οἱ τρόποι οὔτε αἱ δυνάμεις μου ἦσαν ἀρκεταὶ δι' ὁλόκληρον τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐσκόπευον νὰ ἀναλάβω. Διότι ἔπρεπε νὰ γίνῃ ἀντιβολὴ μεγάλου ἀριθμοῦ κωδίκων καὶ ἔπρεπε νὰ μεταβῶ διὰ μεγάλου ἀριθμοῦ ταξιδίων εἰς μέγαν ἀριθμὸν βιβλιοθηκῶν. Ὅθεν ἠρώτησα τὸν Hurican Menge, λόγιον ἄνδρα, περὶ τοῦ ὁποίου ἐγνώριζον ὅτι καὶ αὐτὸς εἶχεν ἀσχοληθῇ μὲ τὸν Εὐκλείδην, ἂν ἤθελε νὰ ἀναλάβῃ μέρος τοῦ ἔργου. Οὗτος συγκατένευσε καὶ συνηρμόσθη μεταξύ μας τὸ πρᾶγμα οὕτως, ὥστε ἐκεῖνος μὲν νὰ κάμῃ τὴν ἔκδοσιν τῶν «Δεδομένων», «Φαινομένων» καὶ τῶν μουσικῶν συγγραφῶν τοῦ Εὐκλείδου, ἐγὼ δὲ τῶν «Στοιχείων», τῶν «Ὀπτικῶν» καὶ τῶν «Κατοπτρικῶν», ἀμφότεροι δὲ νὰ κάμωμεν διὰ κοινῆς ἐργασίας τὴν ἀντιβολὴν τῶν κωδίκων. Προκειμένου περὶ τῶν Στοιχείων, ἠναγκάσθην ἐκ τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν κωδίκων νὰ ἐκλέξω ὀλίγους.

Τούτους ἐσημείωσα διὰ τῶν κατωτέρω γραμμάτων.

P— κῶδιξ Βατικανὸς Ἑλληνικὸς 190, Peyrard, 10ου αἰῶνος, ἐπὶ μεμβράνης (δηλ. περγαμηνῆς). Ἐδῶ καὶ ἐκεῖ, χεὶρ λίαν πρόσφατος ἔχει ἀνανεώσει γράμματα, τὰ ὁποῖα εἶχον σχεδὸν ἐξαλειφθῇ ἐκ τῆς πολυκαιρίας. Ταύτην τὴν χεῖρα ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος π εἰς ὅσα μέρη ἐφαίνετο, ὅτι ἀπέδιδεν ὀλιγώτερον ὀρθῶς τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Τὰ 4 - 9 βιβλία παρέβαλα ὁ ἴδιος ἐν Ρώμῃ κατὰ τὸ 1881, τὸ 2ον καὶ μέρος τοῦ 3ου βιβλίου παρέβαλεν ὁ Menge, τὸ πρῶτον καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ τρίτου ἀνέλαβε λίαν εὐμενῶς νὰ παραβάλῃ ὁ λόγιος ἀνὴρ Augustus Mau.

B— κῶδιξ Βοδληϊανός, Δορβιλλιανὸς 10,1 (δηλ. ἐκ τῆς συλλογῆς D'Orville) ἐν φύλλῳ 2,30 γραφεὶς τὸ ἔτος 888 ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὰ βιβλία 1 - 7 παρέβαλον ἐγὼ ἐν Ὀξφόρδῃ κατὰ τὸ 1882.

F— κῶδιξ Φλωρεντιανὸς Λαυρεντιανὸς 28,3 τοῦ 10ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Καὶ εἰς τὸν κώδικα αὐτὸν ἔχει πολλάκις ἀνανεωθῆ ἡ ἀρχαία γραφὴ διὰ χειρὸς τοῦ 16ου αἰῶνος, ἡ ὁποία ἔγραψεν ἐκ νέου πολλὰ φύλλα καὶ συνεπλήρωσεν ὁλόκληρον τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ κώδικος. Τὴν χεῖρα ταύτην ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος φ, εἰς ὅσα μέρη εἶχε καταστρέψει τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Ὁλόκληρον τὸν κώδικα τὸν παρέβαλον ὁ ἴδιος ἐν Φλωρεντίᾳ κατὰ τὸ 1881.

Υ— κῶδιξ Βιενναῖος Ἑλληνικὸς 103, τοῦ 11ου - 12ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ τελευταῖον μέρος ἐκ βομβυκίνου χάρτου συνεπλήρωσε χεὶρ τοῦ 13ου αἰῶνος. Τοῦτον παρέβαλον ὁλόκληρον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ τὸ 1880.

β— κῶδιξ τῆς δημοτικῆς βιβλιοθήκης τῆς Βονωνίας, σημειούμενος διὰ τῶν ἀριθμῶν 18 - 19 τοῦ 11ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον καὶ μερικὰ ἄλλα μέρη ἐθεώρησα ἐν Φλωρεντίᾳ τῷ 1881.

P— κῶδιξ Παρισινός, Ἑλληνικὸς 2466 τοῦ 12ου αἰῶνος, ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον παρέβαλον ἐν Παρισίοις τῷ 1880. Τὰ βιβλία 2 - 7 ἐν Κοπεγχάγῃ τῷ 1882.

Ὑπολείπεται νὰ εὐχαριστήσω τοὺς ἄνδρας ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐπέδειξαν εὐμένειαν διὰ τὸ ἔργον μου. Πρῶτον, διὰ νὰ δυνηθῶ νὰ κάμω τόσον συχνὰ ταξίδια εἰς τοὺς Παρισίους καὶ τὴν Ἰταλίαν, κατωρθώθη διὰ τοῦ Ὑπουργείου, τὸ ὁποῖον προΐσταται τῆς Παιδείας καὶ τῶν Σχολείων τῆς χώρας μας (Δανίας), καὶ τοῦ Καρλσβεργικοῦ Ἱδρύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει δαψιλῆ χορηγίαν εἰς τὰ γράμματα καὶ τὰς ἐπιστήμας. Προσέτι καὶ εἰς τοὺς ἐν Βιέννῃ, Παρισίοις καὶ Βονωνίᾳ προϊσταμένους βιβλιοθηκῶν πλεῖστα ὀφείλω. Ἀκόμη εἰς τὸν Κάρολον Κρώξ, μὲ τὸν ὁποῖον ἔκαμα ἀπὸ κοινοῦ μέγα μέρος τοῦ εἰς τὴν Ἰταλίαν ταξιδίου κατὰ τὸ 1881. Οὗτος μὲ ἐβοήθησεν ἐξόχως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἡλικίας τῶν κωδίκων, διότι εἰς συναφῆ παλαιογραφικὰ ζητήματα οὐδενὸς ὑστερεῖ. Νὰ ἐκφράσω ἐδῶ τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς αὐτὸν μὲ ἠμπόδισεν ἡ μοῖρα, ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἀδικωτάτη καὶ πρὸς ἡμᾶς τοὺς ἐπιζῶντας φίλους του καὶ πρὸς τὴν ἐπιστήμην.

Ἔγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον 1883.

I. L. HEIBERG»

Εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν, μέχρι τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως αὐτῆς, τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν γλῶσσαν, ὅπως ἐγράφησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κων/πόλεως οὐδεμία ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο εἰς τὴν περιοχὴν τὴν κατοικουμένην ὑπὸ Ἑλλήνων. Ὅτε μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἤνθησαν Ἑλληνικαὶ Σχολαὶ εἰς διαφόρους πόλεις τῆς δούλης Ἑλλάδος, ὅπως εἰς Κων/πολιν, Ἰωάννινα, Μοσχόπολιν, Ἅγιον Ὄρος, Κυδωνίας, Χίον κλπ., τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο ἐν περιλήψει ἐκ λατινικῆς μεταφράσεως, ἐκτυπούμενα εἰς τυπογραφεῖα τῆς Δύσεως. Τοιαύτην ἔκδοσιν ὀφειλομένην εἰς δαψιλῆ χορηγίαν τῶν Ζωσιμαδῶν, ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ἐκ δωρεᾶς τοῦ λογιωτάτου καθηγητοῦ τῆς Ἰατρικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν κ. Γεωργίου Τριανταφυλλίδου.

Ὁ τίτλος τοῦ σπανίου τούτου βιβλίου ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Α. ΤΑΚΟΥΕΝΤΙΟΥ
Στοιχεῖα Γεωμετρίας
μετὰ σημειώσεων τοῦ Οὐΐστωνος
ἐξελληνισθεῖσα μὲν ἐκ τῆς λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τοῦ Πανιερωτάτου Ἀρχιεπισκόπου Κυρίου Εὐγενίου τοῦ Βουλγάρεως, ἱεροδιακόνου ἔτι ὄντος, καὶ σχολαρχοῦντος ἔν τε Ἰωαννίνοις καὶ ἐν τῇ Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ καὶ ἐν Κων/πόλει, πρὸς ἀκρόασιν τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιώντων.
Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς αὐταδελφότητος τῶν
ΖΩΣΙΜΑΔΩΝ
Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.
ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων νεανίσκοις.
Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας
ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτη
1805».

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις περιλαμβάνουσα τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῶν Στοιχείων, ἤτοι τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τεσσάρων τόμων τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, εἶναι ἡ πρώτη ἐν Ἑλλάδι γενομένη διὰ τοῦ τύπου ἔκδοσις τοῦ ἀρχαίου κειμένου.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1952.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συμφώνως πρὸς τὰς μαρτυρίας, τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει ὁ Ἡρόδοτος, ὁ Εὔδημος, ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς καὶ ἄλλοι παλαιοὶ συγγραφεῖς, ἡ γεωμετρία εἶναι δημιούργημα τῶν Αἰγυπτίων. Κατὰ τοὺς συγγραφεῖς τούτους οἱ Αἰγύπτιοι ἤχθησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψίν της, ἀπὸ τὴν ἀνάγκην μετρήσεως τῆς παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ Νείλου γῆς, ἡ ὁποία μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ ποταμοῦ καὶ ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων ἔπρεπε πάντοτε νὰ μετρῆται ἐκ νέου διὰ λόγους κτηματολογικοὺς καὶ φορολογικούς. Τὸ παλαιότερον τεκμήριον, μέχρι σήμερον τοὐλάχιστον, ἐξ οὗ βεβαιούμεθα, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐδημιούργησαν τὴν γεωμετρίαν, εἶναι ὁ πρὸ ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθεὶς πάπυρος τοῦ Rhind (Βρεταννικὸν Μουσεῖον), ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῆ περὶ τὸ 1700 π.Χ. περίπου, ὑπὸ τοῦ Ahmes. Ἐξ ὅλων ὅμως τῶν ὑπαρχόντων τεκμηρίων συνάγεται, ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Αἰγυπτίων ἦτο καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς, δηλ. τέχνη προκύψασα ἐκ τῆς πείρας κατὰ τὰς μετρήσεις τῆς γῆς. Οὐδαμοῦ εἰς τὴν αἰγυπτιακὴν γεωμετρίαν ἀναφαίνεται ἢ ἔστω ὑποδηλοῦται ἀπόδειξις γεωμετρικῆς τινος προτάσεως.

Ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης πρὸς ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Αἱ ἑλληνικαὶ ἐν προκειμένῳ εἰδήσεις προερχόμεναι ἐκ συγγραφέων μεταγενεστέρων τοῦ Ἡροδότου, ἀποδίδουν τὴν θεμελίωσιν τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης εἰς τὸν συγκαταλεγόμενον μεταξὺ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος Θαλῆν τὸν Μιλήσιον. Ὡς πρῶται δὲ ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἀναφέρονται, μεταξὺ ἄλλων, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰ θεωρήματα τ' ἀποδεικνύοντα τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ὅτι ἡ γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθή. Ὁ γερμανὸς φιλόσοφος Κὰντ γράφει εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τοῦ περιφήμου αὐτοῦ ἔργου «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου» (Kritik der reinen Vernunft, 1787) τ' ἀκόλουθα: «Τὰ μαθηματικά, ὡς ἐπιστήμη, εὗρον τὸν ἀσφαλῆ δρόμον των εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων. . . Ὁ πρῶτος, ὅστις ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως), ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν. . .».

Ἡ διαπίστωσις, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι δὲν εἶχον ἰδέαν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης, ἐνισχύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἄγνοιαν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῆς. Ὁ Θαλῆς εὑρισκόμενος ἐν Αἰγύπτῳ, ἀφοῦ ἔστησε τὴν ράβδον του κατακορύφως εἰς τὸ ἄκρον τῆς σκιᾶς τῆς πυραμίδος, ὑπελόγισε τὸ ὕψος αὐτῆς ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σκιῶν, τὰς ὁποίας ἔρριπτον ἡ ράβδος καὶ ἡ πυραμίς. Τοιοῦτος ὅμως ὑπολογισμὸς προϋποθέτει γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων τριγώνων καὶ ἱκανὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης. Περὶ τοιαύτης ὅμως ἀναπτύξεως οὐδὲν γνωρίζομεν μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ. Αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις τοῦ Θαλοῦ, ὡς αὗται μαρτυροῦνται ὑπὸ τῶν Ἑλληνικῶν εἰδήσεων, καθιστοῦν πιθανὴν τὴν γνώμην, ὅτι πολὺ πρὸ τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶχον τεθῆ ἐν Ἑλλάδι αἱ βάσεις τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης. Τοῦ Θαλοῦ οὐδεμία πραγματεία περιεσώθη. Ἀλλ' ἀμφίβολον εἶναι ἂν οὗτος εἶχεν ἀσχοληθῆ μὲ συγγραφάς. Ὁ Λόβων ὁ Ἀργεῖος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Θαλῆς εἶχε γράψει διακοσίας πραγματείας εἰς στίχους, αἱ ὁποῖαι ἀπωλέσθησαν. Μετὰ τὸν Θαλῆν μνημονεύεται ὡς σπουδαῖος μαθηματικὸς ὁ Μαμέρτιος, ὁ ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου, ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, ὅστις ἔδρασεν ἐν τῇ μεγάλῃ Ἑλλάδι. Ἡ μυστικότης, ἡ ὁποία περιέβαλλε τὰς ἐργασίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου, ἐστάθη ἐμπόδιον εἰς τὴν διάδοσιν ἐκτὸς τῆς Σχολῆς τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐν αὐτῇ γενομένης μαθηματικῆς ἐρεύνης. Παρὰ ταύτην ὅμως, πολλαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις, μὴ ἀφορῶσαι εἰς τὸ μυστηριακὸν μέρος τῆς διδασκαλίας, ἦλθον εἰς τὴν δημοσιότητα μετὰ τὴν βιαίαν ἐν κάτω Ἰταλίᾳ διάλυσιν τῶν συλλόγων τῶν Πυθαγορείων καὶ τὴν διασποράν των εἰς τὰς διαφόρους Ἑλληνικὰς πόλεις. Εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου ἀνεπτύχθησαν σπουδαίως ἡ γεωμετρία καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν, ἔν τινι δὲ μέτρῳ καὶ ἡ Ἄλγεβρα, ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδονται, μεταξὺ ἄλλων, τὸ ὁμώνυμον θεώρημα, ἡ συναφὴς πρὸς τοῦτο σπουδὴ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$ (ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως δευτέρου βαθμοῦ) καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων. Ὀλίγον βραδύτερον, μετὰ τὴν δρᾶσιν τοῦ Πυθαγόρου ὡς ἀρχηγοῦ Σχολῆς, ἐπιχειρεῖται ἐν Ἀθήναις ἡ λύσις τοῦ περιφήμου προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ὑπὸ τῶν Ἀναξαγόρου, Ἀντιφῶντος καὶ Βρύσωνος. Αὕτη μαρτυρεῖ περὶ μεγάλης ἀνθήσεως τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην.

Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης, ἰδίως τῆς γεωμετρικῆς, σημειοῦται εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἔνθα ὑπὸ τὴν θείαν τούτου καθοδήγησιν οἱ διάσημοι μαθηματικοὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, Νεοκλείδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων, Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης, οἱ ἀδελφοὶ Μέναιχμος καὶ Δεινόστρατος, Θεύδιος ὁ Μάγνης, Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, Φίλιππος ὁ Μενδαῖος ἢ Ὀπούντιος κλπ. προήγαγον δημιουργικῶς τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ἐλύθησαν τὰ ἄλλα δύο περίφημα προβλήματα, ἤτοι ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου, τὸ δήλιον λεγόμενον πρόβλημα, καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας, ἀμφότερα οὐχὶ διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ἀλλὰ δι' ἄλλων γραμμῶν ἢ κινητικῆς λεγομένης γεωμετρίας. Προσωπικῶς εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδίδεται ἡ λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, διὰ κινητικῆς γεωμετρίας, ὡς ἀναφέρει ὁ Εὐτόκιος κατὰ τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου 1», καὶ ἡ σπουδὴ τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν ὁ Πλάτων ἔλυσε κατὰ διάφορον τρόπον καὶ ὄχι ὅπως ὁ Πυθαγόρας. Ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς τῆς Ἀκαδημίας ἔδρασαν διάφοροι μαθηματικοὶ καὶ μάλιστα μερικοὶ ἐξ αὐτῶν πρὶν ἀκόμη ἱδρυθῇ ἡ Ἀκαδημία, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸν σοφιστὴν Ἱππίαν τὸν Ἠλεῖον, τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον, διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, καὶ τοὺς Πυθαγορείους Φιλόλαον, Θυμαρίδαν καὶ Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον, τὸν φίλον τοῦ Πλάτωνος. Ὡς ἀποφασιστικοὺς σταθμοὺς διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς περὶ τῶν ἀναλογιῶν θεωρίας ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τὴν ὑπὸ τοῦ ἰδίου διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας, ὡς τοῦτο ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς ἐρεύνας τοῦ Ἀρχύτου εἰς τὴν στερεομετρίαν, τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ὑπὸ τῶν Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου καὶ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου καὶ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου. Θεμελιώδους ἐπίσης σημασίας διὰ τὴν πρόοδον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης θεωρεῖται ἡ συμβολὴ τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Τὴν συμβολὴν ταύτην θὰ ἐξάρωμεν δι' ὀλίγων κατωτέρω, ἐκεῖ ἔνθα θὰ γίνῃ λόγος περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ἄλλα τρία ὀνόματα διασήμων Ἑλλήνων μαθηματικῶν ὁλοκληρώνουν, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, τὴν γιγαντιαίαν προσπάθειαν τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος πρὸς ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας. Καὶ τὰ ὀνόματα ταῦτα εἶναι, κατὰ χρονολογικὴν σειράν, Εὐκλείδης - Ἀρχιμήδης - Ἀπολλώνιος. Μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἐπέρχεται ἡ φυσικὴ κάμψις τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος, χωρὶς ὅμως ἡ κάμψις αὕτη νὰ σημαίνῃ καὶ στασιμότητα τούτου. Σπουδαῖοι μαθηματικοί, ὅπως ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς, ὁ Φίλων, ὁ Σπόρος, ὁ Ἀρίσταρχος, ὁ Ἥρων, ὁ Πτολεμαῖος, ὁ Διόφαντος, ὁ Μενέλαος καὶ ὁ Πάππος, συνεχίζουν καὶ συμπληρώνουν τὸ ἔργον τῶν μεγάλων προκατόχων των. Ὡς τελευταῖος μαθηματικὸς τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Ὑπατία (5ος αἰὼν μ.Χ.). Τὰ Πανεπιστήμια τοῦ Βυζαντίου ἐκαλλιέργουν τὴν μαθηματικὴν κληρονομίαν τῶν ἀθανάτων προγόνων, τὴν ὁποίαν μετέδιδον εἰς τὴν Ἑσπερίαν οἱ ὑπὸ ταύτης μετακαλούμενοι αὐτόθι ἐπὶ ἁδρᾷ ἀμοιβῇ Ἕλληνες καθηγηταί. Ἀπὸ δὲ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Καρτεσίου ἀρχίζει ἡ νέα περίοδος τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία συνεχίζεται καὶ σήμερον.

Ὡς πρῶτος συγγραφεὺς γεωμετρικοῦ βιβλίου μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Σουΐδα ὁ Ἀναξίμανδρος (. . . γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν). Ὁ Ἀναξίμανδρος ἐχρησιμοποίησε μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ τὰς ἀστρονομικάς του μελέτας. Ἀσφαλεστέρα εἶναι ἡ πληροφορία τοῦ Πρόκλου, καθ' ἣν πρῶτος συγγραφεὺς παντὸς ὅ,τι μέχρι τῆς ἐποχῆς του παρήγαγε τὸ Ἑλληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν γεωμετρίαν εἶναι ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. Τοῦτον ἠκολούθησαν, κατὰ τὸν ἴδιον συγγραφέα, ὁ Λέων ὁ μαθητὴς τοῦ Νεοκλείδου, ὁ Θεύδιος ὁ Μάγνης καὶ ὁ Εὐκλείδης (Procli diadochi, σ. 66). Πρῶτον δὲ συγγραφέα ἱστορίας τῆς γεωμετρίας ἀναφέρει ἡ παράδοσις τὸν Εὔδημον, τὸν μαθητὴν τοῦ Ἀριστοτέλους. Λέγεται, ὅτι ἀποσπάσματά τινα τῆς μὴ σωζομένης πραγματείας ταύτης εἶχε περιλάβει εἰς ἰδικήν του πραγματείαν ὁ μαθηματικὸς Γεμῖνος (1ος αἰὼν π.Χ.), ἐκ τῆς πραγματείας δὲ ταύτης ὁ Πρόκλος (5ος αἰὼν μ.Χ.) ἤντλησε πολλὰ ἐκ τῶν εἰδήσεων, τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἀφ' ὅτου ὁ Εὐκλείδης ἐξέδωκε τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα ἔργον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνονται αἱ θεμελιώδεις γνώσεις τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ὅλαι αἱ μέχρι τῆς ἐποχῆς του συναφεῖς πραγματεῖαι δὲν ἐπέζησαν πλέον. Ὅπου δὲ μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς ἀναφέρουν τοὺς ὅρους Στοιχεῖα καὶ Στοιχειωτής, ἐννοοῦν πάντοτε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸν Εὐκλείδην. Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀπὸ τοῦ 300 π.Χ. περίπου, ἐκδίδεται ἀνελλιπῶς εἰς ὅλας τὰς γλώσσας τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου. Ἐν σχέσει πρὸς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὰ Στοιχεῖα, ὁ Πρόκλος γράφει τὰ ἑξῆς (σ. 68): «νεώτερος τῶν περὶ τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος εἶναι ὁ Εὐκλείδης, ὁ συναθροίσας τὰ Στοιχεῖα καὶ διατάξας μὲν πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τελειοποιήσας δὲ πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου, προσέτι δὲ ὁ ἀναγαγὼν εἰς ἀλανθάστους ἀποδείξεις ἐκεῖνα τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα πρὸ αὐτοῦ δὲν εἶχον αὐστηρῶς ἀποδειχθῆ. Ἔζησε δὲ ὁ ἀνὴρ οὗτος ἐπὶ βασιλείας Πτολεμαίου τοῦ πρώτου, διότι καὶ ὁ Ἀρχιμήδης μνημονεύει τὸν Εὐκλείδην καὶ λέγεται, ὅτι ὁ βασιλεὺς Πτολεμαῖος ἠρώτησέ ποτε τὸν Εὐκλείδην, ἐὰν ὑπάρχῃ συντομωτέρα ὁδὸς πρὸς ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας ἐκείνης, τὴν ὁποίαν προσφέρουν τὰ Στοιχεῖα. Ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ἀτραπὸς διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας. Εἶναι λοιπὸν οὗτος νεώτερος τῶν περὶ τὸν Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι οὗτοι ἦσαν σύγχρονοι, καθὼς μαρτυρεῖ ὁ Ἐρατοσθένης. Κατὰ τὸ σύστημα τὸ ὑπ' αὐτοῦ προτιμώμενον ἦτο Πλατωνικὸς καὶ οἰκεῖος πρὸς τὴν Πλατωνικὴν φιλοσοφίαν, καὶ συνεπῶς ἔθεσεν οὗτος ὡς σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων τὴν κατασκευὴν τῶν Πλατωνικῶν σχημάτων[1]. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Ταῦτα εἶναι τὰ Ὀπτικά, τὰ Κατοπτρικά, αἱ κατὰ τὴν μουσικὴν Στοιχειώσεις, προσέτι δὲ τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον. Πολὺ θαυμάζουν αὐτὸν διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων, ἕνεκα τῆς τάξεως καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων. Διότι

---

1. Πιθανῶς ἐκ τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Πρόκλου ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Simon ὁρμώμενος, διατυπώνει τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐσπούδασεν ἐν Ἀθήναις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος (Simon, Geschichte der Mathematik σελ. 185, 1909).

δὲν κατεχώρισε πᾶν τὸ σχετικῶς γνωστόν, ἀλλὰ τὸ ἀπαραίτητον διὰ τὴν οἰκοδόμησιν τῆς γεωμετρίας, προσέτι δὲ ἐχρησιμοποίησε τοὺς παντοίους τρόπους τῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἰκεῖοι πρὸς ἐπιστήμην καὶ ἀλάνθαστοι, ἀκόμη δὲ ἐχρησιμοποίησεν ὅλας τὰς ἀποδεικτικὰς μεθόδους. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν γεωμετρίαν πολλαὶ ἀποδείξεις φαίνονται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς ἀληθεῖς, ἐνῷ εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν εἶναι, παρέδωκε διὰ τοὺς μεταγενεστέρους μεθόδους, διὰ τῶν ὁποίων ἀσκοῦνται οὗτοι εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν. Εἰς τοῦτο τὸ σύγγραμμα ἔδωκε τὸν τίτλον Ψευδάρια. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ βιβλίον χρήσιμον δι' ἄσκησιν, ἐνῷ τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὴν θεωρίαν τῶν γεωμετρικῶν πραγμάτων ἀλάνθαστον καὶ εἰσάγουν ἀσφαλῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι τὸ ἐπιθυμοῦν. Ἴσως νὰ ἐρωτήσῃ κανείς, ποῖος εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων; Ἐγὼ θ' ἀπαντήσω εἰς τὸν ἔχοντα τοιαύτην ἀπορίαν Ὁ σκοπὸς τοῦ γεωμέτρου εἶναι νὰ ἐρευνήσῃ τὰ κοσμικὰ σχήματα (κανονικὰ πολύεδρα) ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων καὶ καταλήγων εἰς τὴν ἐγγραφήν των εἰς σφαῖραν. Διὰ τὸν μανθάνοντα τὴν γεωμετρίαν τίθεται ὡς σκοπὸς ἡ ἄσκησις τῆς διανοίας. Διότι, ὅταν ὁ σπουδάζων ἀγνοῇ τὰ Στοιχεῖα, εἶναι ἀδύνατον νὰ κατανοήσῃ τὰ ἄλλα μέρη τῆς ἐπιστήμης ταύτης καὶ εἶναι ἀδύνατον ἀκόμη νὰ μάθῃ κανεὶς ἄλλα πράγματα. Διότι τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν, ὡς ἀναφέρουν σχετικῶς ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος. Σκοπὸς λοιπὸν τῶν Στοιχείων εἶναι νὰ δώσουν τὰς ἐπιστημονικὰς βάσεις εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μανθάνουν καὶ νὰ διδάξουν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς τὴν σφαῖραν τῶν Πλατωνικῶν σχημάτων».

Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος γεννήσεως καὶ θανάτου τοῦ Εὐκλείδου παραμένουν ἄγνωστα. Γνωστὸν εἶναι, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο Ἕλλην, ὅτι ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ἔνθα διηύθυνε Σχολήν, καὶ ὅτι ἤκμασε περὶ τὸ 315-275 π.Χ. Παρὰ τοῦ Πάππου πληροφορούμεθα, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ διδάσκωνται τὴν γεωμετρίαν (VII, 976), ὁ δὲ Στοβαῖος μᾶς διέσωσε τὸ ἀκόλουθον χαρακτηριστικὸν ἐπεισόδιον μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καί τινος μαθητοῦ του: «Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην «τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι»· καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας «δὸς αὐτῷ, ἔφη, τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν» (Ἀνθολ. Στοβαίου, ἔκδ. Meineke τομ. IV σ. 205). Ἑρμ.: ὅταν τις, ἀρχίσας νὰ διδάσκεται γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα, ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην «καὶ τώρα τί κέρδος θὰ ἔχω ἀφοῦ ἔμαθα τοῦτο»; Ὁ Εὐκλείδης καλέσας τὸν ὑπηρέτην του εἶπε, «δός του τρεῖς δεκάρες, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κερδίζῃ ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μανθάνει». Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουν τὰ ἑξῆς περὶ τοῦ Εὐκλείδου: «Ὁ Εὐκλείδης, υἱὸς τοῦ Ναυκράτους καὶ ἔγγονος τοῦ Ζηνάρχου, εἶναι ὁ συγγραφεὺς τῆς γεωμετρίας, παλαιὸς φιλόσοφος, Ἕλλην τὴν καταγωγήν, ἐγεννήθη εἰς τὴν Τύρον καὶ διέμενεν εἰς τὴν Δαμασκόν· οὗτος ἐδίδασκε τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας καὶ ἐξέδωκε τὸ πλέον ἔξοχον καὶ χρησιμώτατον βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον 'Αρχαὶ ἢ Στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἔργον γενικώτερον τοῦ ὁποίου δὲν ὑπῆρχε πρότερον εἰς τοὺς Ἕλληνας. Ὅθεν εἶναι εὐνόητον, ὅτι Ἕλληνες, Ρωμαῖοι καὶ ὄχι ὀλιγώτερον Ἄραβες συγγραφεῖς ἀνέλαβον τὸ καθῆκον νὰ ἐπεξηγοῦν τοῦτο καὶ ἐδημοσίευσαν πλῆθος σχολίων καὶ σημειώσεων ἐπὶ τοῦ ἔργου τούτου, ὡς καὶ περιλήψεις αὐτοῦ. Ἕνεκα τῆς σημασίας τῆς γεωμετρίας διὰ τὴν φιλοσοφίαν, οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἶχον ἀναρτήσει ἐπιγραφὴν εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, ὅτι οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ εἰσέλθῃ εἰς αὐτάς, ἐὰν δὲν ἐγνώριζε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου» (Casiri Bibliotheca Arabico - Hispana Escurialensis, I σ. 339). (T. Heath, A history of Greek mathematics, I σελ. 355).

Ἄραβες ἐπίσης συγγραφεῖς ἀναφέρουν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἦτο μαθητὴς τοῦ Σολομῶντος καὶ ὅτι ὁ Ἵππαρχος ἦτο Χαλδαῖος. Τέλος, οὗτοι ἑρμηνεύουν τὸ ὄνομα Εὐκλείδης ὡς ἑξῆς: Ucli (ἀραβιστὶ) σημαίνει κλειδί, Dis, σημαίνει μέτρον καὶ κατ' ἐπέκτασιν μέτρον γῆς. Ἄρα Εὐκλείδης (Uclidis) σημαίνει τὸ κλειδὶ τῆς γεωμετρίας! Αἱ ἀνωτέρω πληροφορίαι τῶν 'Αράβων περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου ἐλέγχονται ὡς μὴ ἀκριβεῖς. Εἶναι δὲ προφανὴς ἡ σύγχυσις τῶν συγγραφέων τούτων ὡς πρὸς ὅ,τι ἀναφέρουν διὰ τὴν ἐπιγραφήν, τὴν ὁποίαν εἶχον ἀναρτήσει οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, πρὸς τὴν ἀναγραφὴν εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». 'Επίσης καὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν καταγωγὴν τοῦ Πυθαγόρου καὶ Ἱππάρχου ἀραβικαὶ εἰδήσεις εἶναι ἀνάξιαι προσοχῆς.

ΤΟ ΕΡΓΟΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τὰ Στοιχεῖα περιέχονται εἰς 13 βιβλία. Συνεκδίδονται ὅμως μετὰ τούτων καὶ ἄλλα δύο βιβλία, τὸ 14ον καὶ τὸ 15ον, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι βέβαιον, ὅτι δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Περὶ τῶν δύο τούτων βιβλίων θὰ γίνῃ μνεία μετὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ περιεχομένου τῶν 13 βιβλίων. Κατὰ τὰς τελευταίας ἑκατονταετίας διῄρουν τινὲς τὰ Στοιχεῖα ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου καὶ διατάξεως τῆς ὕλης εἰς τέσσαρα κύρια μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἐρευνῶνται γεωμετρικὰ μεγέθη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ αἱ ἀμοιβαῖαι αὐτῶν σχέσεις, καθ' ἃς τὰ μεγέθη ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα. Καὶ ὅταν μὲν ταῦτα εἶναι ἴσα, εἶναι ἀρκετὴ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος αὐτῶν, ὅταν δὲ εἶναι ἄνισα, δέον νὰ μετρηθῇ ὁ βαθμὸς τῆς ἀνισότητος. Πρὸς τοῦτο ὅμως χρειάζεται ὁ ἀριθμός, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ μέτρον ἑκάστου μεγέθους, καὶ συνεπῶς ἀπαιτεῖται ἡ σπουδὴ τῶν ἀριθμῶν, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων. 'Εν τοσούτῳ ὅμως ὁ πλήρως ὁρισθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἐξαρκεῖ εἰς τὴν μέτρησιν ὅλων ἐκείνων τῶν μεγεθῶν, ἅτινα ὑπόκεινται εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν. Ὑπάρχουν γεωμετρικὰ ἀντικείμενα, γραμαὶ ἢ ἐπιφάνειαι κλπ., ἅτινα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν μὲ τὸ αὐτὸ κοινὸν μέτρον. Ταῦτα ὀνομάζονται ἀσύμμετρα μεγέθη καὶ ἡ σπουδὴ τούτων εἶναι ἀπαραίτητος. Ὅθεν, τὸ τρίτον μέρος τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν (κατά τινας, ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν περιέχει ἐν ἑαυτῇ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν). Τέλος τὸ τέταρτον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων τῶν στερεῶν καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου.

Εἰδικώτερον: Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περιέχονται 23 ὅροι (ὁρισμοί), πέντε αἰτήματα, ἐννέα κοιναὶ ἔννοιαι καὶ 48 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Οἱ ὁρισμοὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας φαίνεται, ὅτι ἔχουν διατυπωθῆ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, προσπαθοῦντος νὰ ἐκφράσῃ τὰ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ἐν σχέσει πρὸς τούτους ἀναφερόμενα. Οἱ περισσότεροι ὅμως ὁρισμοὶ θεωροῦνται ὡς διατυπωθέντες ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν μὴ Πυθαγορείων τῶν ἀκμασάντων ἐν Ἀθήναις πρὸ τῆς ἐποχῆς τῆς λειτουργίας τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος. Τὰ πρῶτα 26 θεωρήματα τοῦ πρώτου βιβλίου ἀφοροῦν γενικῶς εἰς τὰ τρίγωνα, ἐνῷ χρῆσις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν γίνεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ 27ον θεώρημα. Ὡς συνάγεται δὲ ἀπὸ δύο χωρία τοῦ Ἀριστοτέλους, τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ 28ον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ἐπίσης εἰς ἰδιότητας παραλλήλων, ἔχουν εὑρεθῆ εἰς ἐποχὴν παλαιοτέραν τοῦ Ἀριστοτέλους (Ἀναλυτ. πρότ. II, 17, 66. Ἀναλυτ. ὕστ. 1, 5, 74, 13-16). Μέχρι τοῦ 32ου θεωρήματος συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν παραλλήλων, ἐνῷ τὰ θεωρήματα 33-48 περιέχουν σπουδὴν παραλληλογράμμων, τριγώνων καὶ τετραγώνων, σχετικὴν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν. Τὸ 47ον θεώρημα εἶναι τὸ λεγόμενον Πυθαγόρειον θεώρημα, ἐνῷ τὸ 48ον, τὸ τελευταῖον τοῦ πρώτου βιβλίου, εἶναι τὸ ἀντίστροφον τούτου.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει δύο ὁρισμοὺς καὶ 14 θεωρήματα καὶ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐφαρμογὰς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Δι' αὐτῶν σπουδάζεται ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἀπὸ τετράγωνα καὶ ὀρθογώνια εἰς ποικίλους συνδυασμούς, διὰ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως κλπ. χρησιμοποιουμένου πολὺ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ὅπερ καλεῖται γνώμων. Ὁ δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ βιβλίου τούτου ἀφορᾷ εἰς τὸν γνώμονα, ὅστις εἶναι εὕρημα τοῦ Ἀναξιμάνδρου (. . . εὗρε δὲ Ἀναξίμανδρος καὶ γνώμονα πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι· Διογ. Λαέρτιος II 1-2 (εὗρε δὲ καὶ τὸν γνώμονα πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ἔστησεν αὐτὸν πρὸς μέτρησιν τῆς σκιᾶς εἰς τὸ ἡλιακὸν ὡρολόγιον τῆς Λακεδαίμονος (Σπάρτης)). Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει καὶ ἐφαρμογὴν τῆς γεωμετρίας εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὸ μέγιστον μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα ἀφοροῦν εἰς ἀλγεβρικὰς ταὐτότητας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς ἀκολούθως, ἐὰν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, . . . νοήσωμεν τμήματα εὐθειῶν γραμμῶν, ἤτοι:

1. $\alpha(\beta+\gamma+\delta)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$
2. ἐὰν $\beta+\gamma=\alpha$, τότε $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha^2$
3. $(\alpha+\beta)\alpha=\alpha^2+\alpha\beta$
4. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
5. $\alpha\beta+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
6. $(2\alpha+\beta)\beta+\alpha^2=(\alpha+\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta)^2+\alpha^2=2(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2$
8. $4(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2=[(\alpha+\beta)+\alpha]^2$
9. $\alpha^2+\beta^2=2\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2\right]$
10. $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$.

Ὡς ἑνδεκάτη πρότασις εἶναι τὸ λεγόμενον πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς ἀποδιδόμενον, κατὰ τὴν εἰς τὸ β' βιβλίον τῶν Στοιχείων διατύπωσιν, εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι, ὡς γνωστόν, δοθὲν τμῆμα εὐθύγραμμον νὰ διαιρεθῇ οὕτω πως εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὸ δοθὲν τμῆμα καὶ τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου μέρους. Κατὰ τοὺς νεωτέρους κριτικοὺς ἡ ἀλγεβρικὴ σημασία τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι, ὅτι ἐπιζητεῖται δι' αὐτοῦ ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2=\alpha(\alpha-x)$ ἢ $x^2+\alpha x=\alpha^2$. Τὰ θεωρήματα 12 καὶ 13 τοῦ βιβλίου τούτου ἀφοροῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τριγώνου κειμένης ἀπέναντι ἀμβλείας ἢ ὀξείας γωνίας, ἐνῷ τὸ 14 πρόβλημα σπουδάζει τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα.

Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον περιέχονται 11 ὁρισμοὶ καὶ 37 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἀφορᾷ εἰς τὸν κύκλον, τὴν μόνην καμπύλην γραμμήν, τὴν ὁποίαν συναντῶμεν εἰς τὰ Στοιχεῖα, καὶ τὴν ἐπαφὴν ἢ τομὴν κύκλου καὶ εὐθείας, ἢ τομὴν κύκλων. Ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως εἶναι τὸ 16ον θεώρημα, ἔνθα γίνεται λόγος περὶ γωνίας, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου, τὸ πρῶτον ἀπαντώμενον θεώρημα περὶ ἐπαφῶν.

Εἰς τὸ 4ον βιβλίον περιέχονται ἑπτὰ ὁρισμοὶ καὶ 16 προβλήματα, ἀφορῶντα εἰς συνδυασμὸν κύκλου καὶ εὐθείας καὶ εἰς τὴν ἐγγραφὴν καὶ περιγραφὴν εἰς κύκλον κανονικῶν πολυγώνων. Μεταξὺ τῶν τελευταίων τούτων περιλαμβάνεται τὸ πεντάγωνον, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὁποίου χρησιμοποιεῖται τὸ 11ον πρόβλημα τοῦ δευτέρου βιβλίου, τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς.

Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον σπουδάζεται ἡ ἀνισότης μεταξὺ γεωμετρικῶν ἀντικειμένων καὶ ἡ μέτρησις αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι γεωμετρικὴ ἢ ἀριθμητική. Ἡ μέτρησις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Τὰ θεωρούμενα κατὰ τὴν σπουδὴν ταύτην μεγέθη παριστάνονται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 ὁρισμοὺς καὶ 25 θεωρήματα.

Εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν ὁμοίων γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἡ ὁμοιότης τῶν σχημάτων τούτων προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Διὰ πρώτην φορὰν ἐνταῦθα εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς συνθέτου ἀναλογίας, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον. Εἰς τὸ 27ον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν. Κατὰ τοῦτο, εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν, ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς παραστάσεως $x(\alpha - x)$ λαμβάνεται, ὅταν $x = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 5 ὁρισμοὺς καὶ 33 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τὰ βιβλία 7ον, 8ον καὶ 9ον εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ 7ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιέχει 23 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα, γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, ὡς καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 8ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ 27 θεωρήματα, συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 9ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν. Σημειώνομεν ἰδιαιτέρως τὸ 20ὸν θεώρημα, ἔνθα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ μόνον 36 θεωρήματα.

Τὸ 10ον βιβλίον εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ὅλων καὶ περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Ὡς πρῶτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ ἑξῆς: ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μέγεθος μικρότερον τοῦ μικροῦ μεγέθους. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ὑπὸ τῶν νεωτέρων καλουμένης ἐξαντλητικῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καὶ συχνότατα κατόπιν ὁ Ἀρχιμήδης, εἶναι δὲ συναφὲς πρὸς τὸ σήμερον καλούμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου καὶ πρὸς τὸν 4ον ὁρισμὸν τοῦ πέμπτου βιβλίου, περικλείοντος τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 4 ὁρισμοὺς καὶ 115 θεωρήματα.

Τὸ 11ον βιβλίον ἐρευνᾷ τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς σχέσεις εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδα ἢ ἐπιπέδων μεταξύ των, ὡς καὶ τὰς σχέσεις παραλληλεπιπέδου καὶ πρίσματος. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 28 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα.

Τὸ 12ον βιβλίον ἐρευνᾷ σχέσεις τινὰς στερεῶν, χωρὶς νὰ ἐπιχειρῇ οὐδεμίαν συγκεκριμένην ἀριθμητικὴν μέτρησιν. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τέλος εἰς τὸ 13ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν εἰς κύκλον ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων, ἡ διακοπεῖσα εἰς τὸ 4ον βιβλίον, καὶ σπουδάζεται ἡ ἐγγραφὴ τῶν κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν, μὲ τελικὸν συμπέρασμα, ὅτι μόνον τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφοῦν εἰς σφαῖραν, ἤτοι τὸ τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, ὁ κύβος καὶ τὸ δωδεκάεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι πεντάγωνα κανονικά. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα. Τὸ σύνολον τῶν προτάσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὰ Στοιχεῖα ἀνέρχεται εἰς 465. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἔργα του, τὰ ὁποῖα σώζονται, οὐδεμία ὑπάρχει εἰσαγωγή, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἐὰν αἱ πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου συνωδεύοντο ὑπὸ εἰσαγωγῆς τινος, οὐδεὶς δὲ ὑπαινιγμὸς ἀπαντᾷ περὶ τούτου εἰς τὰς ἐργασίας τῶν σχολιαστῶν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐξ ὅλων τῶν σωζομένων σχολίων συνάγεται, ὅτι τὰ Στοιχεῖα δὲν εἶναι ἐξ ὑπαρχῆς προσωπικὴ παραγωγὴ τοῦ Εὐκλείδου. Σχετικῶς ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Γεμῖνος γράφει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων πραγματείας τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος, Εὐδόξου καὶ Θεαιτήτου. Τὸ 1ον, 2ον καὶ 4ον βιβλία τῶν Στοιχείων ἀποδίδονται εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ἐνῷ κατὰ τὸν Πρόκλον τὰ θεωρήματα 15 καὶ 26 τοῦ πρώτου βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Θαλοῦ, καὶ τὰ θεωρήματα 12 καὶ 23 τοῦ αὐτοῦ βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Οἰνοπίδου (Πρόκλ. σ. 283, 299, 333, 352). Τὸ πέμπτον βιβλίον, κατ' ἀνώνυμόν τινα σχολιαστήν, εἶναι ὁλόκληρον εὕρημα τοῦ Εὐδόξου (5ος τόμος τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, σελ. 280 καὶ 282), εἰς τοῦτον δὲ ἀποδίδεται καὶ μέρος τοῦ ἕκτου βιβλίου. Τὰ βιβλία 10 καὶ 13 ἀποδίδονται κατὰ κύριον λόγον εἰς τοὺς Πυθαγορείους, τὸν Θεαίτητον καὶ τὸν Εὔδοξον. Τὰ δὲ θεωρήματα 11 - 15 τοῦ 12ου βιβλίου ἀποδίδονται κατὰ μαρτυρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸν Εὔδοξον (Ἀρχιμ. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι, σελ. 4. Πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος, σελ. 430). Ἡ νεωτέρα κριτικὴ μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀποδίδει προσωπικῶς εἰς τὸν Εὐκλείδην τὴν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων (5ον αἴτημα Ι βιβλ.). Καίτοι δὲν εἶναι γνωστὸν τί ἀκριβῶς παρήγαγε προσωπικῶς ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ἐν τούτοις δὲν ἀμφισβητεῖται ἡ προσωπικὴ πρωτότυπος δημιουργική του συμβολή. Μετὰ μεγάλης πιθανότητος ἀποδίδονται ὑπὸ τῶν νεωτέρων κριτικῶν ὡρισμένα θεωρήματα τῶν Στοιχείων εἰς τὸν Εὐκλείδην. Ἀλλὰ καὶ μόνη ἡ διατύπωσις τῶν Στοιχείων εἶναι ἀρκετή, διὰ νὰ κατατάξῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγίστων μαθηματικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Τέλος, σημειοῦμεν σχετικῶς πρὸς τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς τὴν στερεομετρίαν, ὅτι αὗται κατὰ μεγάλην πιθανότητα προέρχονται ἐκ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἰσχυρισμὸς ἐνισχύεται καὶ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου. Ὁ Ἀρχύτας χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν λύσιν ταύτην τομὰς κώνων, κυλίνδρου καὶ τροχίλου, αἱ ὁποῖαι μαρτυροῦν περὶ μεγίστης ἀνθήσεως τῆς στερεομετρίας εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολήν. (Ἰδὲ τὴν λύσιν ταύτην εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν, εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ἑνώσεως τῶν Φυσικῶν τῆς Ἑλλάδος «ὁ φυσικὸς κόσμος» (τεῦχος 3 - 4 Μαρτίου - Ἀπριλίου 1950).

Τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων τὰς διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τούτων, τιθεμένης προτάσεώς τινος ζητεῖται ἡ εὕρεσις ἀποδεικτικῶς τῆς ἀληθείας της (θεώρημα). Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ἀνήκουν αἱ προτάσεις, εἰς τὰς ὁποίας ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ὡρισμένου γεωμετρικοῦ σχήματος (πρόβλημα). Ἐν σχέσει μὲ τὸ πρῶτον εἶδος τῶν προτάσεων, ὁ Εὐκλείδης μετὰ τὴν ἀπόδειξιν παραθέτει πάντοτε τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», ἐνῷ ἐν σχέσει μὲ τὸ δεύτερον εἶδος τῶν προτάσεων παραθέτει τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν, ἐὰν ἡ χρησιμοποίησις τῶν φράσεων τούτων ἀπετέλει συνήθειαν τῶν Πυθαγορείων ἢ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἢ τῆς Σχολῆς τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ἀπὸ τὸν πάπυρον τοῦ Rhind, ὅτι ἡ φράσις «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι» ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων μετὰ τὸ τέλος γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς, ἡ ὁποία ἐγίνετο πάντοτε ἐμπειρικῶς καὶ ἄνευ ἀποδείξεώς τινος. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν δύο τούτων φράσεων ἐξηγεῖται ἴσως ἐκ τῆς προσπαθείας τῶν Πτολεμαίων νὰ ἐμφανίσουν ἑαυτοὺς ὡς συνεχιστὰς τῆς παραδόσεως τῶν παλαιῶν Αἰγυπτίων εἰς ὅλα τὰ πεδία τοῦ πολιτισμοῦ.

Μεταξὺ τῶν προτάσεων τῶν Στοιχείων ἀπαντῶμέν τινας ὑπὸ τὸ ὄνομα πόρισμα. Ἡ ἀλήθεια τοῦ πορίσματος δὲν ζητεῖται ἐξ ὑπαρχῆς. Ἐὰν δηλ. γεωμετρικὴ πρότασις τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν καὶ εὑρεθῇ ἀποδεικτικῶς ἡ ἀλήθεια ταύτης, ἐκ ταύτης ὅμως συνάγεται καὶ ἡ ἀλήθεια ἄλλης προτάσεως, ἡ ὁποία δὲν ἐτέθη πρὸς ἀπόδειξιν, ἡ τελευταία αὕτη πρότασις ὀνομάζεται πόρισμα τῆς ἀρχικῶς τεθείσης προτάσεως.

Αἱ ἀποδεικτικαὶ μέθοδοι τῶν Στοιχείων.

Αὗται εἶναι τέσσαρες. Ἡ συνθετική, ἡ ἀναλυτική, ἡ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον ἢ ἄτοπον καὶ ἡ τῆς τελείας ἢ πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνθετικὴν μέθοδον, ὅταν τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν γεωμετρική τις πρότασις, ἀναχωροῦμεν ἐκ γνωστῶν προτάσεων στηριζομένων εἰς τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰ ἀξιώματα καὶ διὰ σειρᾶς καταλλήλων συλλογισμῶν καταλήγομεν εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς τεθείσης προτάσεως. Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος, ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Πλάτωνα, δέχεται πρὸς στιγμὴν τὸ ζητούμενον ἔστω Α, ὡς ἀληθές. Ἐκ τῆς ἀληθείας τούτου συνάγει (εἰ δυνατὸν) τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Β καὶ ἐκ ταύτης τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Γ. . . Ἐὰν ἡ ἀλήθεια τῆς τελευταίας προτάσεως Γ εἶναι γνωστὴ ἐξ ἄλλων στοιχείων, τότε συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως Α. Ὅμως ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον καὶ τοὺς Πυθαγορείους, πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον, δεχόμεθα πρὸς στιγμὴν τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν τεθεῖσαν πρὸς ἀπόδειξιν. Δι' ἄλλων ὅμως προτάσεων γνωστῶν ὡς ἀληθῶν, γνωρίζομεν ὅτι ἡ γενομένη παραδεκτὴ ὡς ἀληθὴς ἀντίθετος πρότασις εἶναι ψευδής. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη πρότασις εἶναι ἀληθής. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς μία μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν ἰσχύῃ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν. Αὕτη χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ θεωρήματα 3, 14, 27, 35 τοῦ 7ου βιβλίου, 13 τοῦ 8ου καὶ 20 τοῦ 9ου.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τῶν Στοιχείων.

Ὡς γεωμετρικὰ σχήματα χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰ Στοιχεῖα ἡ εὐθεῖα γραμμή, ὁ κύκλος καὶ τὰ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτων προκύπτοντα. Σχήματα δηλ. δυνάμενα νὰ σχεδιασθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Προβλήματα μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου ἐθεωροῦντο ἄλυτα, καίτοι ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου δὲν ἔχομεν συγκεκριμένας μαρτυρίας. Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα προβλήματα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως τῆς ὀξείας γωνίας. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον, ὅτι τὰ τρία ταῦτα προβλήματα δὲν εἶχον λύσιν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν ἄλλων καμπύλων. Ἡ χρησιμοποίησις εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν ἁπλουστάτων γεωμετρικῶν σχημάτων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου δὲν εἶναι τυχαία. Ἀκολουθεῖ τὴν γενικὴν τάσιν τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος νὰ ἀναγάγῃ τὰ πάντα εἰς ὀλίγας ἁπλᾶς γενικὰς ἀρχὰς νοήσεως, συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα, ὡς αὕτη παρέχεται κατὰ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως.

Ἡ λέξις ἀξίωμα οὐδαμοῦ ἀναφέρεται εἰς τὰ στοιχεῖα, καίτοι αὕτη μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐννοίας ὅμως ἀξιωμάτων ἐκφράζουν τὰ αἰτήματα καὶ αἱ «κοιναὶ ἔννοιαι» τῶν Στοιχείων. Τὴν διάκρισιν μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος παρέχει ὡς κάτωθι ὁ Πρόκλος εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ (σ. 178). «1) Τὰ αἰτήματα εἶναι πρὸς τὰ ἀξιώματα ὡς τὰ προβλήματα πρὸς τὰ θεωρήματα. Τὰ αἰτήματα ἰσχυρίζονται τὴν δυνατότητα μιᾶς κατασκευῆς, ἥτις δὲν δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς ἄλλας κατασκευὰς γενομένας δεκτὰς ὡς δυνατάς. Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν τὴν ἰδιότητα, ἥτις ἄνευ ἀποδείξεως δύναται νὰ προσκρμοσθῇ εἰς ἓν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ ἔχει ἀποδειχθῇ ἤδη ἢ λαμβάνεται αἰτηματικῶς. 2) Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ πᾶν μέγεθος καὶ ἰσχύουν καὶ ἐκτὸς τῆς γεωμετρίας. Τὰ αἰτήματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν μόνον εἰς γεωμετρικὰ σχήματα. 3) Τὰ ἀξιώματα ἰσχύουν καθ' ἑαυτά, δηλ. ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημασίας τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων ἐκφράσεων (διατυπώσεων). Τὰ αἰτήματα δὲν προέρχονται κατ' ἀνάγκην ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων διατυπώσεων». Ἡ σημερινὴ γεωμετρία, ὡς γνωστόν, χρησιμοποιεῖ μόνον τὴν λέξιν ἀξίωμα.

Ἡ λέξις λῆμμα σημαίνει λῆψιν ἀρχῆς τινος γεωμετρικῆς χρησίμου πρὸς ἀπόδειξιν προτάσεων. Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει ταύτην ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀξιώματος, ὅπως π.χ. εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου I, ἔνθα χρησιμοποιεῖ, ὡς λαμβανόμενον, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Εὐκλείδης εἴς τινας περιπτώσεις εἰς τὰ Στοιχεῖα χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν λῆμμα καὶ ὑπὸ ἄλλην ἔννοιαν. Τὴν θεωρεῖ ὡς ἐκφράζουσαν βασικόν τι θεώρημα χρήσιμον διὰ περαιτέρω ἐρεύνας καὶ προβαίνει εἰς ἀπόδειξιν τούτου. Τέλος, ὁ ὅρος «διορισμὸς» εἶναι εὕρεσις τοῦ μαθηματικοῦ Λέοντος, κατὰ τὸν Πρόκλον. Ἡ φράσις πρόβλημά τι ἔχει ἢ οὐκ ἔχει διορισμόν, σημαίνει πότε πρόβλημά τι εἶναι δυνατὸν ἢ ἀδύνατον. Ἔρευναι ὅμως ἐπὶ τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ μιᾶς κατασκευῆς ἦσαν γνωσταὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σωκράτους (Μένων 86) καὶ συνεπῶς ἡ εἴδησις, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πρόκλος, δὲν εἶναι ἀκριβής.

Γλωσσικῶς ἐξεταζόμενα τὰ Στοιχεῖα παρουσιάζουν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ὁμοιομορφίαν. Ἐὰν προχωρήσωμεν ὅμως εἰς συγκριτικὴν σπουδὴν τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τοῦ ἔργου, θὰ διακρίνωμεν ἐνίοτε φραστικάς τινας ἀνομοιομορφίας, προσθήκας ἢ ἀφαιρέσεις, ὀφειλομένας εἰς τοὺς κατὰ καιροὺς διαφόρους ἐκδότας τῶν Στοιχείων, οἵτινες ἐπέφερον εἰς αὐτὰ τὰς κατὰ τὴν γνώμην των ἀναγκαίας μεταβολάς. Καλυτέρα ἔκδοσις τῶν Στοιχείων θεωρεῖται σήμερον ἡ ἐν Λειψίᾳ γενομένη ὑπὸ τοῦ Δανοῦ I. Heiberg (1883), ἡ ὁποία ὡς ἀπώτερόν της θεμέλιον ἔχει ἔκδοσιν παλαιοτέραν τῆς γενομένης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (4ος αἰὼν μ.Χ.). Ἡ παροῦσα ἔκδοσις χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκδοσιν I. Heiberg.

Ἄλλαι πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ Εὐκλείδης πλὴν τῶν Στοιχείων ἔγραψε σειρὰν ὅλην ἔργων, μερικὰ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν, ἐνῷ ἄλλα ἀπωλέσθησαν. Τὰ περισωθέντα εἶναι 1) Δεδομένα 2) Ὀπτικά. 3) Κατοπτρικά. 4) Φαινόμενα (ἀστρονομικόν). 5) Κατατομὴ κανόνος. 6) Εἰσαγωγὴ ἁρμονική. Διὰ τὴν «Κατατομὴν κανόνος», ἡ ὁποία περιέχει στοιχεῖα τῆς θεωρίας περὶ μουσικῆς τοῦ Πυθαγόρου, ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι γνήσιον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Κατ' ἄλλους, τοῦτο ἀποτελεῖ περίληψιν γενικωτέρου περὶ μουσικῆς ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον «Στοιχεῖα μουσικῆς», τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν σώζεται. Διὰ τὴν μουσικὴν πραγματείαν «Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ» ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ τοῦ Κλεομήδους. Ἀπολεσθέντα ἔργα μνημονεύονται 1) Πορίσματα, περιεχόμενα εἰς τρία βιβλία, 2) Τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον, σωζόμενον κατὰ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, 3) Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, δύο βιβλία, ἐξ ὧν σώζονται μόνον 4 λήμματα περιλαμβανόμενα εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου, 4) Κωνικά. 4 βιβλία, 5) Ψευδάρια, περὶ τοῦ περιεχομένου τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου. Περὶ κωνικῶν εἶχε γράψει κατὰ τὸν Πάππον πρὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς 4 βιβλία ὁ περίφημος μαθηματικὸς Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος. Ἐξ ἀραβικῶν δὲ καὶ λατινικῶν ἀποσπασμάτων λαμβάνομεν τὴν εἴδησιν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶχε γράψει πραγματείαν ἀφορῶσαν εἰς τὴν μηχανικήν. Ἐκ περισωθέντων ἀποσπασμάτων καὶ διαμνημονεύσεως χωρίων τινῶν ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων, ἀνασυνεκροτήθη μετά τινος ἐπιτυχίας τὸ ἀπολεσθὲν ἔργον «Πορίσματα».

Ἡ λέξις πόρισμα ἐνταῦθα δὲν ἔχει τὴν συνήθη ἔννοιαν τοῦ πορίσματος, ὅπως ἀπαντῶμεν αὐτὴν εἰς τὰ Στοιχεῖα.

Πρόκειται περὶ προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς γεωμετρικοὺς τόπους καὶ αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μεῖξις θεωρημάτων καὶ προβλημάτων. Αἱ προτάσεις αὗται ἀνήρχοντο εἰς τὸν ἀριθμὸν 171. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν «Πόρισμα», διασωθέν, ὡς ἀναφερόμενον εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου (VII), καὶ ἔχον ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τέμνωνται αἱ γραμμαὶ ἑνὸς κλειστοῦ τετραπλεύρου εἰς 6 σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τρία δίδονται, ὡς κείμενα ἐπ' εὐθείας, καὶ ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν ὑπολοίπων σημείων τὰ δύο κεῖνται ἕκαστον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, τότε τὸ τελευταῖον σημεῖον ἔχει ὡς γεωμετρικὸν τόπον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δύναται νὰ προσδιορισθῇ. Τὸ πόρισμα τοῦτο, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ Πάππου, ἐσπουδάζετο εἰς δέκα περιπτώσεις, ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν σημείων καὶ εὐθειῶν. Ἐκ τοῦ πορίσματος τούτου καὶ μόνον γίνεται φανερὰ ἡ σημασία τοῦ περιεχομένου τοῦ ἀπολεσθέντος σχετικοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ πραγματεία Δεδομένα περιέχει 94 προτάσεις, τῶν ὁποίων προηγοῦνται 15 ὁρισμοί. Τὸ ἔργον τοῦτο θεωρεῖται ὡς περιέχον ἐφαρμογὰς ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Στοιχείων. Ἀναφέρομεν μερικὰς ἐκ τῶν προτάσεων τούτων. 1) Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ἔχει δοθῇ ὁ λόγος. 4) Ἐὰν ἀπὸ δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ δεδομένον μέγεθος, τὸ λοιπὸν μέγεθος ἔχει δοθῇ. 22) Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχουν ἕκαστον δεδομένον λόγον πρός τι μέγεθος, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει πρὸς τοῦτο δεδομένον λόγον. 41) Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν δεδομένην καὶ ἔχῃ δοθῇ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν, τότε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου εἶναι δεδομένον. 92) Ἐὰν εἰς δοθέντα κατὰ τὴν θέσιν κύκλον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ ὡς δοθέν, καὶ διὰ τοῦ σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, τότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἐκ τοῦ σημείου μέχρι τῆς περιφερείας εὐθείας εἶναι δεδομένον.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο πραγματειῶν τοῦ Εὐκλείδου Δεδομένα καὶ Στοιχεῖα συνάγεται, ὅτι ἡ πραγματεία Δεδομένα εἶναι πολὺ μεταγενεστέρα τῶν Στοιχείων. Καὶ εἰς ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα, λύονται ἐξισώσεις ἀλγεβρικαὶ δευτέρου βαθμοῦ γεωμετρικῶς. Ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔποψιν παρουσιάζει ἐνδιαφέρον καὶ τὸ σωζόμενον μοναδικὸν ἀριθμητικὸν ἐπίγραμμα τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὐκλείδην (Συλλογὴ ἀρχαίων ἐπιγραμμάτων, τῶν Βυζαντίνων Κεφάλα-Πλανούδη, τόμος 3ος), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
«Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις».
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίιστορ.

ἑρμηνεία: Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν·
ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζεν ἡ ὄνος.
Ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε·
«Μητέρα, γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι;
ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον, θὰ ἔφερα διπλάσιον ἀπὸ τὸ βάρος σου·
ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα, θὰ εἴχαμε ἴσον».
Εἰπὲ τὸ μέτρον (τὸν ἀριθ. τῶν σάκκων), ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας.

(σημ.: Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν σάκκων τῆς ἡμιόνου κληθῇ y καὶ τῆς ὄνου x, τότε τὸ σύστημα πρώτου βαθμοῦ θὰ εἶναι $y+1=2(x-1)$ καὶ $y-1=x+1$, ἐξ οὗ $x=5$ καὶ $y=7$).

Τὸ φερόμενον ὡς 14ον βιβλίον τῶν Στοιχείων εἶναι πραγματεία τοῦ Ὑψικλέους τοῦ Ἀλεξανδρέως (περίπου 150 π.Χ.), ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς ὡς συγγραφεὺς ἀστρονομικῆς πραγματείας, ἥτις σώζεται, καὶ ἄλλων ἔργων, ὅπως τὰ περὶ ἁρμονίας, περὶ σφαιρῶν καὶ περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ 14ου βιβλίου, φαίνεται ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἔγραψε πραγματείαν, εἰς τὴν ὁποίαν περιελάμβανε σύγκρισιν δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου, ἐγγραφομένων εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν καὶ τὸν λόγον τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ στερεὰ ταῦτα. Κατὰ ταύτην, ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῶν στερεῶν τούτων, διότι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 12 θεωρήματα. Τέλος, τὸ 15ον βιβλίον θεωρεῖται ὡς ἔχον μικρότερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ τὸ 14ον. Τοῦτο περιέχει κατασκευὰς στερεῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πέντε πρῶται εἶναι αἱ ἑξῆς: 1) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ πυραμίς. 2) Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 3) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 4) Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον νὰ ἐγγραφῇ κύβος. 5) Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον νὰ ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον. Μετὰ τὴν κατασκευὴν ταύτην, ὁ συγγραφεὺς τοῦ βιβλίου τούτου ἀναφερόμενος εἰς τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν τῶν κανονικῶν στερεῶν, λέγει ὅτι ταύτας εὗρεν ὁ μέγας αὐτοῦ διδάσκαλος Ἰσίδωρος.

Πρόκειται περὶ τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ ἐκ Τύρου καὶ συνεπῶς οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ἀνήκει εἰς τὸν Εὐκλείδην.

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α΄. Αἱ πρῶται ἀρχαὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀνάγονται εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ Ἕλληνες ἔθεσαν εἰς ἑαυτοὺς τὸ ἐρώτημα: αἴτιον καὶ προέλευσις τοῦ Κόσμου. Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο πρῶτος, κατὰ τὴν παράδοσιν, ἐπεχείρησε νὰ δώσῃ ὁ Θαλῆς, μετὰ τοῦτον ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ἀναξίμανδρος καὶ μετ' αὐτὸν ὁ Πυθαγόρας. Ὁ Ἀναξίμανδρος εἶναι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος σπουδάζει ἐπὶ τῇ βάσει ἀριθμῶν τὰς σχέσεις μεγέθους Γῆς, Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι φρονοῦν, ὅτι μόνον τὸ ἔχον μορφὴν δύναται νὰ γνωσθῇ. Μορφὴν ὅμως οὐχὶ ὑπὸ τὴν Πλατωνικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ἀλλὰ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ σχήματος. Ἡ μορφὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέτρον. Ὅθεν ἡ ἔρευνα τῆς φύσεως δέον νὰ στηριχθῇ κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μέτρου. Εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν εὑρίσκονται καὶ σπουδάζονται αἱ τέσσαρες βασικαὶ συνεχεῖς ἀναλογίαι. Ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρική, ἡ ἁρμονικὴ καὶ ἡ μουσική. Διὰ τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν ὁ Ἰάμβλιχος (ἐν τῇ εἰσ. Ἀριθμ. Νικομάχου) λέγει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας εἰσήγαγεν αὐτὴν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἐνῷ διὰ τὰς τρεῖς πρώτας ἰσχυρίζεται, ὅτι αὗται εἶναι εὕρημα τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῆς Σχολῆς του. Δὲν θεωρεῖται ὅμως βάσιμος ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Ἰαμβλίχου, ὅτι ἡ μουσικὴ ἀναλογία εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος. Αἱ τέσσαρες αὗται συνεχεῖς ἀναλογίαι ἔχουν ὡς ἑξῆς:

1) Ἀριθμητική: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$

2) Γεωμετρική: $\alpha : \beta = \beta : \gamma$

3) Ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία: $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$

(ἡ ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία ἀναλογία εἶναι ὁμοία πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον τῶν σφαιρικῶν κατόπτρων, ἔνθα β ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος καὶ α καὶ γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου).

4) Ἡ μουσική: $\alpha : \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha + \beta} : \beta$

Εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Νικομάχου ἐκ Γερασῶν περὶ Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς, γραφεῖσαν περὶ τὸ 30 μ.Χ., σώζεται ἀπόσπασμα ἔργου τοῦ Πυθαγορείου Φιλολάου, ἀναφέροντος τὸν κύβον ὡς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν. Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εὑρίσκονται πράγματι εἰς ἁρμονικὴν συνεχῆ ἀναλογίαν, διότι εἶναι $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$

Τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριῶν πρώτων ἀναλογιῶν ἔχει δώσει ὁ Ἀρχύτας, ὡς ἐξάγεται ἐκ τινος ἀποσπάσματος πραγματείας του μνημονευομένου εἰς τὰ «Πτολεμαίου ἁρμονικὰ» τοῦ Πορφυρίου.

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6, 12 εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Ἡ μουσικὴ ἀναλογία δύο ἀριθμῶν περιέχει ὡς δευτέραν ἀνάλογον τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς τρίτην ἀνάλογον τὸ ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν. Ὁ κύβος, πάλιν, παριστᾷ μουσικὴν ἀναλογίαν σχηματιζομένην ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν 6 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν 12, ἤτοι εἶναι $6 : \frac{2.6 \cdot 12}{6+12} = \frac{6+12}{2} : 12$ ἢ $6 : 8 = 9 : 12$. Τὴν μουσικὴν ταύτην ἀναλογίαν ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων εἰς τὴν Ἐπινομίδα (κεφ. 12, 990 C κ. ἑ.).

Κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, αἱ ἀναλογίαι ἀποτελοῦν μορφὰς λογισμοῦ, αἱ ὁποῖαι κυριαρχοῦν καὶ διέπουν τὴν ἐκ τοῦ χάους μορφικὴν δημιουργίαν τοῦ Κόσμου. Ἐφαρμογὴν δὲ τῶν ἀναλογιῶν τούτων ἀπαντῶμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ναῶν καὶ τῶν θεάτρων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Καὶ εἰς μὲν τοὺς ναοὺς παρατηροῦμεν ἐφαρμογὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, ἰδίως κατὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν κιόνων, ἐνῷ εἰς τὰ θέατρα ἐφαρμογὴν τοῦ προβλήματος τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (χρυσῆς τομῆς). Εἰς δὲ τὰ Μνημεῖα τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν παρατηροῦνται, πλὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ($6 : 8 = 9 : 12$), καὶ αἱ σχέσεις $3 : 1$, $12 : 7$, $12^2 : 7^2$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σχέσις $12 : 7$ παριστᾷ κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{3}$.

Ὁ Σωκράτης στρέφει τὴν Πυθαγόρειον ἔρευναν πρὸς σπουδὴν τῆς ἐν τῷ Κόσμῳ ἁρμονίας, εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἁρμονίας εἰς τὸν ἐσωτερικὸν ἄνθρωπον (χαρακτηριστικὸν συναφῶς εἶναι καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ Δημοκρίτου λεχθέν, ἄνθρωπος μικρὸς κόσμος), ἐνῷ ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης συνδυάζουν τὴν Πυθαγόρειον καὶ τὴν Σωκρατικὴν ἔρευναν.

Β'. Ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία ἔχει ὡς ἀντικείμενον ἐρεύνης τὸν ἐνορώμενον χῶρον. Τοῦτον δέχεται ὡς τρισδιάστατον καὶ προβαίνει εἰς τὴν διατύπωσιν ἁπλῶν βασικῶν ἐννοιῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιχειρεῖ τὴν ἔρευναν. Γνώρισμα τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ διατύπωσις ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρων ἁπλῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν. Τὰς ἁπλᾶς ἀρχικὰς ἐννοίας αὐτῆς συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα διαιρεῖ ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία εἰς τρεῖς κατηγορίας. Πρῶτον εἰς ὁρισμούς, δεύτερον εἰς αἰτήματα καὶ τρίτον εἰς κοινὰς ἐννοίας, ἐνίοτε δὲ καὶ λήμματα. Ὅθεν, ἡ γενικὴ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία εἶναι ἡ λεγομένη ἀξιωματικὴ μέθοδος. Τὰ ἀξιώματα (αἰτήματα, ἔννοιαι καὶ ἐνίοτε λήμματα ἢ ὁρισμοὶ) δέον νὰ εἶναι ἀλήθειαι ὑπὸ τὴν Ἀριστοτέλειον ἑρμηνείαν τοῦ ὅρου ἀλήθεια, ἑρμηνείαν, ἥτις διαχωρίζει τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τὸν συμβολικὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον ἀπέδιδον εἰς αὐτὰ οἱ Πυθαγόρειοι*.

* Ἑρμηνείαν τῶν ὅρων «ἐνόρασις» καὶ «ἀλήθεια» παρέχει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς τὴν ἔκδοσιν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἔργου «μετὰ τὰ φυσικά» τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ εἰς συναφῆ πρὸς τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστοτέλους ἄρθρα του.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ἀξίωμα εἶναι πρωταρχικὴ ἔννοια, τὴν ὁποίαν ἀναγκαστικῶς πρέπει νὰ κατέχῃ ἐκεῖνος, ὅστις πρόκειται ν' ἀποκτήσῃ τὴν μάθησιν οἱουδήποτε πράγματος [ἀρχὴ ἣν ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον. Ἀναλυτ. ὕστερα 1, 2 (72α 17)].

Οἱ ὁρισμοί, τὰ αἰτήματα καὶ αἱ κοιναὶ ἔννοιαι, ὡς ταῦτα ἔχουν διατυπωθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἔχουν ὑποστῆ κατὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου μικρὰς μεταβολάς. Αὗται ὅμως δὲν μεταβάλλουν τὴν μορφὴν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ὡς θεμελιώδεις ὁρισμοὶ ταύτης θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι σημεῖον, γραμμή, ἐπιφάνεια, ἐπίπεδον, γωνία, στερεόν. Διὰ τὴν ἀριθμητικήν, θεμελιώδεις ὁρισμοὶ θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι μονὰς καὶ ἀριθμός. Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον, ὁ Θαλῆς εἶχεν ὁρίσει τὸν ἀριθμὸν ὡς «μονάδων σύστημα» (Ἰάμβλ. εἰς ἀριθμ. εἰσαγ. Νικομάχου σελ. 10).

Κατὰ τὰ Στοιχεῖα, σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος. Ἡ ἔννοια μέρος δηλοῖ διάστασιν, τὴν ὁποίαν ἡ Ἑλληνικὴ γεωμετρία δέχεται ὡς δεδομένην ἐκ τῶν πραγμάτων ἔννοιαν. Ἡ ἔννοια σημεῖον εἶναι ἡ θεμελιωδεστέρα τῶν ἐννοιῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ταύτην δὲ ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων, ὅταν ἀποφαίνεται περὶ τῆς σχετικότητος τῆς ἀξίας τῆς γεωμετρίας ἐν σχέσει πρὸς τὴν φιλοσοφίαν, ὡς θὰ μνημονεύσωμεν κατωτέρω. Οἱ Πυθαγόρειοι ὥριζον τὸ σημεῖον, ὡς μονάδα θέσιν ἔχουσαν. Τῆς ἐννοίας σημεῖον θεωροῦνται παράγωγοι αἱ λοιπαὶ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Τοῦτο καταφαίνεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς. Κατὰ τοῦτον εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται ἐκείνη ἡ γραμμή, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου ἐπὶ τῶν σημείων της. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς εὐθείας γραμμῆς ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἶναι σκοτεινός. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐπεχειρήθη κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἡ ἑρμηνεία του, χωρὶς ἀκόμη νὰ ἔχῃ εὑρεθῆ ἑρμηνεία τοιαύτη, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἐπιδέχεται ἀντίρρησιν. Ὁ Πλάτων ὁρίζει ὡς εὐθεῖαν γραμμὴν ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ μέσον καλύπτει τὰ ἄκρα, ἐνῷ ὁ Ἀρχιμήδης ὁρίζει αὐτήν, ὡς τὴν ἐλαχίστην γραμμὴν μεταξὺ γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα.

Ἐπιφάνεια εἶναι, κατὰ τὰ Στοιχεῖα, πᾶν ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίπεδον δὲ ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας τιθεμένη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει καθ' ὅλα αὐτῆς τὰ σημεῖα.

Γωνία ἐπίπεδος εἶναι ἡ «κλίσις» δύο εὐθειῶν συναντωμένων καὶ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας. Πλὴν τῆς τοιαύτης γωνίας, ἀναφέρεται εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου.

Στερεόν, τέλος, εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ βάθος, ἤτοι πᾶν ὅ,τι ἔχει τρεῖς διαστάσεις.

Γ') Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου καὶ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας.

Τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν γεωμετρίαν ἀπαντῶμεν διατυπουμένην τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ 'Αναξαγόρου. 'Η ἔννοια αὕτη εἶναι συναφὴς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ἐπίσης διετύπωσεν ὁ 'Αναξαγόρας, ὡς φαίνεται εἰς σωζόμενον ἐκ τοῦ ἔργου του «περὶ φύσεως» ἀπόσπασμα. 'Η διατύπωσις αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς: «οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί, (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι μὴ οὐκ εἶναι) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἔστι μεῖζον» (διότι κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ μικροῦ δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ μικρότατον, ἀλλὰ πάντοτε μικρότερον, (διότι τὸ ὑπάρχον δὲν δύναται νὰ παύσῃ ὑπάρχον, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν θεωρηθῇ) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον). 'Η ἔννοια τῆς συνεχείας ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν 'Ιπποκράτη τὸν Χῖον, ὁ ὁποῖος τὴν χρησιμοποιεῖ κατὰ τὰς ἀποπείρας αὐτοῦ πρὸς τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Χρησιμοποιεῖ δηλ. οὗτος πρὸς τοῦτο τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θεώρημα προϋποθέτον γνῶσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας περιέχει ὁ τέταρτος ὁρισμὸς τοῦ πέμπτου βιβλίου τῶν Στοιχείων ἔχων ὡς ἑξῆς: «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν». 'Η ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ὅτι, ὅταν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορά των πολλαπλασιαζομένη ἐπαρκῶς ὑπερβαίνει τὸ μεγαλύτερον μέγεθος. Σαφεστέραν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει ὁ 'Αρχιμήδης εἰς δύο αὐτοῦ πραγματείας ἀναφέρων τοῦτο ὡς λῆμμα. Εἰς τὴν πραγματείαν του «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι» ὁ 'Αρχιμήδης μνημονεύων, ὅτι ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (χρησιμοποιῶν τὸ ἀξίωμα συνεχείας), διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς: «ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου» (Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, εἶναι δυνατὸν ἡ διαφορά των λαμβανομένη πολλὰς φορὰς νὰ ὑπερβῇ ὁλόκληρον τὸ προτεθὲν μεγαλύτερον μέγεθος). Εἰς τὴν πραγματείαν του «Τετραγωνισμὸς παραβολῆς», κατὰ τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν φίλον του μαθηματικὸν Δοσίθεον, τὸ ἀξίωμα τοῦτο μνημονεύεται ὡς ἑξῆς: «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾷ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου» (ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὸ μεγαλύτερον ἐκ δύο δοθέντων μεγεθῶν ὑπερέχει, εἶναι δυνατὸν λαμβανομένη πολλάκις νὰ ὑπερβῇ τὸ δοθὲν (μεγαλύτερον) πεπερασμένον μέγεθος). 'Εν συνεχείᾳ πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην διατύπωσιν ὁ 'Αρχιμήδης προσθέτει: οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι ἐχρησιμοποίησαν τὸ «λῆμμα» τοῦτο διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι οἱ κύκλοι ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουν ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἀρχιμήδους συνάγεται, ὅτι τὸ ἀξίωμα συνεχείας δὲν εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου, ἀφοῦ τὸ ἐχρησιμοποίησαν οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι. Διότι ναὶ μὲν ὁ Εὔδοξος εἶναι προγενέστερος τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀλλὰ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος εἶναι προγενέστερος τοῦ Εὐδόξου· ἐγνώριζε δὲ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ὡς ἀναφέρεται ἀνωτέρω. Πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας συναντῶμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Δὲν εἶναι γνωστὸν πότε ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις αὕτη, εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου (ὅστις εἶναι νεώτερος τοῦ Ἀναξαγόρου 35 περίπου ἔτη). Ἐφ᾿ ὅσον λοιπὸν δὲν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐγένετο πρὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ὁ Ἀναξαγόρας εἶχε διατυπώσει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὀρθότερον εἶναι νὰ μνημονεύεται τοῦτο ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀναξαγόρου καὶ ὄχι ὡς ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου ἢ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι κατὰ τ᾿ ἀνωτέρω ἀποκλείεται νὰ ἀνήκῃ ἡ εὕρεσις τούτου εἰς τὸν Εὔδοξον ἢ τὸν Ἀρχιμήδη ἢ τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον.

Πρὸ ὀλίγων ἀκόμη ἐτῶν τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐφέρετο εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ δὲ γεωμετρίαι τῶν νεωτέρων αἱ μὴ χρησιμοποιοῦσαι τὸ ἀξίωμα συνεχείας, ὀνομάζονται «μὴ ἀρχιμήδειοι» γεωμετρίαι. Τὴν ὀνομασίαν ἀξίωμα μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιεῖ ὁ D. Hilbert εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie, 1930, σ. 30). Εἰς τὴν νεωτέραν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὀνομάζεται τοῦτο ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Κων. Καραθεοδωρῆ, ἀναφέρων τοῦτο εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, τὸ ὀνομάζει θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ἀποδίδει ὅμως εἰς τὸν Εὔδοξον καὶ τὸ διατυπώνει ὡς ἑξῆς: «Ἐὰν ε καὶ α εἶναι δύο τυχόντες πεπερασμένοι θετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ ἀκολουθία ε, 2ε, 3ε, 4ε, 5ε . . . περιέχει ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑπερβαίνουν τὸν α» (Reelle Funktionen I 1939, σελ. 15)[1].

Ὑπὸ τινων νεωτέρων ὑποστηρίζεται, ὅτι τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας ὑπενόει καὶ ὁ Δημόκριτος, ὅταν οὗτος διετύπωσε τὴν ἑξῆς ἀπορίαν· «ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν εἰς ἀπείρως λεπτὰ τμήματα, τί θὰ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἀποτεμνομένων τμημάτων; Ἴσαι ἢ ἄνισοι;» Ἀποφαίνεται δὲ οὗτος, ὅτι οὔτε ἴσαι θὰ εἶναι οὔτε ἄνισοι. Διότι, ἐὰν μὲν εἶναι ἴσαι,

1. Πρό τινων ἐτῶν ἐπεκράτει ἡ ἀντίληψις εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, ὅτι τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι θεώρημα πηγάζον ἀπὸ τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ G. Cantor. Ὁ Γερμανὸς ὅμως μαθηματικὸς Baldus ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἀξίωμα Cantor εἶναι θεώρημα προκῦπτον ἐκ τοῦ ἀξιώματος σνεχείας τοῦ Ἀρχιμήδους. (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Heidelberg 1930, σ. 12).

τὸ ἀρχικὸν σχῆμα θὰ εἶναι κύλινδρος καὶ ὄχι κῶνος, ἐὰν δὲ εἶναι ἄνισοι τότε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θὰ ἔχῃ βαθμίδας, ὅπερ ἄτοπον (Πλούταρχος, Περὶ ἐννοιῶν πρὸς Στωϊκοὺς 1079 Ε). Ἐκ τῆς διατυπώσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγεται ὑπὸ πολλῶν νεωτέρων, ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶναι ὁ πρῶτος συλλαβὼν τὴν ἰδέαν τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἡ κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων.

Ἡ πρώτη κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀποτελεῖ μέρος τῆς καθ' ὅλου κριτικῆς ἐπὶ τοῦ ὀντολογικοῦ προβλήματος, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν ὁ Παρμενίδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης. Ἡ συναφὴς πραγματεία τοῦ Ζήνωνος, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων (Παρμενίδης, 127 - 28) καὶ ἄλλοι μεταγενέστεροι συγγραφεῖς, δὲν ἐσώθη. Ἐσώθησαν ὅμως ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ταύτης, μερικὰ τῶν ὁποίων μνημονεύει ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικὴ ἀκρόασις» κατὰ τὴν ἀναίρεσιν τῶν θεωριῶν τοῦ Ζήνωνος περὶ ἀνυπαρξίας τῆς κινήσεως (Ζ, 9, 239 β κ.ἑ.).

Κατὰ τὸν Ζήνωνα, Α'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος (καὶ συνεπῶς μονὰς καὶ σημεῖον). Διότι πᾶν πλῆθος πρέπει ν' ἀποτελῆται ἀπὸ μονάδας. Ἡ μονὰς ὅμως εἶναι ἀδιαίρετος. Ἕκαστον λοιπὸν ἐκ τῶν πολλῶν πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον ἢ ν' ἀποτελῆται ἀπὸ ἀδιαιρέτους μονάδας. Ὅ,τι ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον, τοῦτο δὲν ἔχει μέγεθος, διότι πᾶν ὅ,τι εἶναι μέγεθος εἶναι διαιρετὸν ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μέρη λοιπόν, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος, διὰ νὰ ὑπάρχουν, πρέπει νὰ ἔχουν μέγεθος καὶ νὰ εἶναι διαιρετὰ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ τελευταῖον ὅμως μέρος τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως θὰ εἶναι μηδέν. Ὅ,τι ὅμως προστιθέμενον εἴς τι δὲν αὐξάνει τοῦτο ἢ ἀφαιρούμενον ἀπὸ κάτι δὲν ἐλαττώνει τοῦτο, τότε αὐτό, ὡς μηδέν, δὲν ἔχει ὕπαρξιν. Τὸ πλῆθος λοιπὸν εἶναι συγχρόνως ἀπείρως μικρὸν καὶ ἀπείρως μέγα. Ἀπείρως μικρόν, διότι κάθε μέρος του εἶναι τόσον μικρόν, ὥστε νὰ εἶναι μηδέν, πολλὰ δὲ μηδενικὰ δὲν μᾶς δίδουν μέγεθος. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὑπάρχῃ πλῆθος, τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἀπείρως μέγα. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέρη τοῦ πλήθους, τότε μεταξὺ τῶν μερῶν τούτων θὰ ὑπάρχουν ἄλλα μέρη, μεταξὺ τούτων ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Δεχόμενοι λοιπὸν τὴν ὕπαρξιν πλήθους, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν, ὅτι τοῦτο διὰ τῆς διχοτομίας ἐπ' ἄπειρον μηδενίζεται, ἐνῷ συγχρόνως διὰ τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ τῶν μερῶν του ἐπ' ἄπειρον ἄλλων μερῶν γίνεται ἀπείρως μέγα. Ὅπερ ἄτοπον.

Β'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, αὐτὰ θὰ εἶναι συγχρόνως πεπερασμένα καὶ ἄπειρα. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι αὐτὰ τόσα ὅσα εἶναι καὶ οὔτε περισσότερα οὔτε ὀλιγώτερα. Ἐὰν ὅμως εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι, τότε ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, τότε αὐτὰ εἶναι ἄπειρα. Διότι, μεταξὺ τῶν πολλῶν θὰ ὑπάρχουν ἄλλα, μεταξὺ τούτων θὰ ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὰ πολλὰ πράγματα εἶναι ἄπειρα. Προηγουμένως ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὸν νόμον τῆς λογικῆς, καθ' ὃν εἰς ἓν πρᾶγμα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποδώσωμεν συγχρόνως δύο ἰδιότητας. Ἄρα πλῆθος δὲν ὑπάρχει.

Τὴν ὕπαρξιν τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ἡ γεωμετρία διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἰσότητος γεωμετρικῶν σχημάτων δι' ἐπιθέσεως, ἀμφισβητεῖ ὁ Ζήνων διὰ τῶν ἑξῆς ἐπιχειρημάτων:

Α'. Διχοτομία.

Διὰ νὰ φθάσῃ κινητὸν ἔκ τινος ἀφετηρίας εἰς τὸ τέρμα, πρέπει προηγουμένως νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως. Πρὸ τούτου ὅμως πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος. Ἀλλὰ καὶ πρὸ τούτου πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὸ κινητὸν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα,πρέπει νὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς κίνησις δὲν ὑπάρχει.

Β'. Ἀχιλλεὺς καὶ Χελώνη.

Ἐπ' εὐθείας γραμμῆς ἵστανται ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ Ἀχιλλέως εἰς ἀπόστασιν ἔστω ἑνὸς σταδίου. Ἡ ταχύτης τοῦ Ἀχιλλέως ἔστω δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τῆς Χελώνης. Καὶ ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας συγχρόνως. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τῆς Χελώνης, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τῆς ὑπὸ τούτου διανυθείσης ἀποστάσεως, ἤτοι κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τοῦ σταδίου. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ ἔχῃ διανύσει τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἤδη διανύσει ἡ Χελώνη, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\frac{1}{12}$ ἤτοι $\left(\frac{1}{12}\right)^2$. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς διανύσῃ τὸ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, ἤτοι κατὰ $\left(\frac{1}{12}\right)^3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς ὁ Ἀχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ ποτὲ τὴν χελώνην, ἄρα δὲν κινεῖται.

Γ'. Ἡ ὀϊστὸς (ἢ ὁ ὀϊστὸς = βέλος).

Βέλος ἐκτοξευόμενον δὲν κινεῖται. Διότι, ἐὰν ὁ χρόνος καὶ ὁ χῶρος εἶναι μεγέθη, τότε περιπίπτομεν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀντιφάσεως, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀπείρως μικρὰ καὶ ἀπείρως μεγάλα. Ἐὰν ὅμως δὲν κάμωμεν ὑπόθεσίν τινα περὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου, τότε πάλιν τὸ βέλος δὲν κινεῖται. Διότι, δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι τοῦτο κινεῖται ἐντὸς τοῦ χώρου, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται, οὔτε ἐντὸς τοῦ χώρου εἰς τὸν ὁποῖον δὲν εὑρίσκεται. Μὲ ἄλλην διατύπωσιν: ἐὰν τὸ βέλος κατέχῃ χῶρον, δὲν κινεῖται, διότι κατέχει χῶρον, «κεῖται» ἐπὶ τοῦ χώρου, καὶ συνεπῶς ὡς «κείμενον» δὲν κινεῖται. Ἐὰν πάλιν δὲν κατέχῃ χῶρον, τότε τοῦτο εἶναι ἀνύπαρκτον καὶ συνεπῶς ἓν ἀνύπαρκτον πρᾶγμα δὲν ἔχει κίνησιν.

Δ΄. Οἱ ἐν τῷ Σταδίῳ κινούμενοι ἀντιθέτως ὄγκοι.

Θεωρήσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τρεῖς σειρὰς ἀντικειμένων ὡς τὸ κατωτέρω σχῆμα.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & & & \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & \longrightarrow & & & & & \\ & & & \longleftarrow & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & & \end{array}$$

Τὰ ἀντικείμενα Α μένουν ἀκίνητα, ἐνῷ τὰ ἀντικείμενα Β, Γ κινοῦνται συγχρόνως κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις και φθάνουν εἰς τὴν θέσιν τοῦ κάτωθι σχήματος.

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array}$$

Ὅταν τὸ B_1 φθάσῃ κάτωθεν τοῦ A_4 θὰ ἔχῃ διέλθει διὰ τῶν δύο ἀντικειμένων A_3, A_4, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ Γ_1 διὰ νὰ φθάσῃ κάτωθεν τοῦ B_4, θὰ ἔχῃ διέλθει διὰ τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων B_1 B_2 B_3 B_4. Τώρα, διερωτᾶται ὁ Ζήνων: Πῶς τὸ B_1 εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἔχει διέλθει δύο ἀποστάσεις ἀνίσους ἤτοι τὰς A_3 A_4 καὶ τὰς Γ_1 Γ_2 Γ_3 Γ_4, ἤτοι πῶς ἔχει συγχρόνως μίαν ἁπλῆν ταχύτητα καὶ μίαν διπλῆν; (Σημ. Ὁ Ἰταλὸς γεωμέτρης F. Enriques θεωρεῖ τὸ ἐπιχείρημα τοῦτο τοῦ Ζήνωνος ὡς τὴν πρώτην διατύπωσιν τῆς θεωρίας περὶ σχετικότητος).

Διὰ τὸν χῶρον ὁ Ζήνων ἰσχυρίζεται, ὅτι οὗτος δὲν ὑπάρχει.

Διότι: διὰ νὰ ὑπάρχῃ χῶρος, πρέπει οὗτος νὰ ὑπάρχῃ εἰς χῶρόν τινα. Ὁ δεύτερος οὗτος χῶρος νὰ ὑπάρχῃ εἰς ἄλλον χῶρον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα χῶρος δὲν ὑπάρχει.

Ὁ Ἀριστοτέλης ἀνασκευάζων τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος, γράφει ὅτι ὁ Ζήνων παραλογίζεται. Διότι ἡ ὅλη ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ζήνωνος στηρίζεται εἰς τὴν ἔννοιαν ἄπειρον, τὴν ὁποίαν ὁ Ζήνων δὲν προσδιορίζει. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὸ ἄπειρον εἰς δύο κατηγορίας, εἰς ἄπειρον δυνάμει καὶ ἄπειρον ἐνεργείᾳ. Τὸ ἄπειρον ἐνεργείᾳ εἶναι συμβατικὴ ἔννοια τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος μὴ ὑπάρχουσα εἰς τὴν πραγματικότητα. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν π.χ. τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν σχηματίζοντες ἀριθμούς, χωρὶς νὰ φθάνωμεν εἰς πέρας τι. Ὁ σχηματισμὸς οὗτος τῶν ἀριθμῶν παρέχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου ἐνεργείᾳ. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ ζήτημα μὲ τὸ δυνάμει ἄπειρον. Τοῦτο εἶναι ἄπειρον ἐν πεπερασμένῳ καὶ ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ταύτης, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον, δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπερβῶμεν κατὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον λῆψιν τὸ πεπερασμένον μέγεθος, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Τὸ ἄθροισμα δηλ. τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν 2.

Ἡ ἐν προκειμένῳ ἀμφισβήτησις τοῦ Ζήνωνος ἔγκειται εἰς τοῦτο: Ἡ εὐθεῖα γραμμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ σημεῖα. Μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ὑπάρχουν ἄλλα σημεῖα, μεταξὺ τούτων ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ὥστε ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, εἶναι κατὰ τὸ μέγεθος ἀπροσδιόριστος. Πρέπει δηλ. νὰ δικαιολογηθῇ ἄνευ ἀντιρρήσεων ὁ ὅρος «λαμβάνομεν εὐθεῖαν» καὶ τοῦτο κατὰ τὸν Ζήνωνα εἶναι ἀδύνατον.

Κατωτέρω παραθέτομεν ἀποσπάσματα ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοτέλους «μετὰ τὰ Φυσικὰ» ἀφορῶντα εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

«Ἄπειρον εἶναι ἢ ὅ,τι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διεξέλθωμεν, ἐπειδὴ φυσικῶς δὲν καθίσταται δυνατὴ μία διέξοδος, ἀπαράλλακτα καθὼς ἡ φωνὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀντικείμενον τῆς ὁράσεως, ἢ ὅ,τι δίδει διέξοδον χωρὶς ὅμως ἡ διέξοδος αὐτὴ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα πέρας ἢ ὅ,τι μὲ δυσκολίαν δυνάμεθα νὰ διεξέλθωμεν ἢ ὅ,τι ἐνῷ ἐκ φύσεως εἶναι κατεσκευασμένον νὰ ἔχῃ διέξοδον ἢ πέρας, δὲν ἔχει οὔτε τὸ ἓν οὔτε τὸ ἄλλο. Ἄπειρον ἀκόμη εἶναι κάτι εἰς τὴν κατεύθυνσιν τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως ἢ εἰς τὰς δύο αὐτὰς κατευθύνσεις. Νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον ὡς ἕνα πρᾶγμα ἰδιαίτερον μὲ ἰδικήν του ὕπαρξιν εἶναι ἀδύνατον. Διότι, ἐὰν τὸ καθαυτὸ ἄπειρον δὲν εἶναι οὔτε μέγεθος οὔτε πλῆθος, ἀλλὰ εἶναι οὐσία καὶ ὄχι συμβεβηκός, πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον, διότι τὸ διαιρετὸν εἶναι ἢ μέγεθος ἢ πλῆθος. Ἂν ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον, δὲν εἶναι ἄπειρον, ἐκτὸς μόνον εἰς τὴν σημασίαν κατὰ τὴν ὁποίαν λέγομεν τὴν φωνὴν ἀόρατον. Ἀλλὰ τὸν ὅρον ἄπειρον δὲν τὸν ἐκφωνοῦν εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν σημασίαν, οὔτε θέμα τῆς ἐρεύνης μας εἶναι αὐτὴ ἡ σημασία, ἀλλὰ ἡ σημασία ἡ ὁποία σημαίνει ὅ,τι εἶναι ἀδύνατον νὰ διεξέλθωμεν. Ἀκόμη: πῶς εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ὑπάρχῃ καθαυτὸ ἄπειρον, ἂν δὲν ἔχῃ μίαν καθ' ἑαυτὴν ὕπαρξιν ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος, ἀφοῦ τὸ ἄπειρον εἶναι ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἐπιδέχονται ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος; Ἂν ὅμως ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον κατὰ συμβεβηκός, τότε δὲν δύναται νὰ εἶναι ὡς ἄπειρον ἀποκλειστικῶς θεωρημένον, στοιχεῖον τῶν ὄντων, ἀπαράλλακτα καθὼς δὲν εἶναι τὸ ἀόρατον στοιχεῖον τῆς γλώσσης ἂν καὶ ἡ φωνὴ εἶναι ἀόρατος. Ὅτι ἀκόμη εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, τοῦτο εἶναι ὁλοφάνερον. Διότι, ἐὰν ἦτο ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, οἱονδήποτε μέρος του καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν θὰ ἦτο τὸ μέρος του τοῦτο ἄπειρον. . .

Ὥστε εἶναι ἢ ἀδιαίρετον ἢ θὰ εἶναι διαιρετὸν εἰς μόρια, τὰ ὁποῖα ἐπιδέχονται πάλιν ἀτελεύτητον διαίρεσιν εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄπειρον θὰ ἦτο διαιρετόν, ἀλλὰ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πλῆθος ἀπείρων μορίων εἶναι ἀδύνατον· ὅπως λοιπὸν μέρος τοῦ ἀέρος εἶναι ἀήρ, οὕτω καὶ μέρος τοῦ ἀπείρου εἶναι ἄπειρον, ἂν τὸ ἄπειρον εἶναι ἀρχὴ καὶ οὐσία. Εἶναι ἄρα ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον. Εἶναι ἀδύνατον ὅμως ὅ,τι εἶναι ἐντελεχείᾳ ἄπειρον νὰ εἶναι ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον· διότι τὸ ἄπειρον εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάποιο ποσόν· ὑπάρχει ἄρα κατὰ συμβεβηκός. Ἀλλ' ἂν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ὑπάρχῃ, δὲν δύναται, ὅπως ἔχομεν ἀναπτύξει εἰς τὰ προηγούμενα, νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον ἀρχή, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἀρχὴ τοῦτο, τοῦ ὁποίου τὸ ἄπειρον εἶναι συμβεβηκός.

Ἡ προηγουμένη συζήτησις ἦτο γενική. Ὅτι πάλιν ἄπειρον εἰς τὴν περιοχὴν τῶν αἰσθητῶν δὲν ὑπάρχει, συνάγεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα: ἂν δηλαδὴ τὸ σῶμα ὁρίζεται ὡς πρᾶγμα καθωρισμένον ἀπὸ ἐπίπεδα, δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ κανὲν οὔτε αἰσθητὸν οὔτε νοητὸν ἄπειρον σῶμα. Οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ὡς χωριστὸς καὶ ἄπειρος. Διότι καὶ ὁ ἀριθμὸς καὶ ὅ,τι ἔχει ἀριθμὸν δύναται νὰ ἀριθμηθῇ. Ἂν ἐξετάσωμεν τὸ ζήτημα ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀπόδειξιν: οὔτε δηλ. σύνθετον δύναται νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον οὔτε ἁπλοῦν. Σύνθετον δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον, ἀφοῦ βέβαια ὑπάρχει ἓν πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων· διότι τὰ ἐναντία στοιχεῖα πρέπει νὰ εἶναι ἀναμεταξύ των ἴσα καὶ νὰ μὴ εἶναι τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως ἄπειρον, διότι ἂν ἡ δύναμις τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως (σημ. π.χ. θερμὸν—ψυχρὸν) εἶναι κατωτέρα κατά τινα ποσότητα ἀπὸ τὴν δύναμιν τοῦ ἄλλου, τὸ ἄπειρον θὰ φθείρῃ τὸ πεπερασμένον. Πάλιν, τὸ κάθε σῶμα νὰ εἶναι ἄπειρον εἶναι ἀδύνατον. Διότι σῶμα εἶναι ὅ,τι ἔχει διαστάσεις πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἄπειρον εἶναι ὅ,τι ἔχει ἀπεράντους διαστάσεις· ὥστε ἂν ὑπάρχῃ ἓν ἄπειρον σῶμα, ἡ ἀπειρότης του θὰ καταλάβῃ ὅλας τὰς διαστάσεις (ἀποκλείουσα τὴν συνύπαρξιν ἑνὸς δευτέρου σώματος). (Μετὰ τὰ φυσικὰ βιβλ. Κ 1066α 35, 1066β 34 καὶ φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 204α 3 204β 22).

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τῆς γνώσεως καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς, ἐνῷ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία: 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ἡ ἔκτασις (ὁ χῶρος) διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις καὶ 3) αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαί, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέραν τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, κατὰ δὲ τοὺς νεωτέρους ἡ γνωσιολογία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες (τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα) ἔχουν μὲν ὕπαρξιν, ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. Ὑπάρχουν δηλ. αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες, ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων αὗται θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες σχηματίζονται διὰ τῆς σκέψεως κατόπιν ἀφαιρέσεως.

• Ἀλλὰ καὶ ὁ Πλάτων ἔχει τὴν γνώμην, ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετικὴ (σχετική), ἐνῷ οὗτος ὑπογραμμίζει ἰδιαιτέρως τὴν ἀξίαν τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν σπουδὴν τῆς φιλοσοφίας. Εἰς τὴν «Πολιτείαν» (525 Δ) γράφει: «σφόδρα ἄνω ποι ἄγει (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) τὴν ψυχὴν (πολὺ πρὸς τὰ ἐπάνω, πρὸς τὸν θεόν, ὁδηγοῦν τὰ μαθηματικὰ τὴν ψυχήν). Εἰς δὲ τὸν «Φίληβον» (16 C), ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι «θεῶν εἰς ἀνθρώπους δόσις». Εἰς τὴν «Πολιτείαν» ὅμως σαφῶς ἀποφαίνεται ὁ Πλάτων, ὅτι ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετική. Τὸ συναφὲς χωρίον ἔχει ὡς ἑξῆς (533 c): «ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; οὐδεμία ἦ δ' ὅς». (Διότι, ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον (τὸ σημεῖον), διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτε τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην; οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ἐπὶ τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους.

Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη παραδέχεται τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἀπείρου. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ οἱ φρονοῦντες, ὅτι ὁ Ζήνων δὲν ἦτο τόσον ἀφελής, ὥστε νὰ πιστεύῃ, ὅτι ὁ Ἀχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὔτε ὅτι ὁ Ζήνων δὲν θὰ ἐφονεύετο, ἐὰν ἐτίθετο ἐνώπιον ἐκτοξευομένου βέλους. Κατὰ τούτους ὁ Ζήνων ἐρωτᾷ ὄχι πότε θὰ φθάσῃ ὁ Ἀχιλλεὺς τὴν χελώνην, οὔτε πότε τὸ βέλος θὰ φθάσῃ εἰς τὸν στόχον. Τὸ ἐρώτημα τοῦ Ζήνωνος εἶναι «πῶς θὰ φθάσουν, ἀφοῦ θὰ κινοῦνται ἐπ' ἄπειρον».

Ἡ κριτικὴ τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας καὶ ἡ γένεσις νέων γεωμετριῶν.

Πλὴν τοῦ Ζήνωνος, ὁ ὁποῖος ἠμφεσβήτει τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀπὸ τῆς προαριστοτελείου ἀκόμη ἐποχῆς ἀπησχόλει τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα τὸ εἰδικώτερον θέμα τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ 1ον βιβλίον τῶν Στοιχείων ὡς 5ον αἴτημα. Ἀπὸ συναφῆ διαμνημόνευσιν τοῦ Ἀριστοτέλους φαίνεται, ὅτι ὑπῆρχον μαθηματικοὶ προσπαθοῦντες ν' ἀποδείξουν τὸ αἴτημα τοῦτο καὶ συνεπῶς ν' ἀναγάγουν αὐτὸ εἰς θεώρημα. Οὗτοι ὅμως περιέπιπτον εἰς τὸ σφάλμα νὰ χρησιμοποιοῦν ὡς ἀποδεικτικὸν μέσον τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας, ἐκείνην δηλ. τὴν ὁποίαν ἤθελον ν' ἀποδείξουν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντιστρατεύεται εἰς τοὺς νόμους τῆς λογικῆς. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Ἀριστοτέλους ἔχει ὡς ἑξῆς: «...ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων» (ἀναλυτ. πρότερα II 16, 65 α 4) (...τὸ ὁποῖον κάμνουν οἱ νομίζοντες, ὅτι ἀποδεικνύουν τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων, διότι οὗτοι ὑποπίπτουν εἰς σφάλμα χρησιμοποιοῦντες ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀποδείξουν, ἂν δὲν ὑπῆρχεν ἡ ἔννοια τῶν παραλλήλων).

Ἡ ἔρευνα ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἢ μὴ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων διαρκέσασα περὶ τὰ 2000 ἔτη ὡδήγησε τοὺς νεωτέρους εἰς τὴν δημιουργίαν ἄλλων γεωμετριῶν, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι, καὶ εἰς τὴν ἄποψιν, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι θεώρημα, ἀλλ' ἀξίωμα. Κατὰ τοὺς νεωτέρους, οἱ ὁρισμοὶ καὶ τὰ ἀξιώματα (διὰ τοῦ ὅρου τούτου νοοῦνται τὰ αἰτήματα, αἱ κοιναὶ ἔννοιαι καὶ τὰ λήμματα τῶν Στοιχείων) ἄνευ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων ἀποτελοῦν τὴν ἀπόλυτον λεγομένην γεωμετρίαν. Προσθήκη εἰς ταύτην τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων δίδει τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Μεταβολὴ τοῦ αἰτήματος τούτου δίδει τὰς ἄλλας, μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν τῶν Bolyai—Lobatschefskij καὶ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν τοῦ Riemann. Εἰς τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν, ἀντὶ τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξῆς: «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄγονται πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἄπειροι παράλληλοι», ἐνῷ εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιεῖται ἀντιστοίχως «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, οὐδεμία παράλληλος ἄγεται». Κατὰ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν δὲν γίνεται δεκτόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον καὶ συνεπῶς γίνεται δεκτόν, ὅτι ὁ χῶρος εἶναι πεπερασμένος (ἐλλιπής), ἐν συμφωνίᾳ πρὸς τὸν Ἀριστοτέλη, ὑποστηρίζοντα τὸ πεπερασμένον τοῦ χώρου, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει κατὰ τοῦτον ἐνεργείᾳ ἄπειρον.

Κατὰ τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, κατὰ τὴν ὑπερβολικὴν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ κατὰ τὴν ἐλλειπτικὴν εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.

α'.

Ὅροι

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ιϛ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι.

Ὁρισμοί.

1. Σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος.

2. Γραμμὴ δὲ εἶναι μῆκος ἄνευ πλάτους.

3. Γραμμῆς δὲ πέρατα εἶναι σημεῖα.

4. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰ ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖα.

5. Ἐπιφάνεια δὲ εἶναι ὅ,τι ἔχει μόνον μῆκος καὶ πλάτος.

6. Τῆς δὲ ἐπιφανείας τὰ πέρατα εἶναι γραμμαί.

7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείας.

8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία εἶναι ἡ εἰς ἐπίπεδον κλίσις πρὸς ἀλλήλας δύο γραμμῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, αἱ ὁποῖαι ἅπτονται μεταξύ των.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι, ἡ γωνία καλεῖται εὐθύγραμμος.

10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα, ἀφοῦ σταθῇ ἐπ' εὐθείας, σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ σταθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ ἐκείνην, ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἐστάθη.

11. Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς.

12. Ὀξεῖα δὲ ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς.

13. Ὅριον εἶναι ὅ,τι εἶναι πέρας τινός.

14. Σχῆμα εἶναι τὸ περιεχόμενον ὑπό τινος ὁρίου ἢ τινων ὁρίων.

15. Κύκλος εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς (ἡ ὁποία καλεῖται περιφέρεια), πρὸς τὴν ὁποίαν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκ τῶν κειμένων ἐντὸς τοῦ σχήματος ὅλαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι (πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου) εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

16. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κέντρον τοῦ κύκλου.

17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.

18. Ἡμικύκλιον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διάμετρον. Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου.

19. Σχήματα εὐθύγραμμα εἶναι τὰ περιεχόμενα ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν,

μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστι οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα

α'. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι

α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

[δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν].

ζ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

η'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

θ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ περισσοτέρων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν.

20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον ἴσας τὰς τρεῖς πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ἔχον μόνον τὰς δύο πλευρὰς ἴσας, σκαληνὸν δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους.

21. Ἀκόμη δὲ ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας.

22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ὀρθογώνιον ἀλλ' ὄχι ἰσόπλευρον, ῥόμβος δὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ἰσόπλευρον ἀλλ' ὄχι ὀρθογώνιον, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, τὸ ὁποῖον οὔτε ἰσόπλευρον εἶναι οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ ἐκτὸς τούτων τετράπλευρα ἂς καλοῦνται τραπέζια.

23. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον ἀπὸ τὰ δύο μέρη δὲν συμπίπτουν ἀπὸ κανὲν μέρος.

Αἰτήματα.

1. Ἂς αἰτῆται ὅτι ἀπὸ παντὸς σημείου εἰς πᾶν σημεῖον δύναται ν' ἄγεται εὐθεῖα γραμμή.
2. Καὶ ὅτι πεπερασμένη εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται συνεχῶς καὶ εὐθυγράμμως.
3. Καὶ ὅτι μὲ πᾶν κέντρον καὶ πᾶσαν ἀκτῖνα δύναται νὰ γράφεται κύκλος.
4. Καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.
5. Καὶ ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα δύο εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον, θὰ συμπίπτουν πρὸς τὰ μέρη ὅπου σχηματίζονται αἱ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι μεταξύ των ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν εἰς ἴσα προστεθοῦν ἴσα, τὰ προκύπτοντα εἶναι μεταξύ των ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθοῦν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

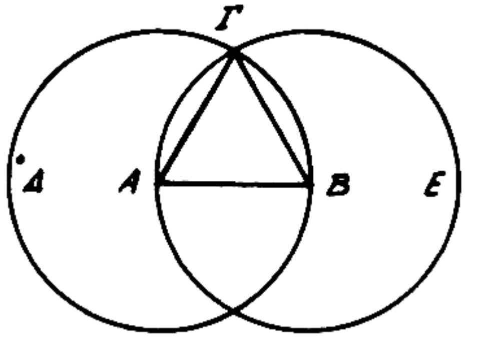
[4. Καὶ ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθοῦν ἴσα, τὰ προκύπτοντα εἶναι ἄνισα.
5. Καὶ τὰ διπλάσια τοῦ αὐτοῦ εἶναι μεταξύ των ἴσα.
6. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση εἶναι μεταξύ των ἴσα.]
7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα εἶναι ἴσα μεταξύ των.
8. Καὶ τὸ ὅλον (εἶναι) μεγαλύτερον τοῦ μέρους.
9. Καὶ δύο εὐθεῖαι δὲν περικλείουν ἐπιφάνειαν.

α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

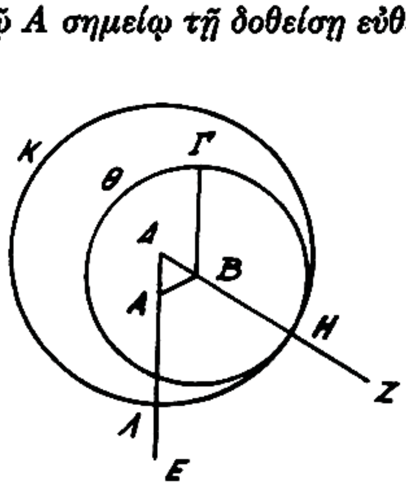
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.

1.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ἔστω ἡ πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος, ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΒΑ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται μεταξύ των οἱ κύκλοι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΒ, ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΑΕ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ κατεσκευάσθη ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τῆς ΑΒ.

(Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας κατεσκευάσθη ἰσόπλευρον τρίγωνον)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐπὶ δοθέντος σημείου νὰ τοποθετηθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· ζητεῖται νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ.

Διότι ἂς ἑνωθῇ τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ σημεῖον Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΗΚΛ.

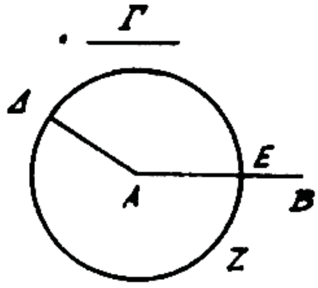
Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΗΘ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΚΛ, ἡ ΔΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, τὰ μέρη δὲ τούτων ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΗ θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΒΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

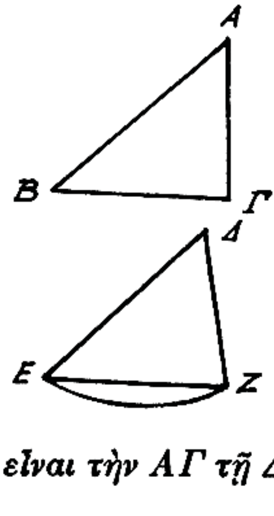
Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου Α κεῖται ἡ εὐθεῖα ΑΛ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τῆς μεγαλυτέρας εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, τῶν ὁποίων ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ· ζητεῖται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν εὐθεῖαν τὴν Γ.

Ἂς ληφθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἴση πρὸς τὴν Γ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΕΖ, ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ. Ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἐνῷ λοιπὸν ἐδόθησαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ ἀφῃρέθη ἐκ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ, ἡ ΑΕ ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἔχουν τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν καὶ τὰς βάσεις ἴσας καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τούτων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἤτοι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

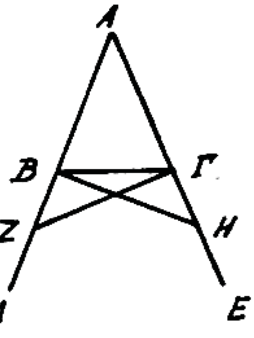
Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Ε, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΑΒ ἐφήρμοσε ἐπὶ τῆς ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐπὶ τῆς ΔΖ, διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἐπίσης ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Ἀλλ' ὅμως ἔχει ἤδη τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσει ἐπὶ τοῦ Ε· ὥστε ἡ βάσις ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.



εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ

ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ. Διότι, ἐὰν μὲν τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ε τὸ δὲ σημεῖον Γ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ, ἡ δὲ βάσις ΒΓ δὲν ἐφαρμοόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, δύο εὐθεῖαι περιέχουν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον (κοιναὶ ἔνν. 9). Ἄρα ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτὴν (κοιναὶ ἔνν. 7)· ὥστε καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου καὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ ΑΓΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν ἴσας καὶ τὰς βάσεις (τὴν τρίτην πλευρὰν) καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί, αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται κάτωθεν τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, καὶ ἃς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ ἡ δὲ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΕ.

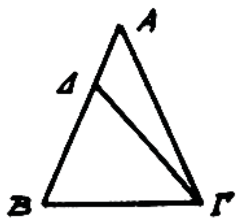
Διότι, ἃς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἡ ὁποία λαμβάνεται μεγαλυτέρα τῆς ΑΖ, ἡ ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ ΑΗ καὶ ἃς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΗΒ (θεώρ. 3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΗΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν ΖΑΗ· ἡ βάσις ἄρα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΒ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴσαι, ἡ μὲν γωνία ΑΓΖ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΗ ἡ δὲ ΑΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΗ καὶ τὰ μέρη τούτων ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη ΒΖ, ΓΗ θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των (κ. ἔνν. 3). Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΒ· αἱ δύο λοιπὸν πλευραὶ ΒΖ, ΖΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΗ, ΗΒ, ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΒ καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΒΓ εἶναι κοινή· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΒΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓΒ *ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.*

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.

εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

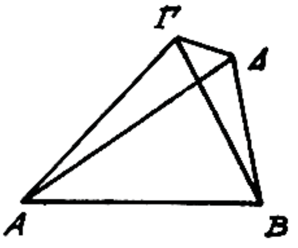
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ἡ δὲ ΒΓΖ πρὸς τὴν ΓΒΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὅλη ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν γωνίαν ΑΓΖ καὶ τὰ μέρη τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι αἱ γωνίαι ΓΒΗ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ὑπόλοιπα μέρη θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· εἶναι δὲ αὗται παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΓΒ· καὶ εἶναι αὗται ὑπὸ τὴν βάσιν.

Ἄρα τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ μία ἐκ τούτων θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης. Ἔστω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ ἡ ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν ΑΓ (θεώρ. 3) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ αἱ ΔΒ, ΒΓ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ καὶ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· ἄρα ἡ βάσις ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ (θεώρ. 4), δηλ. τὸ μικρότερον τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα δὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒ ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα εἶναι ἴση.

Ἐὰν ἄρα αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἔχουν ἀχθῇ πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας δύο εὐθεῖαι, δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπως αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι.

Διότι ἔστω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὴν ὁποίαν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἔχουν ἀχθῇ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ, νὰ ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου Δ δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ ΑΔ, ΔΒ, κείμεναι ὅλαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἔχουσαι τὰ αὐτὰ πέρατα, ὥστε ἡ ΓΑ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Α καὶ ἡ ΓΒ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ.

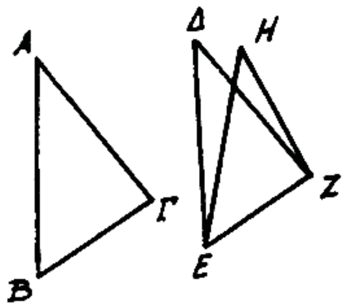
ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΒ (κ. ἔννοιαι 8)· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΓΔΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΔΒ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΒ (θεώρ. 5). Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι αὕτη (ἡ ΓΔΒ) εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄρα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δὲν εἶναι δυνατόν, ἐὰν ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι ἐκ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας, ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἀρχικάς, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὰς ἀρχικὰς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων ἀντιστοίχως πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς ἔχουν δὲ καὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ.

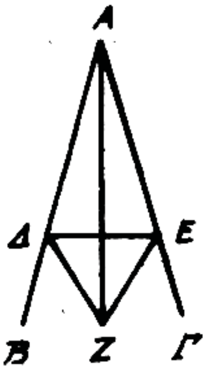
Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ, τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Διότι, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ, αἱ δὲ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ δὲν ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΕΔ, ΔΖ, ἀλλὰ λάβουν ἄλλας θέσεις, ὡς τὰς ΕΗ, ΗΖ, τότε θὰ ἔχουν ἀχθῆ εἰς τὰ πέρατα τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐκ δύο διαφορετικῶν σημείων, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, δύο εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο εὐθείας ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν (θεώρ. 7)· ἄρα ἀποκλείεται νὰ μὴ ἐφαρμόσουν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ, ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ ἀντιστοίχως, ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ. Ἄρα θὰ ἐφαρμόσουν. Ὥστε καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας ΕΔΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. Πρέπει νὰ διχοτομήσωμεν αὐτήν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

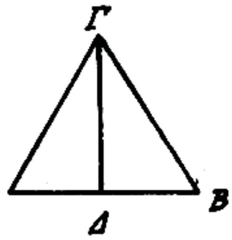
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ, δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



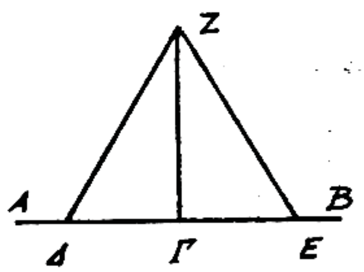
Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ [ἡ] ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν·

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΑ, ΑΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΑ, ΑΖ. Καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΖ (θεώρ. 8).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθύγραμμος γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν ΑΒ νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διχοτομεῖται κατὰ τὸ σημεῖον Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ (θεώρ. 4).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπ' αὐτῆς ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Γ· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖα ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ ὀρθὰς γωνίας.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΖΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ (ἀχθῇ) ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΖΓ ἤχθη σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

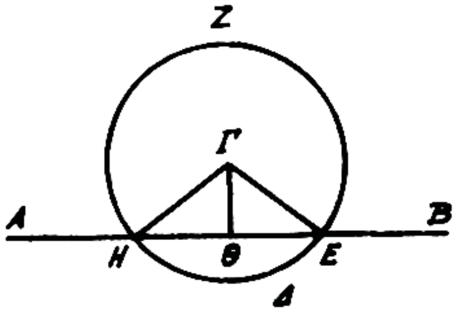
Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΓΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΓ, ΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΓ, ΓΖ· καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν *γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.*

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

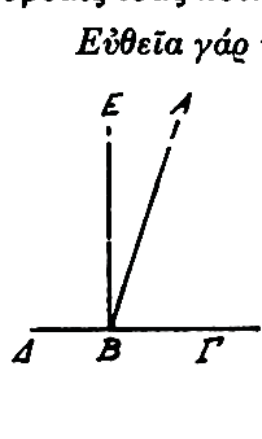
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.



Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς

ΕΓΖ (θεώρ. 8)· καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἄγεται ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή (ὁρ. 10)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΔΓΖ, ΖΓΕ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἤχθη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΖ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Ἐπὶ δοθείσης ἀπεριορίστου εὐθείας, ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· πρέπει ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΔ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΕΖΗ (αἴτ. 3) καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα ΕΗ (θώρ. 10) κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν ἀπεριόριστον δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕ, ἡ δὲ ΘΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΗΘ, ΘΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΘ, ΘΓ· καὶ ἡ βάσις ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ· ἄρα ἡ γωνία ΓΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΓ (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀχθῇ ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἤχθη (ὅρ. 10).

Ἄρα ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι..

13.

Ἐὰν εὐθεῖα ἀγομένη ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζῃ γωνίας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἢ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Διότι ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ ἂς σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς γωνίας ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΔ ἢ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί, ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

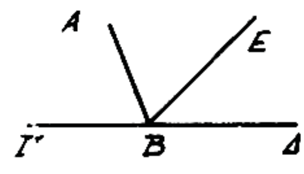
Ἐὰν μὲν ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, αὗται εἶναι δύο ὀρθαί (ὁρ. 10). Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τὴν (εὐθεῖαν) ΓΔ κάθετος ἡ ΒΕ (θεώρ. 11)· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΕΒΔ· αἱ *ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.



Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ΔΒΕ, ΕΒΑ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς αὐτὰς τρεῖς γωνίας· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἶναι ἴσα (κ. ἔν. 1)· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΒΑ, ΑΒΓ· ἀλλὰ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα καὶ αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζῃ γωνίας, αὗται ἢ θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των θὰ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ἔκ τινος εὐθείας καὶ ἐκ σημείου ἐπ' αὐτῆς κειμένου ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ ἂς σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ΓΒ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΔ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ, ἔστω, ὅτι ἡ ΒΕ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ.

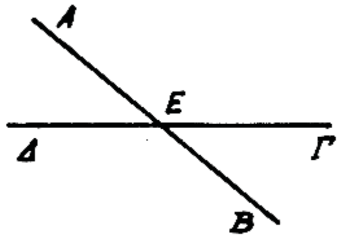
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒΕ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΕ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· εἶναι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, ἄρα αἱ ΓΒΑ, ΑΒΕ εἶναι ἴσαι· πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΔ (κ. ἔν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἐκ τούτων ἡ κοινὴ γωνία ΓΒΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΑΒΔ (κ.ἔν. 3), ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΒΕ δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ὑπάρχει πλὴν τῆς ΒΔ· ἄρα ἡ ΓΒ καὶ ἡ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα ἐκ σημείου εὐθείας τινὸς ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι οὐχὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθάς, αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Διότι ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΒ, ἡ δὲ ΓΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

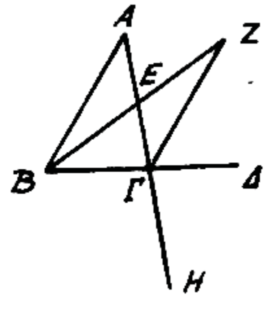
[**Πόρισμα.**

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.]

ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.



Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ σχηματίζουσα μετ' αὐτῆς ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΓΕΑ, ΑΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ σχηματίζουσα ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΑΕΔ, ΔΕΒ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουσαι ἄθροισμα δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΕΔ, ΔΕΒ (κ. ἐν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΑΕΔ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΓΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΒΕΔ (κ. ἐν. 3)· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ΓΕΒ, ΔΕΑ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, θὰ σχηματίσουν τὰς πρὸς τὴν τομὴν γωνίας ἴσας μὲ τέσσαρας ὀρθάς].

16.

Παντὸς τριγώνου ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε (θεώρ. 10), καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΕ ἂς προεκβληθῇ αὐτὴ μέχρι τοῦ σημείου Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΑΓ μέχρι τοῦ Η.

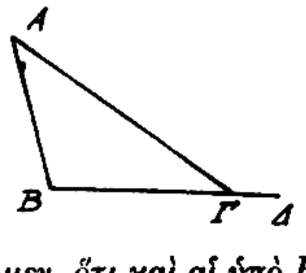
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΓ· διότι εἶναι κατὰ κορυφήν (θεώρ. 15)· ἄρα ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΕΓ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τούτων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΓΖ. Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΕΓΔ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΓΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἡ ΒΓ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓΔ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ἐὰν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

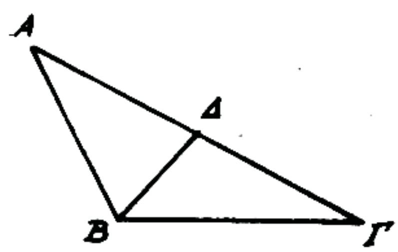
Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ·

17.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται.

Ἔστω τὸ τρίγωνὸν ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο γωνίαι, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται, εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν.

Διότι, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τῆς ΑΒΓ (θεώρ. 16). Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας γωνίας ἡ κοινὴ γωνία ΑΓΒ· αἱ γωνίαι ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΑΒΓ, ΒΓΑ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΑ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν καὶ τὸ αὐτὸ διὰ τὰς γωνίας ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Διότι ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΓ μεγαλυτέραν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ΒΓΑ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 2), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ.

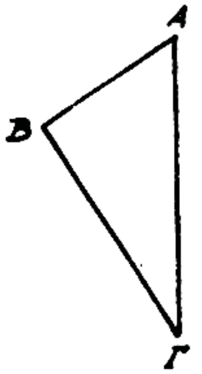
Καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἐξωτερική, εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΔΓΒ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΔΒ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ (κοιν. ἔν. 8).

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΓΑ·



λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

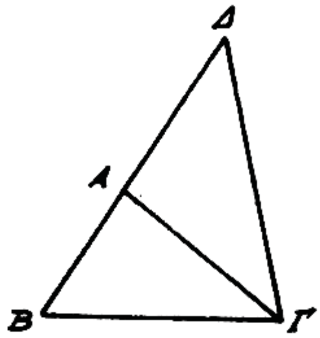
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβι νόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἂν ἦτο ἴση, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ (θεώρ. 5)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλ' οὔτε μικροτέρα εἶναι ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· διότι ἐὰν ἦτο μικροτέρα, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ΑΓΒ· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης.

Διότι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διότι, ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Δ ἡ ΒΑ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ πρὸς τὴν ΑΓΔ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΔΓ (κ.ἐν. 8)· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΓΒ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΒΓΔ μεγαλυτέραν τῆς ΒΔΓ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΓ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΑ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

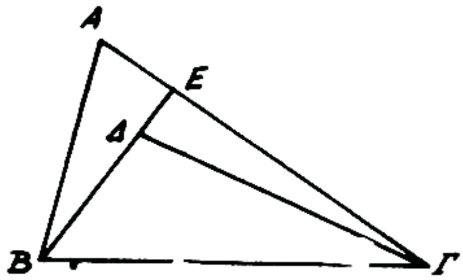
Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραί, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αἱ ἀχθεῖσαι θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν.

Διότι ἔστω, ὅτι ἐκ τῶν ἄκρων Β,Γ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι, ὥστε νὰ τέμνωνται αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι μὲν μικρότεραι, θὰ περιέχουν δὲ γωνίαν τὴν ΒΔΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν· πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

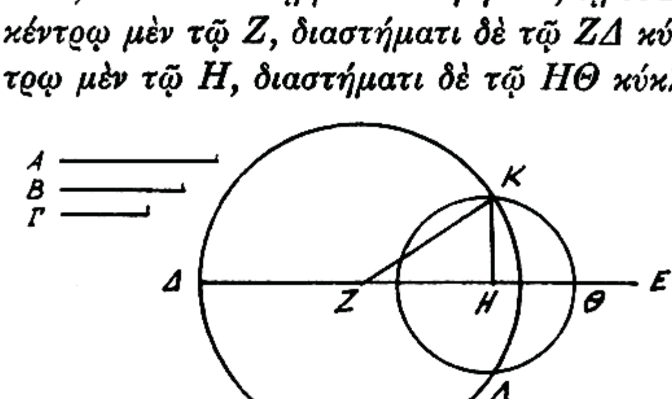
Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα

Διότι, ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΔ μέχρι τοῦ σημείου Ε. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς (θεώρ. 20), αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, αἱ ΑΒ, ΑΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΕ. Ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΕΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ (κ. ἔν. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΓΕΔ αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΔ, ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΔΒ· ἄρα αἱ ΓΕ, ΕΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΓΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ αἱ ΒΑ, ΑΓ ἐδείχθησαν μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΔ, ΔΓ.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (θεώρ. 16), ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΔΓ τοῦ τριγώνου ΓΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΓΕΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΔΓ ἐδείχθη μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΒ. ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αὗται θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τρεῖς δοθείσας [εὐθείας] νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· πρέπει δὲ αἱ δύο εὐθεῖαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης [διότι αἱ δύο πλευραὶ τριγώνου καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ τῶν ὁποίων αἱ δύο καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν Α, Β μεγαλύτεραι τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β καὶ αἱ Β, Γ τῆς Α· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἴσων εὐθειῶν πρὸς τὰς Α,Β,Γ.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μὲν ΔΖ ἴση πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β, ἡ δὲ ΗΘ ἴση πρὸς τὴν Γ· καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΖΔ, ὁ ΔΚΛ· μὲ κέντρον πάλιν τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν ΗΘ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΚΛΘ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν (τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΘ) τῶν ἴσων πρὸς τὰς Α, Β, Γ κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ.

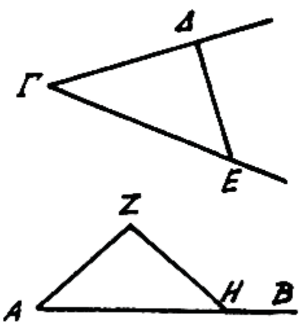
Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΚΛ, ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ἴση *τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.*

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

πρὸς τὴν Α (κ. ἔν. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΛΚΘ, ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ. ἀλλὰ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς Α,Β,Γ.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας, τὰς Α,Β,Γ, κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

23.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ ἐκ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΔΓΕ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Α νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ.

Ἃς ληφθοῦν ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ τὰ τυχόντα σημεῖα Δ, Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἡ μὲν ΓΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἡ ΔΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΗ (θεώρ. 22).

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΔΓ, ΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΑ, ΑΗ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΗ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΑΗ (θεώρ. 8).

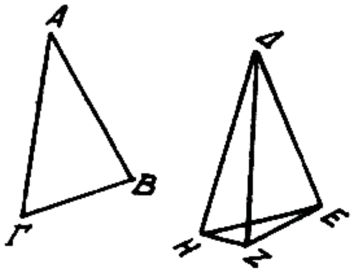
Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου Α, κατεσκευάσθη εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΖΑΗ, ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

24.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ ἂς εἶναι ἡ γωνία Α μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Δ γωνία ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ, ἡ ΕΔΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΖ καὶ ἂς ἐπιζευχθοῦν αἱ ΕΗ, ΖΗ.



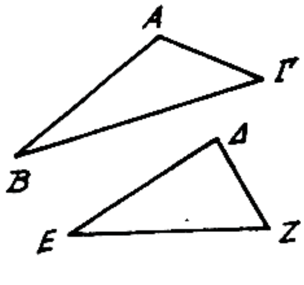
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο ΕΔ, ΔΗ· καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΗ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ γωνία ΔΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΗ· ἄρα ἡ γωνία ΔΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΗΖ (κ. ἔν. 8)· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ γωνία ΕΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΕΖΗ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΕΖΗ μεγαλυτέραν τῆς ΕΗΖ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (θεωρ. 19), ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς εἶναι δὲ ἡ βάσις ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ.

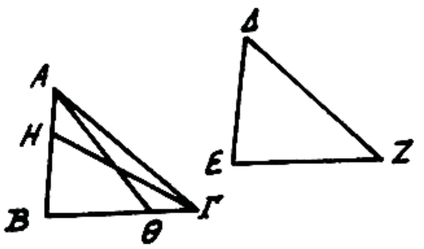
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ γωνία ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ· διότι ἐὰν ἦτο ἴση, θὰ ἦτο ἴση καὶ ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (θεώρ. 4)· ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ· ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ μικροτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ· διότι, ἐὰν ἦτο, καὶ ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς βάσεως ΕΖ (θεώρ. 24)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΔΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ. λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν· ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν· ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν,

26.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας [ἀντιστοίχως] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΔΕΖ, ΕΖΔ· τὴν μὲν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖΔ· ἂς ἔχουν δὲ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἐν πρώτοις τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι· λέγω, ὅτι θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν, ἤτοι τὴν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΑΒ μεγαλυτέρα καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΗ, ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΗΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ΗΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ (κ. ἔν. 1), ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν (κ. ἔν. 8)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ. Ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ (θεώρ. 4).

Ἀλλὰ πάλιν ἔστωσαν αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ἴσαι ὅπως ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἄλλας, ἡ μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο ἀντιστοίχως τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ *καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.*

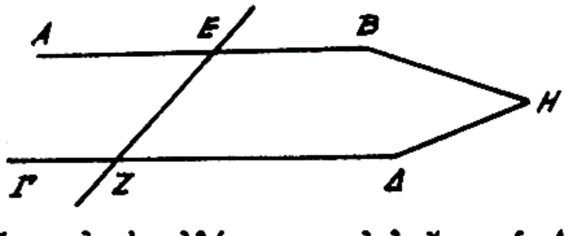
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ·



ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ καὶ συνεπῶς αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, ἐκεῖναι ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ΕΖΔ εἶναι ἴση πρὸς ΒΓΑ· ἤτοι τοῦ τριγώνου ΑΘΓ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16). Ἄρα δὲν εἶναι ἄνισος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουν δὲ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Διότι, ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνωνται αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, προεκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ θὰ συμπέσουν ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Α, Γ. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ εἰς τὸ σημεῖον Η. Τότε, τοῦ τριγώνου ΗΕΖ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΕΖΗ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμεναι δὲν θὰ συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν θὰ συμπέσουν οὐδὲ πρὸς τὸ μέρος τῶν Α, Γ· αἱ εὐθεῖαι ὅμως αἱ ὁποῖαι δὲν συμπίπτουν πρὸς κανὲν μέρος εἶναι παράλληλοι· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

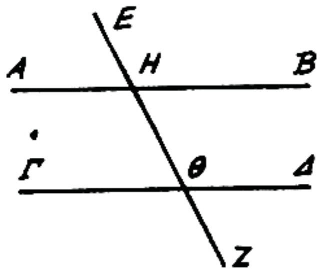
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνεται ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΗΒ ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη) *τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.*

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



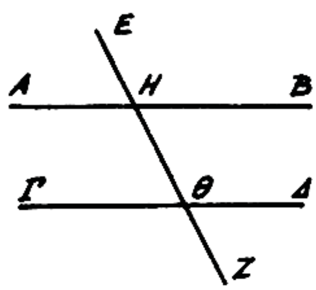
Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ τὴν ΗΘΔ ἢ ἂς γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΘ (θεώρ. 15), ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, ἐπίσης δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13), ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΒΗΘ· ἄρα ἡ λοιπὴ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 3)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει παραλλήλους εὐθείας σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς τμήσῃ ἡ εὐθεῖα ΕΖ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αὕτη σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΕΗΒ ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΗΘΔ καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΗΘ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ, τότε μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΑΗΘ· ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ γωνία ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13).

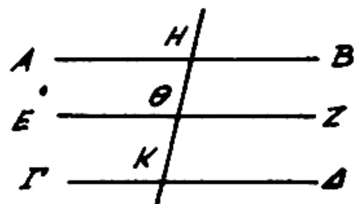
Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν προεκβληθοῦν εἰς τὸ ἄπειρον συμπίπτουν (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον θὰ συμπέσουν· ἀλλὰ δὲν συμπίπτουν, διότι ἐλήφθησαν παράλληλοι· ἄρα ἡ γωνία ΑΗΘ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ· ἄρα εἶναι ἴση. Ἀλλὰ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗΒ (θεώρ. 15)· ἄρα καὶ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἄρα, ὅταν εὐθεῖα τέμνῃ παραλλήλους εὐθείας, σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ *γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος. λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.



Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

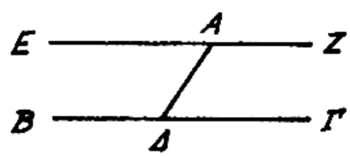
Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ γωνίας ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἔστω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἂς τμήσῃ αὐτὰς ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΕΖ, ἡ γωνία ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΖ, ΓΔ, ἡ γωνία ΗΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΗΚ ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (κ. ἔν. 1)· καὶ εἶναι αὗται ἐναλλάξ. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

[Αἱ παράλληλοι ἄρα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Διὰ δοθέντος σημείου, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· πρέπει διὰ τοῦ σημείου Α ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΑ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἡ γωνία ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 23)· καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΕΑ ἡ εὐθεῖα ΑΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ τέμνει τὰς δύο εὐθείας ΒΓ, ΕΖ καὶ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 27).

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α ἤχθη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

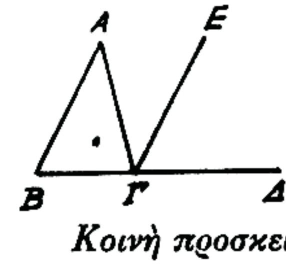
32.

Εἰς πᾶν τρίγωνον, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ *ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.



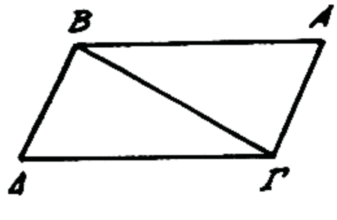
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, τὰς ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΒΑΓ, ΑΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΑΒΓ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΓΔ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὰς ΒΑΓ, ΑΒΓ (κ. ἔν. 2).

Ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ ΑΓΒ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂς ἑνώνουν αὐτὰς πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

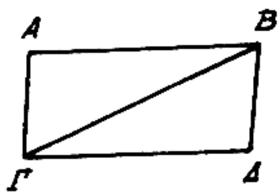
Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΒΔ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΓ τέμνουσα τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΔ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ· (θεώρ. 27). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἄρα, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

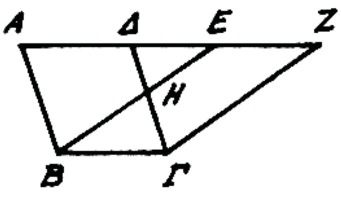
Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ

34.

Τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΔΒ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29)· Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΓΒ, ΓΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΒΓΔ, ΓΒΔ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν κοινὴν πλευρὰν ἐφ' ἧς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν (θεώρ. 26)· ἄρα ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ προσέτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ. Καὶ ἐπειδή, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ, ἕπεται, ὅτι ὅλη ἡ ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΓΔ (κ. ἐν. 2). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ.

Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΓΔ, ΒΓ ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ (θεώρ. 29). Ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ (θεώρ. 4).

Ἄρα ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς δύο ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 34). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ (κ. ἐν. 1)· καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κοινή· ἄρα ὅλη ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ (κ.ἐν. 2). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΓ (θεώρ. 34)·

ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση. δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός. βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

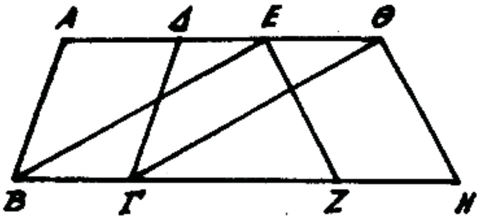
Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛʹ.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ



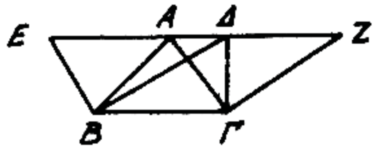
αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι [καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζʹ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, δύο λοιπὸν πλευραί, αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΔ, ΔΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΒ, ἡ ἐκτὸς πρὸς τὴν ἐντός (θεώρ. 29). ἄρα ἡ βάσις ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ (θεώρ. 4)· ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τρίγωνον ΔΗΕ· ἄρα τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΑΒΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΕΗΓΖ (κ. ἐν. 3)· ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν τρίγωνον ΗΒΓ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἔχοντα τὰς ἴσας βάσεις ΒΓ, ΖΗ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ (κ. ἐν. 1). Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἑνώνουν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ ἑνοῦσαι ὅμως πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι [ἄρα καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι] (θεώρ. 33). Ἄρα τὸ ΕΒΓΘ εἶναι παραλληλόγραμμον (θεώρ. 34). Καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ· διότι ἔχει πρὸς αὐτὸ τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ, καὶ εἶναι μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΘ (θεώρ. 35). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ΕΒΓΘ (θεώρ. 35)· ὥστε καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ (κ. ἐν. 1).

Ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἂς προεκβληθῇ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἡ ΑΔ πρὸς τὰ Ε, Ζ καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ (θεώρ. 31). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ εἶναι

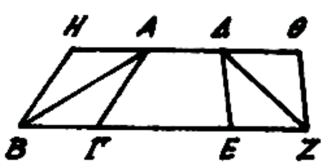
ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.] ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



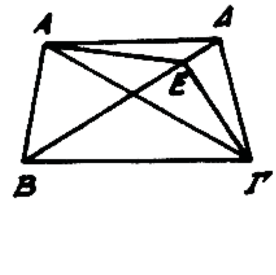
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἔστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις.

παραλληλόγραμμον· καὶ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ (θεώρ. 35)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου ΕΒΓΑ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34)· τοῦ δὲ παραλληλογράμμου ΔΒΓΖ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΔΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη [Τὰ δὲ ἡμίση τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ (θεώρ. 31). Ἄρα ἕκαστον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ τὸ ΗΒΓΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΕΖΘ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ΒΖ, ΗΘ (θεώρ. 36)· καὶ εἶναι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΓΑ. Διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34). τὸ δὲ τρίγωνον ΖΕΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΕΖΘ· διότι ἡ διαγώνιος ΔΖ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη [τὰ ἡμίση δὲ τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς βάσεως κείμενα, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς· λέγω, ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

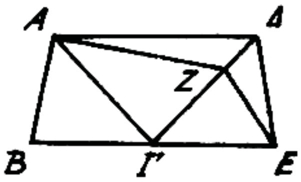
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 31) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτό, τὴν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον *ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστι παράλληλος.*

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

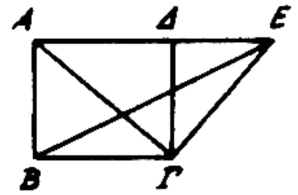
Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ [τριγώνῳ]· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ. ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

πρὸς τὸ ΔΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΔΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΒΓ (κ. ἐν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΕ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις παράλληλος, πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τούτων. Λέγω, ὅτι εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ΑΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΕ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ· διότι ταῦτα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΕ, ΑΖ (θεώρ. 38). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΕ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ (κ. ἐνν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον, ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΖ δὲν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδεμία ἄλλη παράλληλος ὑπάρχει πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου.

Διότι, ἂς ἔχῃ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, τὴν ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΕΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΕ (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34). Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΒΓ.

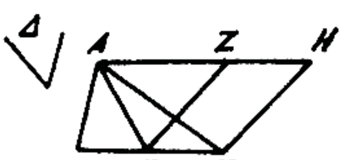
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

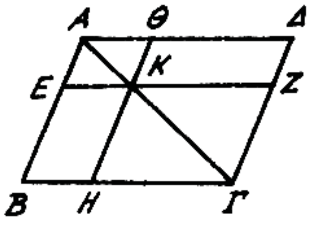
Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.



Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εὑρίσκονται ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ κατασκευασθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐπὶ δοθείσης εὐθυγράμμου γωνίας.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθυγράμμου γωνίας Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (θεωρ. 10), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΓ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Ε γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ, ἡ ΓΕΖ (θεώρ. 23), καὶ διὰ μὲν τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ (θεώρ. 31), διὰ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα τὸ σχῆμα ΖΕΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΕ, ΕΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΗ (θεώρ. 38)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ. 41)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Καὶ ἔχει τὴν γωνίαν ΓΕΖ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Δ.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ κατεσκευάσθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΕΓΗ, ὑπὸ τὴν γωνίαν ΓΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

43.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, συναφῆ παραπληρώματα δὲ τούτων τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι τὸ παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΚΔ.

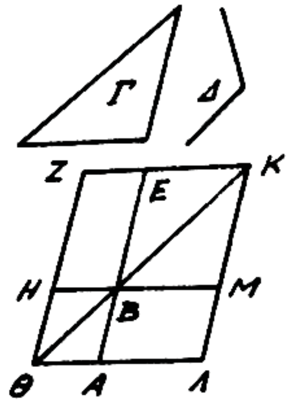
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι διαγώνιος αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (θεώρ. 31). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΕΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, τὸ τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΚΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ, τὸ δὲ ΚΖΓ ἴσον πρὸς τὸ ΚΗΓ, *ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.*

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.



Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

τὸ τρίγωνον ΑΕΚ μετὰ τοῦ ΚΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ μετὰ τοῦ ΚΖΓ (κ. ἔν. 2)· εἶναι δὲ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΔΓ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΚΔ (κ. ἔν. 3).

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει, παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ, ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Δ. Ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ τὸ ΒΕΖΗ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΕΒΗ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ (θεώρ. 42)· καὶ ἂς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΑΒ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΖΗ μέχρι τοῦ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΗ, ΕΖ (θεώρ. 31), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΕΖ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΘΖ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΘΖ, ΘΖΕ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (θεώρ. 29). Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΘΗ, ΗΖΕ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον συναντῶνται (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΘΒ, ΖΕ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθοῦν. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συναντηθοῦν κατὰ τὸ Κ· καὶ διὰ τοῦ σημείου Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ, παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΑ, ΖΘ, καὶ ἂς προεκλβηθοῦν αἱ ΘΑ, ΗΒ μέχρι τῶν σημείων Λ, Μ. Ἄρα τὸ ΘΛΚΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ εἶναι παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τούτων τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἄρα τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΖ (θεώρ. 43). Ἀλλὰ τὸ ΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ· ἄρα καὶ τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ (κ. ἔν. 1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΜ (θεώρ. 15), ἀλλὰ ἡ ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΒΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

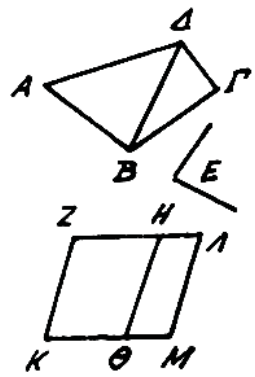
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, παρεβλήθη τὸ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΛΒ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

45.

Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα, ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Ε· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω



ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ· καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

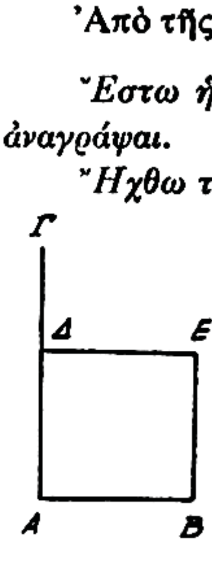
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ,



καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΘΚΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 42)· καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΗΘΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 44). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΖ, ΗΘΜ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΘΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΜ (κ. ἔν. 1). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ κοινὴ ΚΘΗ· ἄρα αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΚΘΗ, ΗΘΜ. Ἀλλὰ αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΚΘΗ, ΗΘΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (κ. ἔν. 2). Ἔχουν δὲ ἔκ τινος εὐθείας τῆς ΗΘ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Θ ἀχθῇ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ ΚΘ καὶ ΘΜ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14)· καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΚΜ, ΖΗ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΜΘΗ, ΘΗΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 29). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΘΗΛ· ἄρα αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΘΗΖ, ΘΗΛ (κ. ἔνν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΘΗΖ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (κ. ἔν. 1)· ἄρα αἱ ΖΗ, ΗΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΗ (θεώρ. 34), ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΛ· καὶ συνδέουν αὐτὰς αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΖΛ· ἄρα καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (κ. ἔν. 11, θεώρ. 30)· ἄρα τὸ ΚΖΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΘ, τὸ δὲ ΔΒΓ πρὸς τὸ ΗΜ, ἕπεται, ὅτι ὅλον τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΚΖΛΜ (κ. ἔν. 2).

Ἄρα κατεσκευάσθη πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΚΖΛΜ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΖΚΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

46.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ ΑΓ κάθετος ἐπ' αὐτήν (θεώρ. 11), καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 2)· καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διὰ δὲ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ (θεώρ. 31). Ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΕ (θεώρ. 34). Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (κ. ἔν. 1)· ἄρα τὸ παραληλλόγραμμον ΑΔΕΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ τέμνονται εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

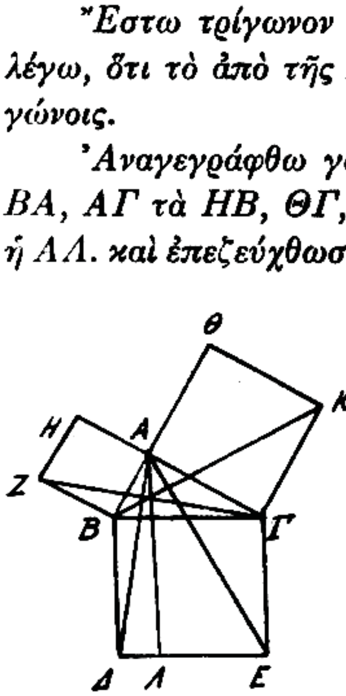
Τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ [ἔστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον. βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.



ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΑΔΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (θεώρ. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ εἶναι ὀρθή. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 34)· ἄρα εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑκάστη τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΑΒΕ, ΒΕΔ· ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Ἄρα εἶναι τετράγωνον· καὶ ἔχει ἀναγραφῆ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

47.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα ἀναγράφονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (Πυθαγόρειον θεώρημα).

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῆ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ΗΒ, ΘΓ (θεώρ. 46) καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῆ ἡ ΑΛ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΓΕ (θεώρ. 31)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΗ εἶναι ὀρθή, ἐκ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ κείμεναι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΗ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΒΑ, ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΑ· διότι ἑκάστη εἶναι ὀρθή· ἂς προστεθῆ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΖΒΓ (κ. ἐν. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΑ, αἱ δύο πλευραὶ ΔΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἡ γωνία ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΒΓ (θεώρ. 4)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ διπλάσιον· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΒΔ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΔ, ΑΛ (θεώρ. 41)· τοῦ δὲ τριγώνου ΖΒΓ τὸ τετράγωνον ΗΒ εἶναι διπλάσιον· διότι πάλιν ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΖΒ καὶ εὑρίκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τῶν ΖΒ, ΗΓ [τὰ δὲ διπλάσια τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΗΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῆ, ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΒΚ, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΓΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΘΓ· ἄρα ὅλον τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς δύο τετράγωνα, τὰ ΗΒ, ΘΓ (κ. ἐν. 2). Καὶ τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἔχει ἀναγραφῆ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ.

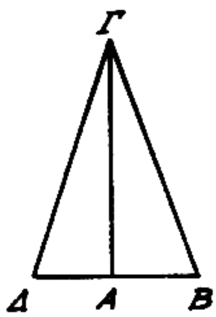
Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.



Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48.

'Εὰν τριγώνου τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἔστω τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τῆς ΒΓ, ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, κάθετος ἡ ΑΔ (θεώρ. 11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ. 'Επειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΔΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφόμενον τετράγωνον. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων τὸ κοινὸν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀναγραφόμενον τετράγωνον· ἄρα τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ (κ. ἔν. 2). 'Αλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ· διότι ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ὀρθή (θεώρ. 47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τετράγωνον· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (κ. ἔν. 1)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραί, αἱ ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ (θεώρ. 8). Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΔΑΓ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

'Εὰν ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀναγραφόμενα, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

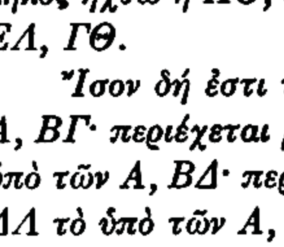
Ὅροι.

α'. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

α'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.



Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α. τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ· ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΙΒΛΙΟΝ II.

Ὁρισμοί.

1. Πᾶν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται ὅτι περιέχεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

2. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων, μαζὶ μὲ τὰ δύο παραπληρώματα, ἂς ὀνομάζεται γνώμων.

1.

Ἐὰν ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΒΖ (Ι.11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν Α, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (Ι.31), διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΗ, αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ τὸ μὲν ΒΘ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· τὸ δὲ ΒΚ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΔ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Τὸ δὲ ΔΛ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΔΕ· διότι ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (Ι.34). Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ΕΘ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

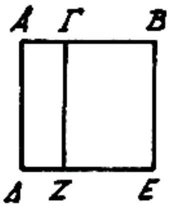
Ἐὰν ἄρα ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

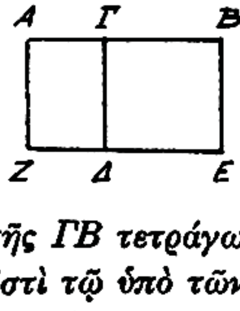
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.



ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ· λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΔΕΒ (Ι.46), καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΒΕ (Ι.31).

Τὸ ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΑΖ, ΓΕ. Καὶ τὸ μὲν ΑΕ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφὲν τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἡ δὲ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (Ι. ὁρ. 23)· τὸ δὲ ΓΕ εἶναι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· διότι ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν.

3.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἑνὸς τμήματος.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον ΓΔΕΒ (Ι.46) καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΕΔ μέχρι τοῦ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΔ, ΒΕ (Ι.31). Τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια ΑΔ, ΓΕ· καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΕ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον· διότι περιέχεται μὲν τοῦτο ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ.

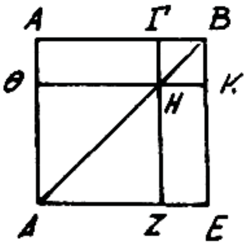
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἑνὸς τμήματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ· καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν



ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση· ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστιν· καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΚΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.]

4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, τὸ ΑΔΕΒ (Ι.46) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΕΒ (Ι.30 καὶ 31), διὰ δὲ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΓΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΑΔΒ (Ι.29). Ἀλλὰ ἡ ΑΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (Ι.5)· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΓΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΒΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΗ (Ι.6). ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ (Ι.34), ἡ δὲ ΓΗ πρὸς τὴν ΚΒ· ἄρα καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΒ· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΗΚΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΚ [καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΓΒ], αἱ γωνίαι ΚΒΓ, ΗΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (Ι.29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ γωνία ΚΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓΗ εἶναι ὀρθή· ὥστε καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αἱ ΓΗΚ, ΗΚΒ εἶναι ὀρθαί (1.34). Ἄρα τὸ σχῆμα ΓΗΚΒ εἶναι ὀρθογώνιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον· καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ ΘΖ εἶναι τετράγωνον· καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ, δηλ. τῆς ΑΓ (Ι.34)· ἄρα τὰ τετράγωνα ΘΖ, ΚΓ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΗΕ (Ι.43) καὶ εἶναι τὸ ΑΗ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα καὶ τὸ ΗΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἄρα τὰ ΑΗ, ΗΕ ἰσοῦνται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ΘΖ, ΓΚ, τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἄρα τὰ τέσσαρα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ὅλον τὸ ΑΔΕΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

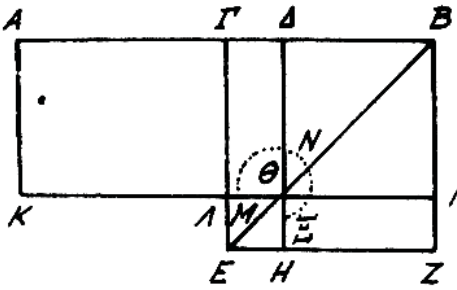
[**Πόρισμα.**

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὰς τετραγώνους ἐπιφανείας τὰ περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι τετράγωνα].

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ· καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΜΝΞ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς τμηθείσης εὐθείας.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς ἴσα μὲν μέρη κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ, ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ.

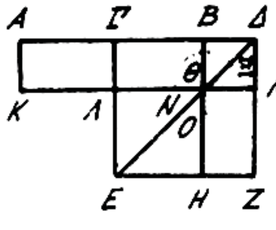
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΓΒ τὸ τετράγωνον ΓΕΖΘ (Ι.46) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΕ, ΒΖ, διὰ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ παράλληλος πάλιν πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ (Ι.30 καὶ 31) καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΛ, ΒΜ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραπλήρωμα ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΘΖ (Ι.43), ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΔΜ· ἄρα ὅλον τὸ ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΔΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΛ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα καὶ τὸ ΑΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΖ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΓΘ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ (εἰς τὴν ἔκδοσιν Gregorio ἀντὶ τοῦ Μ εἶναι τὸ Ο· ὁ γνώμων δηλοῦται ὑπὸ τοῦ τόξου, ἤτοι εἶναι ΘΛΓΒΖΗΘ). Ἀλλὰ τὸ ΑΘ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΒ· διότι ἡ ΔΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ, ΔΒ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΛΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ· ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ καὶ τὸ τετράγωνον ΛΗ ἰσοῦνται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΜΝΞ καὶ τὸ τετράγωνον ΛΗ, ἀποτελοῦν ὅλον τὸ τετράγωνον ΓΕΖΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ ἰσοῦνται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας, μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ τμῆμα μεταξὺ τῶν τομῶν ἰσοῦνται πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς τμηθείσης εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προστεθείσης, καὶ τῆς προστεθείσης, μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας καὶ τὴν προστεθεῖσαν.

Διότι, ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Γ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ ἂς προστεθῇ κατὰ τὴν προέκτασιν αὐτῆς ἡ εὐθεῖα ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ.



'Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

'Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

'Εὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

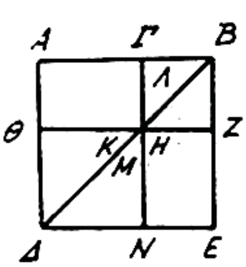
ζ'.

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

'Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

'Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστι γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. κοινὸν προσ-



Διότι, ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΓ, ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ σημείου Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ, καὶ ἀκόμη διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστηντῶν ΓΛ, ΔΜ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΖ. Ἄρα καὶ τὸ ΑΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΖ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΓΜ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΝΞΟ. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· διότι ἡ ΔΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα καὶ ὁ γνώμων ΝΞΟ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ [περιεχόμενον ὀρθογώνιον] ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΛΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸν γνώμονα ΝΞΟ καὶ τὸ ΛΗ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΝΞΟ καὶ τὸ ΛΗ εἶναι ὅλον τὸ τετράγωνον ΓΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προστεθείσης, καὶ τῆς προστεθείσης, μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας καὶ τὴν προστεθεῖσαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς τῶν τμημάτων της, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος.

Διότι, ἂς τμηθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΒΓ σὺν τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΕΒ· καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (ν' ἀχθῇ δηλ. ἡ διαγώνιος ΒΔ, ἡ παράλληλος ΓΝ καὶ ἡ παράλληλος ΘΖ).

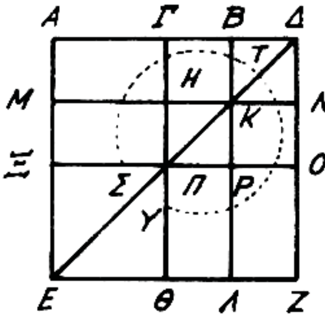
Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΗΕ (Ι.43), ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΓΖ· ἄρα ὁλόκληρον τὸ ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς ὁλόκληρον τὸ ΓΕ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΑΖ, ΓΕ εἶναι διπλάσια τοῦ ὀρθογ. ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸν γνώμονα ΚΛΜ καὶ ἀπὸ τὸ τετράγωνον ΓΖ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὸ ΓΖ εἶναι διπλάσια τοῦ ΑΖ. Εἶναι δὲ διπλάσιον τοῦ ΑΖ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ· διότι ἡ ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὸ τετράγωνον ΓΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν κείσθω τὸ ΔΗ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΚΔ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον

ΑΒ, ΒΓ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΔΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΗ, ΗΔ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΗ, ΗΔ εἶναι ἴσα πρὸς ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΔΕΒ καὶ τὸ τετράγωνον ΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ σὺν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς τῶν τμημάτων της εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὸ εἰρημένον τμῆμα.

Διότι, ἂς τμηθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ τὸ ΑΕΖΔ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα διπλοῦν (ἁπλοῦν σχῆμα εἶναι τὸ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Ἐνταῦθα μετὰ τὴν διαγώνιον ΔΕ, φέρονται ἀνὰ δύο παράλληλοι, αἱ ΓΘ, ΒΛ καὶ αἱ ΜΝ, ΞΟ· τοῦτο ἐννοεῖ ἡ φράσις διπλοῦν σχῆμα).

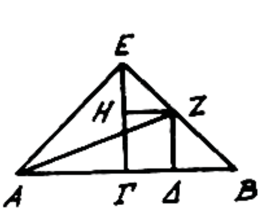
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΚΝ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΠΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, ἕπεται, ὅτι τὸ μὲν ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ πρὸς τὸ ΡΝ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΝ· διότι εἶναι παραπληρώματα τοῦ παραλληλογράμμου ΓΟ (I.43)· ἄρα καὶ τὸ ΚΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΗΡ· ἄρα τὰ τέσσαρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἄρα τὰ τέσσαρα εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΓΚ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΚ, δηλ. τὴν ΓΗ, ἡ δὲ ΓΒ ἴση πρὸς τὴν ΗΚ, δηλ. τὴν ΗΠ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΠ ἡ δὲ ΠΡ ἴση πρὸς τὴν ΡΟ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ ΜΠ (I.36), τὸ δὲ ΠΛ πρὸς τὸ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΠΛ· διότι εἶναι παραπληρώματα τοῦ παραλληλογράμμου ΜΛ (I.43)· ἄρα ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστι τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ, τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, καὶ τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΖ· ἄρα τὰ τέσσαρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ εἶναι ἴσα μεταξύ των· ἄρα τὰ τέσσαρα εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΑΗ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὰ τέσσαρα, τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΓΚ· ἄρα τὰ ὀκτὼ σχήματα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸν γνώμονα ΣΤΥ εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΑΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΚ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· διότι ἡ ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ὁ γνώμων ΣΤΥ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ΑΚ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΣΤΥ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ ΞΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΣΤΥ καὶ τὸ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΣΤΥ καὶ τὸ ΞΘ ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ, δηλαδὴ πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της, μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου τμήματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ τετράγωνα τῶν ἀνίσων τμημάτων ὅλης τῆς εὐθείας εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ σημεῖον Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΕ (I.11) καὶ ἂς ληφθῇ αὕτη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ γωνία ΕΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΓ (I.5). Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ὀρθή, ἔπεται, ὅτι αἱ λοιπαὶ γωνίαι, αἱ ΕΑΓ, ΑΕΓ ἰσοῦνται πρὸς μίαν ὀρθήν (I.32)· καὶ εἶναι αὗται ἴσαι· ἄρα ἑκάστη τῶν ΓΕΑ, ΓΑΕ ἰσοῦται πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΓΕΒ, ΕΒΓ ἰσοῦται πρὸς ἥμισυ ὀρ-

ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση· πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων· ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

θῆς· ἄρα ὁλόκληρος ἡ ΑΕΒ ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθήν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΕΖ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ἡ δὲ ΕΗΖ εἶναι ὀρθή ·διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΕΓΒ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΖΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ΖΔΒ· διότι πάλιν εἶναι αὕτη ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΕΓΒ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΒΖΔ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ παρὰ τὸ Β γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΒ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΕ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ· διότι ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΖ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΖ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ· διότι ἡ γωνία ΑΕΖ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι διπλάσιον τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΖ· διότι ἡ παρὰ τὸ Δ γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΖ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

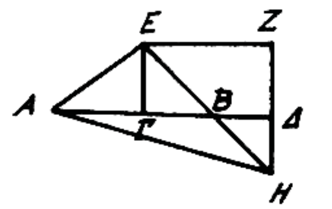
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ τετράγωνα τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν ὅλην τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν προστεθεῖσαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς προστεθείσης, εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας (τῆς δοθείσης εὐθείας) σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης σὺν τὴν προστεθεῖσαν εὐθεῖαν.

Διότι, εὐθεῖά τις, ἡ ΑΒ, ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, ἂς ληφθῇ δὲ κατὰ τὴν προέκτασίν της ἡ εὐθεῖα ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΓ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γάρ ἐστιν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ], ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἂς ληφθῇ αὕτη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΖ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΓ, ΖΔ αἱ γωνίαι ΓΕΖ, ΕΖΔ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (I.29)· ἄρα αἱ γωνίαι ΖΕΒ, ΕΖΔ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν προεκβαλλόμεναι συμπίπτουν (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΕΒ, ΖΔ προεκβαλλόμεναι θὰ συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συμπέσουν κατὰ τὸ Η καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΕΑΓ πρὸς τὴν ΑΕΓ (I.5)· καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἑκάστη τῶν ΕΑΓ, ΑΕΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I.32). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΓΕΒ, ΕΒΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΒΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΒΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I.15). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΔΗ ὀρθή· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓΕ· διότι εἶναι ἐναλλάξ (I.29)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΔΗΒ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΔΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ΗΔ (I.6). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΗΖ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ παρὰ τὸ Ζ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντί της, τὴν παρὰ τὸ Γ (I.34)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΖΕΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I.32)· ἄρα ἡ γωνία ΕΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΖ (I.6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΓ, ΓΑ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΑ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΕΓ, ΓΑ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΗΖ, ΖΕ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΗΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΓΔ (I.34)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΗ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΗ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ εἶναι διπλάσιον τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΗ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΗ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν ὅλην τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν προστεθεῖσαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς προστεθείσης, εἶναι διπλάσια τοῦ τετρα-

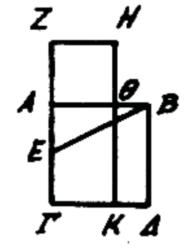
τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ· ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν γώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας, σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης σὺν τὴν προστεθεῖσαν εὐθεῖαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει νὰ τμήσωμεν τὴν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν τμημάτων της νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

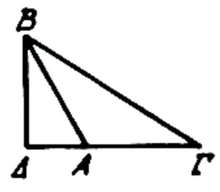
Διότι, ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ (Ι.46) καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΓΑ μέχρι τοῦ Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΗΘ μέχρι τοῦ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ ἔχει οὕτω πως τμηθῇ κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΖΑ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (ΙΙ.6). Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ. Ἀλλὰ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΒΑ, ΑΕ· διότι ἡ γωνία παρὰ τὸ Α εἶναι ὀρθή (Ι.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΒΑ, ΑΕ. Ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ ὀρθογώνιον τὸ ΖΚ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΖΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΔ. Ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ ΑΚ· ἄρα τὸ ἀπομένον ΖΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΔ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· διότι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Εἰς τὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώπερὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.



Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

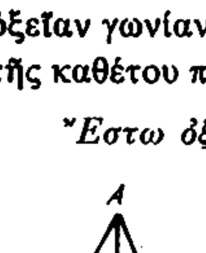
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τὸ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ κοινὸν προσ-

νιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐκτὸς ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ἀμβλείας γωνίας.

Ἔστω τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἀμβλεῖαν, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν προεκβολὴν τῆς ΓΑ ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν ΒΑ, ΑΓ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἔχει τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΔ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ (II.4). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΔ, ΔΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΓΔ, ΔΒ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· διότι ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή (I.47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΑ, ΑΒ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ.

Εἰς τὰ ἀμβλυγώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐκτὸς ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ἀμβλείας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Εἰς τὰ ὀξυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀξείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐντὸς (τοῦ τριγώνου) εὐθείας ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν Β ὀξεῖαν, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΒ, ΒΑ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΒ ἔχει τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, ἕπεται, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΔ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ (II. 7). Ἂς προστεθῇ εἰς *κείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

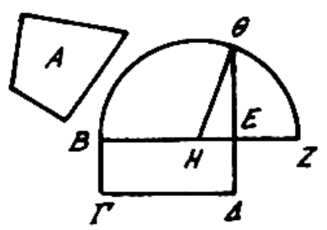
Ἐὰν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ. καὶ τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΑ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΓ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΒΔ, ΔΑ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· διότι ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή (I. 47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ (I. 47)· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΒ, ΒΑ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ.

Εἰς τὰ ὀξυγώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀξείας γωνίας κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀξείας γωνίας ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐντὸς (τοῦ τριγώνου) εὐθείας, ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ὀξείας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α.

Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔ, ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α (I. 45)· ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, τότε κατεσκευάσθη τὸ ἐπιταχθέν. Διότι θὰ ἔχῃ κατασκευασθῇ τετράγωνον τὸ ΒΔ ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α· ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴση, μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ΒΕ, ΕΔ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, ὅτι ἡ ΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Η (I.10), καὶ μὲ κέντρον τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΒ, ΗΖ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΒΘΖ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΔΕ μέχρι τοῦ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΖ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Η, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ (II.5). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΘ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΗΘ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΘΕ, ΕΗ (I.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΘΕ, ΕΗ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΗΕ· τὸ ἀπομένον ἄρα ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ εἶναι τὸ ΒΔ· διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΒΔ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α. Ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ Α, κατεσκευάσθη ἴσον τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Ὅροι.

α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.

ε'. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

ΒΙΒΛΙΟΝ III.

Ὁρισμοί.

1. Ἴσοι κύκλοι εἶναι ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι ἢ ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

2. Εὐθεῖα λέγεται ὅτι ἐφάπτεται κύκλου ἐκείνη, ἡ ὁποία ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ προεκβαλλομένη δὲν τέμνει τὸν κύκλον.

3. Κύκλοι λέγονται ὅτι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἁπτόμενοι μεταξύ των δὲν τέμνονται.

4. Εὐθεῖαι εἰς κύκλον λέγονται ὅτι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι εἶναι ἴσαι.

5. Μεγαλύτερον δὲ λέγεται ὅτι ἀπέχει ἐκείνη, ἐπὶ τῆς ὁποίας πίπτει ἡ μεγαλυτέρα κάθετος.

6. Τμῆμα κύκλου εἶναι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

7. Γωνία δὲ τμήματος εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

8. Γωνία δὲ εἶναι εἰς τμῆμα, ὅταν ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθοῦν εὐθεῖαι μέχρι τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων περιεχομένη γωνία.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀποκόπτουν τόξον τι κύκλου, λέγεται, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου βαίνει ἡ γωνία.

10. Τομεὺς δὲ κύκλου εἶναι, ὅταν κατασκευασθῇ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν καὶ τοῦ τόξου τοῦ κύκλου τοῦ ἀποκοπτομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων.

11. Ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

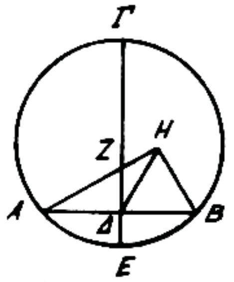
1.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα αὐτόν, ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΔΓ (I.11) καὶ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΓΕ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.



Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

Πόρισμα.

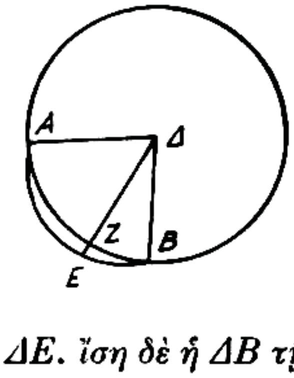
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. — ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, ἀλλ' εἰ δυνατὸν νὰ εἶναι ἄλλο, ἔστω τὸ Η, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΗ, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΗΔ, ΔΒ καὶ ἡ βάσις ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ· διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΒ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἔκ τινος σημείου εὐθείας, σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μεταξύ των, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή (I. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ γωνία ΗΔΒ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΔΒ ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔΒ, ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Η δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον πλὴν τοῦ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. (Εἰς τὸ σχῆμα λείπει τὸ Γ)

Διότι, ἔστω, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἂς πέσῃ ἐκτός, ὅπως ἡ ΑΕΒ καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1), καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΔΑ, ΔΒ καὶ ἡ ΔΖΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ (I. 5)· καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ μία πλευρὰ ἔχει προεκβληθῆ, ἡ ΑΕΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΑΕ (I.16). Εἶναι δὲ ἡ ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΒΕ. Ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (I.19)· ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ, ἤτοι ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ οὐδ' ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἄρα θὰ πέσῃ ἐντός.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

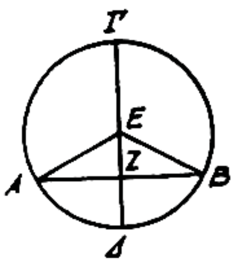
γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσίν]· καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα έμνουστα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

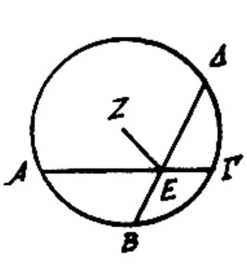
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

3.

Ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εἰς τὸ μέσον εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, θὰ εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν θὰ τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὸν εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ, τέμνουσα εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον, κατὰ τὸ σημεῖον Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.1) ἔστω τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἡ δὲ ΖΕ κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ ἴσαι πρὸς δυὸ πλευρὰς ἀντιστοίχως· καὶ ἡ βάσις ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΖΕ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ σημείου εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας (I, ὁρ. 10), ἑκάστη τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι ὀρθή· ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΖΕ, ΒΖΕ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἡ ΓΔ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνουσα τὴν ΑΒ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Ἂς εἶναι τώρα ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον, ὅτι δηλ. ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΕΑΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΒΖ (I.5). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ἡ ΑΖΕ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν τὴν ΒΖΕ· ἄρα ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ὡς κοινήν, τὴν ΕΖ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως (I.26)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου εἰς τὸ μέσον, εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, θὰ τὴν τέμνῃ εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ Ε, νὰ μὴ διέρχωνται ὅμως διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι εἰς τὸ μέσον, ὥστε ἡ μὲν ΑΕ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ (III.1) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΕ.

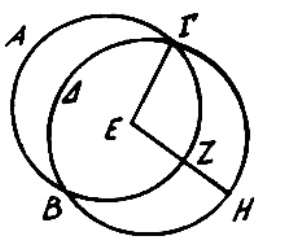
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ· πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ· ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων.

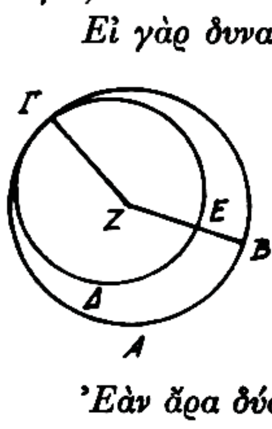
Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. ἐδείχθη δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην τὴν ΑΓ, ἕπεται, ὅτι εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν (III. 3)· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· πάλιν, ἐπειδὴ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ, τέμνει εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΒ εἶναι ὀρθή. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕΒ, δηλ. ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου τέμνωνται μεταξύ των, δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς τέμνωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΗ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ. Λέγω, ὅτι οὗτοι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΗ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ, ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΗ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

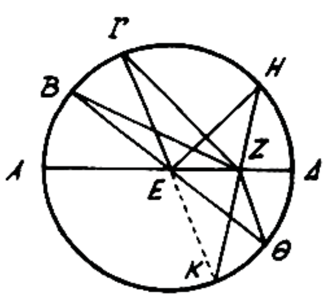
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ καὶ ἂς διαχθῇ, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΕ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἤτοι ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ [αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ]· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ, αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ· ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ· δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου· εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ (ἴση ἐστίν), καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

7.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἂς εἶναι δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τὸ Ζ ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς τρίτης (Ι.20), ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΒ, ΕΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ [ἄρα αἱ ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΑΖ]· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΕ, ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΓΖ (Ι,24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΗ (Ι.20), ἡ δὲ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα ἡ κοινὴ ΕΖ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΖΔ. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἄγονται πρὸς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΖΔ. Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Ε (ὡς κορυφῆς) ἡ γωνία ΖΕΘ ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (Ι. 23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἡ δὲ ΕΖ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΕ, ΕΖ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ. Λέγω, ὅτι ἄλλη ἴση (ἐκτὸς τῆς ΖΘ) πρὸς τὴν ΖΗ δὲν ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἄγεται ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, δηλ. ἡ ἐγγύτερον πρὸς τὸ κέντρον ἴση μὲ τὴν μακρύτερον· ὅπερ ἀδύνατον (κατὰ τὸ α΄ μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ζ δὲν ἄγεται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἄλλη ἴση πρὸς τὴν ΗΖ· ἄρα μία μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΗ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ' αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστίν· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ κεῖται τὸ κέντρον. ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν, θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

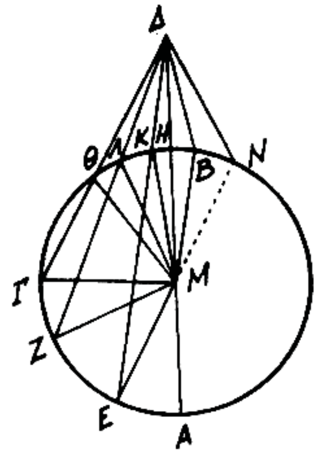
8.

Ἐὰν ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαί τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δὲ ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἂς διαχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου τούτου μερικαὶ εὐθεῖαι, ὅπως αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ καὶ ἂς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ. Λέγω, ὅτι τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΑΕΖΓ, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΘΛΚΗ ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΗ, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1) καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΜΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΕΜ, ΜΔ. Ἀλλὰ αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ (I. 20)· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΜΕ εἶναι ἴση πρὸς ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΕΜΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΜΔ. Ἄρα ἡ βάσις ΕΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΔ (I.24). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ· ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάττων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστὶν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης· συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δύο ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λέγω [δή], ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου· εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον [ἐστιν] ἴση· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΔ (I.20), ἡ δὲ ΜΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΚ, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ΚΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΔ· ὥστε ἡ ΗΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΚΔ· καὶ ἐπειδὴ ἐκ σημείου ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΜΛΔ ἐπὶ τὰ ἄκρα μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῆς ΜΔ ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΚΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μικρότεραι τῶν ΜΛ, ΛΔ (I.21)· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΜΛ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΔΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπολοίπου ΔΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΘ· ἄρα εἶναι ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, μικροτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Δ θὰ προσπέσουν εἰς τὸν κύκλον μόνον δύο ἴσαι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ· ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΔ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ (ὡ κορυφῆς) ἡ γωνία ΔΜΒ ἴση πὸς τὴν ΚΜΔ (I.23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΜΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜΔ· ἄρα ἡ βάσις ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ (I.4). Λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν ΔΚ δὲν θὰ προσπέσῃ εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ σημείου Δ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσπέσῃ καὶ ἄλλη, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, ἀλλὰ ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, δηλ. ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπώτερον κειμένην· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (κατὰ τὸ α' μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα δὲν θὰ προσπέσουν ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ, περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ.

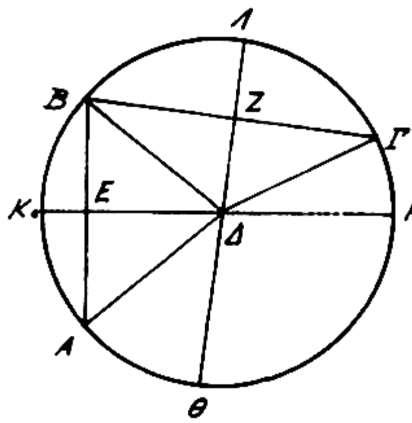
Ἐὰν ἄρα ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαί τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δὲ ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ σημείου δὲ προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς προσπέσουν *τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. λέγω, ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.*

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα.



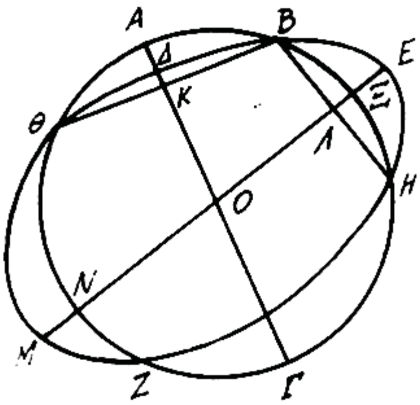
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δύο ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ Β, Η, Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα.



Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΕΔ, ΖΔ, ἂς διαχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Η, Κ, Θ, Λ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ (Ι.8)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΒΕΔ εἶναι ὀρθή (Ι. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ ΗΚ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖάν τινα εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τῆς ΗΚ (πόρ. III. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ. Αἱ εὐθεῖαι ὅμως ΗΚ, ΘΛ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνῃ ὁ κύκλος ΑΒΓ τὸν κύκλον ΔΕΖ εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα, τὰ Β, Η, Ζ, Θ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΒΘ, ΒΗ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ· καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Λ αἱ ΚΓ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΘ, ΒΗ, ἂς ἀχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Α, Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ τέμνει εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ (πόρ. III. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ τέμνει εἰς τὸ μέσον εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΝΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΝΞ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Ο· ἄρα τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τοῦ κύκλου ΔΕΖ κέντρον εἶναι τὸ Ο· ἄρα ὅταν δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ τέμνωνται μεταξύ των, ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, τὸ Ο· ὅπερ ἀδύνατον (III. 5).

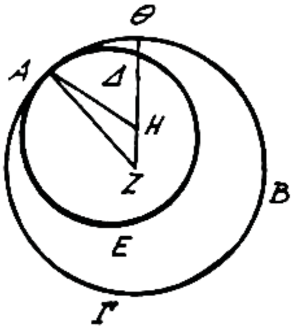
Ἄρα κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.



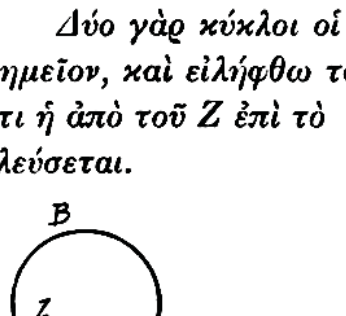
Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ, τουτέστι τῆς ΖΘ, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΗΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΗΔ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

11.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν προεκτεινομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (ΙΙΙ. 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Η πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν διέρχεται, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς κεῖται, ὅπως ἡ ΖΗΘ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΖΑ (Ι. 20), δηλ. τῆς ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ταύτας ἡ κοινὴ ΖΗ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΑΗ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΘ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΘ, δηλ. ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ Ζ μὲ τὸ Η δὲν θὰ πέσῃ ἐκτός· ἄρα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντός [καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν], ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα [καὶ προεκβαλλομένη] θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτὸς κατὰ τὸ σημεῖον Α οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (ΙΙΙ 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Η εὐθεῖα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν θὰ διέλθῃ, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἀκολουθῇ τὴν διαδρομὴν ΖΓΔΗ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΔΕ, ἡ ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα αἱ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΖΓ, ΗΔ· ὥστε ὁλόκληρος ἡ ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ΖΑ, ΑΗ· αὐτὴ ὅμως εἶναι καὶ μικροτέρα (Ι.20)· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ εἰς τὸ Η ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α· ἄρα θὰ διέλθῃ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη [εὐθεῖα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

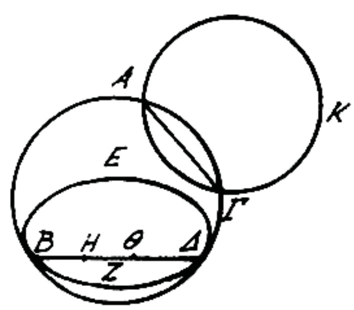
Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Δ, Β.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΔΘ· ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ'] ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Κύκλος δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτεται.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτεται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρῶτον τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Δ, Β.

Καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓΔ κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ·

Ἡ ἀγομένη ἄρα ἀπὸ τὸ Η πρὸς τὸ Θ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Β, Δ (III. 11). Ἂς εἶναι δὲ αὕτη, ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ· ἄρα, κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΒΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, ἡ ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΔ· ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐντός, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω ἐπίσης, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἐκτός.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτεται ἐκτὸς ὁ κύκλος ΑΓΚ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εἰς περισσότερα ἢ ἓν σημεῖα, τὰ Α, Γ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχουν ληφθῆ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκάστου τῶν κύκλων ΑΒΓΔ, ΑΓΚ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ πέσῃ ἐντὸς ἑκάστου τῶν κύκλων τούτων (III. 2)· ἀλλὰ εἰς μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἔπεσεν ἐντός, εἰς δὲ τὸν κύκλον ΑΓΚ ἔπεσεν ἐκτός (ὁρ. III. 3)· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐκτὸς εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς ἐφάπτεται εἴτε ἐκτός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

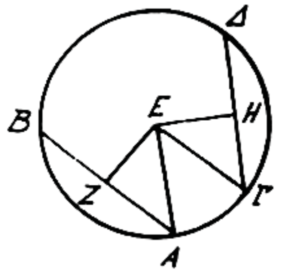
14.

Εἰς κύκλον αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (III.1) καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΕΗ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ, τέμνει αὐτὴν καὶ εἰς τὸ μέσον (III. 3). Ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι διπλασία



ΖΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστι διπλῆ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΕΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστιν ἴσον· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ διαμέτρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

τῆς ΑΖ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ εἶναι ἴση ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΕΖ (Ι.47)· διότι ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· διότι ἡ πρὸς τὸ Η γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΕ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τετράγωνον τὸ τῆς ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Εἰς κύκλον δὲ λέγονται εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπ' αὐτὰς εἶναι ἴσαι (ὁρ. ΙΙΙ. 4)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλ' ἂς ἀπέχουν τώρα ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ἤτοι ἡ ΕΖ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ· ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ (Ι.47), πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ. Ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· ἐξ ὧν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ· διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα καὶ τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ· καὶ εἶναι τῆς μὲν ΑΖ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλασία ἡ ΓΔ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Εἰς κύκλον μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ πλησιέστερον μὲν τῆς διαμέτρου ΑΔ ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΑΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ε ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ, αἱ κάθετοι ΕΘ, ΕΚ· Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΘ (ὁρ. ΙΙΙ. 5). Ἂς ληφθῇ ἡ ΕΛ ἴση πρὸς τὴν ΕΘ καὶ διὰ τοῦ Λ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΛΜ ἐπὶ τὴν ΕΚ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

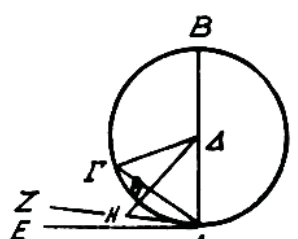
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ' αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσιν [καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν], ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ· ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση [καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν]. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ ΑΕ· λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ, μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΛ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΜΝ (III. 14). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΝ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΜΕ, ΕΝ. Ἀλλ' αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΝ (I.20) [καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΝ], εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΜΕ, ΕΝ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΜΕΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΕΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΗ (I.24). Ἀλλὰ ἡ ΜΝ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΓ [καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ]. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διάμετρος, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Εἰς κύκλον ἄρα μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν τόπον τὸν μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας δὲν δύναται νὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα, καὶ ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος εἶναι μικροτέρα.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α, τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου, ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἐκτὸς κύκλου.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν πίπτει ἐκτός, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐντὸς ὅπως ἡ ΓΑ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ (I. 5). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ γωνία ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΓΔ εἶναι ὀρθή· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον (I.17). Ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΒΑ κάθετος δὲν θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ πέσῃ· ἄρα θὰ πέσῃ ἐκτός.

Ἂς πέσῃ αὕτη ὅπως ἡ ΑΕ· λέγω τώρα, ὅτι εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς παρεμπέσῃ ἄλλη, ὅπως ἡ ΖΑ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΗΔ εἶναι ὀρθή, μικροτέρα δὲ τῆς ὀρθῆς ἡ ΔΑΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ (I.19). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΘ· ἄρα ἡ ΔΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ, ἡ μικροτέρα τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ τόξου δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας.

Εἰ γάρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας.

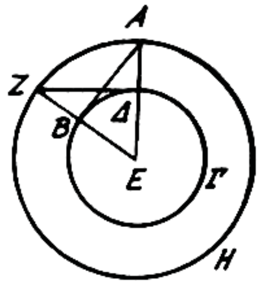
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. καί ἐστιν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Διότι, ἐὰν ὑπάρχῃ γωνία τις εὐθύγραμμος μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέρα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, θὰ παρεμπέσῃ εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ σχηματίσῃ γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ εὐθειῶν, μεγαλυτέραν μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέραν δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ. Ἀλλὰ δὲν παρεμπίπτει τοιαύτη εὐθεῖα (κατὰ τ' ἀνωτέρω)· ἄρα δὲν θὰ ὑπάρχῃ μεγαλυτέρα ὀξεῖα γωνία περιεχομένη ὑπὸ εὐθειῶν ἀπὸ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, οὐδὲ μικροτέρα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου μόνον εἰς ἓν σημεῖον, διότι ἐδείχθη, ὅτι ἡ ἔχουσα μετ' αὐτοῦ δυὸ κοινὰ σημεῖα πίπτει ἐντὸς αὐτοῦ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε ἀκτῖνα δὲ τὴν ΕΑ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΕΑ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ.

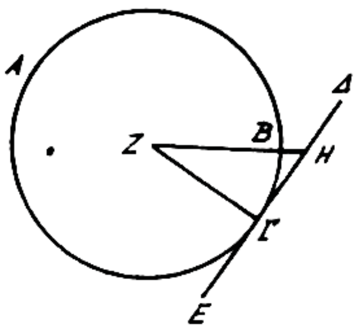
Διότι, ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΒΓΔ, ΑΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ μὲν ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΒ· εἶναι λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΒ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν Ε· ἄρα ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΑ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς τοῦ ἄλλου (Ι.4)· ἄρα ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΕΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΒΑ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἡ ΕΒ ἔχει ἀχθῆ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (ΙΙΙ. 16 πόρ)· ἄρα ἡ ΑΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΒΓΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιη'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

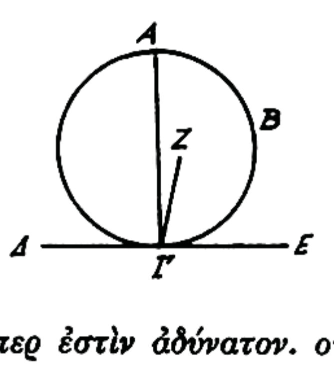
Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ· ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΖΗ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖά τις, μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Διότι, ἃς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἃς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἃς ἀχθῇ εἰς τὸ Γ ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΖΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΗΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓΗ εἶναι ὀξεῖα (I.17)· κεῖται δὲ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ἡ μεγαλυτέρα πλευρά (I.19)· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, ἡ μικροτέρα, τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΖΗ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ὑπάρχει πλὴν τῆς ΖΓ· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖά τις μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης.

Διότι, ἃς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ, κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ζ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΓΖ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΖΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ (III. 18)· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΓΕ ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ, ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Ζ δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι ὑπάρχει, πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

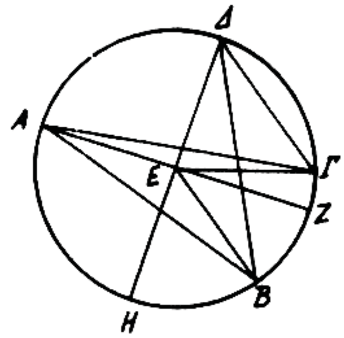
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστι διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστι διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστι διπλῆ.

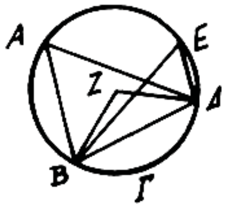
Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΕΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓΔ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστι διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·

20.

Εἰς κύκλον ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν καὶ αἱ δύο γωνίαι ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐπίκεντρος μὲν γωνία, ἔστω ἡ ΒΕΓ, ἐγγεγραμμένη δὲ ἡ ΒΑΓ, ἃς ἔχουν δὲ τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν, τὸ ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΕ, ἃς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, καὶ ἡ γωνία ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΑΒ, ΕΒΑ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΕΑΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΕΖ ἴση πρὸς τὰς ΕΑΒ, ΕΒΑ (I.32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΕΖ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΖΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΓ. Ἄρα ὅλη ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία ὅλης τῆς ΒΑΓ.

Ἂς φέρωμεν πάλιν μίαν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ ἔστω ἄλλη γωνία ἡ ΒΔΓ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ, ἃς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Η. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία ΗΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΗΕΒ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΒ· ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΔΓ.

Εἰς κύκλον ἄρα ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν [αἱ γωνίαι] ἔχουν τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Εἰς κύκλον, αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΕΔ ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Διότι, ἃς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἃς ἀχθοῦν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία ΒΖΔ εἶναι ἐπίκεντρος, ἡ δὲ ΒΑΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον τὸ ΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΔ (III. 20). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΕΔ· ἄρα ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

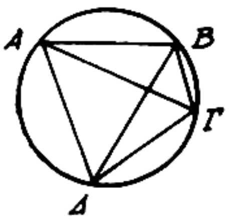
22.

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν εἰς κύκλον τετραπλεύρων ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ· ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλʼ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

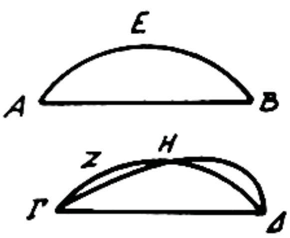
Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.



Ἃς ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (I.32), ἔπεται, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΓΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΓ· διότι αὗται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΔΓ (III. 21), ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ· διότι εὑρίκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΑΔΓΒ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ἃς προστεθῇ ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΑΔΓ. Ἀλλὰ αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ἄρα καὶ αἱ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΔΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἄρα τῶν εἰς τοὺς κύκλους τετραπλεύρων, αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, τὰ ΑΓΒ ΑΔΒ καὶ ἃς διαχθῇ ἡ ΑΓΔ, καὶ ἃς ἀχθοῦν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα ΑΓΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΑΔΒ, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας (όρ. III. 11), ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ, ἤτοι ἡ ἐκτὸς ἴση πρὸς τὴν ἐντός· ὅπερ ἀδύνατον (I.16). Ἄρα δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι, ἔστωσαν ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΖΔ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὅταν δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ. Διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, τὸ δὲ τμῆμα ΑΕΒ δὲν ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ, τοῦτο ἢ θὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ ἢ ἐκτὸς ἢ θὰ παραλλάξῃ ὅπως τὸ ΓΗΔ, ὁπότε κύκλος τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα ἢ δύο σημεῖα· ὅπερ ἀδύνατον (III. 10). Ὄχι λοιπόν, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ, δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ· ἄρα θὰ ἐφαρμόσῃ, καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

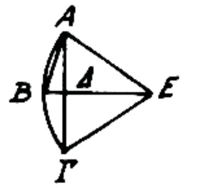
Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

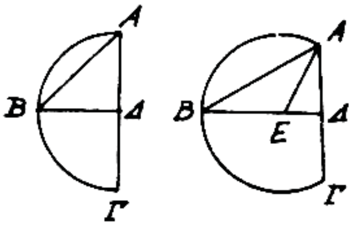
Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.



Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύγθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΒ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δύο ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος καὶ δῆλον, ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.



Ὁμοίως [δὲ] κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κϛ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν

Ἄρα τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δοθῇ τμῆμα κύκλου, νὰ γραφῇ ἐπ' αὐτοῦ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα.

Ἔστωσαν τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· πρέπει νὰ γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα ΑΒΓ.

Διότι ἃς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ΒΑΔ.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἃς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΔ (Ι.23) καὶ ἃς προεκταθῇ ἡ ΔΒ μέχρι τοῦ σημείου Ε, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ (Ι. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΕ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΓΔ, ΔΕ· καὶ ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ (Ι. 4). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ· ἄρα καὶ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἐπομένως ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα (ΙΙΙ. 9). Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒΓ εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου, διότι τὸ κέντρον Ε εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ὁμοίως δέ, καὶ ἂν ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, ἀφοῦ ἡ ΑΔ ληφθῇ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (Ι. 6) καὶ θὰ εἶναι τὸ Δ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

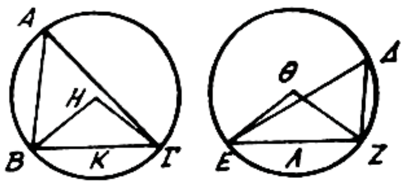
Ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑΔ, καὶ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ Α γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΔ (Ι. 23), τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΒΓ καὶ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΔΒ, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΑΒΓ μεγαλύτερον ἡμικυκλίου.

Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

26.

Εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε ἐπίκεντροι εἶναι αὗται, εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς αὐτοὺς ἔστωσαν ἴσαι γωνίαι *πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείας αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.*



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ]· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

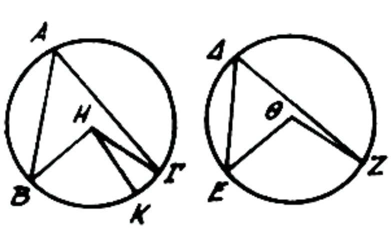
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἐπίκεντροι μὲν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσοι, αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΗ, ΗΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΕΘ, ΘΖ· καὶ ἡ γωνία Η εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Θ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ, ἕπεται, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΔΖ (ὁρισ. III. 11)· καὶ εἶναι ταῦτα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ], τὰ δὲ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, εἶναι μεταξύ των ἴσα (III. 24)· ἄρα τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΔΖ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

Εἰς ἴσους ἄρα κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, εἰς τοὺς ἴσους κύκλους ΑΒΓ, ΔΕΖ ἂς βαίνουν ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τὰ κέντρα Η, Θ (ἐπίκεντροι) αἱ γωνίαι ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΒΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ, ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΗΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΘΖ, μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΒΗΓ μεγαλυτέρα, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Η, γωνία ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ ἡ ΒΗΚ (Ι. 23)· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι, βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (III. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ, τὸ μικρότερον, ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισος ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Καὶ εἶναι ἡ μὲν (ἐγγεγραμμένη) ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Α, τὸ ἥμισυ τῆς ΒΗΓ, ἡ δὲ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Δ τὸ ἥμισυ τῆς ΕΘΖ (III. 20). Ἄρα καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ.

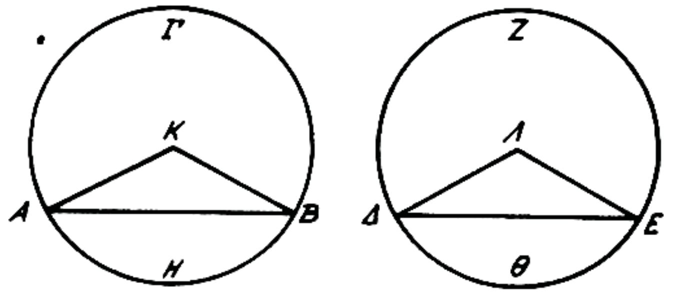
Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.



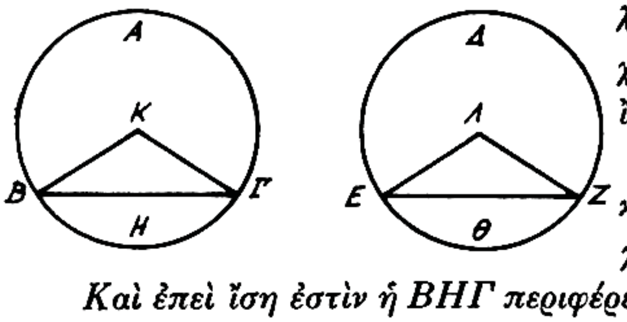
Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι (χορδαὶ) χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς τοὺς κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, νὰ χωρίζουν μεγαλύτερα μὲν τόξα τὰ ΑΓΒ, ΔΖΕ, μικρότερα δὲ τὰ ΑΗΒ, ΔΘΕ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν μεγαλύτερον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τόξον ΔΖΕ, τὸ δὲ μικρότερον τόξον ΑΗΒ πρὸς τὸ μικρότερον ΔΘΕ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρισ. III. I)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΔΛ, ΛΕ· καὶ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΕ· ἄρα ἡ γωνία ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΛΕ (I. 8). Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι (III. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΑΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΘΕ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΔΖΕ (κ. ἔν. 3).

Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι (εἰς τὰ ἴσα τόξα, ἴσων κύκλων, ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί).

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθοῦν εἰς αὐτοὺς τὰ ἴσα τόξα ΒΗΓ, ΕΘΖ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω ταῦτα τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΘΖ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΒΚΓ πρὸς τὴν ΕΛΖ (III. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρ. III. 1)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΕΛ, ΛΖ· καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (I. 4).

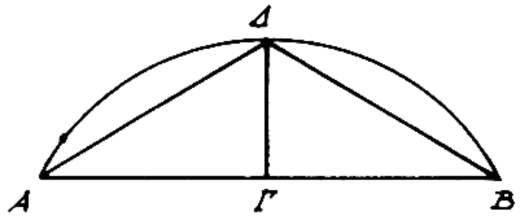
Ἄρα εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



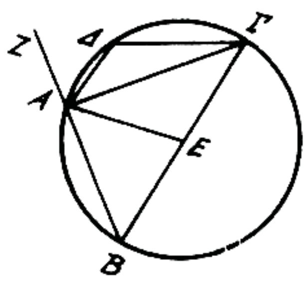
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν, αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λα'.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

30.

Τό δοθὲν τόξον νὰ διχοτομηθῇ.

Ἔστω τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΔΒ· πρέπει τὸ τόξον ΑΔΒ νὰ διχοτομηθῇ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ (I.10), καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΓΔ, ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ (I.4). Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον (III. 28)· καὶ εἶναι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΔ, ΔΒ μικρότερον ἡμικυκλίου· ἄρα τὸ τόξον ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΒ.

Ἄρα τὸ δοθὲν τόξον ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31.

Εἰς κύκλον ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς μικρότερον τμῆμα εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη, ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν εἰς τὸ ΒΑΓ ἡμικύκλιον γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου, γωνία ἡ ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου τμῆμα τὸ ΑΔΓ γωνία ἡ ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΑ μέχρι τοῦ Ζ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ (I.5). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΕ· ἄρα ὅλη ἡ γωνία ΒΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΑΓ, ἡ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἴση πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ (I.32)· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΓ· ἄρα ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή (I ὁρισ. 10)· ἄρα ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΒΑΓ γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν (I.17), ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὕτη εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν [αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν], καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστιν· καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΔ [Γ] περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [γωνία] μείζων [ἐστὶν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [γωνία] ἐλάττων ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

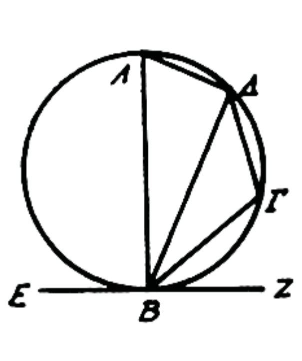
[Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν [ἡ] μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν].

λβ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β καὶ ἀπὸ

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τετράπλευρον εἰς κύκλον, τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ εἰς κύκλον τετραπλεύρων αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς (III. 22), [ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΔΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς], καὶ εἶναι ἡ ΑΒΓ μικροτέρα ὀρθῆς· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος, ἡ ΑΔΓ γωνία, εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὕτη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΔΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς. Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΖ γωνία εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΑ καὶ τοῦ τόξου ΑΔΓ, εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς.

Εἰς κύκλον ἄρα, ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας δύο, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἴση πρὸς ταύτην καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὰς ἄλλας (ἐντὸς) δύο· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, εἶναι ὀρθαί].

32.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖά τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα.

Διότι, ἂς ἐφάπτετα τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΕΖ, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς εἰς τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τοῦ κύκλου γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΖΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΔ κατασκευαζομένην γωνίαν (δηλ. τὴν ἐγγεγραμμένην, τὴν ἔχουσαν τὴν κορυφὴν εἰς τὸ τόξον ΒΑΔ καὶ βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ), ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΔΓΒ κατασκευαζομένην γωνίαν.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΑ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ, τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον *τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστιν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.*

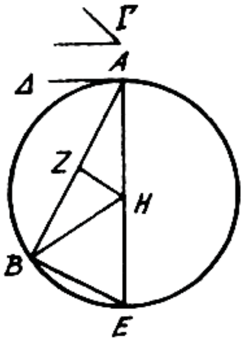
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἡ δὴ πρὸς τῷ Γ [γωνία] ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. ἤχθω τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. γεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἀπ᾽ ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΕ κύκλου· ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ

Β καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῆ ἡ ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΑ (III. 19). Ἄρα ἡ ΒΑ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΔΒ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή (III. 31). Αἱ λοιπαὶ ἄρα γωνίαι (τοῦ τριγώνου) αἱ ΒΑΔ, ΑΒΔ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒΖ ὀρθή· ἄρα ἡ ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΑΒΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ (ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς) ἡ κοινὴ ΑΒΔ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα γωνία ΔΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου ἀπομένουσαν γωνίαν ΒΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει εἰς τὸν κύκλον (ἐγγεγραμμ.) τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (III. 22). Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (I. 13)· ἄρα, αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΒΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΒΑΔ ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΖ· ἄρα (ἀφαιρουμένων τῶν ἴσων) ἡ ἀπομένουσα ΔΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν γωνίαν ΔΓΒ, τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου, τὸ ΔΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖά τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖά τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

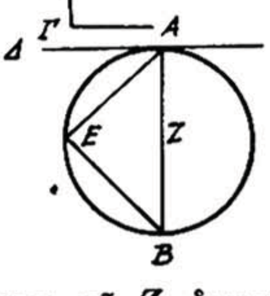
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Γ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ, νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ.

Ἡ γωνία Γ θὰ εἶναι ἢ ὀξεῖα ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον, ὅτι εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς τὴν Γ ἡ ΒΑΔ (I. 23)· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ὀξεῖα. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ· καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (I. 4). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ τὴν ΗΑ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β. Ἂς γραφῇ οὗτος καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΕ (III. 16 πόρ.)· ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΕ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α ἔχει διαχθῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΕ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν *ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ.*

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

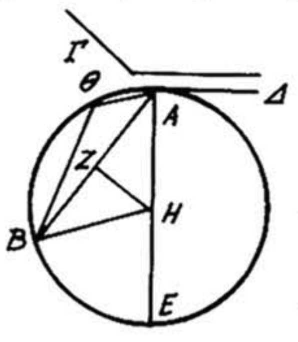


Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ [γωνίᾳ]· συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ.

Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κυκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι· ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.



Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν τὴν ΑΕΒ (III. 32). Ἀλλὰ ἡ ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον τὴν γωνίαν ΑΕΒ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ.

Ἀλλ' ἔστω τώρα, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή· καὶ ὅτι πρέπει πάλιν νὰ γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Γ. Ἂς κατασκευασθῇ πάλιν γωνία, ἡ ΒΑΔ, ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν Γ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ καὶ μὲ κέντρον τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΑΕΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἐφάπτεται ἄρα τοῦ κύκλου ΑΒΕ, διότι ἡ παρὰ το Α γωνία εἶναι ὀρθή (πόρ. III. 16). Καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ· διότι καὶ αὔτη εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή (III. 31). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἄρα ἔχει γραφῆ πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ.

Ἀλλ' ἀκόμη ἔστω ἡ γωνία Γ ἀμβλεῖα· καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΑΔ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, καὶ ἂς τμηθῇ πάλιν ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (I.4)· ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ τὴν ΗΛ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β. Ἂς διέρχεται δέ, ὅπως ὁ ΑΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος, ἔπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΕΒ (πόρ. III. 16). Καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῇ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΑΘΒ τοῦ κύκλου κατεσκευασμένην γωνίαν (III. 32). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΘΒ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

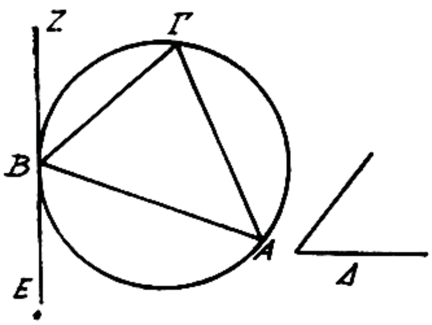
Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

34.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ·

τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΖΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

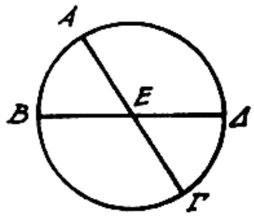
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ [γωνίᾳ].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσον αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ· [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ πρέπει ἀπὸ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Β γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ ἡ ΖΒΓ (I.23).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Β ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΒΑΓ κατασκευασθεῖσαν γωνίαν (III. 32). Ἀλλὰ ἡ ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΓ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ, ἔχει ἀφαιρεθῇ τὸ τμῆμα ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

35.

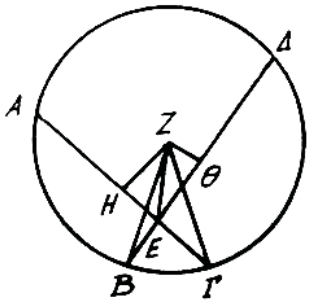
Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης.

Διότι, ἂς τέμνωνται μεταξύ των εἰς κύκλον τὸν ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΓ, ΒΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἐὰν μὲν αἱ ΑΓ, ΒΔ διέρχωνται διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε τὸ Ε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἂς μὴ διέρχωνται τώρα διὰ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΔΒ αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (III. 3)· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΓ (II. 5)· ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΗΕ, ΗΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΓΖ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ, πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (I.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώ-



ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

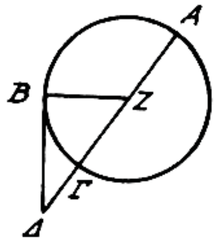
Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓ[Α], ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΒΔ ἐφαπτέσθω· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα [Δ]ΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ



ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου νιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (I.47). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· τὸ ἀπομένον ἄρα ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

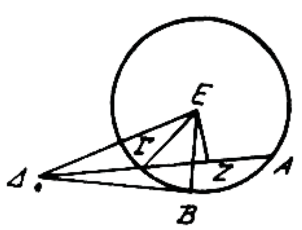
36.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης.

Διότι, ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἂς προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἐφάπτεται· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

Ἡ ΔΓΑ ἢ θὰ διέρχεται ἢ δὲν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Ἔστω πρότερον, ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω Ζ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ· ἄρα ἡ ΖΒΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (II. 6). Εἶναι δὲ ἡ ΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ. Πρὸς τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ΖΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ (I. 47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ΔΒ.

Ἀλλ' ἀκόμη ἔστω, ὅτι ἡ ΔΓΑ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΒΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ *τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΔ, ΖΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ· ὀρθὴ γάρ [ἐστιν] ἡ ὑπὸ ΕΖΓ [γωνία]· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.*



Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστιν καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἐπειδὴ εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖάν τινα τὴν ΑΓ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (III. 3)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (II. 6). Ἂς προστεθῆ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΔ, ΖΕ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΖΓ εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΔΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΒΔ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ. Ἂς ἀφαιρεθῆ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

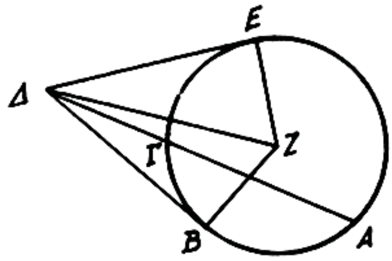
Ἐὰν ἄρα ληφθῆ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν ληφθῆ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Διότι, ἂς ληφθῆ σημεῖόν τι τὸ Δ κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς προσπίπτουν πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἂς προσπίπτῃ, ἔστω δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῆ ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.27), καὶ ἂς ληφθῆ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. Ἄρα ἡ ΖΕΔ εἶναι ὀρθή (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ κύλου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΓΑ τέμνει τὸν κύκλον, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ (III. 36). Ἦτο δὲ καὶ τὸ



ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. καὶ ἔστιν ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΕΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΒ, ΒΖ· καὶ βάσις αὐτῶν (τῶν τριγώνων) εἶναι ἡ κοινὴ ΖΔ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΖ (Ι. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΒΖ εἶναι ὀρθή. Καὶ εἶναι ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος (ἀρχίζουσα ἀπὸ τὸ Β, διερχομένη διὰ τοῦ Ζ καὶ προεκτεινομένη)· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἄγεται κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (πόρ. III. 16)· ἄρα ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῇ, καὶ ἂν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ὅροι.

α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς, τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

γ'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ε'. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς, τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

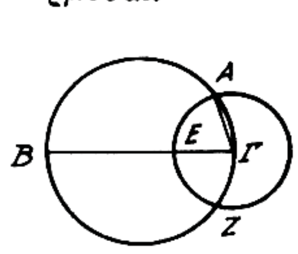
ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ. δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΑΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστιν ἴση.

ΒΙΒΛΙΟΝ IV.

Ὁρισμοί.

1. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς εὐθύγραμμον σχῆμα, ὅταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

2. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι σχῆμα περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, περὶ τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

3. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

4. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι περιγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

5. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι κύκλος ἐγγράφεται εἰς σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

6. Κύκλος δὲ λέγεται, ὅτι περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

7. Εὐθεῖα λέγεται, ὅτι ἐναρμόζεται εἰς κύκλον, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

1.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ μὴν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Δ, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, τὸ προσταχθὲν εἶναι γεγονός· διότι εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῇ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ, ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν Δ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΕ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΑΖ, ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑ.

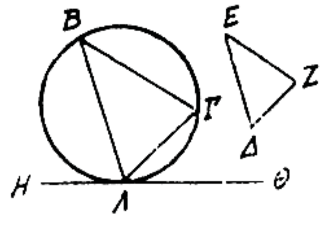
Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ, πρὸς δὲ τῇ ΑΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΖΕ [γωνίᾳ] ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



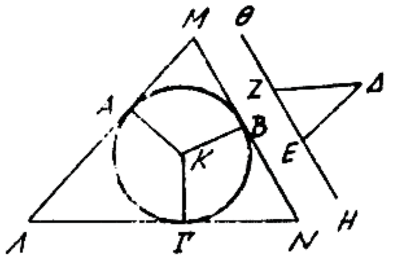
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση· [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.]

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΑ

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῆ ἡ ΓΑ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Α ἡ ΗΘ (ΙΙΙ. 17) καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΘ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΘΑΓ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΗ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΗΑΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ (Ι. 23), καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις, ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῆ εἰς τὸν κύκλον ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν, τὴν ΑΒΓ (ΙΙΙ. 32). Ἀλλὰ ἡ ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ἔχει ἐγγραφῆ ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΕΖ καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτῆς μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἄς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Κ καὶ ἄς ἀχθῇ ἐκ τούτου τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΚΒ, καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Κ, πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΔΕΗ ἴση ἡ ΒΚΑ, πρὸς δὲ τὴν ΔΖΘ ἴση ἡ ΒΚΓ (Ι. 23), καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, ἄς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓ αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ (ΙΙΙ. 17).

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτονται αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἔχουν ἀχθῆ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ αἱ ΚΑ, ΚΒ, *ΚΒ, ΚΓ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.*

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Η κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Γ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Η γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἐγγεγράφθω ὡς ὁ ΖΗΕ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΚΓ, ἕπεται, ὅτι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, γωνίαι εἶναι ὀρθαί (III. 18). Καὶ ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΒΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, διότι τὸ ΑΜΒΚ διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα (I. 32), καὶ αἱ γωνίαι ΚΑΜ, ΚΒΜ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται, ὅτι αἱ ἀπομένουσαι ΑΚΒ, ΑΜΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (I. 13)· ἄρα αἱ ΑΚΒ, ΑΜΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕΗ ΔΕΖ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΗ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα ἡ ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΔΕΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΛΝΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΜΛΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΛΜΝ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· καὶ εἶναι τοῦτο περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον περιεγράφη ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΓΔ (I.9), καὶ ἂς συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὸ σημεῖον Δ (I. αἴτ. 5), καὶ ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΒΖΔ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, δηλ. κοινὴν τὴν ἀπέναντι (ὑποτείνουσαν) μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΒΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπάς (I. 26)· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (εἰς τὸν κώδικα ἐλλείπει τὸ γράμμα Δ) θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, διότι αἱ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν θὰ τέμνῃ ὁ κύκλος αὐτάς, τότε ἡ εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἀγομένη κάθετος θὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἄτοπον (III. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· ἐπομένως θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΖΗΕ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

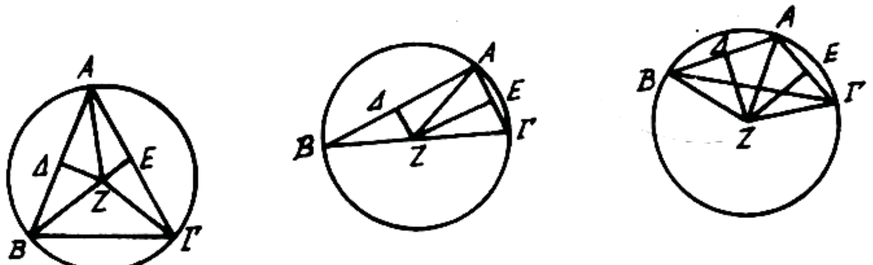
Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ΒΖ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



[Πόρισμα.]

Καὶ φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν, ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. [ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου πεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ, ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς , ἐκτὸς τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.]

5.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κάθετοι αἱ ΔΖ, ΕΖ· αὗται θὰ συμπέσουν ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Ἂς συμπέσουν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ (1.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (κοιναὶ ἔνν. 1). Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς περιγραφῇ ὅπως ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλ' ἂς συμπίπτουν τώρα αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ ἂς συμπίπτουν αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πάλιν κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι δὲ κοινὴ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΖ (1.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα πάλιν ὁ κύκλος γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον ἔχει περιγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[Πόρισμα.]

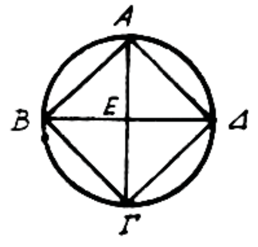
Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ γωνία ΒΑΓ, εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· ὅτε δὲ τὸ κέντρον πίπτει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, ἡ γωνία ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. [Ὥστε καὶ ὅταν ἡ διδομένη γωνία εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, αἱ ΔΖ, ΕΖ θὰ πέσουν ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ὅταν δὲ εἶναι ὀρθή, θὰ πέσουν ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς θὰ πέσουν ἐκτὸς τῆς ΒΓ (III. 31)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ· κέντρον γὰρ τὸ Ε· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ, βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

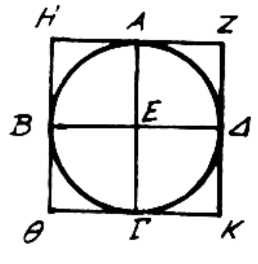
ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ, αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστι παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστι παράλληλος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστι παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση [καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλ-



6.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΒΔ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· διότι τὸ Ε εἶναι κέντρον· κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΔ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ΒΑΔ εἶναι ἡμικύκλιον· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή (III. 31). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον (I. ὁρισ. 22). Καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῆ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

7.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των, αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ (III. 17).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΗ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ε ἔχει ἀχθῆ ἕως τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι αἱ παρὰ τὸ Α γωνίαι εἶναι ὀρθαί (III. 18). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΒΗ ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (I. 29). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ. Ὥστε καὶ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ (I. 30). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΖ, ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕΔ. Ἄρα τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἄρα ἡ μὲν ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΚ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ [καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ], ἕπεται, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΗΘΚ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθοληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

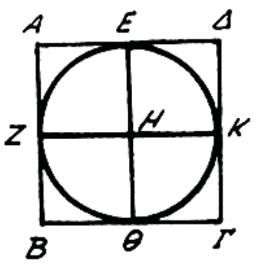
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

η΄.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΑΒ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ. διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσίν]. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσίν]. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.



Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

θ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ γώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΗΒΕΑ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΒ εἶναι ὀρθή (I. 34). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Θ, Κ, Ζ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἄρα τὸ ΖΗΘΚ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον. Καὶ ἔχει περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ἔχει περιγραφῆ τετράγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

8.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν ΑΔ, ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεια Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΔ, ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΖΚ (I. 30 καὶ 31)· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΚ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΗ, ΗΕ· ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ, Κ, γωνίαι εἶναι ὀρθαί· διότι, ἐὰν ὁ κύκλος θὰ τέμνῃ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (III. 16). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

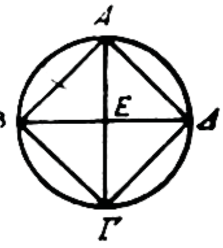
9.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον Ε.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, ὑπάρχουν δύο



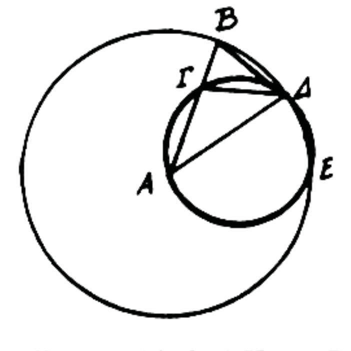
ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ [εὐθειῶν] ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΑΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΒ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ διχοτομεῖται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΕΑΒ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΑΒ, ἡ δὲ ΕΒΑ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἡ ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ (I. 6). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΕΑ, ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΓ, ΕΔ. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἂς περιγραφῇ, ὅπως ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει περιγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς.

Ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη κατὰ τὸ σημεῖον Γ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ (II. 11)· καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΒΔΕ, καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς τὸν κύκλον ΒΔΕ ἡ εὐθεῖα ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΒΔΕ (IV. 1)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ κύκλος ὁ ΑΓΔ (IV· 5).

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, εἶναι δὲ ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ κύκλου τοῦ ΑΓΔ ἔχει ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἔχουν προσπέσει πρὸς τὸν κύκλον ΑΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν ἐξ αὐτῶν τέμνει αὐτόν, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΓΔ (III. 37). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ ἐπαφῆς διέρχεται ἡ ΔΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΑΓ τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου (III. 32). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑΓ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΓΔΑ· ἄρα ὅλη ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς δύο, τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι ἴση ἡ ἐκτὸς ἡ ΒΓΔ (I. 32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἀλλὰ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (1. 5)· ὥστε καὶ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἄρα αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Καὶ *ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλὰ ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσι διπλασίους. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἐστι διπλῆ.*

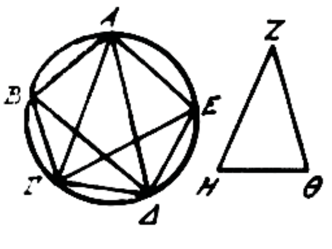
Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΒΔ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ], ΔΕ, ΕΑ.



Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον, λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

πειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΓ (1. 6). Ἀλλὰ ἡ ΒΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΓΑ· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΓΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΑΓ (Ι. 5)· ἄρα αἱ γωνίαι ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΔΑΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΔΑΒ.

Κατεσκευάσθη ἄρα ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΔΒ γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ληφθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ΖΗΘ, ἔχον ἑκάστην τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν διπλασίαν τῆς γωνίας παρὰ τὸ Ζ (IV. 10), καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΘ (IV. 2), ὥστε ἡ μὲν γωνία ΓΑΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Ζ, ἑκάστη δὲ τῶν πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ (IV. 2)· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Ἂς διχοτομηθῇ τώρα ἑκάστη τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ καὶ αὗται ἔχουν διχοτομηθῆ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ (Ι. 9), ἕπεται, ὅτι αἱ πέντε γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (ΙΙΙ. 26)· ἄρα τὰ πέντε τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Τὰ ἴσα δὲ τόξα ὑποτείνουν εὐθεῖαι ἴσαι· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΕ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒ. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒ βαίνει ἡ γωνία ΒΑΕ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ (ΙΙΙ. 27)· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

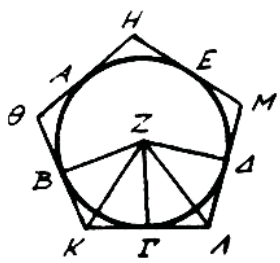
Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστιν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστιν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστιν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστι διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τῆς ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καὶ ἔστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση· ὁμοίως δὴ δειχθή-

12.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἂς νοήσωμεν, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πενταγώνου (IV. 11) εἶναι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ νὰ εἶναι ἴσα· καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ (III. 17) καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κέντρον τὸ Ζ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ζ πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ἔχει ἀχθῆ ἡ ΖΓ, ἔπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ (III. 18)· ἄρα ἑκάστη τῶν πρὸς τὸ σημεῖον Γ γωνιῶν εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Β, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΓΚ εἶναι ὀρθή, ἔπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ (I. 47). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ. Ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ, καὶ ἡ ΖΚ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΖ, ΖΚ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΚ· καὶ ἡ βάσις ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΚ· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΖΓ (I. 8)· ἡ δὲ ΒΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚΓ (I. 32)· ἄρα ἡ μὲν ΒΖΓ εἶναι διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΒΚΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΓΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΖΛ, ἡ δὲ ΔΛΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΔ (III. 27). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΖΓ διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΔΖΓ διπλασία τῆς ΛΖΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΖΓ· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΓΚ ἴση πρὸς τὴν ΖΓΛ. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν πλευρὰν αὐτῶν τὴν ΖΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς πρὸς τὰς ὑπολοίπους ἴσας καὶ τὴν ὑπόλοιπον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὑπόλοιπον (I. 26)· ἄρα ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἡ δὲ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἔπεται, ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι διπλασία τῆς ΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚ εἶναι διπλασία τῆς ΒΚ. Καὶ εἶναι ἡ ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΓ· ἄρα καὶ ἡ ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον σεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

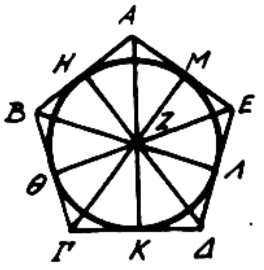
[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ [ὀρθῇ] τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέν-



ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚ, ΚΛ· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη, ὅτι τῆς μὲν ΖΚΓ εἶναι διπλασία ἡ ΘΚΛ, τῆς δὲ ΖΛΓ εἶναι διπλασία ἡ ΚΛΜ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΛ, ΚΛΜ· ἄρα αἱ πέντε γωνίαι αἱ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον καὶ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιεγράφη ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Διότι, ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΖ, ΔΖ· καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΓΖ, ΔΖ, ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΓ, ΓΖ· καὶ ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ (I. 4), καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (I. 4) καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΔΕ εἶναι διπλασία τῆς ΓΔΖ, εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΓΔΕ πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ πρὸς τὴν ΓΒΖ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΑ, ΖΕ. Ἂς ἀχθοῦν τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΘΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΓΖ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΖΘΓ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΖΚΓ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς ὑπολοίπους πλευράς· ἄρα ἡ κάθετος ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον ΖΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΘ, ΖΚ· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γρα-

τρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν· γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

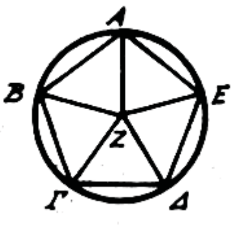
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστιν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.



Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιε'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

φόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ, Λ, Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν δὲν θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ θὰ τέμνῃ αὐτάς, θὰ συμβῇ, ὥστε ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου νὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (ΙΙΙ. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ· ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

14.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

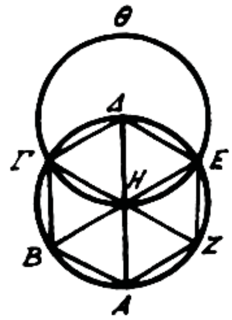
Ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν αἱ εὐθεῖαι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Β, Α, Ε αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον (IV. 13), ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΖΓΔ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΔΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΓΔΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΔΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΔ (Ι. 6). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΓ, ΖΔ· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος. Ἂς περιγραφῇ καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, περιεγράφη κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

15.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶν [ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ]. αἱ ἕξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἕξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἕξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ ἐστιν ἴση· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρη-

Ἄς ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ ἡ ΑΔ, καὶ ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Δ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΗ ἄς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΕΗ, ΓΗ, ἄς προεκταθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Β, Ζ καὶ ἄς ἀχθοῦν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἴση ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΗΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΓΘ, ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΗΔ εἶναι ἰσόπλευρον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αὐτοῦ αἱ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἐπειδὴ βεβαίως αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων εἶναι μεταξύ των ἴσαι (Ι. 5)· καὶ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (Ι. 32)· ἄρα ἡ γωνία ΕΗΔ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΗΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΗ σταθεῖσα ἐπὶ τὴν ΕΒ σχηματίζει τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΕΗΓ, ΓΗΒ ἴσας μὲ δύο ὀρθάς (Ι. 13), ἕπεται, ὅτι ἡ ἀπομένουσα ΓΗΒ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν πρὸς αὐτὰς αἱ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ (Ι. 15). Ἄρα αἱ ἓξ γωνίαι αἱ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ, εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (ΙΙΙ. 26). Ἄρα τὰ ἓξ τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ὑπὸ δὲ τὰ ἴσα τόξα βαίνουν ἴσαι εὐθεῖαι (ΙΙΙ. 29)· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΖΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΔ, ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΑΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΖΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒΑ· καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΖΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΖΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒΑ βαίνει ἡ γωνία ΑΖΕ· ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ (ΙΙΙ. 27). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἀνὰ μία, εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκάστην τῶν γωνιῶν ΑΖΕ, ΖΕΔ· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσογώνιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἔχει ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως ἐπράξαμεν εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν διὰ τῶν (νοουμένων ἓξ) σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου φέρωμεν ἐφαπτομένας, θὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἀποδεικνυομέ-

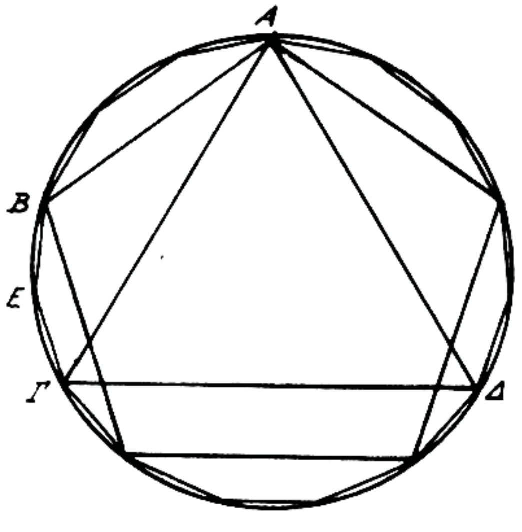
μένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ις'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια πέμπτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.



Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ[Ε] κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

νου τούτου, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνο (IV. 12). Καὶ ἀκόμη, καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ἀπεδείχθη καὶ διὰ τὸ πεντάγωνον, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

16.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου ἡ ΑΓ (IV. 2), πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ (IV. 11)· ἄρα ἐκ τῶν δεκαπέντε ἴσων τμημάτων ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελῆται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, πέντε μὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κύκλου, τρία δὲ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ κύκλου· εἰς τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΒΓ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τῶν ἴσων τμημάτων δύο. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον τὸ τόξον ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (III. 30)· ἄρα ἕκαστον τῶν τόξων ΒΕ, ΕΓ εἶναι τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Ἐὰν ἄρα, ἀφοῦ φέρωμεν τὰς ΒΕ, ΕΓ, ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ συνεχῶς ἴσας εὐθείας πρὸς ταύτας (IV. 1), θὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου (τῶν 15) φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, θὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον (IV. 12). Προσέτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων ἀποδείξεων, ὅπως ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν καὶ νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν δεκαπεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΛΛΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον, θεώρημα 4.

Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι, λαμβάνοντες τὸ αὐτὸ σχῆμα, ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ (I. 5)· καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς, ἕπεται, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ αἱ ΑΔΒ, ΒΑΔ, ΔΒΑ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (I. 32). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΑΔ· ἄρα αἱ λοιπαὶ αἱ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν· καὶ εἶναι ἴσαι· ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΒΔ, ΑΔΒ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΓΗ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Α (I. 3)· ἄρα ἡ λοιπή, ἡ ΓΗΒ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς (I. 32)· ἄρα ἡ γωνία ΓΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗΒ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ (I. 6). Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ (I. 34), ἡ δὲ ΓΗ πρὸς τὴν ΒΚ· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΚ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἔχει δὲ καὶ τὴν γωνίαν ΓΒΚ ὀρθήν· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΚ εἶναι τετράγωνον· καὶ ἔχει πλευρὰν τὴν ΓΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ΖΘ εἶναι τετράγωνον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ ΓΚ, ΘΖ εἶναι τετράγωνα, καὶ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΗΕ (I. 43) καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ΓΚ, ΘΖ ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἄρα τὰ σχήματα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ σχήματα ΓΚ, ΘΖ καὶ ΑΗ, ΗΕ ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

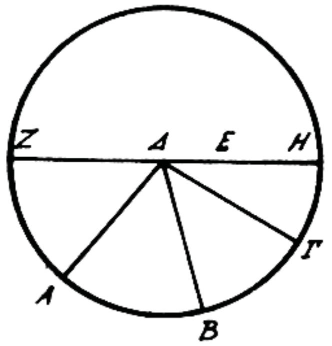
2. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 7.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΚ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, καὶ ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΚ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΕΖ (I. 8). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΘΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΕΖ, ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

3. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 8.

Ἢ καὶ ἄλλως. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΝ. Ἐπειδὴ ἡ ΚΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ δὲ ΜΔ εἶναι κοινή, καὶ ἡ βάσις ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΝ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΜΝ (I. 8). Ἀλλὰ ἡ ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΜΔ, ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

4. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 9.

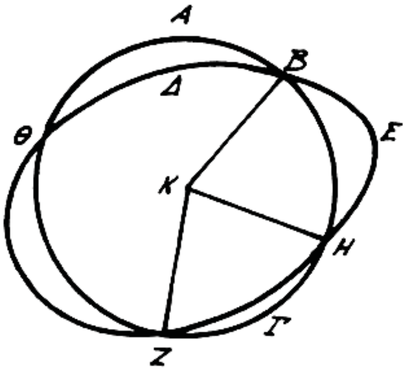


Διότι, ἂς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ, σημεῖόν τι ἐντὸς τὸ Δ, ἂς προσπέσουν δὲ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖαι ἴσαι περισσότεραι τῶν δύο αἱ ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ Ε, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ, ἂς προεκταθῇ μέχρι τῶν σημείων Ζ, Η. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΗ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἔχει ληφθῇ σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ, ἡ μὲν ΔΗ θὰ εἶναι μεγίστη, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ (III. 7). Ἀλλὰ συγχρόνως εἶναι καὶ ἴση· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα τὸ Ε δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι εἶναι πλὴν τοῦ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 10.

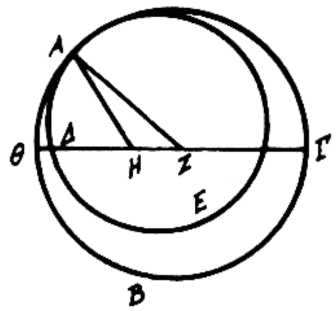
Διότι, ἂς τέμνῃ πάλιν ὁ κύκλος ΑΒΓ τὸν κύκλον ΔΕΖ εἰς περισσότερα ἢ δύο σημεῖα, τὰ Β, Η, Θ, Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει ληφθῇ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΔΕΖ σημεῖόν τι τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἔχουν προσπέσει πρὸς τὸν κύκλον ΔΕΖ περισσότεραι ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον Κ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΕΖ (III. 9). Εἶναι δὲ τὸ Κ κέντρον καὶ τοῦ κύκλου ΑΒΓ· ἄρα δύο κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνονται μεταξύ των, ὑπάρχει τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· ὅπερ ἀδύνατον (III. 5).



Ἄρα, κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 11.

Ἀλλ' ἂς πέσῃ ὅπως ἡ ΗΖΓ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΖΗ ἐπὶ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΗ, ΑΖ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ, τουτέστι πρὸς τὴν ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὰς δύο ἡ κοινὴ εὐθεῖα ἡ ΖΗ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΑΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ ἄτοπον, καὶ ἂν τὸ κέντρον τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου εἶναι ἐκτὸς τοῦ μικροῦ κύκλου.

7. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 31.

Ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΒΑΕ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ διπλασία τῆς γωνίας ΕΑΓ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΕΒ, ΑΕΓ εἶναι διπλάσιαι τῆς γωνίας ΒΑΓ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΕΒ, ΑΕΓ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουσι τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν [illegible] Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. [illegible] κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ [illegible] Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1975 (XI) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 10.000 ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2457 26/4/74
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΕΠΤΑΛΟΦΟΣ Ε.Π.Ε. - Ζαλοκώστα 5 - Τηλ. 631675

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ V. VI. VII. VIII. IX.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ II

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1953

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ V. VI. VII. VIII. IX.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ II

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1953

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ δεύτερος τόμος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιλαμβάνει τὰ βιβλία V, VI, VII, VIII καὶ IX. Τὸ V βιβλίον περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἔργον τοῦ διασήμου Κνιδίου μαθηματικοῦ Εὐδόξου, κατὰ τὴν ὁμόφωνον γνώμην τῶν παλαιῶν σχολιαστῶν τῶν Στοιχείων. Ἡ κατανόησις τῶν θεωρημάτων τοῦ V βιβλίου ἐμφανίζει δυσκολίας τινὰς ὀφειλομένας εἰς τὴν λεκτικὴν αὐτῶν διατύπωσιν. Ἕνεκα τούτου ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ ἐπεξηγήσωμεν καὶ τὰ 25 θεωρήματα τοῦ βιβλίου τούτου, χωρὶς ὅμως ν' ἀπομακρυνθῶμεν τοῦ ἀρχαίου κειμένου. Ὁ αὐτὸς λόγος ὡδήγησεν ἡμᾶς εἰς τὴν ἐπεξήγησιν τῶν περισσοτέρων θεωρημάτων τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν περιλαμβάνουσι τὰ βιβλία VII, VIII καὶ IX. Τὸ καθαρῶς γεωμετρικὸν βιβλίον τοῦ τόμου τούτου εἶναι τὸ VI, ἔνθα σπουδάζεται ἡ ὁμοιότης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου. Ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου ἐπεξηγοῦμεν τὸ θεώρημα 27, τὰ προβλήματα 28, 29, ὡς καὶ τὸ συναφὲς πρὸς ταῦτα πρόβλημα 44 τοῦ I βιβλίου. Ταῦτα θεωροῦνται εὑρήματα τῶν Πυθαγορείων καὶ πραγματεύονται περὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν ἐν ἐπιπέδῳ, κατὰ τὴν ὁμολογίαν τοῦ Πρόκλου. Παρέχουσιν ἐπίσης γεωμετρικῶς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν.

Ἡ ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας ὡς καὶ τὰ νεώτερα θεωρήματα περὶ πόλων καὶ πολικῶν, ῥιζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας στηρίζονται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ V βιβλίου καὶ τῆς ἐφαρμογῆς ταύτης εἰς τὸ VI βιβλίον[1]. *Τὸ 8ον θεώρημα τοῦ V βιβλίου ὡς καὶ τὸ 18ον περιέχουσιν ἀποδείξεις, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς πρότυπον τῶν ἀποδείξεων τῆς ἀνωτέρας μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Καὶ εἰς τὰ πέντε βιβλία κυριαρχοῦσαι μέθοδοι ἀποδεικτικαὶ εἶναι ἡ συνθετικὴ καὶ ἡ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος χρησιμοποιεῖται εἰς μίαν μόνον περίπτωσιν, εἰς τὸ 17ον θεώρημα τοῦ V βιβλίου. Εἴς τινας περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ,*

---

1. Εἰς τὰ Ἀγγλικὰ Γυμνάσια ἡ γεωμετρία διδάσκεται καθ' ὃν τρόπον ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου μετὰ προσθήκης εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν περὶ ἁρμονικῆς διαιρέσεως εὐθείας, πόλων καὶ πολικῶν, ῥιζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας. Ἔχομεν ὑπ' ὄψει τὴν ἔκδοσιν τῶν H. S. Hall καὶ F.H. Stevens, London, McMillan and Co, ἡ ὁποία ἀπὸ τοῦ 1888 μέχρι τοῦ 1950 ἐσημείωσε 31 ἐκδόσεις.

ὅπως π.χ. εἰς θεωρήματα τῶν ἀναλογιῶν καὶ εἰς τὰ θεωρήματα 3, 14, 27 καὶ 35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 8, 9 καὶ 20 τοῦ IX. Ὁ πρῶτος παρατηρήσας χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὁ G. Vacca κατὰ τὸ 1910 εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου. Τινὲς τῶν νεωτέρων ἀποδίδουσι τὴν ἐπινόησιν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὸν Ἰταλὸν μαθηματικὸν Peano, ὁ δὲ H. Poincaré ἐξαίρει ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τούτου εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις[1]. *Εἶναι ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ αὕτη μέθοδος εἶναι Ἑλληνικὴ καὶ δὴ καὶ Πυθαγορικῆς προελεύσεως, ἐφ' ὅσον τὰ συναφῆ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα κυρίως αὕτη χρησιμοποιεῖται, θεωροῦνται εὑρήματα τῶν Πυθαγορείων καὶ τοῦ Θεαιτήτου. Ἄλλο τεκμήριον, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ εἶναι Ἑλληνική, εἶναι χωρίον τι τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων τοῦ Ἀριστοτέλους, ἔνθα οὗτος γράφει :* « Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται ». *Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αὕτη ἀναφέρεται (73 b 32).*

Εἰς ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ V βιβλίου ὡς καὶ τοῦ VI (πλὴν τοῦ 21 τοῦ VI) ἐπαναλαμβάνεται μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως ἡ πρὸς ἀπόδειξιν τεθεῖσα πρότασις καὶ ἀκολουθεῖ τὸ μὲν « ὅπερ ἔδει δεῖξαι» διὰ τὰ θεωρήματα, τὸ δὲ « ὅπερ ἔδει ποιῆσαι » διὰ τὰ προβλήματα. Τοῦτο παρατηρεῖται καὶ εἰς ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων. Τὴν συνήθειαν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου παρατηροῦμεν σῳζομένην εἰς τρία μόνα θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἰς τὸ 4ον καὶ τὸ 31ον τοῦ VII βιβλίου καὶ εἰς τὸ 14ον τοῦ VIII.

Θεωρῶ καθῆκον νὰ ἐκφράσω τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὸ Σον Ὑπουργεῖον Θρησκευμάτων καὶ Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ πρὸς τὸν Ὀργανισμὸν ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων διὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τόμου τούτου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ἐλπίζω δέ, ὅτι ἡ ὠφέλεια τῆς μαθητιώσης καὶ σπουδαζούσης νεολαίας τοῦ Ἔθνους ἡμῶν θὰ εἶναι μεγάλη, ὅταν αὕτη ἀναλογίζηται, ὅτι τὰ ὑψηλότερα δημιουργήματα τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως εἶναι Ἑλληνικά.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις, κατὰ Μάρτιον 1953.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

---

1. *Science et hypothèse, Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Π. Σ. Ζερβοῦ, 1912, Φέξη.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖ ὡς μαθηματικὸν ἀντικείμενον τὴν ἔννοιαν «μέγεθος» καὶ ὄχι τὴν ἔννοιαν «ἀριθμός».

Ἡ διάκρισις τῆς ἐννοίας « μέγεθος » ἀπὸ τῆς ἐννοίας « ἀριθμός » ὀφείλεται πιθανῶς εἰς τοὺς Πυθαγορείους, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, ἀπέδιδον εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἰδιότητας καὶ ἐννοίας διαφόρους τῶν σημερινῶν. Τὴν διάκρισιν τῶν μαθηματικῶν τούτων ἀντικειμένων διατηρεῖ καὶ ὁ Πλάτων καὶ οἱ ἐν τῇ Ἀκαδημείᾳ μαθηματικοί. Ἐκ τῶν διαλόγων ὅμως τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους σχηματίζεται ἡ ἀντίληψις, ὅτι ἡ διάκρισις αὕτη δὲν ἔχει σχέσιν πρὸς τὰ ὑπό τινων νεωτέρων ὑποστηριζόμενα, καθ' ἃ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ τοὐναντίον ἀνεκάλυψαν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἀντίθετον ἐν τούτοις ἀντίληψιν διατυποῦσιν οἱ Γερμανοὶ μαθηματικοὶ Hultsch καὶ Stolz [1] καὶ ὁ Δανὸς μαθηματικὸς Zeuthen [2]. Ὁ Hultsch εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον αὐτοῦ περὶ Εὐκλείδου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν Pauly-Wissowa, γράφει, ὅτι ὡς ὁμογενῆ μεγέθη νοοῦνται καὶ οἱ ἀριθμοὶ (als homogene Groessen sind auch die Zahlen anzusehen § 16). Καίτοι τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἔπρεπε νὰ διαπραγματευθῶμεν κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τρίτου τόμου, τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ δέκατον βιβλίον τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων, ἐν τούτοις ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ὅπως καὶ ἐνταῦθα ἐρευνήσωμεν αὐτό, ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν περιλαμβάνει καὶ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ὡς σπουδαιότερον ἐπιχείρημα πρὸς ὑποστήριξιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θεωρεῖται τὸ 7ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο « Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν ». Εἰς τοὺς ἀριθμοὺς δηλαδὴ ἀποκλείεται ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα : εἰς ποίους ἀριθμούς ; Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐκάλουν ἀριθμὸν πλῆθος ἀκεραίων μονάδων. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου ἀποκλείεται εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Τοῦτο ὅμως δὲν συνεπάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἠγνόουν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ὅλη σύγχυσις ὀφείλεται καθαρῶς εἰς τὴν ὀνοματολογίαν καὶ ὄχι εἰς τὰ πράγματα. Ὅθεν θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν ὡρισμένα στοιχεῖα προερχόμενα ἐκ διασωθέντων κειμένων, ἐλπίζοντες οὕτως, ὅτι θὰ συμβάλωμεν κατά τι εἰς τὴν ἑδραίωσιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον πλήρη συνείδησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους αὐτοὶ ἀνεκάλυψαν.

2. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου διεπιστώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου. Πρόκειται περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{2}$. Περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τούτου σῴζονται δύο ἀποδείξεις, τὰς ὁποίας ὁ J. Heiberg περιέλαβεν εἰς τὸ παράρτημα τοῦ 10ου βιβλίου τῶν Στοιχείων ὑπ' ἀριθ. 27. Ἡ δευτέρα δ' ἐκ τούτων σῴζεται συγκεχυμένως πως, χωρὶς ὅμως νὰ καταστρέφηται ἐκ

1. Allgemeine Arithmetik.
2. Mathematische Annalen, 1896 p. 222.

τούτου τὸ νόημα τῆς ἀποδείξεως. Ταύτην θ' ἀναπτύξωμεν μετὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ σημασία εἶναι σπουδαία εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

1η ἀπόδειξις. «Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει». (Ἔστω ὅτι τίθεται πρὸς ἀπόδειξιν, ὅτι εἰς τὰ τετράγωνα σχήματα ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἀσύμμετρος κατὰ τὸ μῆκος). [Σημ. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν ἀρχαίων διάμετρος. Φαίνεται δ' ὅτι ὁ ὅρος ἔχει ληφθῇ ἐκ τῶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένων παραλληλογράμμων. Ἐπεκράτησε δὲ γενικώτερον νὰ ὀνομάζηται ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διάμετρος. Τὸν ὅρον τοῦτον διατηροῦμεν κατωτέρω, διότι εἶναι συναφὴς καὶ πρὸς τοὺς διαμετρικοὺς ἀριθμούς].

«Ἔστω διάμετρος τετραγώνου ΑΓ, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΑΓ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ κατὰ τὸ μῆκος.

Διότι—ἐὰν εἶναι δυνατὸν τοῦτο—ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος. Τότε θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ εἶναι συγχρόνως ἄρτιος καὶ περιττός. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν $(\mathrm{A\Gamma})^2 = 2(\mathrm{AB})^2$ (1). Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη ἡ διάμετρος σύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, αὗται θὰ ἔχωσι κοινὸν μέτρον καὶ ὁ λόγος αὐτῶν θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦσιν αὐτάς, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$, ἐὰν ΕΖ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΓ καὶ Η ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΒ (Χ. 6). Τὸν λόγον $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$ δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγον, ἐὰν δὲν εἶναι (VII 33). Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα ΕΖ, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Ὁ ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, διότι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ (Ι. 19). Ἐπειδὴ $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$, ἕπεται ὅτι $\frac{(\mathrm{A\Gamma})^2}{(\mathrm{AB})^2} = \frac{(\mathrm{EZ})^2}{\mathrm{H}^2}$ (VI. 20. πόρ., VIII. 11). Καὶ κατὰ τὴν (1) ἔχομεν $(\mathrm{EZ})^2 = 2\mathrm{H}^2$ (2). Τὸ $(\mathrm{EZ})^2$ ἄρα εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· συνεπῶς καὶ ὁ ΕΖ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· διότι, ἂν ὁ ΕΖ ἦτο περιττός, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ ἦτο περιττὸς (IX. 23). [$(2\alpha+1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 2(2\alpha^2 + 2\alpha) + 1$]. Ἀφοῦ ὅμως ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος, ὁ Η εἶναι περιττός· διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ κλάσμα $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί. Ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι τῆς μορφῆς 2 (ΕΘ), καὶ ἀφοῦ $\mathrm{EZ}=2(\mathrm{E\Theta})$, θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{EZ})^2 = 4(\mathrm{E\Theta})^2$. Καὶ κατὰ τὴν (2) θὰ εἶναι $2\mathrm{H}^2 = 4(\mathrm{E\Theta})^2$ ἢ $\mathrm{H}^2 = 2(\mathrm{E\Theta})^2$. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς H^2 εἶναι ἄρτιος· καὶ ὁ Η εἶναι ἄρα ἄρτιος. Ἀνωτέρω ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ὁ Η εἶναι περιττός· ὅθεν εἶναι ἀδύνατον ὁ Η νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ ἄρτιος. Ἡ διάμετρος ἄρα ΑΓ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Εἶναι δηλ. ἀσύμμετροι κατὰ τὸ μῆκος». Εἰς τὴν ἀντίφασιν περιεπέσαμεν, διότι ἐδέχθημεν, ὅτι ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην φαίνεται, ὅτι εἶχεν ὑπ' ὄψει ὁ Ἀριστοτέλης γράφων *«ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης»* [ἡ διάμετρος εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, διότι, ἂν δεχθῶμεν ταύτην σύμμετρον, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν νὰ δεχθῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄρτιον καὶ περιττὸν] (Ἀναλυτικὰ Πρότερα **41** α 26).

3. Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί. Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰ μήκη πλευρῶν τετραγώνων. Διαμετρικοὶ δὲ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) τῶν τετραγώνων τούτων.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον [1] οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται

1. Θέ. Σμυρν. 42 - 45 (E. Hiller, Leipzig, 1878).

ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ διάμετρος ἐπίσης. [Τοῦτο εἰς τὴν σημερινὴν μαθηματικὴν 'Ανάλυσιν λέγεται, θεωροῦμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν]. Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον μεγαλυτέρου τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Εἰς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τετραγώνου προσθέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον τοιαύτης κατασκευῆς μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπ' ἄπειρον. Διατί ἀκολουθεῖται οὗτος ὁ δρόμος κατασκευῆς τῶν μεγαλυτέρων τετραγώνων, παραμένει ἄγνωστον. Κατὰ τὸν Θέωνα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν :

'Αριθμοὶ πλευρικοί			'Αριθμοὶ διαμετρικοί		
Πλευρὰ	πρώτου τετραγώνου	1	Διάμετρος	πρώτου τετραγώνου	1
»	δευτέρου »	1 + 1 = 2	»	2ου τετρ.	2. 1 + 1 = 3
»	τρίτου »	2 + 3 = 5	»	3ου »	2. 2 + 3 = 7
»	τετάρτου »	5 + 7 = 12	»	4ου »	2. 5 + 7 = 17
»	πέμπτου »	12 + 17 = 29	»	5ου »	2. 12 + 17 = 41
»	ἕκτου »	29 + 41 = 70	»	6ου »	2. 29 + 41 = 99
»	ἑβδόμου »	70 + 99 = 169	»	7ου »	2. 70 + 99 = 239
»	ὀγδόου »	169 + 239 = 408	»	8ου »	2.169 + 239 = 577

Καλοῦντες α τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ ἔχωμεν :

'Αριθμοὶ πλευρικοί	'Αριθμοὶ διαμετρικοί
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
$\alpha_2 + \delta_2 = \alpha_3$	$2.\alpha_2 + \delta_2 = \delta_3$
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$.

Πρὸς αἰτιολογίαν τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὁ Θέων γράφει : *«ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ δὶς δύναται ἡ διάμετρος ἅπαξ»* (ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ἰσοῦται πρὸς δύο τετράγωνα τῆς πλευρᾶς). 'Εὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων πρὸς τὰς πλευράς, ὡς ἐκθέτει αὐτὰς ὁ Θέων, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000 \ldots\ldots \qquad = \lambda_2$$

$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000 \ldots\ldots \qquad = \lambda_3$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666 \ldots\ldots \qquad = \lambda_4$$

$$\frac{41}{29} = 1{,}4137913 \ldots\ldots \qquad = \lambda_5$$

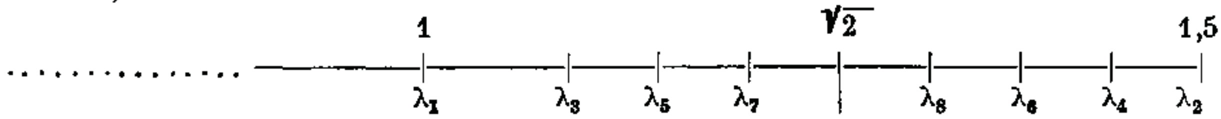
$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857 \ldots\ldots \qquad = \lambda_6$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011 \ldots\ldots \qquad = \lambda_7$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156 \ldots\ldots \qquad = \lambda_8$$

$$\delta_\nu : \alpha_\nu \qquad = \sqrt{2}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι αὐξάνονται συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Ἔχομεν δηλ. δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν, προκυπτούσας ἐξ ἑνὸς νόμου σχηματισμοῦ, τὴν μὲν αὔξουσαν, τὴν δὲ φθίνουσαν, αἱ ὁποῖαι ὅταν τὸ $\nu \to \infty$ συμπίπτουσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου τμήματος, ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν τῶν λόγων, τῶν ὁποίων ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν θὰ γίνεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5.



Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἡ περιττῆς τάξεως ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ ἀρτίας τάξεως ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ φράγμα εἶναι κοινόν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$. Διὰ τῶν λόγων δηλ. τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἐγκιβωτίζεται, συλλαμβάνεται ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$, δηλ. ἡ $\sqrt{2}$, ὅταν $\nu \to \infty$. Φρονοῦμεν, ὅτι οὐδεὶς δύναται νὰ ὑποστηρίξῃ σοβαρῶς, ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας εἶναι μέγεθος καὶ ὄχι ἀριθμός. Βεβαίως ὁ Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων αὐξούσης καὶ φθινούσης ἀκολουθίας ἀριθμῶν οὔτε περὶ ἐγκιβωτισμοῦ (Intervallschachtelung) τῆς $\sqrt{2}$. Δὲν χρησιμοποιεῖ δηλ. ὁ Θέων τὴν σημερινὴν ὀνοματολογίαν, διέσωσεν ὅμως τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα ὁμιλοῦσιν ἀφ' ἑαυτῶν. Ἐνταῦθα βλέπομεν ὅτι χρησιμοποιοῦνται δύο θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν, ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας καὶ ἡ ἔννοια τοῦ δυνάμει ἀπείρου, ὡς αὗται διετυπώθησαν μαθηματικῶς ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου μὲν ἡ πρώτη καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ἡ δευτέρα καὶ ὡς αὗται χρησιμοποιοῦνται καὶ σήμερον καὶ ἀποτελοῦσι τὸ θεμέλιον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Διὰ τὴν δευτέραν ἔννοιαν τοῦ δυνάμει ἀπείρου ὑπενθυμίζομεν τὴν διατύπωσιν τοῦ Ἀριστοτέλους : «οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον» (Φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 206 b). Ἡ ἐπ' ἄπειρον δηλ. ἐνταῦθα λῆψις τῶν λόγων $\delta_\nu : \alpha_\nu$ δὲν δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν ὑπέρβασιν τοῦ φράγματος $\sqrt{2}$. Τὰ ἀνωτέρω ὅμως ἐκτεθέντα ἠρευνήθησαν καὶ διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν πρώτων Πυθαγορείων, πρὶν ἢ ἀκόμη διατυπωθῶσι μαθηματικῶς αἱ ἔννοιαι τῆς συνεχείας καὶ τοῦ ἀπείρου. Τοὺς λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἀναπτύσσουσιν οἱ σύγχρονοι ἑρμηνευταὶ διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

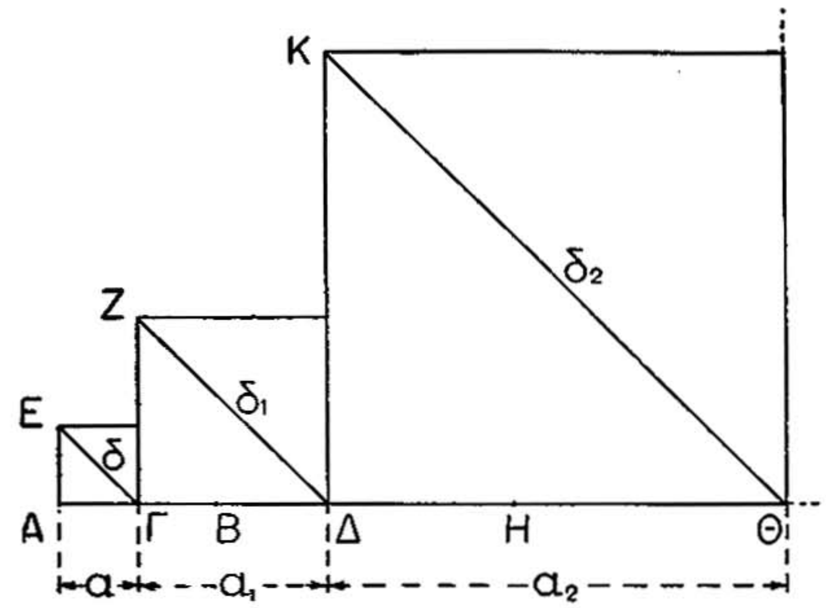
$$\frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$\vdots$$

Ὁ Θέων καὶ ὁ Πρόκλος, ὅστις διατυπώνει ἐπίσης τὸν νόμον σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, δὲν μνημονεύουσί τι περὶ κριτηρίου συγκλίσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν. Ὡς τοιοῦτον ὅμως θεωρεῖται τὸ 2ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων, καθ' ὅ, ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει τελικὸν ὑπόλοιπον μετροῦν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ (προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων). Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ὑποδηλοῖ ὁ Πρόκλος, καθιστᾷ φανερὰν τοιαύτην σύγκλισιν.

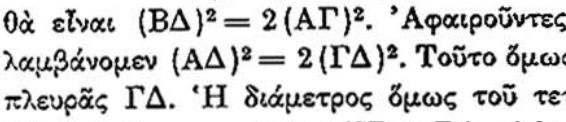
4. Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐτέθη τὸ πρόβλημα, δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἕκαστον δὲ εὑρισκόμενον τετράγωνον νὰ θεωρῆται δοθὲν καὶ νὰ συνεχίζηται ἐπ' ἄπειρον ἡ κατασκευὴ τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω νόμου.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς $ΑΓ = α$ καὶ διαμέτρου $ΓΕ = δ$ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα $ΓΒ = α$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου τμῆμα $ΒΔ = δ$. Τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν $ΓΔ = α + δ$. Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΔΖ.



Σχ. 1.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς διαμέτρου ΔΖ χρησιμοποιεῖται, ὡς λέγει ὁ Πρόκλος [1], τὸ 10ον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ, καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις τῆς ΑΒ, ἡ ΒΔ, τότε εἶναι



Σχ. 2.

$(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2 + 2(ΓΔ)^2$, (1) (σχ. 2) (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία I.II.III.IV., Ε. Σταμάτη, 1952). Ἐν προκειμένῳ εἶναι $ΑΓ = α$, $ΓΒ = α$ καὶ $ΒΔ = δ$ (σχ. 1) καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις (1). Ἐπειδὴ $ΒΔ = ΓΕ$ καὶ $(ΓΕ)^2 = 2(ΑΓ)^2$, θὰ εἶναι $(ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2$. Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = 2(ΓΔ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ διάμετρος ὅμως τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα $ΔΖ = ΑΔ$. Ἡ ΑΔ ὅμως $= ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ$, ἔνθα $ΒΔ = ΓΕ$ καὶ συνεπῶς $ΑΔ = 2α + δ$. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθη ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμετρος δ ἑνὸς τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι $α + δ = α_1$ καὶ ἡ διάμετρος $2α + δ = δ_1$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα $ΔΗ = ΓΔ$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $ΗΘ = ΔΖ$ (σχ. 1). Κατὰ τὸ αὐτὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $(ΓΘ)^2 + (ΗΘ)^2 = 2(ΓΔ)^2$

1. Πρόκλου Σχόλια εἰς Πλάτωνος Πολιτείαν, τόμ. II σ. 24 κέ. 393 κέ. (ἑρμηνεία Hultsch - Kroll, Teubner).

$+2(\Delta\Theta)^2 \cdot (2)$. Ἐπειδὴ $H\Theta = \Delta Z$ καὶ $(\Delta Z)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$, θὰ εἶναι καὶ $(H\Theta)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν $(\Gamma\Theta)^2 = 2(\Delta\Theta)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ διάμετρος δὲ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα ΓΘ = ΘΚ. Ἀλλὰ ἡ $\Delta\Theta = \Delta H + H\Theta = \alpha_1 + \delta_1$ καὶ $\Theta K = \Gamma\Delta + \Delta H + H\Theta = 2\alpha_1 + \delta_1$. Καὶ ἑπομένως τοῦ νυοστοῦ νέου τετραγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, ἡ δὲ διάμετρος $\delta_\nu = 2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς εὑρεθείσας πλευρὰς καὶ διαμέτρους τῶν συνεχῶν τετραγώνων :

	πλευρὰ	διάμετρος
Δοθέντος τετραγώνου	α	δ
πρώτου νέου τετραγώνου	$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
δευτέρου νέου τετραγώνου	$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
....	....	....
νυοστοῦ νέου τετραγώνου	$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, ἔχομεν τότε τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρουσιν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Πρόκλος καὶ τοὺς ὁποίους ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἡ κατασκευὴ τετραγώνων συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, τότε ὁ λόγος $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ $(\nu \to \infty)$ προσδιορίζει τὴν $\sqrt{2}$.

Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ, διατί ἔχομεν τὸ δικαίωμα νὰ λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$. Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· « *ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτω καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται* » (καθὼς λοιπὸν πάντων τῶν σχημάτων ἄρχει ἡ μονὰς κατὰ τὸν πρωταρχικὸν καὶ σπερματικὸν λόγον, οὕτω καὶ ὡς λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀνευρίσκομεν τὴν μονάδα). Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἀποδίδομεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Θέωνος, καθ' ἣν « ὁ λόγος » τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἡ μονὰς καὶ ὄχι ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν = 1.

Ἡ λέξις « σπερματικόν » ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ « δυνάμει ». Ὁ Θέων παρομοιάζει τὴν ἱκανότητα τῆς μονάδος νὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου πρὸς τὸν βιολογικὸν νόμον, καθ' ὃν τὸ σπέρμα ἑνὸς φυτικοῦ ἢ ζωϊκοῦ ὀργανισμοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ μετέπειτα ζῶντος ὀργανισμοῦ. Ἐνταῦθα ὅμως πρόκειται περὶ μιᾶς καθαρῶς γεωμετρικῆς προτάσεως, χρησιμοποιούσης τὴν ἔννοιαν τῶν ὁρίων, τοῦ ἀπείρου καὶ τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει, κατὰ τοὺς Πυθαγορείους πιθανόν, ὑπὸ βιολογικὴν ἔκφρασιν. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος πορεία κατασκευῆς τετραγώνων, ἐκείνης τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν Πρόκλον, ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἔστω δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΘΔ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΘΚ, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ εἴς τι σημεῖον Γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Τοῦτο τὸ θεωροῦμεν δοθὲν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἤτοι μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΔΖ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἴς τι σημεῖον Α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς· Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΘΚ = ΘΓ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν ΘΔ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ. Ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΔΖ = ΔΑ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΖ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευὰς τετραγώνων. [Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ΘΔ, ἡ διάμετρος

ΔΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαμέτρου ΘΚ κλπ. Ἡ ἀπόδειξις τούτου παρέχεται ἐκ τῆς σχέσεως $\sqrt{2} < 1{,}5$ ἢ γεωμετρικῶς]. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων δυνάμεθα, συνεχίζοντες οὕτω τὴν κατασκευὴν τετραγώνων, νὰ λάβωμεν πλευρὰν τετραγώνου (καὶ διάμετρον) μικροτέραν πάσης δοθείσης πλευρᾶς ὁσονδήποτε μικρᾶς. Μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν $\nu \to \infty$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαμέτρου καὶ πλευρᾶς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ. $(\delta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, καὶ συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Ἄρα ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$. Καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀρίθμησις ἀρχίζει ἀπὸ τὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\alpha_\nu = 1$, $\delta_\nu = 1$.

Οὔτε ὁ Πρόκλος οὔτε ὁ Θέων ὁμιλοῦσι περὶ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς, ἡ ὁποία συνάγεται ἐκ τῆς ἀτελῶς πως σωθείσης δευτέρας ἀποδείξεως, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

2α ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ἔστω ὅτι $\delta : \alpha = \sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ δ καὶ α κοινὸν μέτρον σταθερόν, ἀπειροελαχίστως μικρὸν ἔστω ε. Τότε μετὰ ν κατασκευὰς τετραγώνων ($\nu \to \infty$) θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμήν τινα, καθ' ἣν $\delta^\nu < \varepsilon$ καὶ $\alpha_\nu < \varepsilon$, ὁπότε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ε θὰ μετρῇ τοὺς μικροτέρους δ_ν καὶ α_ν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· δὲν ὑπάρχει ἄρα κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ἡ φράσις « ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος » δὲν ἀπαντᾷ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις. Κατὰ τοὺς δεχομένους, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θὰ πρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι μέγεθος ἀσύμμετρον. Τοῦτο ὅμως δὲν μεταβάλλει τὸ πρᾶγμα.

5. Τελειώνων ὁ Θέων τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἐπάγεται : *« αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλὰξ παρὰ μίαν ποτὲ μὲν μονάδι μείζους ἢ διπλάσιαι δυνάμει ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι ὁμαλῶς· πᾶσαι οὖν αἱ διάμετροι πασῶν τῶν πλευρῶν γενήσονται δυνάμει διπλάσιαι, τοῦ ἐναλλὰξ πλείονος καὶ ἐλάττονος τῇ αὐτῇ μονάδι ἐν πάσαις ὁμαλῶς τιθεμένῃ ἰσότητα ποιοῦντος εἰς τὸ μήτε ἐλλείπειν μήτε ὑπερβάλλειν ἐν ἁπάσαις τὸ διπλάσιον· τὸ γὰρ τῇ προτέρᾳ διαμέτρῳ λεῖπον δυνάμει τῇ ἐφεξῆς ὑπερβάλλει »* (ἑρμ. αἱ δὲ διάμετροι ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦνται ἐναλλὰξ ἄλλοτε μὲν πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς (ἀντιστοίχου) πλευρᾶς σὺν μίαν μονάδα καὶ ἄλλοτε πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς μεῖον μίαν μονάδα καὶ τοῦτο γίνεται συνεχῶς (ὁμαλῶς)· τὰ τετράγωνα λοιπὸν ὅλων τῶν διαμέτρων (τῶν διαμετρικῶν δηλ. ἀριθμῶν) θὰ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν πλευρῶν (τῶν πλευρικῶν δηλ. ἀριθμῶν), διότι ἡ ἐναλλὰξ καὶ συνεχῶς πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀποκαθιστᾷ ἰσότητα, ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις νὰ μὴ ἐλλείπῃ οὔτε νὰ ὑπερβάλλῃ ἀπὸ τὸ διπλάσιον· διότι ὅ,τι ἐλλείπει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς προηγουμένης διαμέτρου, ὑπερβάλλει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ἑπομένης.

Ἔστωσαν πάλιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1	1
2	3
5	7
12	17

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τούτων

$1^2 = 1$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀπόσπασμα τοῦ Θέωνος θὰ εἶναι :

$$1^2 = 2.\ 1^2 - 1 = 1$$
$$3^2 = 2.\ 2^2 + 1 = 9$$
$$7^2 = 2.\ 5^2 - 1 = 49$$
$$17^2 = 2.12^2 + 1 = 289$$

καὶ γενικῶς $\delta^2_\nu = 2.\ \alpha^2_\nu \mp 1$ (α πλευρά, δ διάμετρος).

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου δὲν ἐσώθη, ἀληθεύει ὅμως τοῦτο διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ὡς γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω. Ὁ Πλάτων ἐγνώριζε τὸ θεώρημα, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς Πολιτείας (546 c), ἔνθα οὗτος γράφει « ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν ». Νοεῖ δηλ. τετράγωνον πλευρᾶς 5, τοῦ ὁποίου ἡ ἄρρητος διάμετρος $\sqrt{50}$ γίνεται ῥητή, ὅταν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 2.5^2 ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ἤτοι ληφθῇ $\sqrt{50-1} = 7$.

6. Ἡ θεωρία τοῦ Ἀρχύτου. Ὁ Ἀρχύτας [1] ἀνέλυσε τὸ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα $\frac{3}{2}$ (μιᾶς πέμπτης) εἰς τὸ διάστημα $\frac{5}{4}$ (μεγάλης τρίτης) καὶ τὸ διάστημα $\frac{6}{5}$ (μικρᾶς τρίτης), ὥστε $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ (1). Ἡ σχέσις (1) ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι 2 καὶ 3. Αὕτη ἐν προκειμένῳ εἶναι :

$2 : \frac{2+3}{2}$ (ἀριθμ. μέσον) $= \frac{2.\,2.\,3}{2+3}$ (ἁρμον. μέσον): 3, καὶ μετασχηματίζεται εἰς $2 \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5}$ ἢ $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$.

Ἐὰν τὸν ἐπιμόριον ἀριθμὸν (ἐπιμόριος λόγος λέγεται τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρανομαστοῦ κατὰ μονάδα) παραστήσωμεν γενικῶς ὡς $\frac{\nu+1}{\nu}$, τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἀρχύτας διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ εἰς γινόμενον δύο μουσικῶν διαστημάτων, δοθέντων τῶν φθόγγων συχνότητος ν καὶ ν + 1. Καὶ ἡ μὲν μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$ (2), τὸ δὲ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα ἀναλύεται εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{\nu+1}{\nu} = \frac{2\nu+1}{2\nu} \times \frac{2\,(\nu+1)}{2\nu+1} \quad (3).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἡ ὁποία ἐκφράζει μουσικὴν ἀναλογίαν, ἐτέθη τὸ πρόβλημα, ἂν εἶναι δυνατὸν οἱ δύο μέσοι ὅροι νὰ γίνωνται ἢ νὰ εἶναι ἴσοι. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν μουσικὴν πραγματείαν αὐτοῦ « Κατατομὴ Κανόνος » περιλαμβάνει ὡς τρίτον θεώρημα τὴν πρότασιν, ὅτι μεταξὺ τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, μεταξὺ τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῶν ν καὶ ν + 1, εἶναι ἀδύνατον νὰ παρεμβληθῶσιν εἷς ἢ περισσότεροι μέσοι ἀνάλογοι (ῥητοὶ ἀριθμοί).

Παρομοίαν πρὸς τὴν Εὐκλείδειον ἀπόδειξιν διέσωσεν ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Βοήθιος (Boethius, 5ος αἰὼν μ.Χ.), ὅστις ἀποδίδει ταύτην εἰς τὸν Ἀρχύταν [2]. Ἐὰν τοῦτο ἤ-

1. P. Tannery, Mémoires scientifiques III σ. 68 καὶ 244.
2. De institutione arithmetica III. 11, σ. 285, Friedlein, Teubner, 1867.

το δυνατόν, θὰ ἐσήμαινε τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt{\nu(\nu+1)}$, λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\nu+1}{x}$ $= \frac{x}{\nu}$, $\chi^2 = \nu(\nu+1)$. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου (ἀπὸ μουσικῆς θεωρητικῆς ἀπόψεως) δὲν κατέχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα, ἵνα συναγάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς παρεμβολῆς μέσων ἀναλόγων, μὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐσώθη ὅμως ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως σπουδαῖον στοιχεῖον, περιεχόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Μετρικὰ» (τόμ. III, σ. 18—20, Schoene, Leipzig 1903). Κατὰ τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἡ σχέσις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$, ἢ $\nu(\nu+1) = \frac{2\nu+1}{2} \times \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$ νὰ δώσῃ ἰσότητα τῶν δύο παραγόντων, τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\frac{2\nu+1}{2}$ καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου $\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, κατὰ τὴν ἀκόλουθον μέθοδον. Ἂς καλέσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας α_1 καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον β_1. Σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς α_1, β_1 καὶ ἔστω τὸ ἀριθμ. μέσον α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_2. Μὲ ἄκρους τοὺς α_2, β_2 σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμ. μέσον ἔστω β_3. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὅτε τῆς νυοστῆς μουσικῆς ἀναλογίας τὸ ἀριθμ. μέσον θὰ εἶναι α_ν καὶ τὸ ἁρμ. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu \to \infty$, τότε $\alpha_\nu = \beta_\nu$ καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ ν καὶ ν + 1 ἑνὸς μέσου ἀναλόγου, ὁ ὁποῖος βεβαίως δὲν εἶναι ἀκέραιος, διότι τοῦτο ἀποκλείεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχύτου. Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{3}{2}$ εἰς τὸ γινόμενον $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχύταν. Δὲν ἐσώθη ὅμως στοιχεῖόν τι, ἐξ οὗ νὰ φαίνηται, ὅτι ὁ Ἀρχύτας ὠνόμασε τὸ $\alpha_\nu = \beta_\nu$ ($\nu \to \infty$) ἀριθμόν, ἀσύμμετρον δηλ. ἀριθμόν. Στερούμεθα δηλ. καὶ ἐνταῦθα τῆς συναφοῦς ὀνοματολογίας, ὅπως καὶ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τοῦ Ἀρχύτου ἀφορᾷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου. Πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου ἐκ δύο παραγόντων. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι οἱ παράγοντες οὗτοι νὰ καταστῶσιν ἴσοι. Ἀλλ' ἂς ἐκθέσωμεν τὸ σωθὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος συναφὲς στοιχεῖον. Πρόκειται κατὰ τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. (Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις σῴζεται μὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, εἶναι ὅμως εὕρημα τοῦ Ἀρχιμήδους)[1]. «Ἔστω ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 7,8,9. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{aligned}
7+8+9 &= 24\\
24:2 &= 12\\
12-7 &= 5\\
12-8 &= 4\\
12-9 &= 3\\
12\times 5 &= 60\\
60\times 4 &= 240\\
240\times 3 &= 720
\end{aligned}
$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δίδει τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

1. T. Heath, A history of Greek mathematics, II. σ. 322, 1921.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὑπολογίζομεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν 720 τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 729, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 27, διαιροῦμεν τὸν 720 διὰ τοῦ 27 καὶ λαμβάνομεν $26\frac{2}{3}$. Τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $26\frac{2}{3}$ σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $\frac{1}{2}\left(27+26\frac{2}{3}\right)=26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (α_1). Ὥστε ἡ $\sqrt{720}$ κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, διότι $\left(26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=720\ \frac{1}{36}$. Ἐὰν ὅμως ἀποβλέπωμεν εἰς μεγαλυτέραν προσέγγισιν, τότε ἀντὶ 729 λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $720\frac{1}{36}$ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν διαφορὰν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{36}$. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ κάτωθι. . . . . ».

Προχωροῦμεν κατὰ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ Ἥρωνος. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $720\frac{1}{36}=26\frac{5}{6}$. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 720 διὰ τοῦ $26\frac{5}{6}$ καὶ ἔχομεν $720:26\frac{5}{6}=\beta_1$. Τῶν $26\frac{5}{6}$ καὶ $720:26\frac{5}{6}$ λαμβάνομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 καθ' ὑπεροχὴν πάλιν, ἀλλὰ μικροτέραν τῆς προηγουμένης. Τὸ ἀριθμητικὸν τοῦτο μέσον εἶναι $\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=\alpha_2=26{,}83281573\ldots$ Τὸ $(\alpha_2)^2=720\ \frac{1}{3732624}$, ὥστε ἀμέσως εἰς τὸ δεύτερον ἀριθμητικὸν μέσον ἡ προσέγγισις τῆς $\sqrt{720}$ εἶναι πολὺ μεγάλη. Τὸ β_1 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $\frac{720}{27}$, ἐν ᾧ τὸ α_2 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πρώτου ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου, ἤτοι $\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου εἶναι $\beta_1=26{,}832235\ldots$ ἤτοι τοῦτο εἶναι ἡ $\sqrt{720}$ κατ' ἔλλειψιν. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι προφανὴς καὶ ἀκριβῶς ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου. Ἂς παραστήσωμεν γενικῶς τὴν ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος διασωθεῖσαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{A}$, ὅταν αὕτη δὲν εἶναι ῥητή.

Λαμβάνομεν τὴν καθ' ὑπεροχὴν ῥίζαν τοῦ Α ἔστω α. Σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο α_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ καθ' ὑπεροχήν. Σχηματίζομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο β_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ κατ' ἔλλειψιν. Τῶν α_1 καὶ β_1 σχηματίζομεν τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_2. Τῶν α_2, β_2 σχηματίζομεν τὸ ἀριθ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_3, καὶ ἔστω α_ν τὸ νυοστὸν ἀριθ. μέσον κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον σχηματισμοῦ, καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu\to\infty$ τότε $\alpha_\nu=\beta_\nu$. Καὶ ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα, καὶ ἄλλης τῶν ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα. Καὶ αἱ δύο ἀκολουθίαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, τὴν $\sqrt{A}$, ἤτοι τὸ ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἁρμονικῶν μέσων συμπίπτει πρὸς τὸ κατώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀριθμητικῶν μέσων. Ἐὰν παραστήσωμεν γραφικῶς τἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν :

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \sqrt{A} \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \qquad (\nu \to \infty).$$

Ὁ Ἥρων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν. Ἀφίνει ὅμως νὰ ὁμιλήσῃ περὶ τούτου ἡ χρησιμοποιουμένη μέθοδος καὶ ῥητῶς λέγει, ὅτι ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὅτι δηλ. εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. «Ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ (= 720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα...»· ἐπειδὴ δηλ. ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν.........

Ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς, ὡς διέσωσαν τοῦτον ὁ Πρόκλος καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, καὶ τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχύτου, ὡς ἐσώθη αὕτη ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν μίαν παρατήρησιν. Πρὸς τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Μέθοδος λόγων διαμέτρου πρὸς πλευράν.		$\sqrt{2}$		Μέθοδος Ἀρχύτου Ἀριθμ. καὶ ἁρμ. μέσα μεταξὺ 1,2 ($\sqrt{1.2}$).
1ος	λόγος	1 : 1		
2ος = 2^1	»	3 : 2	$\to$	πρῶτον ἀριθμ. μέσον 3 : 2
3ος	»	7 : 5		» ἁρμ. » 4 : 3
4ος = 2^2	»	17 : 12	$\to$	δεύτερον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ =17:12
5ος	»	41 : 29		» ἁρμ. » » » » =24:17
6ος	»	99 : 70		
7ος	»	239 : 169		
8ος = 2^3	»	577 : 408	$\to$	τρίτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{17}{12}, \frac{24}{17}$ =577:408
9ος	»	1393 : 985		» ἁρμ. » » » » =816 : 577
10ος	»	3363 : 2378		
11ος	»	8119 : 5741		
12ος	»	19601 : 13860		
13ος	»	47321 : 33461		
14ος	»	114243 : 80782		
15ος	»	275807 : 195025		
16ος = 2^4	»	665857 : 470832	$\to$	τέταρτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{577}{408}, \frac{816}{577}$ = 665857 : 470832.

Ἤτοι εἰς τὸν 2^1 λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ τὸ πρῶτον ἀριθμ. μέσον.
» » 2^2 » » » » » » » τὸ δεύτερον » »
» » 2^3 » » » » » » » τὸ τρίτον » »
» » 2^4 » » » » » » » τὸ τέταρτον » »
καὶ γενικῶς » » 2^ν » » » » » » » τὸ νυοστὸν » »

Δηλαδὴ ἡ τάξις τῶν κατ' Ἀρχύταν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι (μὲ βάσιν τὸ 2) τῆς τάξεως τῶν λόγων τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευράν. Ἐπισημειοῦμεν δ' ὅτι ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 1, 2^1, 2^2 2^3....... εἶναι ἐκείνη, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνονται οἱ τέλειοι ἀριθμοί, ὡς θ' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὴν ἐπεξήγησιν τοῦ 36ου θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων. Φαίνεται δὲ πιθανόν, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς ἀνωτέρω γεωμ. προόδου, ὡς παρεχούσης τοὺς τελείους ἀριθμούς.

7. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἂν ὁ Ἀρχύτας διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν α_ν ἢ τὸ ἁρμονικὸν μέσον αὐτῶν β_ν εἶναι ἀριθμός, ὅταν $\nu \rightarrow \infty$. Γνωρίζομεν ὅμως στοιχεῖά τινα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἰς τὸν Θεαίτητον (147 d - 148 b) γίνεται λόγος περὶ τοῦ μὴ συμμέτρου τῶν $\sqrt{3}, \ldots \ldots \sqrt{17}$, εἰς δὲ τοὺς Νόμους (Ζ' 820 c) γράφει ὁ Πλάτων, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ ἐρευνῶσιν εἰς τὰς ἀξίας πρὸς τοῦτο σχολὰς τὰ περὶ τῶν μετρητῶν καὶ ἀμέτρων, κατὰ ποῖον τρόπον γίνεται τοῦτο *(τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα, ἥτινι φύσει γέγονε.......φιλονικεῖν ἐν ταῖς τούτων ἀξίαις σχολαῖς)*. Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα (990 d - 991 a) ἀφοῦ τονίζει, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ διδάσκωνται πρῶτον τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων), συνεχίζει : « *ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρεῖς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες* » (ἑρμην. ἀφοῦ δὲ μάθει ταῦτα, ἀκολουθεῖ ἵνα μάθῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον καλοῦσι μὲ τὸ πολὺ γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν (δηλ. μέτρησιν τῆς Γῆς), τῶν ἀριθμῶν δὲ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους (δηλ. τῶν ἀσυμμέτρων) ἐξομοίωσις πρὸς τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν (δηλ. τῶν συμμέτρων) εἶναι διαφανής· ἐκεῖνο δὲ τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀνθρώπινον θαῦμα, ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ φανερὸν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐννοήσῃ αὐτό. Μετὰ δὲ ταύτην (τὴν ἐπιπεδομετρίαν) νὰ μάθῃ τοὺς εἰς τὴν τρίτην δύναμιν καὶ ὁμοίους κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τοὺς στερεοὺς ἀριθμούς, τοὺς δὲ ἀνομοίους πάλιν προκύπτοντας δι' ἄλλου τρόπου ὁμοίου πρὸς τοῦτον (τὸν ὑπολ. δηλ. τοῦ ἀσυμμέτρου $\sqrt{\alpha}$), τὸν ὁποῖον ὠνόμασαν οἱ εἰδικοὶ στερεομετρίαν).

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (ἀκεραίων) $\alpha \times \beta = \gamma$ καλεῖται ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἢ φυσικὸς ἀριθμός. Ἡ $\sqrt{\gamma}$ (ἀσύμμετρος) διὰ τῆς γεωμετρίας ἐξομοιοῦται πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Στερεὸς φυσικὸς ἀριθμὸς καλεῖται τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν ἀκεραίων (τριῶν διαστάσεων), $\alpha \times \beta \times \gamma = \delta$. Δι' ἄλλης τέχνης ὁμοίας πρὸς τὴν προηγουμένην διδάσκει ἡ στερεομετρία τὴν ἐξομοίωσιν τῆς $\sqrt[3]{\delta}$ (ἀσυμμέτρου) πρὸς τοὺς φυσικοὺς στερεοὺς ἀριθμούς. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Πλάτων ἔχει ὑπ' ὄψει τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα περὶ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων, ὡς καὶ τὰς ἀποδείξεις τὰς γεωμετρικὰς τοῦ διδασκάλου αὐτοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῆς $\sqrt{3}, \ldots \sqrt{17}$, αἱ ὁποῖαι δυστυχῶς ἀπωλέσθησαν.

Ἡ σφοδρὰ πολεμικὴ τοῦ Ἀριστοτέλους ἐναντίον τῶν εἰδητικῶν καλουμένων ἀριθμῶν τοῦ Πλάτωνος (Μετὰ τὰ φυσικὰ Μ) εἶναι φύσεως καθαρῶς γνωσιολογικῆς. Διότι, ὡς λίαν εὐστόχως σημειώνει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς κριτικὴν περὶ τῆς πραγματείας ἡμῶν « Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις » [1], ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ « Ἠθικὰ Νικομάχεια » γράφει « *τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ* » [2] [ἑρμ. διότι ἀναλογία δὲν ὑφίσταται μόνον, ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (ἀποτελούμενος ἐξ ἀκεραίων μονάδων), ἀλλ' ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὅλως ἀριθμὸς (δηλ. ἀσύμμετρος ἀριθμός)]. Λέγει δηλ. ὁ Ἀριστοτέλης ὅτι ἡ σχέσις $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ δὲν ἰσχύει μόνον, ὅταν οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ καὶ ὅταν οὗτοι εἶναι ἀριθμοὶ ὑπὸ καθολικὴν ἔννοιαν, ὡς τούτους ἐννοεῖ ἀνωτέρω ὁ Πλάτων, ὅταν δηλ. εἶναι ἀσύμμετροι.

---

1. Περιοδικὸν Πλάτων, τεῦχος Α', 1950, σ. 160 κέ.
2. Βιβλίον Ε', ΙΙΙ 8, ἔκδ. Loeb, 1947.

'Αλλὰ καὶ εἰς ἕτερον χωρίον ὁ 'Αριστοτέλης γράφει τὰ ἑξῆς· *« τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται »*[1], δηλ. ἡ σχέσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον (μέγεθος) εἶναι ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως ἐξ ὁλοκλήρου ἀόριστος· ἀλλ' ἡ ἐκφώνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ὑπερέχοντος καὶ ὑπερεχομένου προϋποθέτει οὐχὶ σύμμετρον (δηλ. ἀσύμμετρον) ἀριθμόν.

'Η τοιαύτη διατύπωσις τοῦ 'Αριστοτέλους φαίνεται, ὅτι στηρίζεται εἰς τὰς ἐρεύνας καὶ τὰ συμπεράσματα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων τοῦ Εὐδόξου.

8. Ὅτε ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{2}$, ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα προσέκρουσεν εἰς ἀδιέξοδον. 'Η ἁρμονία τοῦ κόσμου ὡς συνόλου καὶ ἡ ἁρμονία τῶν ἐπὶ μέρους ἀντικειμένων ἢ φαινομένων, ἡ ὁποία ἠρευνᾶτο καὶ ἐξεφράζετο διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, ἔπαυον νὰ εἶναι ἀντικείμενον μαθηματικῆς ἐρεύνης. Πρὸς ἄρσιν τοῦ ἀδιεξόδου τούτου ἐτέθησαν ὑπὸ βάσανον αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν. Αἱ ἔρευναι ἐπὶ τῶν τριῶν περιφήμων προβλημάτων τῆς ἀρχαιότητος, τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως ὀξείας γωνίας εἶχον προετοιμάσει τὸ ἔδαφος, ἵνα διαλάμψῃ ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ Εὐδόξου. 'Ιδοὺ λοιπὸν πῶς ὁ Εὔδοξος ἐγεφύρωσε τὸ χάσμα μεταξὺ τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς 3, 4, 5 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη, ὁλόκληρον ἀποδίδεται εἰς αὐτόν.

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 3. Λόγος δύο ὁμογενῶν (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν εἶναι ἡ κατά τινα πηλικότητα σχέσις. 'Αδιαφόρως δηλ. ἂν τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, ὑπάρχει πάντοτε ἐκ συγκρίσεως σχέσις τις τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο καὶ λέγεται ἡ σχέσις αὕτη λόγος (πηλίκον διαιρέσεως).

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 4. Μεγέθη λέγονται, ὅτι ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχωσιν ἀλλήλων. 'Ο ὁρισμὸς οὗτος, ὡς φαίνεται, δὲν ἐσώθη σαφής. 'Η ἔννοια αὐτοῦ ὅμως συνάγεται σαφῶς ἐκ τοῦ ὀγδόου θεωρήματος τοῦ V βιβλίου καὶ εἶναι ἡ ἑξῆς :

'Εὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων λαμβανομένη πολλάκις δύναται νὰ ὑπερβῇ πολὺ μέγα μέγεθος. 'Ο ὁρισμὸς οὗτος λογίζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὡς τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου, τοῦ ὁποίου ὅμως πρώτην διατύπωσιν ἔκαμεν ὁ 'Αναξαγόρας, ὡς γράφομεν εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ I τόμου τῶν Στοιχείων (σ.24)[2].

'Ο ρ ι σ μ ὸ ς 5. Μεγέθη λέγονται, ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, πρῶτον πρὸς δεύτερον ἴσον μὲ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθῶσι καταλλήλως. Θὰ εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma : \Delta$, μόνον ἐὰν δι' οἱουσδήποτε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων :

1) $\mu . A > \nu . B$ καὶ συγχρόνως $\mu . \Gamma > \nu . \Delta$
2) $\mu . A = \nu . B$ » » $\mu . \Gamma = \nu . \Delta$
3) $\mu . A < \nu . B$ » » $\mu . \Gamma < \nu . \Delta$.

'Η δευτέρα ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν περιπτώσεων τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Εὐδόξου καλύπτει

---

1. Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4, ἔκδ. Loeb.

2. Δὲν κρίνομεν ἄσκοπον νὰ ὑπενθυμίσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας Dedekind - Cantor εἶναι θεώρημα πηγάζον ἐκ τοῦ Εὐδοξείου ἀξιώματος τῆς συνεχείας κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Baldus.

τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ συμμέτρων μεγεθῶν (μαθηματικῶν ἀντικειμένων), ἐν ᾧ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη περιλαμβάνουσι καὶ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἵνα γίνῃ καταληπτὸς ὁ ὁρισμὸς 5 τοῦ Εὐδόξου, ἀναφέρομεν ἐφαρμογὴν αὐτοῦ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ VI βιβλίου, καθ' ὃ τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ὡς αἱ βάσεις, (πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος, σχῆμα τοῦ αὐτοῦ).

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΓ καὶ βάσεις ἀντιστοίχως ΒΓ, ΓΔ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΔ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ ἂς ληφθῇ ΒΓ = ΒΗ = ΗΘ καὶ ΓΔ = ΔΚ = ΚΛ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ ΓΒ = ΒΗ = ΗΘ, τὰ τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα (Ι. 38). Θὰ εἶναι ἄρα ΘΓ = μ. ΒΓ καὶ τρίγωνον ΑΘΓ = μ. ΑΒΓ τρίγωνα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ΓΛ = ν. ΓΔ καὶ τρίγωνον ΑΓΛ = ν. ΑΓΔ τρίγωνα.

Καὶ ἐὰν ἡ βάσις	μ.ΒΓ =	βάσιν	ν.ΓΔ,	θὰ εἶναι καὶ	τρίγ.	μ.ΑΒΓ =	τρίγ. ν. ΑΓΔ.
» » » »	μ.ΒΓ >	βάσεως	ν.ΓΔ,	» »	»	μ.ΑΒΓ >	τριγ. ν. ΑΓΔ.
» » » »	μ.ΒΓ <	»	ν.ΓΔ,	» »	»	μ.ΑΒΓ <	τρίγ. ν. ΑΓΔ[1].

Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθησαν τέσσαρα μεγέθη, ἤτοι δύο βάσεις, αἱ ΒΓ, ΓΔ,καὶ δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ἐλήφθησαν τῆς μὲν βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μ.ΒΓ, μ.ΑΒΓ, τῆς δὲ βάσεως ΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐλήφθησαν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ν.ΓΔ, ν.ΑΓΔ. Καὶ ἐδείχθη, ὅτι

ἐὰν ἡ βάσις	μ.ΒΓ >	βάσεως	ν.ΓΔ,	θὰ εἶναι καὶ	τριγ.	μ.ΑΒΓ >	τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » »	μ.ΒΓ =	βάσιν	ν.ΓΔ,	» »	»	μ.ΑΒΓ =	τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » »	μ.ΒΓ <	βάσεως	ν.ΓΔ,	» »	»	μ.ΑΒΓ <	τριγ. ν. ΑΓΔ.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν εἶναι μ. ΑΒΓ $\gtreqless$ ν. ΑΓΔ καὶ συγχρόνως μ. ΒΓ $\gtreqless$ ν. ΓΔ, τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 εἶναι

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}}.$$

Καὶ ἂν καλέσωμεν ΑΒΓ = Α, ΑΓΔ = Β, ΒΓ = Γ, ΓΔ = Δ, θὰ εἶναι

$$\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὁρισμοῦ 5 κατεβλήθησαν κατὰ καιροὺς πολλαὶ προσπάθειαι. Λίαν εὐστόχως κατώρθωσε νὰ ἐκφράσῃ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὡς καὶ τὸν συναφῆ ὁρισμὸν 7, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς Thomas Heath κατὰ τὸ 1906[2]. Ἡ διατύπωσις αὕτη ἔχει γίνει ἀποδεκτή. [Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften I. 1 σ. 50, ὑπὸ A. Pringsheim (München)]. Κατὰ τὴν διατύπωσιν ταύτην τὸ κλάσμα $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$ χωρίζει τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ.Α > ν.Β καὶ μ.Α $\leqq$ ν.Β. Ἡ τομὴ (κατὰ τὴν φρασεολογίαν τοῦ Dedekind) προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$. Τὸ κλάσμα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ χωρίζει ὁμοίως τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ. Γ > ν. Δ καὶ μ. Γ $\leqq$ ν. Δ. Ἡ τομὴ

1. Τὴν ἀπόδειξιν θεωρεῖ αὐτονόητον ὁ Εὐκλείδης καὶ ἔχει παραλείψει αὐτὴν διὰ τὰς περιπτώσεις ἀνισότητος. Αὕτη γίνεται διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον (ἄτοπον).

2. The thirteen books of Euclid's Elements, 2α ἔκδ., 1926, Cambridge.

προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμόν $\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν αἱ δύο τομαὶ συμπίπτωσι, τότε εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν ἡ πρώτη τομὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας, τότε $\frac{A}{B}>\frac{\Gamma}{\Delta}$ (ὁρισμ. 7).

Κατὰ τὴν γενομένην ἀποδεκτὴν ἑρμηνείαν τοῦ T. Heath καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς ἰσομορφίας [1] τὰ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κρατοῦντα ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Αἴρεται δηλ. αὐτομάτως ἡ γνώμη, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὁ A. Pringsheim σημειώνει ὅμως εἰς τὸ ἄρθρον ἐν τῇ Ἐγκυκλοπαιδείᾳ ὅτι « λείπει ἐν τούτοις ἀπὸ τοῦ Εὐδοξείου ὁρισμοῦ ἡ νεωτέρα ἀντίληψις, ὅτι ἑκάστη τομὴ παριστᾷ πραγματικὸν ἀριθμόν ἢ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ εὐθύγραμμον γωνίαν». Φρονοῦμεν ὅτι ἡ φρασεολογία τοῦ Dedekind δὲν ἐπηρεάζει τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, ὁ ὁποῖος δὲν ἐχρησιμοποίησε τὴν λέξιν « τομή », ἵνα εἴπῃ, ὅτι ἡ τομὴ παριστᾷ ἀριθμόν. Πρὸς τούτοις γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Dedekind περὶ τῶν ἀσυμμέτρων εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, τὴν σωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων [2]. Ὁ M. Zacharias εἰς τὸ περισπούδαστον ἔργον αὐτοῦ «Elementargeometrie der Ebene und des Raumes» (Goeschen B. 16, 1930) ἑρμηνεύει ὡς ἑξῆς τὸν πέμπτον ὁρισμὸν τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων: Τὰ μεγέθη a, b, c, d εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ ἤτοι $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ἐὰν $p.a \gtreqless q.b$ καὶ συγχρόνως εἶναι $p.c \gtreqless q.d$. Εἰς τὴν σημερινὴν ἔκφρασιν τοῦτο σημαίνει : Ἐὰν ὑπάρχῃ οἱονδήποτε ῥητὸν κλάσμα $\frac{q}{p} \gtreqless \frac{a}{b}$, τὸ αὐτὸ κλάσμα εἶναι $\gtreqless \frac{c}{d}$. Εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Dedekind τοῦτο σημαίνει : οἱ δύο ἴσοι λόγοι $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{c}{d}$ ὁρίζουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τομὴν εἰς τὸ πλῆθος τῶν ῥητῶν κλασμάτων.Κατὰ ταῦτα ἐλλείπει (ἀπὸ τὸν Εὐδόξειον ὁρισμὸν) τὸ κατὰ τὴν νεωτέραν διατύπωσιν βῆμα, νὰ ὁρισθῇ ἀντιστρόφως, ὅτι ἑκάστη τοιαύτη τομὴ παράγει ἕνα πραγματικὸν (σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον) ἀριθμόν. Τοῦτο τὸ βῆμα δὲν ἔκαμαν οἱ Ἕλληνες. Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ Εὐδόξειος ὁρισμὸς τῆς ἀναλογίας περιλαμβάνει τὰς δύο περιπτώσεις, τοῦ συμμέτρου καὶ τοῦ ἀσυμμέτρου λόγου (σελ. 86—87). Ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς εἰς τὴν σελίδα 58 τοῦ αὐτοῦ ἔργου γράφει : « Εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.......... ». Παραδέχεται δηλ. ὁ M. Zacharias, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησαν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἐνταῦθα ὀφείλομεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν σκοπίμως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφυγον νὰ δώσωσιν ὁρισμὸν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, ὅπως σκοπίμως δὲν ὥρισαν τὸ μηδὲν ὡς ἀριθμόν. Διότι ναὶ μὲν αἱ ἔννοιαι « συνέχεια » καὶ « ἄπειρον », ὡς αὗται διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐγένοντο παραδεκταὶ καὶ ὑπὸ τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης, ἐν τούτοις δὲν δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι αὗται ἱκανοποιοῦσιν ἀπολύτως τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα. Τὸ πρόβλημα τῶν ἐννοιῶν τού-

1. H. Hasse, Höhere Algebra I σ. 25, 59. II σ. 62, Berlin—Leipzig 1926—1927.

2. Διεξοδικὴν ἔρευναν ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις παρέχει ἡ πραγματεία τῶν H. Hasse καὶ H. Scholz « Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik », Charlottenburg 1928 καὶ Leipzig 1940. Ἡ πρώτη ἔκδοσις μετεφράσθη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ τῶν Φ. Βασιλείου καὶ Χρ. Καπνουκάγια, ἐκδοθεῖσα ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (τόμ. ΙΔ' α', β' καὶ ΙΕ' α') τῷ 1934.

των παραμένει καθαρῶς ὑπερβατικὸν καὶ ἀντικείμενον φιλοσοφικῆς ἐρεύνης. Αἱ πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῶν μαθηματικῶν δὲν δύναται νὰ θεωρηθῶσιν, ὅτι δίδουσιν ἱκανοποιητικὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τῆς ἑρμηνείας τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν. Αὗται κατὰ τὸν Ζήνωνα τὸν Ἐλεάτην ἐκφεύγουσι τῆς νοητικῆς δυνάμεως τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ εἰς τὴν ἀποφυγὴν τῆς ὀνομασίας τοῦ μηδενὸς ὡς ἀριθμοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, σημειοῦμεν, ὅτι οὗτοι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ δεχθῶσιν ἀριθμὸν ὑπὸ περιορισμὸν (διὰ τοῦ ὁποίου δὲν γίνεται διαίρεσις).

Τελειώνοντες ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κύκλου (ὁ π) εἶναι μεταξὺ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης τιμῆς εὗρον ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος. Θὰ εἶναι δὲ οὐχὶ λογικὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἐνόουν τὸν π ὡς μέγεθος καὶ ὄχι ὡς ἀριθμόν.

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ε΄.

Ὅροι.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ϛ΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

ζ΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

η΄. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

θ΄. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ι΄. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ια΄. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιβ΄. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιγ΄. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

Βιβλίον V.

Ὁρισμοί.

1. Μέρος εἶναι μέγεθος μεγέθους τὸ μικρότερον τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεγαλύτερον.

2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

3. Λόγος δύο ὁμογενῶν μεγεθῶν εἶναι ἡ κατὰ πηλικότητα ποιά τις σχέσις.

4. Μεγέθη λέγονται, ὅτι ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχωσιν ἀλλήλων.

5. Μεγέθη λέγονται, ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθῶσι καταλλήλως.

6. Τὰ δὲ μεγέθη τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον ἂς καλῶνται ἀνάλογα.

7. Ὅταν δὲ ἐκ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου δὲν ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τότε τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον λέγεται, ὅτι ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8. Ἐλαχίστη δὲ ἀναλογία εἶναι ἡ περιέχουσα τρεῖς ὅρους.

9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον εὑρίσκεται εἰς διπλάσιον λόγον ἢ (τὸ πρῶτον) πρὸς τὸ δεύτερον.

10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν (συνεχεῖ) ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον εὑρίσκεται εἰς τριπλάσιον λόγον ἢ (τὸ πρῶτον) πρὸς τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἀναλόγως τῆς ὑπαρχούσης ἀναλογίας.

11. Ὁμόλογα μεγέθη λέγονται τὰ μὲν ἡγούμενα πρὸς τὰ ἡγούμενα, τὰ δὲ ἑπόμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα.

12. Ἐναλλὰξ λόγος εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

13. Ἀνάπαλιν λόγος εἶναι λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιδ'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιε'. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

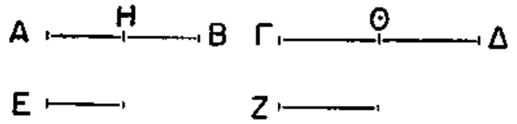
ιζ'. Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιη'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

α'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

14. Σύνθεσις λόγου εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

15. Διαίρεσις λόγου εἶναι λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16. Ἀναστροφὴ λόγου εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17. Δι' ἴσου λόγος εἶναι, ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταῦτα, λαμβάνωνται δὲ πάντα ἀνὰ δύο καὶ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ἡ σχέσις τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη εἶναι ἴση πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

18. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία εἶναι, ὅταν, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, νὰ γίνηται ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον τῶν πρώτων μεγεθῶν ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον τῶν δευτέρων μεγεθῶν, ὡς δὲ εἶναι εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως νὰ εἶναι εἰς τὰ δεύτερα ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

1.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον πρὸς ἕκαστον ὁσωνδήποτε μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ, ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ ἀρχικὰ μεγέθη· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ τοῦ ἀθροίσματος Ε+Ζ.

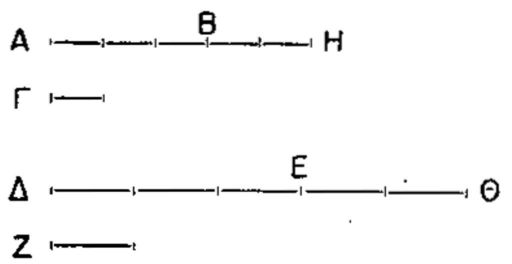
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μεγέθη ὑπάρχουσιν εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Ε, ἄλλα τόσα ὑπάρχουσιν εἰς τὸ ΓΔ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ε μεγέθη, τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ μεγέθη τὰ ΓΘ, ΘΔ· τότε τὸ πλῆθος τῶν μεγεθῶν ΑΗ, ΗΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΓΘ, ΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΓΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΗ+ΓΘ = Ε+Ζ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἴσον τὸ ΗΒ πρὸς τὸ Ε καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΒ+ΘΔ= Ε+Ζ· ὅσα ἄρα περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Ε, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ, ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα Ε+Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ τοῦ ἀθροίσματος Ε+Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν πρῶτον μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον εἶναι τετάρτου, ὑπάρχῃ δὲ καὶ πέμπτον ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ ἕκτον τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ ΑΒ, ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ Γ, καὶ τρίτον τὸ ΔΕ, ἰσάκις πολλαπλάσιον τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ τοῦ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τοῦ Γ καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ.

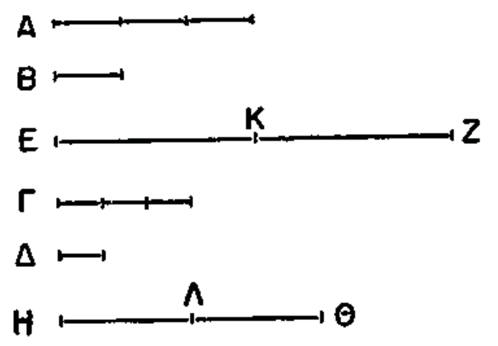
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΔΕ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὅσα περιέχονται εἰς τὸ ΒΗ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΕΘ, ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὅσα ἄρα ὑπάρχουσιν εἰς ὅλον τὸ ΑΗ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς ὅλον τὸ ΔΘ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. Καὶ ἄρα τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ, θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τοῦ Γ, ὡς θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ, τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον τετάρτου, ὑπάρχῃ δὲ καὶ πέμπτον ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ ἕκτον τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου θά εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῶσι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν ληφθέντων, ἕκαστον θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσι τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ἄρα ὅσα ἴσα πρὸς τὸ Α περιέχονται εἰς τὸ ΕΖ, ἄλλα τόσα ἴσα πρὸς τὸ Γ περιέχονται εἰς τὸ ΗΘ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Α μεγέθη τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ τὰ ΗΛ, ΛΘ· ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ πρὸς τὸ Α, τὸ δὲ ΗΛ πρὸς τὸ Γ, ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, εἶναι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ Β καὶ τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΗΘ εἶναι τοῦ τετάρτου τοῦ Δ.

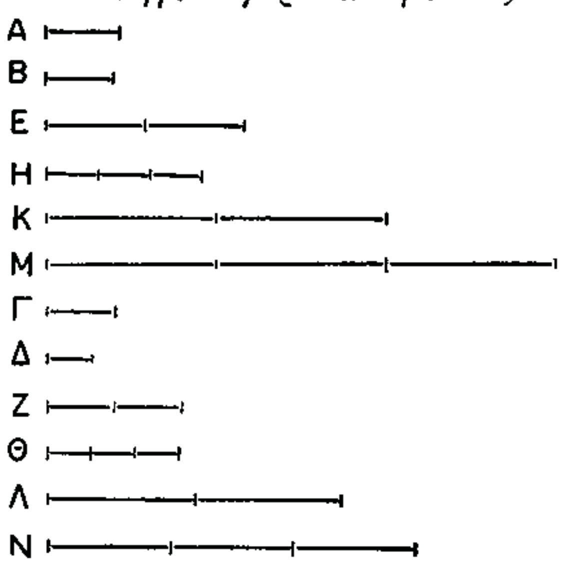
Ἐὰν ἄρα πρῶτον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῶσι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν ληφθέντων, ἕκαστον θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμόν, ἐὰν ληφθῶσι καταλλήλως.

Διότι ἂς ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.



[Καὶ] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

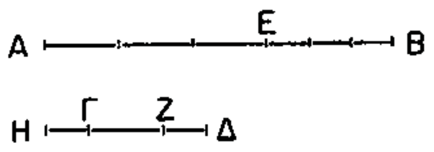
ε'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ. κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ



Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν Ε εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἄρα τὸ Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ (θεώρ. 3). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ Μ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν ΑΓ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Κ τοῦ Μ, θὰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, ἐὰν δὲ ἐλλείπῃ, θὰ ἐλλείπῃ (ὁρισμὸς 5). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Κ, Λ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Ε, Ζ, τὰ δὲ Μ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Η, Θ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμόν, ἐὰν ληφθῶσι καταλλήλως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον μεγέθους, ὅπως εἶναι ἀφαιρεθὲν μέρος τοῦ ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἀφαιρεθὲν μέρος τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσον εἶναι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Διότι ἔστω τὸ μέγεθος ΑΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ μεγέθους ΓΔ, ὅπως τὸ ἀφαιρούμενον ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἀφαιρουμένου ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΕΒ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου ΖΔ, τόσον ὅσον εἶναι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

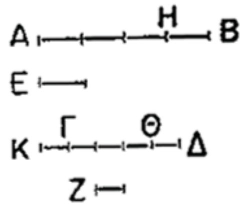
Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἄρα τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ (θεώρ. 1). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι τὸ ΑΕ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἄρα τὸ ΗΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΓΖ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΗΓ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.



Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πρὸς τὸ ΔΖ, ἄρα τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἄρα τὸ ΕΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΕΒ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου ΖΔ, τόσον ὅσον εἶναι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον μεγέθους, ὅπως εἶναι μέρος τοῦ ἑνὸς μεγέθους πρὸς μέρος τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσον εἶναι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο μεγέθη εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια δύο μεγεθῶν καὶ ἀφαιρεθέντα μερικὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν.

Διότι ἔστωσαν τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν δύο μεγεθῶν Ε, Ζ καὶ τὰ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ ἂς εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν τῶν Ε,Ζ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ ΗΒ, ΘΔ θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς τὰ Ε,Ζ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν.

Διότι ἂς εἶναι πρότερον τὸ ΗΒ ἴσον πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ ΓΚ ἴσον πρὸς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν ΗΒ πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΚΓ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ (θεώρ. 2). Ἔχει δὲ ληφθῇ τὸ ΑΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἄρα τὸ ΚΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΚΘ, ΓΔ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ζ, ἄρα τὸ ΚΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΓΘ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΘΔ. Ἀλλὰ τὸ Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΓ· ἄρα καὶ τὸ ΘΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ. Ὥστε ἐὰν τὸ ΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε, καὶ τὸ ΘΔ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ.

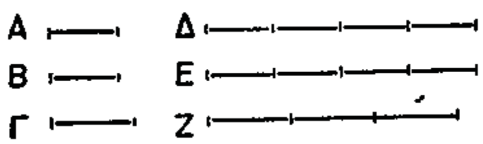
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι, καὶ ἐὰν τὸ ΗΒ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια δύο μεγεθῶν καὶ ἀφαιρεθῶσι μερικὰ μεγέθη, ὥστε τὰ ἀφαιρεθέντα νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Ζ. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δέ, ὃ

7.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, τυχὸν δὲ ἄλλο μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἂς ληφθῇ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, τὸ δὲ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β, ἄρα καὶ τὸ Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε. Τὸ δὲ Ζ εἶναι ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον (τοῦ Γ). Ἐὰν ἄρα τὸ Δ ὑπερέχῃ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Δ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὸ δὲ Ζ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Γ· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ (ὁρισ. 5).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ Γ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β (εἰς τὸ κείμενον Heiberg εἶναι Ε ἀντὶ Γ, προφανῶς ἐκ τυπ. λάθους).

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι τὸ Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε· ἔχει δὲ ληφθῇ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον (τοῦ Γ) τὸ Ζ· ἐὰν ἄρα τὸ Ζ ὑπερέχῃ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὸ μὲν Ζ πολλαπλάσιον τοῦ Γ, τὰ δὲ Δ,Ε, ἄλλα τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β (ὁρισ. 5).

Ἄρα τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Π ό ρ ι σ μ α.

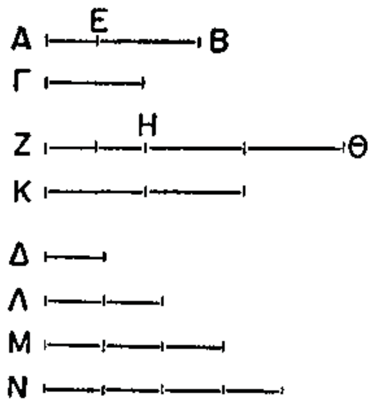
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν μερικὰ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, καὶ ἀντιστρόφως θὰ εἶναι ἀνάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ μεγαλύτερον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΑΒ, ἄλλο *ἔτυχεν, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.*

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ· τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστιν. μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφότερα δὲ τὰ Μ, Δ τοῦ Δ ἐστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Μ, Δ μεῖζόν ἐστιν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει· τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλα-

δὲ τυχὸν μέγεθος, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, ἂς ληφθῇ τὸ ΒΕ ἴσον πρὸς τὸ Γ· τὸ μικρότερον ὅμως ἐκ τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ ποτὲ μεγαλύτερον τοῦ Δ (ἀξίωμα συνεχείας, V. ὁρισ. 4). Ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ μικρότερον τοῦ ΕΒ, καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΖΗ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἓν περισσότερον (δηλ. νὰ ληφθῇ τοῦ Δ τὸ τετραπλάσιον, πενταπλάσιον ἑξαπλάσιον κλπ.), μέχρις ὅτου τὸ λαμβανόμενον γίνῃ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ πολλαπλάσιον μεγαλύτερον τοῦ Κ. Ἂς ληφθῇ, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ πολλαπλάσιον μεγαλύτερον τοῦ Κ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Κ εἶναι τὸ πρῶτον μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ Ν, ἄρα τὸ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΖΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἄρα τὸ ΖΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ (θεώρ. 1). Εἶναι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἄρα τὸ ΖΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἄρα τὰ ΖΘ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, εἶναι δὲ τὸ ΕΒ ἴσον πρὸς τὸ Γ, ἄρα τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Κ. Τὸ δὲ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ· ἄρα οὔτε τὸ ΗΘ εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Τὸ δὲ ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ· ἄρα ὅλον τὸ ΖΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, Μ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Δ, Μ ἰσοῦται πρὸς τὸ Ν, διότι τὸ Μ εἶναι τριπλάσιον τοῦ Δ, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν Μ, Δ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ Δ, εἶναι δὲ καὶ τὸ Ν τετραπλάσιον τοῦ Δ· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Μ, Δ· ἄρα τὸ ΖΘ ὑπερέχει τοῦ Ν, τὸ δὲ Κ δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν. Καὶ εἶναι τὰ μὲν ΖΘ, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ, τὸ δὲ Ν ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Δ· ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ (ὁρισμ. 7).

Λέγω ἀκόμη, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, θὰ ἀποδείξωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ μὲν Ν ὑπερέχει τοῦ Κ, τὸ δὲ Ν δὲν ὑπερέχει τοῦ ΖΘ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν Ν πολλαπλάσιον τοῦ Δ, τὰ δὲ ΖΘ, Κ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ· ἄρα τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Γ ἢ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ (ὁρισμ. 7).

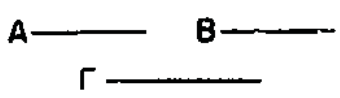
Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΕ μεγαλύτερον τοῦ ΕΒ. Τὸ μικρότερον ὅμως, *πλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τουτέστι τοῦ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.*

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

τὸ ΕΒ, πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ ποτὲ μεγαλύτερον τοῦ Δ (ἀξίωμα συνεχείας, ὁρισ. 4). Ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ,τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ· καὶ ἂς ληφθῇ ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Εἶναι δὲ τὸ ΗΘ μεγαλύτερον τοῦ Δ· ἄρα ὅλον τὸ ΖΘ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, Μ, δηλ. τοῦ Ν. Τὸ δὲ Κ δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν, ἐπειδὴ καὶ τὸ ΖΗ ὂν μεγαλύτερον τοῦ ΗΘ, δηλ. τοῦ Κ, δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν. Καὶ ἀκολουθοῦντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς πρὸς τὰ ἀνωτέρω τελειώνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Ἄρα τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι μεταξύ των ἴσα· καὶ ἐκεῖνα πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ αὐτὸ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα.

Διότι ἂς ἔχῃ ἕκαστον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον, δὲν θὰ εἶχεν ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ Γ (θ. 3)· ἔχει δέ· ἄρα τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Ἂς ἔχῃ τώρα τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, δὲν θὰ εἶχε τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον (θ. 3)· ἔχει δέ· ἄρα τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

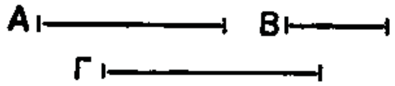
Ἄρα τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι μεταξύ των ἴσα· καὶ ἐκεῖνα πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ αὐτὸ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐκ τῶν μεγεθῶν, ἅτινα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον λόγον· τὸ μέγεθος δὲ πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον.

Διότι ἂς ἔχῃ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Β.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Α τῷ Β· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.



Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

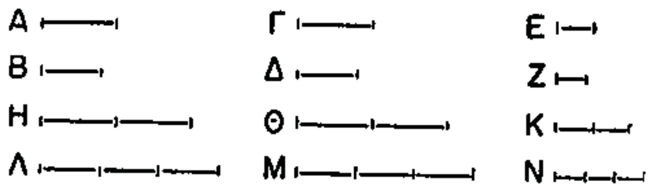
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Β τῷ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλά-

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Β ἢ μικρότερον. Ἴσον ὅμως δὲν εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β· διότι τότε ἕκαστον τῶν Α, Β θὰ εἶχε τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ Γ (θ. 7). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα δὲν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον τὸ Α τοῦ Β· διότι τότε τὸ Α θὰ εἶχε μικρότερον λόγον πρὸς τὸ Γ ἢ τὸ Β πρὸς τὸ Γ (θ. 8). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Α δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Β. Ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· ἄρα τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Β.

Ἂς ἔχῃ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι τὸ Β εἶναι μικρότερον τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον. Ἴσον ὅμως δὲν εἶναι τὸ Β πρὸς τὸ Α· διότι τότε τὸ Γ θὰ εἶχε πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον (θ. 7). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Α δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον τὸ Β τοῦ Α· διότι τότε τὸ Γ θὰ εἶχε πρὸς τὸ Β μικρότερον λόγον ἢ πρὸς τὸ Α (θ. 8). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Β δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Α. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἄρα τὸ Β εἶναι μικρότερον τοῦ Α.

Ἐκ τῶν μεγεθῶν ἄρα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον λόγον· τὸ μέγεθος δὲ πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Οἱ λόγοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι καὶ μεταξύ των οἱ αὐτοί.

Διότι ἔστωσαν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β εἶναι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ, ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, *σια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.*

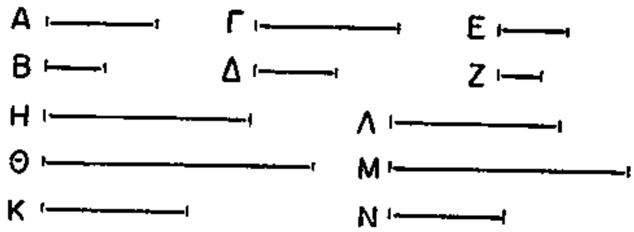
Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἐλάττονα. καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ἀλλὰ ἐὰν ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, θὰ ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ ἐὰν ἦτο ἴσον, θὰ ἦτο ἴσον, καὶ ἐὰν ἦτο μικρότερον, θὰ ἦτο μικρότερον· ὥστε καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Ε, τὰ δὲ Λ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Ζ· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ (κατὰ τὸν ὁρισμ. 5).

Οἱ λόγοι ἄρα, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι καὶ μεταξύ των οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

Ἔστωσαν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα Α + Γ + Ε πρὸς τὸ ἄθροισμα Β + Δ + Ζ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

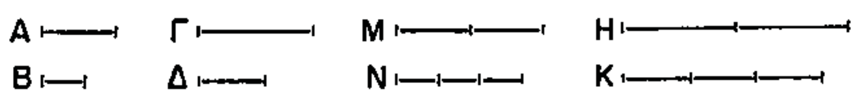
Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ὥστε καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα Η + Θ + Κ τοῦ ἀθροίσματος Λ + Μ + Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Καὶ εἶναι τὸ μὲν Η τοῦ Α, τὸ δὲ ἄθροισμα Η + Θ + Κ τοῦ ἀθροίσματος Α + Γ + Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, διότι, ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μεγεθῶν (θ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ Λ τοῦ Β καὶ τὸ ἄθροισμα Λ + Μ + Ν τοῦ ἀθροίσματος Β + Δ + Ζ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα Α + Γ + Ε πρὸς τὸ ἄθροισμα Β + Δ + Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

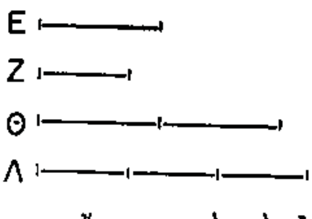
ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, ἂς ἔχῃ δὲ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Ζ θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

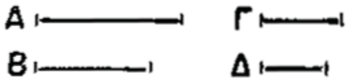
Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι μερικὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ Γ ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ Δ, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ Ε δὲν ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ Ζ (ὁρισμ. 7), ἂς ληφθῶσι, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η νὰ ὑπερέχῃ τοῦ Κ, τὸ δὲ Θ νὰ μὴ ὑπερέχῃ τοῦ Λ· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν εἶναι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, ἐὰν ἄρα τὸ Μ ὑπερέχῃ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισ. 5). Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ἄρα ὑπερέχει καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ δὲν ὑπερέχει τοῦ Λ· καὶ εἶναι τὰ μὲν Μ, Θ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Ε, τὰ δὲ Ν, Λ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Ζ· ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, θὰ ἔχῃ καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ′.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

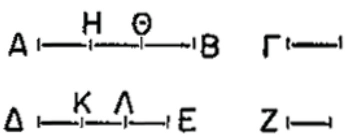
Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ, κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε′.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ

14.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἂν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον θὰ εἶναι μικρότερον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, ἂς εἶναι δὲ τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι ἄλλο τυχὸν μέγεθος, ἄρα τὸ Α ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Β ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β (θεώρ. 8). Εἶναι δὲ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἄρα καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον (θεώρ. 10)· ἄρα τὸ Δ εἶναι μικρότερον τοῦ Β· ὥστε τὸ Β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἂν τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Β πρὸς τὸ Δ, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον τὸ Α τοῦ Γ, θὰ εἶναι μικρότερον καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἂν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τὰ μέρη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν, ἀφοῦ ληφθῶσι καταλλήλως.

Διότι ἔστω ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ὡς τὸ Γ εἶναι πρὸς τὸ Ζ, οὕτως εἶναι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μεγέθη περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ, ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΔΕ, ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των, εἶναι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα μεταξύ των, ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ (θεώρ. 7). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ΛΕ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

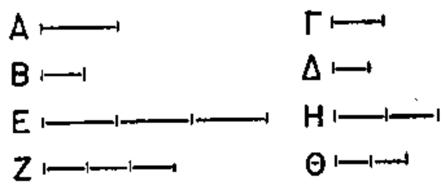
Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.



Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, [οὕτως] τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (θεώρ. 12)· εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ Γ, τὸ δὲ ΔΚ πρὸς τὸ Ζ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἄρα τὰ μέρη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν, ἀφοῦ ληφθῶσι καταλλήλως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ ἐναλλὰξ θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ λαμβανόμενα θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ,Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη ἔχουσι μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν (θεώρ. 15), εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ (θεώρ. 11). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Η, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 15). Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 11). Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον (θεώρ. 14). Ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὰ δὲ Η, Θ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

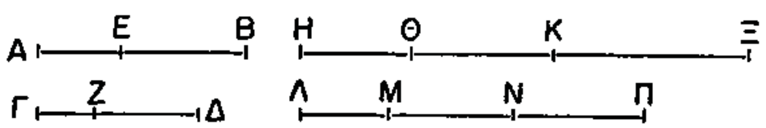
Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ ἐναλλὰξ θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ διαιρεθέντα θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.



Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω ἐν ἀναλογίᾳ τὰ προστεθέντα μεγέθη ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.[1]

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, τὸ ΗΘ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ (θεώρ. 1). Εἶναι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· τὸ ΗΚ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΛΜ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, τὸ ΛΜ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ (θεώρ. 1). Ἦτο δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ, καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· τὸ ΗΚ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, ΓΔ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΘΚ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, εἶναι δὲ καὶ τὸ ΚΞ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ τὸ ἄθροισμα ΘΞ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ἄθροισμα ΜΠ τοῦ ΖΔ (θεώρ. 2). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ἂς ὑπερέχῃ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΘΚ, καὶ τὸ ΗΘ ἄρα ὑπερέχει τοῦ ΚΞ. Ἀλλὰ ἐὰν ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, θὰ ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΜΝ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΞ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ ΛΜ πρὸς τὸ ΝΠ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΕ, ΓΖ, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ (ὁρισ. 5).

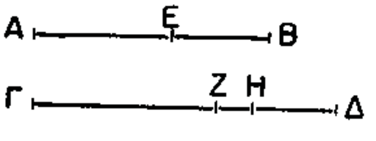
Ἐὰν ἄρα προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ προστεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

---

1. Εἰς τὴν ἔκδοσιν Heiberg δὲν ὑπάρχει σχῆμα. Τοῦτο ἐτέθη ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κειμένου.



Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεῖζον.

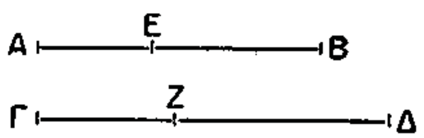
Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ

Ἔστω ἐν ἀναλογίᾳ διῃρημένα μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θ' ἀποτελῇ ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, θὰ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς μικρότερόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεγαλύτερον.

Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, ὑπάρχουσι προστεθέντα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 17)· ὥστε καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ἔχει ληφθῆ δὲ καὶ ἐξ ὑποθέσεως, ὅτι ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ μεγαλύτερον τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· θὰ εἶναι ἄρα μεγαλύτερον καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ (θεώρ. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς μικρότερον τοῦ ΖΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον· ἄρα πρὸς αὐτὸ (δηλ. εἶναι ΑΒ : ΒΕ = ΓΔ : ΖΔ).

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ προστεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν εἶναι ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Διότι ἔστω ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΖΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, θὰ εἶναι καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ προστεθέντα μεγέθη ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, θ' ἀποτελῶσι καὶ διῃρημένα ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 17), καὶ ἐναλλὰξ (θεώρ. 16) ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἔχει ληφθῆ ἐξ ὑποθέσεως ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΖΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ὅλον πρὸς ὅλον εἶναι ὡς ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ *τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].*

[Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι].

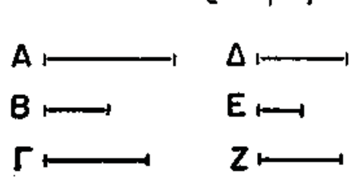
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δι' ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, [οὕτως] τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν. μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ὡς ὅλον πρὸς ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, ἄρα προστεθέντα μεγέθη εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ εἶναι ἡ ἀναλογία αὕτη κατ' ἀναστροφὴν (ὁρισ. 16)].

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ κατ' ἀναστροφήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Δ, Ε, Ζ, καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, κατὰ τὸν σχηματισμὸν δὲ ἀναλογίας μὲ λῆψιν τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων ἔστω τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

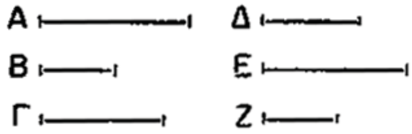
Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι τυχὸν ἄλλο μέγεθος, τὸ δὲ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον (θεώρ. 8), ἄρα τὸ Α ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Β ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ ἀνάπαλιν (θεώρ. 7, πόρ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε (ἀνάπαλιν, διότι ἔχει ληφθῆ $B : \Gamma = E : Z$)· ἄρα καὶ τὸ Δ πρὸς Ε ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Ἐκ δὲ τῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτό, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον μεγαλύτερον λόγον (θεώρ. 10). Ἄρα τὸ Δ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ἴσου δὲ τὸ *ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

κα'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι' ἴσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἔστω δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι' ἴσου δὲ ἔστω τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

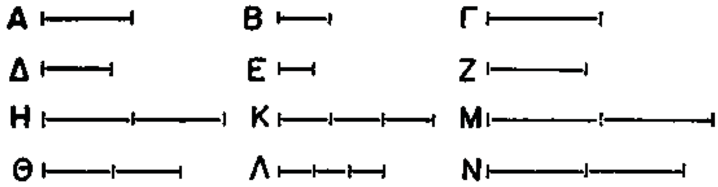
Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι ἄλλο τυχὸν μέγεθος, ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β (θεώρ. 8). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ (θεώρ. 7, πόρ.) Ἄρα καὶ τὸ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον (θεώρ. 10)· ἄρα τὸ Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ Δ· ἄρα τὸ Δ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ. Καθ'ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

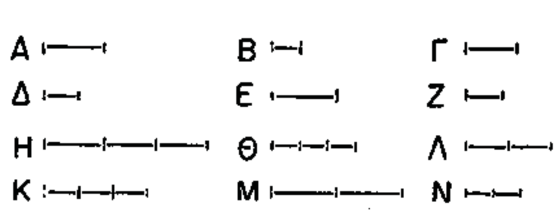
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ, Λ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.



Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ, ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ τὰ Δ, Ε, Ζ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἀκόμη τῶν Γ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ (θεώρ. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ Η, Κ, Μ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Θ, Λ, Ν καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα δι' ἴσου ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Μ, θὰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον (θεώρ. 20). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια. Ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ (ὁρισμ. 5).

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ δὲ ἀναλογία αὐτῶν εἶναι τεταραγμένη, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Δ, Ε, Ζ, καὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμενα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἔστω δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, ἤτοι ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

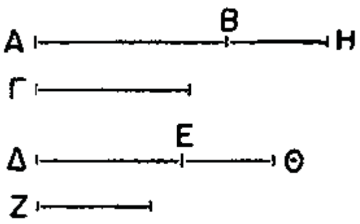
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β,Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ. ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Κ, Μ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.



Καὶ ἐπειδὴ τὰ Η, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἄρα καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε (θεώρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ τὰ Θ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Δ, τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε (θεώρ. 11). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Λ, Μ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Ε, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 11), καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 16). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ Η, Θ, Λ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ τὰ Κ, Μ, Ν, λαμβανόμενα ἀνὰ δύο εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ ἀναλογία αὐτῶν εἶναι τεταραγμένη (ὅρ. 18), ἄρα δι' ἴσου (δηλ. συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν λόγων) ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (θεώρ. 21). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Δ, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ (ὅρ. 5).

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου πρὸς τέταρτον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἂς ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

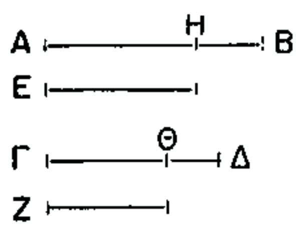
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν, ἐὰν ἄρα] τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ τῷ μὲν ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα κατ' ἀνάπαλιν λόγον θὰ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ (θεώρ. 7, πόρ.). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, ἄρα δι' ἴσου θὰ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ διῃρημένα μεγέθη εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 18)· ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. Εἶναι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ (θεώρ. 22).

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΒ σὺν Ζ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ σὺν Ε.

Διότι ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸ Ε ἴσον τὸ ΑΗ, πρὸς δὲ τὸ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν Ε πρὸς τὸ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ πρὸς τὸ ΓΘ, ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ἀφαιρεθὲν ΑΗ πρὸς τὸ ἀφαιρεθὲν ΓΘ (θεώρ. 19), ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΗΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ΘΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Εἶναι δὲ τὸ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσον τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΓΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ἄθροισμα ΑΗ σὺν Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ΓΘ σὺν Ε. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ὅλα εἶναι ἄνισα, ἐὰν ἄρα, ἐν ᾧ τὰ ΗΒ, ΘΔ εἶναι ἄνισα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον, προστεθῇ εἰς μὲν τὸ ΗΒ τὸ ἄθροισμα ΑΗ σὺν Ζ, εἰς δὲ τὸ ΘΔ προστεθῇ τὸ ἄθροισμα ΓΘ σὺν Ε, συνάγεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΒ σὺν Ζ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ σὺν Β (Ι. κοιναὶ ἔν. 4).

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ΄.

Ὅροι.

α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

[β΄. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν].

γ΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

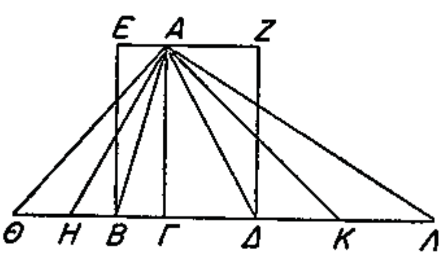
δ΄. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

[ε΄. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα].

α΄.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

ΒΙΒΛΙΟΝ VI.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

1. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμα εἶναι ὅσα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἀνὰ μίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους.

[2. Ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογα σχήματα εἶναι, ὅταν εἰς ἕκαστον τῶν σχημάτων ὑπάρχωσιν ἡγούμενοι καὶ ἑπόμενοι λόγοι].

3. Εὐθεῖα λέγεται, ὅτι ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὅταν εἶναι ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, οὕτως τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ μικρότερον.

4. Ὕψος εἶναι παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος.

[5. Λόγος λέγεται, ὅτι σύγκειται ἐκ λόγων, ὅταν αἱ πηλικότητες (τὰ μέτρα) τῶν λόγων πολλαπλασιασθεῖσαι ἐφ' ἑαυτὰς σχηματίζωσι λόγον τινά].

1.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ὡς εἶναι ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΔ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς μέχρι τῶν σημείων Θ,Λ, καὶ ἂς ληφθῶσι πρὸς μὲν τὴν βάσιν ΒΓ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΒΗ, ΗΘ, πρὸς δὲ τὴν βάσιν ΓΔ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ ἴσα μεταξύ των (Ι. 38). Ὁσαπλασία ἄρα εἶναι ἡ βάσις ΘΓ τῆς βάσεως ΒΓ, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ *διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν , οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.*

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

βʹ.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁσαπλασία εἶναι ἡ βάσις ΛΓ τῆς βάσεως ΓΔ, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΛΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ· καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΛ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΛ (I. 38), καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ ὑπερέχῃ τῆς βάσεως ΓΛ, ὑπερέχει καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ τοῦ τριγώνου ΛΓΛ, καὶ ἐὰν εἶναι μικροτέρα, εἶναι μικρότερον. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, ἤτοι δύο μὲν βάσεις αἱ ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ βάσις ΘΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ, τῆς δὲ βάσεως ΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ ἡ βάσις ΛΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΛΓ· καὶ ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν ἡ βάσις ΘΓ ὑπερέχῃ τῆς βάσεως ΓΛ, ὑπερέχει καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΓ τοῦ τριγώνου ΑΛΓ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴση, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικροτέρα, εἶναι μικρότερον· ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (V. ὁρισ. 5).

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ εἶναι διπλάσιον, τοῦ δὲ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (I. 34), τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον (V. 15), εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (V. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὡς μὲν εἶναι ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΓΔ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΓ (V. 11).

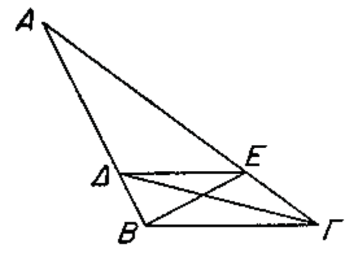
Ἄρα τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν εἰς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα· καὶ ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τμηθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Διότι ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΓΔ.



Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ· ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΔΕ, ΒΓ (I. 38)· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἄλλο τι. Τὰ δὲ ἴσα ἔχουσι πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν λόγον (V. 7)· ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· διότι ὄντα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, δηλ. τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένην κάθετον, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις (θεώρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως εἶναι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ (V. 11).

Ἀλλ' ἂς τμηθῶσι τώρα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ (θεώρ. 1), καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΓΔΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ (V. 11). Ἄρα ἕκαστον τῶν τριγώνων ΒΔΕ, ΓΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΑΔΕ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ (V. 9)· καὶ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (I. 39). Ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

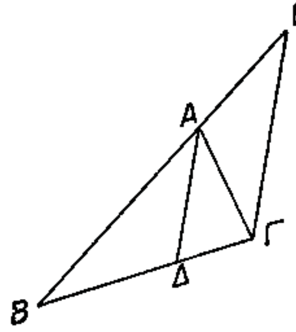
Ἐὰν ἄρα εἰς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα· καὶ ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τμηθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν τριγώνου διχοτομηθῇ ἡ γωνία, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τμήματα τῆς βάσεως θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου· καὶ ἐὰν τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΒΑΓ ὑπὸ τῆς

τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

εὐθείας ΑΔ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἀφοῦ προεκταθῇ ἡ ΒΑ, ἂς συναντήσῃ αὐτὴν κατὰ τὸ Ε (I. αἴτ. 5).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΔ, ΕΓ, ἄρα ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΔ (I. 29). Ἀλλὰ ἡ ΓΑΔ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΔ, ΕΓ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς τὴν ΑΕΓ (I. 29). Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τρίγωνον τὸ ΒΓΕ ἤχθη ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ, ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλ' ἔστω τώρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ.

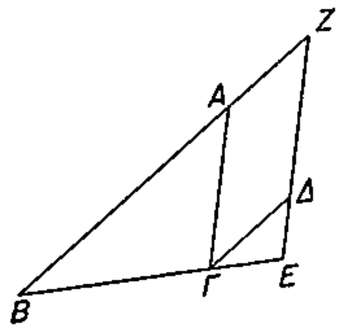
Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· διότι εἰς τρίγωνον τὸ ΒΓΕ ἤχθη ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ (θεώρ. 2)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ (V. 11). Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ (V. 9)· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ (I. 5). Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐκτὸς τὴν ΒΑΔ (I. 29), ἡ δὲ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐναλλὰξ τὴν ΓΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΔ. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ.

Ἐὰν ἄρα διχοτομηθῇ ἡ γωνία τριγώνου, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τμήματα τῆς βάσεως θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου· καὶ ἐὰν τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἀγομένη εὐθεῖα θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ πλευραὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ὁμόλογοι.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τὴν ΖΕ ἧκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ τὴν πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΓΕ, τὴν δὲ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΓΔΕ καὶ ἀκόμη τὴν ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΓΕ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ὁμόλογοι.

Διότι ἂς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν (I. 17), εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΔΕΓ, ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΔΕΓ εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ ΒΑ, ΕΔ προεκβαλλόμεναι θὰ συμπέσωσιν (I. αἴτ. 5). Ἂς προεκβληθῶσι καὶ ἂς συμπέσωσι κατὰ τὸ Ζ.

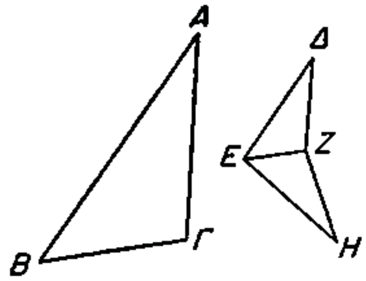
Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (I. 28). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΓ, ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΕ (I. 28). Ἄρα τὸ ΖΑΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΔ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τρίγωνον τὸ ΖΒΕ ἤχθη πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως εἶναι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΖ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΑΓ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ (V. 16). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὡς μὲν εἶναι ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ (V. 22).

Ἄρα τῶν ἰσογωνίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ὁμόλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἀκόμη ὡς τὴν ΒΑ πρὸς *οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.*



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἐστιν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, [οὕτως] ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΗ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γω-

τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ὅτι θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί, τὴν μὲν ΑΒΓ πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ πρὸς τὴν ΕΖΔ καὶ ἀκόμη τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων τῶν Ε,Ζ πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴση ἡ ΖΕΗ, πρὸς δὲ τὴν ΑΓΒ ἴση ἡ ΕΖΗ (I. 23)· ἄρα ἡ ἄλλη γωνία ἡ παρὰ τὸ Α θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην τὴν παρὰ τὸ Η (I. 32).

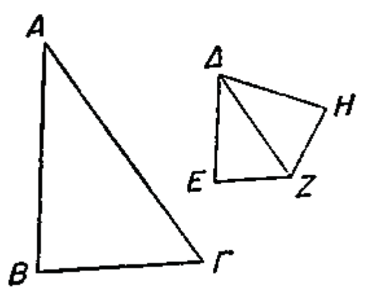
Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΗΖ. Ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΕΗΖ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὁμόλογοι (θεώρ. 4)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἐλήφθη ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ (V. 11). Ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΗΕ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΕ, ΕΖ· καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΗ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (I, 8) καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΕΖ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, ἐκεῖναι, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραὶ (I. 4). Εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ μὲν γωνία ΔΖΕ πρὸς τὴν ΗΖΕ, ἡ δὲ ΕΔΖ πρὸς τὴν ΕΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΖΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ, ἀλλὰ ἡ ΗΕΖ πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ, καὶ ἀκόμη ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ *νίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.*



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ· καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΔΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΕΔΖ, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΛΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ θὰ ἔχῃ τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΑΓΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Δ, Ζ πρὸς ἑκάστην μὲν τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ΖΔΗ, πρὸς δὲ τὴν ΑΓΒ ἴση ἡ ΔΖΗ (Ι. 23)· ἡ λοιπὴ ἄρα παρὰ τὸ Β γωνία θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Η (Ι. 32).

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΗΖ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ (θεώρ. 4). Ἐλήφθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ (V. 11). Ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ (V. 9)· καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κοινή· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΔ, ΔΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΖ· καὶ ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΖ· ἄρα ἡ βάσις ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΔΖ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (Ι, 4). Ἄρα ἡ μὲν ΔΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ ΔΗΖ πρὸς τὴν ΔΕΖ. Ἀλλ' ἡ ΔΖΗ εἶναι ἴση ππὸς τὴν ΑΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ. Ἐλήφθη δὲ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ε (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωοον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

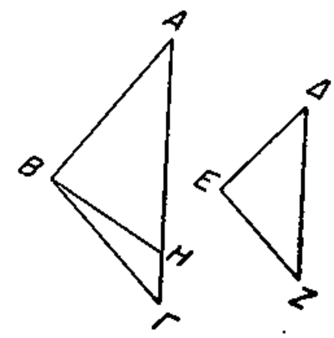
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας ἀναλόγους, ἐκ τῶν λοιπῶν δὲ γωνιῶν ἑκάστην ἢ μικροτέραν ἢ μὴ μικροτέραν ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἀναλόγους, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως

ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

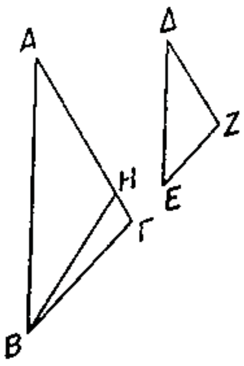


Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐκ τῶν ὑπολοίπων δὲ γωνιῶν τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Γ, Ζ, πρότερον, ἑκάστην μικροτέραν ὀρθῆς· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία, δηλ. ἡ παρὰ τὸ Γ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ.

Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ, μία ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΒΓ. Καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον αὐτῆς τὸ Β ἡ γωνία ΑΒΗ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ ΑΒΗ πρὸς τὴν ΔΕΖ, ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΑΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΔΖΕ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ (θεώρ. 4). Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἐλήφθη ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΓ, ΒΗ (V. 11)· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ (V. 9). Ὥστε καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΓ (I. 5). Ἐλήφθη δὲ μικροτέρα ὀρθῆς ἡ παρὰ τὸ Γ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· ὥστε ἡ ἐφεξῆς πρὸς αὐτὴν γωνία ἡ ΑΗΒ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς (I. 13). Καὶ ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Ζ· καὶ ἡ παρὰ τὸ Ζ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. Ἐλήφθη δὲ μικροτέρα ὀρθῆς· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἀλλὰ πάλιν ἂς ληφθῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Γ, Ζ μὴ μικροτέρα ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ τώρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ὥστε καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΓ (I. 5). Δὲν εἶναι δὲ μικροτέρα ὀρθῆς ἡ παρὰ τὸ Γ· ἄρα οὐδὲ ἡ ΒΗΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δὲν εἶναι μικρότεραι δύο ὀρθῶν· ὅπερ ἀδύνατον (I. 17). Πάλιν ἄρα ἡ ΑΒΓ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ παρὰ τὸ Α ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Δ· ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν παρὰ τὸ Ζ (I. 32). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

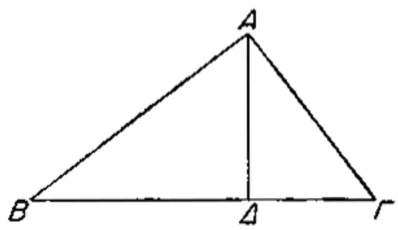
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν ἄλλας γωνίας, ἀναλόγους, ἐκ τῶν λοιπῶν δὲ γωνιῶν ἑκάστην ἢ μικροτέραν ἢ μὴ μικροτέραν ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα θὰ εἶ-

ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

ναι ἰσογώνια καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν ΒΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀκόμη καὶ μεταξύ των.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ· διότι ἑκάστη εἶναι ὀρθή· καὶ ἡ παρὰ τὸ Β εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ, ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΒΑΔ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα (κειμένη ἀπέναντι) τὴν παρὰ τὸ Γ γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ΒΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, καὶ ἀκόμη ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν παρὰ τὸν Β κοινὴν γωνίαν τῶν δύο τριγώνων. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους (θεώρ. 4). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἑκάτερον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΑΔΓ, ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ ΒΑΔ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν Γ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ παρὰ τὸ Β θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΔΑΓ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ ὑποτείνουσα τὴν ΒΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἡ ὁποία ὑποτείνει (κεῖται ἀπέναντι) τὴν παρὰ τὸ Γ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ ὑποτείνουσα τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ΔΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Β, καὶ ἀκόμη ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουσι τὰς ὀρθὰς γωνίας (θεώρ. 4)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ (ὁρισμ. 1).

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

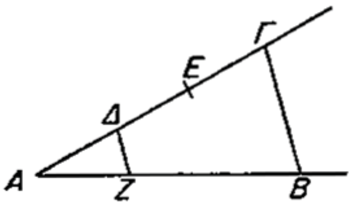
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποιουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν].

θʹ.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιʹ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν

Ἐὰν ἄρα εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀχθεῖσα εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἀκόμη τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τμημάτων ἡ παρὰ τὸ τμῆμα πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος].

9.

Τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ προσταχθὲν μέρος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει τῆς ΑΒ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ προσταχθὲν μέρος.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίτον. Καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν τυχοῦσαν· καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσιν αἱ ΔΕ, ΕΓ ἴσαι πρὸς τὴν ΑΔ. Καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΔΖ (I. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν του τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΔ (Θεώρ. 2), ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Εἶναι δὲ διπλασία ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· ἄρα καὶ ἡ ΒΖ εἶναι διπλασία τῆς ΖΑ· ἄρα ἡ ΒΑ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΖ.

Ἄρα τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ ἀφῃρέθη τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

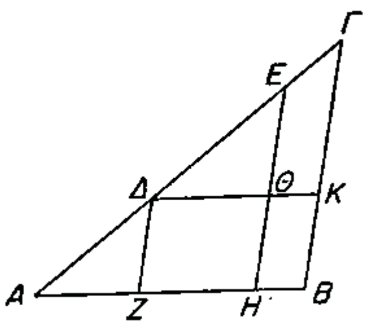
10.

Ἡ δοθεῖσα ἄτμητος εὐθεῖα νὰ τμηθῇ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν τετμημένην.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἄτμητος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη κατὰ τὰ σημεῖα Δ,Ε ἡ ΑΓ, καὶ ἂς κεῖνται αὗται, ὥστε νὰ περιέχωσι τυχοῦσαν γωνίαν, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ καὶ διὰ τῶν Δ,Ε ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΔΘΚ (I. 31).

Ἄρα ἕκαστον τῶν ΖΘ, ΘΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΔΘ

ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

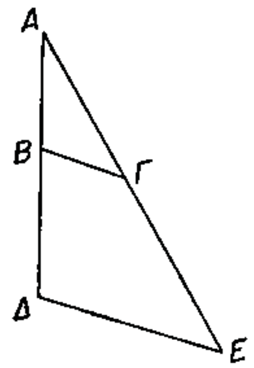


Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια′.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ′.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ πρὸς τὴν ΗΒ (Ι. 34). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΚΓ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ παράλληλος ἡ ΘΕ, ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΚΘ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΕ ἤχθη πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ παράλληλος ἡ ΖΔ, ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ (θεώρ. 2). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· εἶναι ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ δοθεῖσα ἄρα ἄτμητος εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν τετμημένην τὴν ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ τρίτη ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ ἃς κεῖνται περιέχουσαι γωνίαν τυχοῦσαν. Πρέπει νὰ εὑρεθῇ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογος.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αὗται μέχρι τῶν σημείων Δ,Ε, καὶ ἂς κεῖται πρὸς τὴν ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΔΕ (Ι. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἤχθη παράλληλος ἡ ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ (θεώρ. 2). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

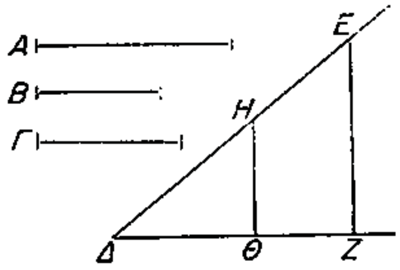
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ εὑρέθη τρίτη ἀνάλογος πρὸς αὐτὰς ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· πρέπει τῶν Α,Β,Γ νὰ εὑρεθῇ τετάρτη ἀνάλογος.

Ἂς κεῖνται δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ περιέχουσαι γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ΕΔΖ· καὶ ἂς κεῖται πρὸς μὲν τὴν Α ἴση ἡ ΔΗ, πρὸς δὲ τὴν Β ἴση ἡ ΗΕ, ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

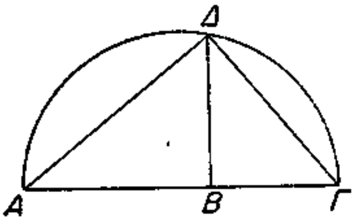
Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγʹ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.



Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ, ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδʹ.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

καὶ ἀκόμη πρὸς τὴν Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὴν διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ (I. 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἤχθη παράλληλος ἡ ΗΘ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΔΗ πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΗΕ πρὸς τὴν Β, ἡ δὲ ΔΘ πρὸς τὴν Γ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ εὑρέθη τετάρτη ἀνάλογος ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· πρέπει τῶν ΑΒ, ΒΓ νὰ εὑρεθῇ μέση ἀνάλογος.

Ἂς κεῖνται (αἱ δοθεῖσαι) ἐπ' εὐθείας, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ ἡ ΒΔ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΓ βαίνει ἐπὶ ἡμικυκλίου, εἶναι ὀρθὴ (III. 31). Καὶ ἐπειδὴ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΔΓ ἔχει ἀχθῆ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΔΒ, ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῶν ΑΒ, ΒΓ (θ. 8, πόρισμα).

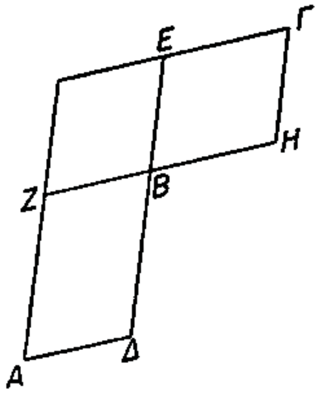
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ εὑρέθη μέση ἀνάλογος ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

14.

Τῶν ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἔχοντα τὰς παρὰ τὸ Β γωνίας ἴσας, καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἄρα θὰ εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. Λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τουτέστιν, ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

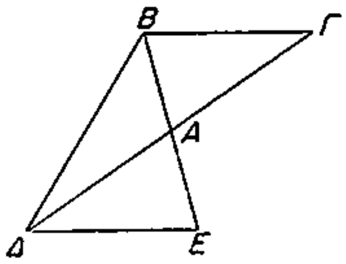
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ

Διότι ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ, εἶναι δὲ ἄλλο τι τὸ ΖΕ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ ,οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ (θεώρ. 1). Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων ΑΒ, ΒΓ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕ (θεώρ. 1), καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ (V. 11)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ (V. 9).

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τῶν ἴσων τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀντιστρόφως ἀναλόγους, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΓ πρὸς τὴν ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, τουτέστιν ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΓΑ, ΑΔ· ἄρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΕΑ, ΑΒ. Καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, *ΒΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.*

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

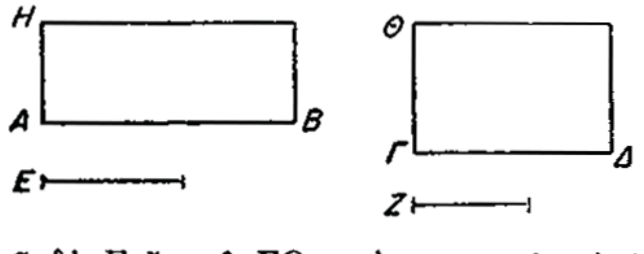
Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ [τρίγωνον] τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἤχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση τὸ δὲ ΒΑΔ εἶναι ἄλλο τι, εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. Τῶν τριγώνων ἄρα ΑΒΓ, ΑΔΕ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ.

Διότι, ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ πάλιν ἡ ΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ (θεώρ. 1), ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΕΑΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΑΔ (V. 9).

Τῶν ἄρα ἴσων τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· καὶ ἐκεῖνα ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀντιστρόφως ἀναλόγους εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε,Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ ἂς κεῖται πρὸς μὲν τὴν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, πρὸς δὲ τὴν Ε ἴση ἡ ΓΘ. Καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλόγραμμα ΒΗ, ΔΘ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση *δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

δὲ ἡ μὲν Ε πρὸς τὴν ΓΘ, ἡ δὲ Ζ πρὸς τὴν ΑΗ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων ΒΗ, ΔΘ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι. Ἐκεῖνα δὲ τῶν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, εἶναι ἴσα (θεώρ. 14)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΘ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΗ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· διότι ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· διότι ἡ Ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΘ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Διότι ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καὶ εἶναι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· διότι ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· διότι ἡ ΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε· ἄρα τὸ ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΘ. Καὶ εἶναι ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (θεώρ. 14). Ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΓΘ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ ΑΗ πρὸς τὴν Ζ· ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

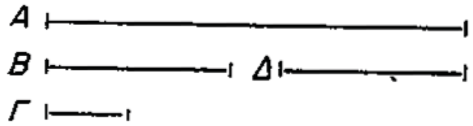
17.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (ἀναγραφόμενον) τετράγωνον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον.

Ἂς κεῖται ἡ Δ ἴση πρὸς τὴν Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἔστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

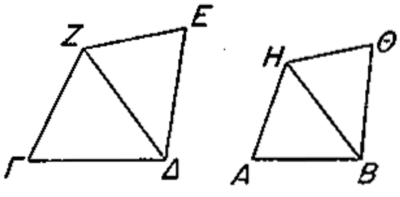
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ. δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἄρα εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενον ὀρθογώνιον (θεώρ. 16). Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β,Δ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον)· διότι ἡ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον)· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Διότι ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β (τετράγωνον), ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ὀρθογώνιον· διότι ἡ Β εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι (θεώρ. 16). Ἄρα εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εἶναι δὲ ἡ Β ἴση πρὸς τὴν Δ· ὡς ἄρα εἶναι ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον· καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης τετράγωνον, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγραφῇ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· πρέπει ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀναγραφῇ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΓΕ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον.

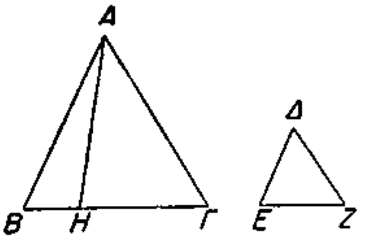
Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Α,Β πρὸς μὲν τὴν γωνίαν Γ ἴση ἡ ΗΑΒ, πρὸς δὲ τὴν ΓΔΖ ἴση ἡ ΑΒΗ (Ι. 23). Ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΓΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΓΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΑΒ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 4). Πάλιν, ἂς κατασκευασθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς τῶν Β,Η πρὸς μὲν τὴν *σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.*

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνά-

γωνίαν ΔΖΕ ἴση ἡ ΒΗΘ, πρὸς δὲ τὴν ΖΔΕ ἴση ἡ ΗΒΘ (I. 23). Ἄρα ἡ λοιπὴ γωνία ἡ παρὰ τὸ Ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Θ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΔΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΒΘ· ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ (θεώρ. 4). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἀκόμη ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία ΓΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ, ἡ δὲ ΔΖΕ πρὸς τὴν ΒΗΘ, ἄρα ὅλη ἡ ΓΖΕ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΗΘ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΘ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ μὲν παρὰ τὸ Γ ἴση πρὸς τὴν παρὰ τὸ Α, ἡ δὲ παρὰ τὸ Ε πρὸς τὴν παρὰ τὸ Θ. Ἄρα τὸ ΑΘ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΓΕ· καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους· ἄρα τὸ εὐθύγραμμον ΑΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΓΕ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ ἀνεγράφη ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΑΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

19.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν παρὰ τὸ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Διότι ἂς ληφθῇ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογος ἡ ΒΗ (θεώρ. 11), ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ (V. 16). Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως εἶναι ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι. Τὰ τρίγωνα δὲ τὰ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀντιστρόφως ἀναλόγους, εἶναι ἴσα (θεώρ. 15). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ λογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

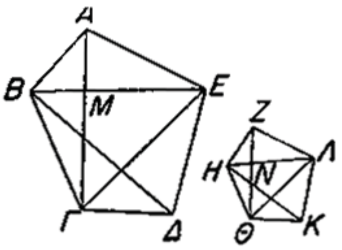
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον [ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γω-εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ἔχει διπλάσιον λόγον ἢ ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν (V. ὁρισ. 9), ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ ἔχει διπλάσιον λόγον ἢ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ (δηλ. $ΒΓ : ΒΗ = ΒΓ^2 : ΕΖ^2$). Ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ (θεώρ. 1)· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΗ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ τρίγωνον ΑΒΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Τὰ ὅμοια ἄρα τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὅμοιον σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς δευτέρας [ἐπειδὴ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ, εἶναι ἴση ἡ γωνία ΒΑΕ πρὸς τὴν γωνίαν ΗΖΛ (ὁρισμ. 1). Καὶ εἶναι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ (ὁρισμ. 1). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ (θεώρ. 6)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοιον (θεώρ. 4 καὶ ὁρ. 1)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση *νία τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.*

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ τρίγωνον, οὕτως πρὸς τὴν γωνίαν ΖΗΛ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ γωνία ἡ ΑΒΓ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΖΗΘ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· ἄρα ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ΕΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΗΘ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΖΗΛ εἶναι ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλ' ὅμως καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἄρα δι' ἴσου (V. 22 καὶ ὁρ. 17) εἶναι ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΕΒΓ, ΛΗΘ εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ (θεώρ. 6)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΕΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ (θεώρ. 4 καὶ ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΘΚ. Ἄρα τὰ ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ διῃρέθησαν καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, τουτέστιν ὅτι εἶναι ἀνάλογα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς, τουτέστι τῆς ΑΒ πρὸς τῆς ΖΗ.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗΘ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΘ (θεώρ. 6)· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖΘ, ἡ δὲ ΒΓΑ πρὸς τὴν ΗΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖΝ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒΜ ἴση πρὸς τὴν ΖΗΝ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΖΝΗ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΜ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΝΘ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ (θεώρ. 4)· ὥστε καὶ δι' ἴσου εἶναι ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὸ ΝΘ (V. 22 καὶ ὁρ. 17). Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΜ πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· διότι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις. Καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V.12)· ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΖΗΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ. Καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΖΗΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΛΘ *τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.*

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α αʹ.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Π ό ρ ι σ μ α βʹ.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον].

καʹ.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστιν ὅμοιον.

(V. 16). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ, οὕτως εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἀκόμη τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V. 12). εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΖΗ· διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχουσι λόγον οἷον τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θεώρ. 19). Καὶ τὸ πολύγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΖΗ.

Ἄρα τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται καὶ εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα α'.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων, ὅτι ἔχουσι λόγον οἷον τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθ' ὅλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα β'.

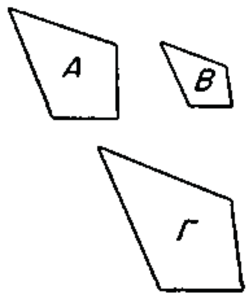
Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ,ΖΗ λάβωμεν τρίτην ἀνάλογον τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς, τουτέστι τῆς ΑΒ πρὸς τῆς ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθ' ὅλου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον].

21.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον ὅμοια εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια.

Διότι ἔστω ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων Α, Β ὅμοιον πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Β.

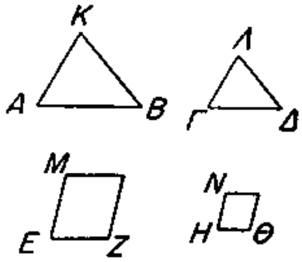
Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



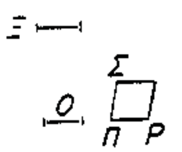
κβ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως [καὶ] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Γ, εἶναι ἰσογώνιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους (ὁρ. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Γ, εἶναι ἰσογώνιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους (ὁρ. 1). Ἄρα ἕκαστον τῶν Α, Β εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ Γ καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους [ὥστε καὶ τὸ Α εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ Β καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους]. Ἄρα τὸ Α εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Διότι ἂς ληφθῇ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογος ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογος ἡ Ο (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι᾽ ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο (V. 22 καὶ ὁρ. 17)[1]. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως καὶ τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ (θεώρ. 19 πόρ.)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ (θεώρ. 12), καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΠΡ πρὸς ἕκαστον τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ (θεώρ. 18 καὶ 19).

1. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ: ΓΔ=ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ: ΓΔ=ΓΔ:Ξ, ΕΖ:ΗΘ=ΗΘ:Ο, ἤτοι ΑΒ: ΓΔ=ΕΖ:ΗΘ, ΓΔ:Ξ = ΗΘ:Ο καὶ δι᾽ ἴσου (λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ εἶναι ΑΒ:Ξ = ΕΖ:Ο.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ· ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λ ῆ μ μ α]

[Ὅτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, δείξομεν οὕτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσιν, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ. ἀλλὰ καὶ ἴσον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

κγʹ.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα

'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῆ ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ (πρῶτον μέρος θεωρήμ.). Ἔχει δὲ ληφθῆ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. Τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΝΘ, ΣΡ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα εἶναι ἴσον τὸ ΝΘ πρὸς τὸν ΣΡ (V. 9). Εἶναι δὲ πρὸς αὐτὸ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΠΡ[1]. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΗΘ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

'Εὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα θὰ εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λ ῆ μ μ α]

[Ὅτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω, ὅτι ἡ ΡΠ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΗ.

Διότι ἐὰν εἶναι ἄνισοι, ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἄρα καὶ ἡ ΠΣ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΝ. 'Αλλὰ εἶναι καὶ ἴσον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν εἶναι ἄνισος ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΗΘ· ἄρα εἶναι ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

23.

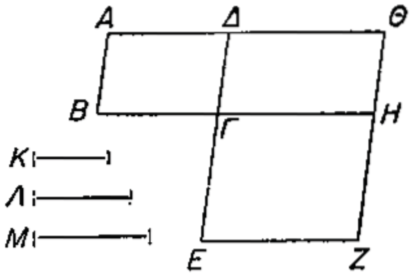
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι μεταξύ των λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἔχοντα τὴν γωνίαν ΒΓΔ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Διότι ἂς ληφθῆ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ μὲ τὴν ΓΗ· ἄρα εἶναι ἐπ' εὐθείας

1. Κατὰ τὸ θεώρ. 20 εἶναι ΝΘ:ΣΡ = $(\text{ΗΘ})^2$: $(\text{ΠΡ})^2$. 'Αφοῦ δὲ ΝΘ = ΣΡ, ἕπεται $(\text{ΗΘ})^2 = (\text{ΠΡ})^2$. Καὶ συνεπῶς ΗΘ = ΠΡ.

ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ



ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

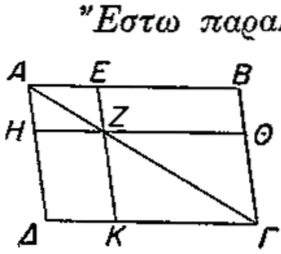
Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ



δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, καὶ ἡ ΔΓ μὲ τὴν ΓΕ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ Κ καὶ ἂς γίνῃ ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ λόγοι ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν πλευρῶν, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς Κ πρὸς τὴν Μ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου τῆς Κ πρὸς τὴν Λ καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς Λ πρὸς τὴν Μ (ἴδε ἐπεξήγ.)· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ (θεώρ. 1), ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 1), ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΖ, δι' ἴσου ἄρα (V. 22 καὶ ἐπεξήγ.) εἶναι ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ἄρα καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα ἔχουσι μεταξύ των λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διαγώνιον ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων ΕΗ, ΘΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓΔ καὶ μεταξύ των.

Διότι, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΕΖ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ (θεώρ. 2). Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἡ ΖΗ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ, εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ (θεώρ. 2). Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕ-

οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΑ· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε′.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΑ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ τως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ (V. 18), καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ (V. 16). Τῶν παραλληλογράμμων ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ΒΑΔ εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, εἶναι ἴση ἡ μὲν γωνία ΑΖΗ πρὸς τὴν ΔΓΑ (I. 29)· καὶ ἡ γωνία ΔΑΓ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ εἶναι κοινή· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΖ (I. 32)· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΖΕ καὶ ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ. Ἄρα εἶναι ἀνάλογοι ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἀκόμη ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι᾽ ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ (V. 22 καὶ ὁρισ. 17). Τῶν παραλληλογράμμων ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ (ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιον καὶ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΚΘ· ἄρα ἕκαστον τῶν παραλληλογράμμων ΕΗ, ΘΚ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον ὅμοια εἶναι καὶ μεταξύ των ὅμοια (θεώρ. 21)· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ.

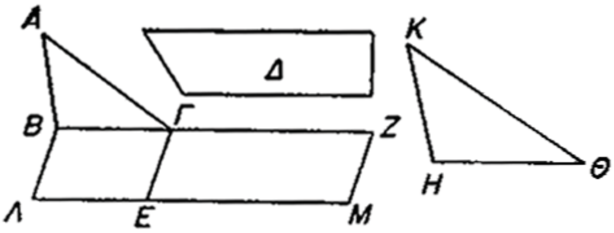
Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς τὸ ὅλον καὶ μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον καὶ τὸ αὐτὸ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς ἄλλο δοθέν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον, τὸ ΑΒΓ, τὸ ἴσον δέ, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κατασκευασθῇ, τὸ Δ· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ πρὸς μὲν τὸ ΑΒΓ ὅμοιον, πρὸς δὲ τὸ Δ τὸ αὐτὸ νὰ εἶναι ἴσον.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (I. 44), παρὰ δὲ τὴν ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ Δ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΖΓΕ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.



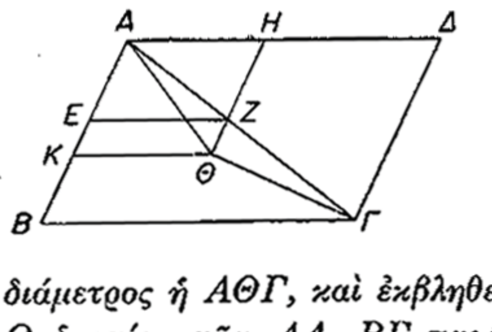
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ

ΓΒΛ (I. 45). Ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι ἡ μὲν ΒΓ καὶ ἡ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ καὶ ἡ ΕΜ. Καὶ ἂς ληφθῇ τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογος ἡ ΗΘ (θεώρ. 13), καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΗΘ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΒΓ τὸ ΚΗΘ (θεώρ. 18).

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (θεώρ. 19, πόρ.), ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΘ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ (θεώρ. 1). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΘ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα (θεώρ. 16) ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΚΗΘ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΚΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Δ· ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Δ. Εἶναι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ ὅμοιον.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓ κατεσκευάσθη ὅμοιον τὸ ΚΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ἄλλο τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

26.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὅλον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτό, τοῦτο εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτὸ τὴν ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ μὲ τὸ ΑΖ.

Διότι ἂς μὴ εἶναι, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΑΘΓ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΗΖ, ἂς διαχθῇ μέχρι τοῦ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΒΓ (I. 30 καὶ 31).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ΚΗ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Εἶναι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ (ὁρ. 1)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ

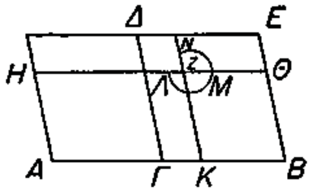
ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὔκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΔΒΓ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω



παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΒ παραλληλογράμμῳ· περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλλη-

πρὸς τὴν ΑΕ. Ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΑΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ (V. 9), ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα δὲν εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον τὸ ΑΒΓΔ μὲ τὸ ΑΖ· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὅλον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτό, τοῦτο εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον μὲ τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐκ πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐλλεῖπον.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΔΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν παραβαλλομένων παρὰ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ΔΒ, μέγιστον εἶναι τὸ ΑΔ. Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΖΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΒ, εἶναι ταῦτα περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον (θεώρ. 26). Ἄς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΔΒ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ προεκταθῇ δηλ. ἡ ΗΖ μέχρι τοῦ Θ καὶ ἡ ΚΖ μέχρι τῆς ΔΕ).

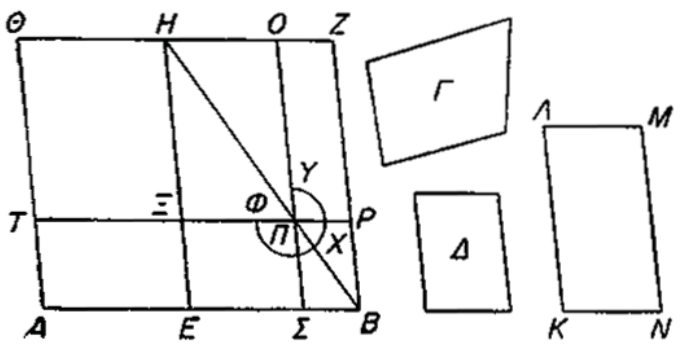
Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΓΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΖΕ (Ι. 43), κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ἄρα ὅλον τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΚΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΗ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ (θεώρ. 1). Καὶ τὸ ΗΓ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΚ. Ἄς προστεθῇ εἰς αὐτὰ τὸ κοινὸν ΓΖ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΛΜΖ· ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΔΒ, τουτέστι τὸ ΑΔ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖ.

Ἐκ πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡσείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΗΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζον ἔστω τὸ ΘΕ τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόραλληλογράμμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· πρέπει δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον] νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου πρὸς τὸ ἐλλεῖπον [δηλ. τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον].

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ, τὸ Γ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ὁμοίου ὄντος πρὸς τὸ ἐλλεῖπον, πρὸς τὸ ὁποῖον δὲ πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον, τὸ Δ· πρέπει παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον (παραβαλλόμενον) νὰ ἐλλείπῃ παραλληλόγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, τὸ ΕΒΖΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ (θεώρ. 27).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΛΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός· διότι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἔχει παραβληθῇ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι ἴσον, ἔστω τὸ ΘΕ μεγαλύτερον τοῦ Γ. Εἶναι δὲ τὸ ΘΕ ἴσον πρὸς τὸ ΗΒ· ἄρα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ. Ὅσον τώρα μεγαλύτερον εἶναι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, πρὸς ταύτην τὴν ὑπεροχὴν ἴσον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ ΚΛΜΝ (θεώρ. 25). Ἀλλὰ τὸ Δ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ (θεώρ. 21.). Ἔστω λοιπὸν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ πρὸς τὴν ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ πρὸς τὴν ΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ Γ, ΚΜ, ἄρα τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΚΜ· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, πρὸς δὲ τὴν ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΞΗΟΠ· ἄρα τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ]. Καὶ τὸ ΗΠ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ (θεώρ. 21)· ἄρα τὸ ΗΠ *γραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι [τὸ ΗΠ] τῷ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.*

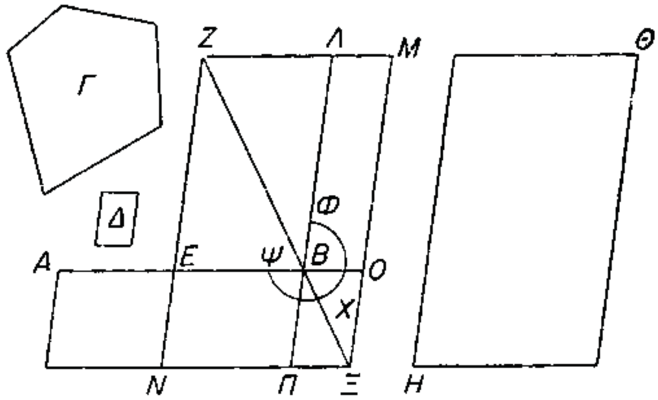
Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΧΦ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ' ὁ ΦΧΥ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ Γ τῷ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κθʹ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ τὸ ΗΒ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον (θεώρ. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΗΠΒ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ ἀχθῶσι δηλ. ἐκ τοῦ Π αἱ ΤΡ, ΠΣ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ, ΘΖ καὶ ΑΘ, ΗΕ).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ Γ, ΚΜ, τῶν ὁποίων τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΜ, ἕπεται ὅτι ὁ λοιπὸς γνώμων ὁ ΥΧΦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ λοιπόν, τὸ Γ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΟΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΞΣ (Ι. 43), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΠΒ· ἄρα ὅλον τὸ ΟΒ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΞΒ. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΤΕ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΒ (θεώρ. 1)· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΟΒ. Ἂς προστεθῇ κοινὸν τὸ ΞΣ· ἄρα ὅλον τὸ ΤΣ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸν γνώμονα ΦΧΥ. Ἀλλ' ὁ γνώμων ΦΧΥ ἐδείχθη ἴσος πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΣΤ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα παραλληλόγραμμον τὸ ΠΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ [ἐπειδὴ τὸ ΠΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΠ]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

29.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον νὰ παραβληθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον, τὸ Γ, τὸ ὅμοιον δέ, πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὑπερβάλλῃ, τὸ Δ· πρέπει παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ παραβληθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Γ, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ ὅμοιον πρὸς τὸ Δ καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ πρὸς τὸ ἄθροισμα μὲν τῶν ΒΖ, Γ ἴσον, τὸ αὐτὸ δὲ νὰ εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, τὸ ΗΘ (θεώρ. 25). Ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ πρὸς τὴν ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ πρὸς τὴν ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΖΒ, ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς μὲν τὴν ΚΘ ἔστω ἴση ἡ ΖΛΜ, πρὸς δὲ τὴν ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ· ἄρα τὸ ΜΝ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ· ἄρα καὶ τὸ ΜΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ (θεώρ. 21)· ἄρα τὸ ΕΛ καὶ τὸ ΜΝ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον *καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.*

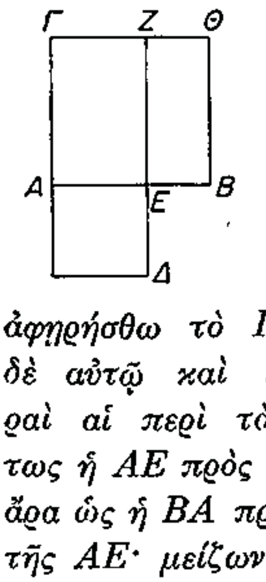
Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον τὸ ΟΠ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(θεώρ. 26). Ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΖΞ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (νὰ ἀχθῶσι δηλ. ἐκ τοῦ Β παράλληλοι πρὸς τὰς ΖΛ, ΖΕ).

Ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ, ἄρα καὶ τὸ ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΕΛ, Γ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΕΛ· ἄρα καὶ ὁ λοιπὸς γνώμων ΨΧΦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ Γ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, εἶναι καὶ τὸ ΑΝ ἴσον πρὸς τὸ ΝΒ, τουτέστι πρὸς τὸ ΛΟ (I. 43). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα (δηλ. τὸ ΑΝ καὶ καὶ ΛΟ) τὸ κοινὸν ΕΞ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΦΧΨ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΦΧΨ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Γ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΞ, τὸ ὁποῖον ὑπερβάλλει κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα τὸ ΠΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ, ἐπειδὴ καὶ πρὸς τὸ ΕΛ εἶναι ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

30.

Ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον.

Ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΓ ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα, τὸ ΑΔ, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΒΓ (θεώρ. 29).

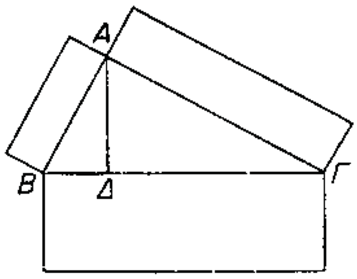
Εἶναι δὲ τὸ ΒΓ τετράγωνον· ἄρα καὶ τὸ ΑΔ εἶναι τετράγωνον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφοτέρων τὸ κοινὸν ΓΕ· ἄρα τὸ λοιπὸν τὸ ΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΑΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἰσογώνιον πρὸς αὐτό· ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν ΒΖ, ΑΔ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (θεώρ. 14)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΖΕ πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΑΕ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· ἄρα καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΒ (V. 14).

Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΒ ἐτμήθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον κατὰ τὸ Ε καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λαʹ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία ὑποτείνει τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ σχήματα τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφόμενον σχῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα σχήματα.

Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἤχθη ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ, τὰ παρὰ τὴν κάθετον τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ μεταξύ των καὶ πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ (θεώρ. 8). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΔ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (θεώρ. 19, πόρ.). Ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ[1]. Ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ σχῆμα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν σχημάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὁμοίων καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένων[2]. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ· ἄρα εἶναι ἴσον καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα σχήματα.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἄρα τρίγωνα τὸ σχῆμα τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία ὑποτείνει τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ σχήματα τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

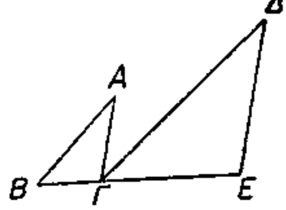
1. Διότι εἶναι $ΒΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΔΓ$ καὶ συνεπῶς $ΒΓ : ΔΓ =$ σχ. $ΒΓ$: σχ. $ΑΓ$.

2. Ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως ἀναγραφόμενα ὁμοίως σχήματα α,β,γ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα ἀνωτέρω εἶναι $\frac{ΒΓ}{ΒΔ}=\frac{α}{γ}$, $\frac{ΒΓ}{ΓΔ}=\frac{α}{β}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν $\frac{ΒΓ}{α}=\frac{ΒΔ}{γ}$, $\frac{ΒΓ}{α}=\frac{ΓΔ}{β}$ καὶ συνεπῶς $\frac{ΒΓ}{α}=\frac{ΓΔ}{β}=\frac{ΒΔ}{γ}$. Ἐκ τούτων, $\frac{ΓΔ}{ΒΔ}=\frac{β}{γ}$ καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΓΔ+ΒΔ}{ΒΔ}=\frac{β+γ}{γ}$. Ἐκ ταύτης $\frac{ΓΔ+ΒΔ}{β+γ}=\frac{ΒΔ}{γ}$ ὅπερ $=\frac{ΒΓ}{α}$. Ἐκ δὲ τῆς σχέσεως $\frac{ΓΔ+ΒΔ}{β+γ}=\frac{ΒΓ}{α}$ ἔχομεν $\frac{ΒΓ}{ΓΔ+ΒΔ}=\frac{α}{β+γ}$.

λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΓ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐ-

32.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν τριγώνων θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ (συντεθειμένα κατὰ τὴν γωνίαν Γ), ἔχοντα ἀναλόγους τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΔΓ, ΔΕ, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ πρὸς τὴν ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΒΑΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (Ι. 29). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΔ. Ὥστε καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἔχοντα μίαν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Α ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Δ, τὰς δὲ πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΕ (θεώρ. 6)· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο τὰς ΑΒΓ, ΒΑΓ. Ἂς προστεθῇ ἡ κοινὴ ἡ ΑΓΒ· ἄρα αἱ ΑΓΕ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ. Ἀλλ' αἱ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα καὶ αἱ ΑΓΕ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς. Ὅμως ἔκ τινος εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη σχηματίζουσι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΑΓΕ, ΑΓΒ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Ι. 14).

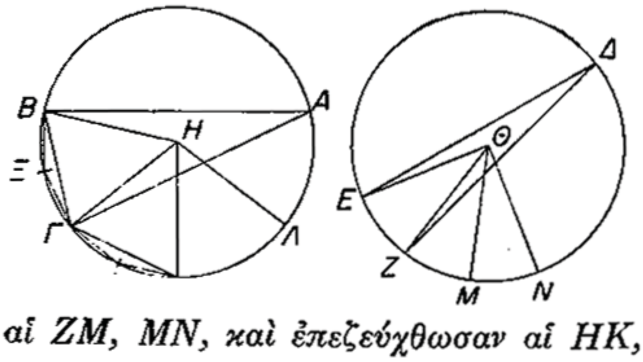
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τῶν τριγώνων θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουσιν, εἴτε εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐπίκεντροι μὲν γωνίαι αὐτῶν

τῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.



Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΝΘΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλʼ ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφʼ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἐκ τῶν κέντρων Η, Θ ἔστωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ τόξον ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ καὶ ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἃς ληφθῶσιν ἐν συνεχείᾳ τοῦ τόξου ΒΓ ὁσαδήποτε τόξα ἴσα πρὸς τοῦτο τὰ ΓΚ, ΚΛ, τοῦ τόξου δὲ ΕΖ ἐν συνεχείᾳ ὁσαδήποτε τόξα ἴσα πρὸς τοῦτο τὰ ΖΜ, ΜΝ καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ τόξα ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ εἶναι μεταξύ των ἴσα, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ (III. 27)· ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ τόξον ΒΛ τοῦ τόξου ΒΓ, τοσαπλασία εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ τῆς ΒΗΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ τόξον ΝΕ τοῦ τόξου ΕΖ, τοσαπλασία εἶναι καὶ ἡ γωνία ΝΘΕ τῆς ΕΘΖ. Ἐὰν ἄρα τὸ τόξον ΒΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΝ, καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΝ, καὶ ἐὰν τὸ τόξον ΒΛ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΕΝ, καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΘΝ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικροτέρα. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν τόξα τὰ ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνίαι αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐλήφθησαν τοῦ μὲν τόξου ΒΓ καὶ τῆς γωνίας ΒΗΓ ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ τὸ τόξον ΒΛ καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ, τοῦ δὲ τόξου ΕΖ καὶ τῆς γωνίας ΕΘΖ καὶ τὸ τόξον ΕΝ καὶ ἡ γωνία ΕΘΝ. Καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι, ἐὰν τὸ τόξον ΒΛ ὑπερέχῃ τοῦ τόξου ΕΝ, ὑπερέχει καὶ ἡ γωνία ΒΗΛ τῆς γωνίας ΕΘΝ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴση, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικροτέρα. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ, οὕτως ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ (V. ὁρ. 5). Ἀλλ' ὡς ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ, οὕτως ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ (V. 15)· διότι ἑκάστη (τῶν ΒΗΓ, ΕΘΖ) εἶναι διπλασία ἑκάστης (τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ) (III. 20). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τόξον ΒΓ πρὸς τὸ τόξον ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν ΕΘΖ καὶ ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Ἄρα εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τόξα, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουσιν, εἴτε εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ὅροι.

αʹ. Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

βʹ. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γʹ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δʹ. Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

εʹ. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ϛʹ. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζʹ. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

ηʹ. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

θʹ. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

[ιʹ. Περισσάκις ἄρτιός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν].

ιαʹ. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ιβʹ. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

ιγʹ. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιδʹ. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιεʹ. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιϛʹ. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

ιζʹ. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιηʹ. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα,

Βιβλίον VII.

Ὁρισμοί.

1. Μονὰς εἶναι καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

2. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

3. Μέρος εἶναι ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ μικρότερος τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸν μεγαλύτερον.

4. Μέρη δὲ, ὅταν δὲν καταμετρῇ.

5. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

6. Ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος διὰ δύο.

7. Περιττὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος διὰ δύο ἢ ὁ διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ κατὰ μονάδα.

8. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

9. Ἀρτιάκις δὲ περιττὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περιττὸν ἀριθμόν.

[10. Περισσάκις ἄρτιος εἶναι ὁ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν].

11. Περισσάκις δὲ περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περιττὸν ἀριθμόν.

12. Πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετρούμενος μόνον ὑπὸ τῆς μονάδος.

13. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μὲ μόνην τὴν μονάδα ὡς κοινὸν μέτρον μετρούμενοι.

14. Σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετρούμενος ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος.

15. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μὲ ἀριθμόν τινα ὡς κοινὸν μέτρον μετρούμενοι.

16. Ἀριθμὸς λέγεται, ὅτι πολλαπλασιάζει ἀριθμόν, ὅταν, ὅσαι μονάδες ὑπάρχουσιν εἰς αὐτόν, τόσας φορὰς συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ προκύψῃ ἀριθμός τις.

17. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους δώσωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ προκύπτων καλεῖται ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

18. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους δώ-

ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιθʹ. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κʹ. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

καʹ. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

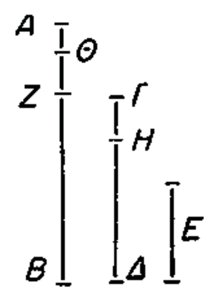
κβʹ. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγʹ. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

αʹ.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ [ἀνίσων] ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τουτέστιν ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΘ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΖ μετρεῖ, καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΒΖ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ προκύπτων καλεῖται στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

19. Τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

20. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμὸς περιεχόμενος.

21. Ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

22. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους.

23. Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη αὐτοῦ.

1.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι ἀριθμοί, ἀνθυφαιρῆται δὲ πάντοτε ὁ μικρότερος ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν ὁ λειπόμενος οὐδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἔστωσαν δύο ἄνισοι ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ὅτι ἀνθυφαιρουμένου[1] πάντοτε τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ὁ λειπόμενος οὐδέποτε καταμετρεῖ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τουτέστιν ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ μόνον ἡ μονάς.

Διότι, ἐὰν οἱ ΑΒ, ΓΔ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρεῖ, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ μετρῶν τὸν ΒΖ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ μετρῶν τὸν ΔΗ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ μετρῶν τὸν ΖΘ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ, ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΖ, ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΒΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΑΖ. Ὁ δὲ ΑΖ μετρεῖ τὸν ΔΗ· ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΔΗ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΓΗ. Ὁ δὲ ΓΗ μετρεῖ τὸν ΖΘ· ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΖΘ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, τὴν μονάδα ΑΘ, ἐν ᾧ εἶναι ἀριθμὸς (ὁρ. 2)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν θὰ μετρήσῃ ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ· ἄρα οἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

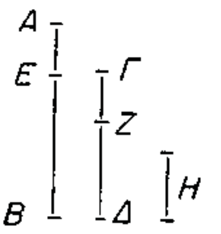
1. Ἡ φράσις «ἀνθυφαιρουμένου κλπ.» ἔχει τὴν ἑξῆς ἔννοιαν συναγομένην ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος: διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἔστω ὑπόλοιπόν τι. Διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην καὶ ἔστω ἄλλο ὑπόλοιπον. Διὰ τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον κ.ο.κ.

β'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ,μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.



Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

2.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον (ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης).

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. Πρέπει τῶν ΑΒ, ΓΔ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ ΓΔ μετρῇ τὸν ΑΒ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ἄρα ὁ ΓΔ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΓΔ, ΑΒ. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον· διότι οὐδεὶς μεγαλύτερος τοῦ ΓΔ θὰ μετρήσῃ τὸν ΓΔ.

Ἐὰν δὲ δὲν μετρῇ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου πάντοτε τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν ἀριθμῶν ΑΒ, ΓΔ θὰ ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις, ὁ ὁποῖος θὰ μετρήσῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Διότι μονὰς δὲν θὰ ὑπολειφθῇ· ἐὰν δὲ ὑπολειφθῇ μονάς, οἱ ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ δὲν ἐλήφθη εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα θὰ ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις, ὁ ὁποῖος θὰ μετρήσῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ μετρῶν τὸν ΒΕ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ μετρῶν τὸν ΔΖ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ ἂς μετρῇ (ἀκριβῶς) τὸν ΑΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ΓΖ μετρεῖ τὸν ΑΕ, ὁ δὲ ΑΕ μετρεῖ τὸν ΔΖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν ΔΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ ὅλον τὸν ΓΔ. Ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΕ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα μετρεῖ τὸν ΒΕ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΓΔ. Ὁ ΓΖ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι ἐὰν ὁ ΓΖ δὲν εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΓΔ, ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΕ, καὶ ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν ΒΕ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΑΕ. Ὁ δὲ ΑΕ μετρεῖ τὸν ΔΖ· καὶ ὁ Η ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν ΔΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ· ἄρα ὁ ΓΖ εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

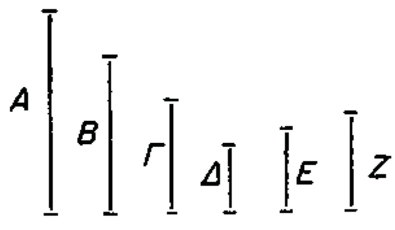
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς μετρῇ δύο ἀριθμούς, θὰ μετρῇ καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.



Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸν Δ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α,Β,Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α,Β μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Α,Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α,Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Δ, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α,Β,Γ.

Διότι ἂς ληφθῇ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 2)· ὁ Δ ἢ μετρεῖ τὸν Γ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Πρῶτον ἂς τὸν μετρῇ· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ· λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Δ. Ἂς τοὺς μετρήσῃ, καὶ ἔστω ὁ Ε. Ἐπειδὴ λοιπόν ὁ Ε μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β (πόρ. 2ου θ.)· τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα δὲν θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ.

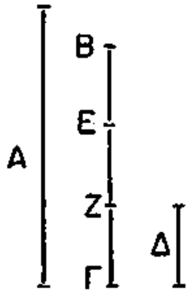
Ἔστω τώρα, ὅτι ὁ Δ δὲν μετρεῖ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρήσῃ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ὁ μετρῶν ὅμως τοὺς Α, Β, Γ θὰ μετρῇ καὶ τοὺς Α, Β καὶ θὰ μετρῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β τὸν Δ (πόρ. 2ου θεωρ.)· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ἄρα τοὺς Δ, Γ θὰ μετρήσῃ ἀριθμός τις· ἄρα οἱ Δ, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ὁ Ε (θεώρ. 2). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ὁ δὲ Δ μετρεῖ τοὺς Α, Β, καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ὁ Ε ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Ε τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Ε. Ἂς τοὺς μετρήσῃ, καὶ ἔστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, θὰ μετρῇ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β (πόρ. 2ου θεωρ.). Τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Δ· ἄρα ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Δ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τοὺς Δ, Γ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Δ, Γ. Τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Δ, Γ εἶναι ὁ Ε· ἄρα ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Ε δὲν θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ· ὁ Ε ἄρα εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Πᾶς μικρότερος ἀριθμὸς παντὸς μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἢ εἶναι μέρος ἢ εἶναι μέρη.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, ΒΓ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Οἱ Α, ΒΓ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. διαιρεθέντος δὴ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τι τοῦ Α· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.



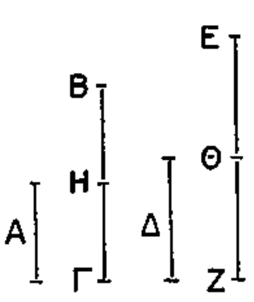
Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὴ ΒΓ τὸν Α ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ ΒΓ τον Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α· ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκάστῳ τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α [ἀριθμοῦ] τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ.



Ἐπεὶ γάρ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ, καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ τοῖς Α, Δ. ὅσοι ἄρα [εἰσὶν] ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, ΒΓ καὶ ἔστω μικρότερος ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ ΒΓ ἢ εἶναι μέρος τοῦ Α ἢ μέρη.

Διότι οἱ Α, ΒΓ ἢ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν ὁ ΒΓ διαιρεθῇ εἰς τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἑκάστη μονὰς τοῦ ΒΓ θὰ εἶναι μέρος τι τοῦ Α· ὥστε ὁ ΒΓ εἶναι μέρη τοῦ Α.

Ἂς μὴ εἶναι τώρα οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε ὁ ΒΓ ἢ μετρεῖ τὸν Α ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ ΒΓ μετρῇ τὸν Α, ὁ ΒΓ εἶναι μέρος τοῦ Α. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ληφθῇ τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 2) καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ΒΓ εἰς τοὺς πρὸς τὸν Δ ἴσους τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, ὁ Δ εἶναι μέρος τοῦ Α· εἶναι δὲ ὁ Δ ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ εἶναι μέρος τοῦ Α· ὥστε ὁ ΒΓ εἶναι μέρη τοῦ Α.

Πᾶς ἄρα μικρότερος ἀριθμὸς παντὸς μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἢ εἶναι μέρος ἢ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμα (τῶν μικροτέρων) θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἀθροίσματος (τῶν μεγαλυτέρων), τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

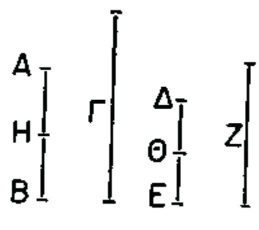
Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ΒΓ καὶ ἄλλος ὁ Δ ἄλλου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Δ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΒΓ, ΕΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος τοῦ ΒΓ εἶναι ὁ Α, τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΕΖ εἶναι ὁ Δ, ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ εἶναι εἰς τὸν ΒΓ ἴσοι πρὸς τὸν Α, ἄλλοι τόσοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Α τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν ΒΗ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ ΕΘ πρὸς τὸν Δ, ἄρα καὶ ΒΗ+ΕΘ εἶναι ἴσον πρὸς Α+Δ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ΗΓ+ΘΖ εἶναι ἴσον πρὸς Α+Δ. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Α εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, ἄλλοι τόσοι ἴσοι πρὸς τὸ ἄθροισμα Α+Δ εἶναι καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα ΒΓ+ΕΖ. Ὁσαπλάσιος ἄρα εἶναι ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΒΓ+ΕΖ τοῦ ἀθροίσματος Α+Δ. Ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα Α+Δ τοῦ ἀθροίσματος ΒΓ+ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

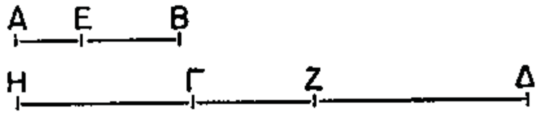


Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.



Ὃ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τοῦ ΓΔ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ

6.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμα (τῶν μικροτέρων) θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἀθροίσματος (τῶν μεγαλυτέρων), τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρη ἀριθμοῦ τοῦ Γ καὶ ἄλλος ὁ ΔΕ ἄλλου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Γ, Ζ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅσα μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μέρη τοῦ Γ εἶναι εἰς τὸν ΑΒ, τόσα μέρη τοῦ Ζ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΔΕ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ Ζ τὰ ΔΘ, ΘΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΗ+ΔΘ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ (θεώρ. 5). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΒ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΒ+ΘΕ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ. Ὅσα μέρη ἄρα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΔΕ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ, ὅσον εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

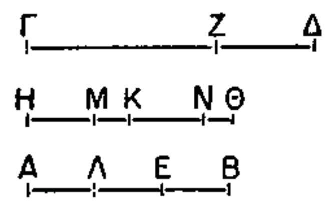
Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρος τοῦ ΓΔ, ὅσον εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς ΑΕ, τοῦ ἀφαιρεθέντος ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὁ ΕΒ, τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ΖΔ, εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ, ὅ,τι μέρος ἄρα εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ (θεώρ. 5). Ὅ,τι δὲ μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐλήφθη καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τοῦ ΓΔ· ἄρα ὁ ΗΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ κοινὸς ὁ ΓΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν *τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος [ἐστί] καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

η'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΘΚ τοῦ ΕΛ. κείσθω τῷ ΕΛ ἴσος ὁ ΚΝ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὤν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, εἶναι δὲ ἴσος ὁ ΗΓ πρὸς τὸν ΖΔ, ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ, ὅσα εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Διότι ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς ΑΒ εἶναι τόσα μέρη τοῦ ΓΔ, ὅσα ὁ ἀφαιρεθεὶς ΑΕ τοῦ ἀφαιρεθέντος ΓΖ·λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ΗΘ ἴσος πρὸς τὸν ΑΒ. Ὅσα ἄρα μέρη εἶναι ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΔ τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΖ τὰ ΑΛ, ΛΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μεγαλύτερος δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, ἄρα καὶ ὁ ΗΚ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΑΛ. Ἂς ληφθῇ ὁ ΗΜ ἴσος πρὸς τὸν ΑΛ. Ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΜΚ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7). Πάλιν ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΛ τοῦ ΓΖ, εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, ἄρα καὶ ὁ ΘΚ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΕΛ. Ἂς ληφθῇ ὁ ΚΝ ἴσος πρὸς τὸν ΕΛ. Ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΝΘ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ὅλος ὁ ΚΘ εἶναι ὅλου τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7). Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΜΚ, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΜΚ + ΝΘ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ΔΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΓΔ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα ΜΚ + ΝΘ ἴσον πρὸς τὸν ΕΒ[1], ὁ δὲ ΘΗ ἴσος πρὸς τὸν ΒΑ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

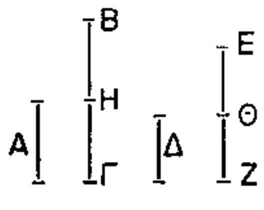
---

1. Διότι ΗΜ+ΜΚ+ΚΝ+ΝΘ=ΑΛ+ΛΕ+ΕΒ καὶ ΗΜ=ΑΛ, ΚΝ=ΕΛ.

θ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.



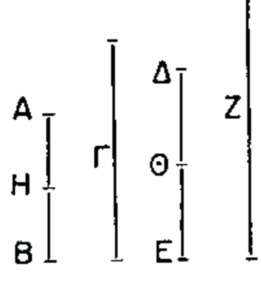
Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.



Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ

9.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἄλλου, καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη θὰ εἶναι καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ΒΓ, καὶ ἄλλος ὁ Δ ἄλλου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Α εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, τόσοι ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Α τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ προφανῶς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ΒΗ, ΗΓ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΘ, ΘΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ, ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ· ὥστε καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι τὸ ἄθροισμα τὸ ΒΓ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ΕΖ (θεώρ. 5 καὶ 6). Εἶναι δὲ ὁ μὲν ΒΗ ἴσος πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ ΕΘ πρὸς τὸν Δ· ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

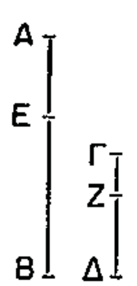
Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη ἄλλου, καὶ ἐναλλὰξ ὅσα μέρη ἢ μέρος εἶναι ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος θὰ εἶναι καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ Γ, καὶ ἄλλος ὁ ΔΕ ἄλλου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὅσα μέρη ἢ μέρος εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅσα μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μέρη τοῦ Γ εἶναι εἰς τὸν ΑΒ, τόσα μέρη τοῦ Ζ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΔΕ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ Ζ τὰ ΔΘ, ΘΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ [ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καί] ἃ [ἄρα] μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

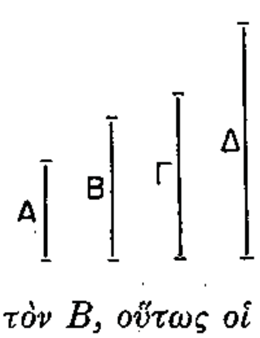


Ἔστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστιν, ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.



Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη. καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ (θεώρ. 9). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ· ὥστε καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ· καὶ ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ· ἀλλ' ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, καὶ ἄρα ὅσα μέρη εἶναι ἢ μέρος ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν εἶναι ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὅτι ὡς εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΖΔ εἶναι ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ, ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ (όρ. 21). Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7 καὶ 8). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ· (όρ. 21)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ὁ εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

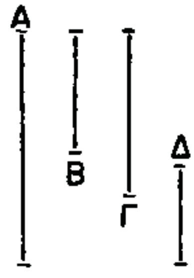
Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Β, Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Δ (όρ. 21). Καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Γ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Β, Δ θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅσα ὁ Α τοῦ Β (θεώρ. 6 καὶ 7). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Β, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

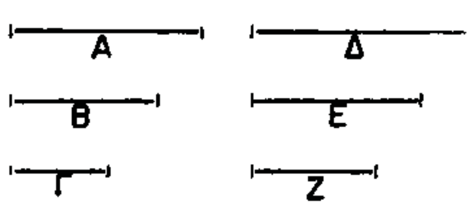


Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

13.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Δ (ὁρ. 21). Ἐναλλὰξ ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Β τοῦ Δ (θεώρ. 10). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι ἴσοι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτοὺς καὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

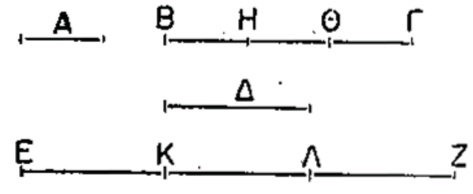
Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι ἴσοι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτοὺς λαμβανόμενοι δὲ ἀνὰ δύο ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 13). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ (θεώρ. 13). Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς μετρῇ ἰσάκις ἄλλον τινὰ ἀριθμόν, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς θὰ μετρήσῃ τὸν τρίτον ἀριθμὸν καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

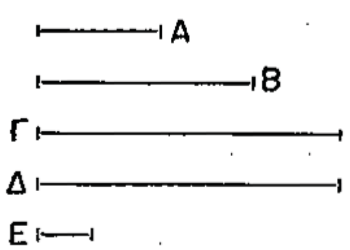


Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμόν, οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν ἐμέτρει καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι ἂς μετρῇ ἡ μονὰς Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς ὁ Δ ἂς μετρῇ ἰσάκις ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν ΒΓ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσαι ἄρα μονάδες εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, τόσοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς μονάδας αὐτοῦ τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ, ἄρα θὰ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΕΚ, οὕτως ἡ μονὰς ΗΘ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΚΛ καὶ ἡ μονὰς ΘΓ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΛΖ. Θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους (θεώρ. 12)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς ΒΗ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΕΚ, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μονὰς ΒΗ πρὸς τὴν μονάδα Α, ὁ δὲ ἀριθμὸς ΕΚ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Ἄρα ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι γινόμενα ἀριθμούς τινας, τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

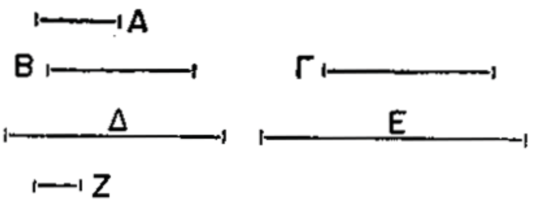
Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ γινόμενον τὸν Γ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ἂς δίδῃ γινόμενον τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει γινόμενον τὸν Γ, ἄρα ὁ Β μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἐναλλὰξ ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Γ (θεώρ. 15). Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει γινόμενον τὸν Δ, ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκις δὲ ἡ μονὰς Ε ἐμέτρει τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Γ (κατὰ τὰ ἀνωτέρω : ἐναλλὰξ....)· ἄρα ὁ Α μετρεῖ ἰσάκις ἕκαστον τῶν Γ, Δ. Ἄρα ὁ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

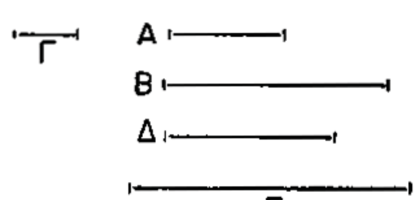


Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

17.

Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς δίδῃ γινόμενά τινα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες.

Διότι ὁ ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τοὺς Β, Γ ἃς δίδῃ τοὺς Δ, Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάζων τὸν Β δίδει τὸν Δ, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ζ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ζ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Δ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ζ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ (ὁρ. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ἡ μονὰς Ζ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Α, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 13)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα δίδωσι γινόμενα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν οἱ πολλαπλασιάσαντες.

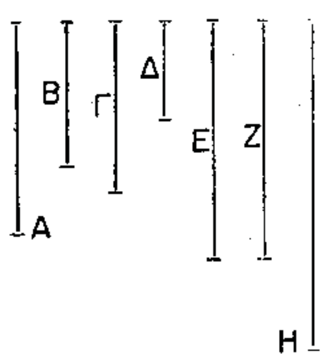
Διότι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα τὸν Γ ἃς δίδωσι τοὺς Δ, Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει τὸν Δ (θεώρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Ε. Ἀριθμὸς λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β δίδει τοὺς Δ, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 17)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ,τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον· καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς



τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.

Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Ὁ ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Ζ.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Η, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Ε, ὑπάρχει ἀριθμὸς ὁ Α , ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἔδωσε τοὺς Η, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Η, ἀλλὰ καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Ζ, ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, οἱ ὁποῖοι πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα τὸν Γ ἔδωσαν τοὺς Β, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ (θεώρ. 18). Ἀλλ' εἶναι καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὁ Η ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν Ε, Ζ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα εἶναι ἴσος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ (V. 9).

Ἔστω πάλιν ἴσος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

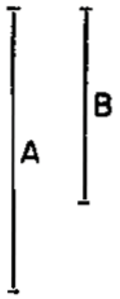
Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ ὁ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Ζ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17), ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (θεώρ. 18). Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

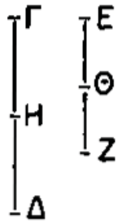
Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον.

Διότι ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Διότι ὁ ΓΔ δὲν εἶναι μέρη τοῦ Α. Ἐὰν ὅμως εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Β, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΓΔ τοῦ Α (θεώρ. 13, ὁρ. 21). Ὅσα ἄρα μέρη τοῦ Α εἶναι εἰς τὸν ΓΔ, τόσα μέρη τοῦ Β εἶναι καὶ εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ μέρη τοῦ Α τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ μέρη τοῦ Β τὰ ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΓΗ, ΗΔ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ



ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα. καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ Ε καὶ τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ΓΗ, ΗΔ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΘ, ΘΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ. Θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (θεώρ. 12). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς ΓΔ, ΕΖ, ἐν ᾧ εἶναι μικρότεροι αὐτῶν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλήφθησαν ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Ἄρα ὁ ΓΔ δὲν εἶναι μέρη τοῦ Α· ἄρα εἶναι μέρος (θεώρ. 4). Καὶ ὁ ΕΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ΓΔ τοῦ Α (θεώρ. 13, ὁρ. 21)· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

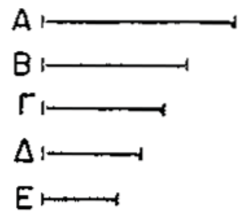
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχωσιν ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Α, Β εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β. Ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἄρα ἰσάκις ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Δ τὸν Β. Ὁσάκις λοιπὸν ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Καὶ ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁ Ε καὶ τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας (θεώρ. 15). Ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον (ὁρ. 13). Ἄρα δὲν ὑπάρχουσιν ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Α, Β εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τον αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



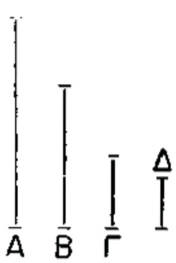
Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Α, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι καὶ οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Β ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Β, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε.

Ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (ὁρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Β. Ἀριθμὸς λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε δίδει τοὺς Α, Β· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (θεώρ. 17)· ἄρα οἱ Δ, Ε εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, ἐν ᾧ εἶναι μικρότεροι αὐτῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β ἀριθμός τις. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α ἂς μετρῇ ἀριθμός τις ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

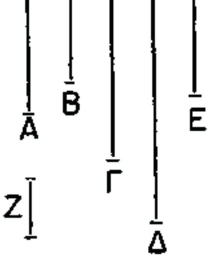
Διότι, ἐὰν οἱ Γ, Β δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς Γ, Β ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Δ. Ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ, ὁ δὲ Γ μετρεῖ τὸν Α, καὶ ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Α. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Γ, Β ἀριθμός τις. Οἱ Γ, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν εἶναι πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος.

Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

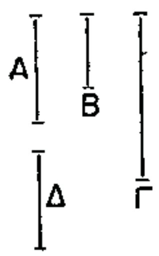
Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Δ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κεʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ, καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Δ, Α γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ. οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσιν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Διότι, ἐὰν οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς Γ, Δ ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸν δὲ Γ μετρεῖ ἀριθμός τις ὁ Ε, ἄρα οἱ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 23). Ὁσάκις λοιπὸν ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας (θεώρ. 15). Ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ (ὅρ. 15). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Δ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Β. Ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 19). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (θεώρ. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις, ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Β, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν μετρεῖ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Γ, Δ ἀριθμός τις. Οἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος.

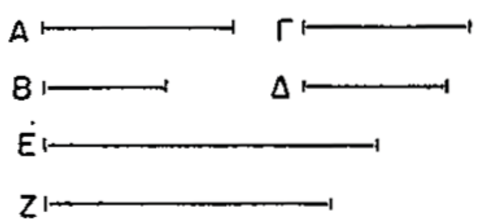
Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ Δ ἴσος πρὸς τὸν Α. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ ὁ Α ἴσος πρὸς τὸν Δ, ἄρα καὶ οἱ Δ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἕκαστος ἄρα τῶν Δ, Α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Β· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Δ, Α θὰ εἶναι πρὸς τὸν Β ἀριθμὸς πρῶτος (θεώρ. 24). Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Δ, Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς Γ. Οἱ Γ, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον, καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



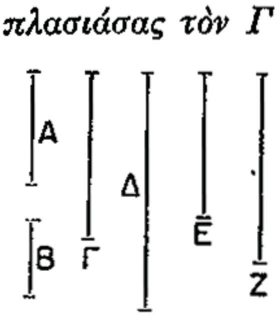
Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστιν. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γενόμενός ἐστιν ὁ Ζ. οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἵ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Γ, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β, Ε πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α, Γ ὁ Δ, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Ε ὁ Ζ. οἱ Δ, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν Γ, Δ πρῶτοι, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιασας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Ε , ὁ δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Α, Β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ, καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ (θεώρ. 24). Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ οἱ Ε, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἕκαστος ἄρα τῶν Γ, Δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Ε. Καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Γ, Δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Ε. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Γ,Δ εἶναι ὁ Ζ. Ἄρα οἱ Ε, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἕκαστος πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλασιάσαντες τὰ προκύψαντα γινόμενα δίδουσιν ἀριθμούς τινας, καὶ ἐκεῖνοι θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [καὶ πάντοτε περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

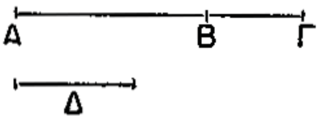
Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Γ, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Ε, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ οἱ Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α,Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Γ, ἄρα οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἄρα οἱ Γ, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Πάλιν, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἄρα οἱ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε, ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον εἶναι πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Ε θὰ εἶναι πρῶτος (θεώρ. 26). Καὶ εἶναι τὸ μὲν γινόμενον τῶν Α, Γ ὁ Δ, τὸ δὲ γινόμενον τῶν Β, Ε ὁ Ζ. Ἄρα οἱ Δ, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΓΑ, ΑΒ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

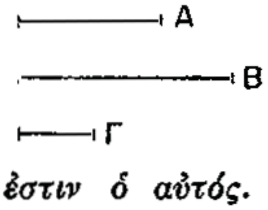
Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω ὁ Γ. ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ, ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ, καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Β,

28.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν πρῶτος· καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμά των πρὸς οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἂς σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁ ΑΓ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτος.

Διότι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ΓΑ, ΑΒ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς ἀριθμοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ τις αὐτοὺς καὶ ἔστω ὁ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τοὺς ΓΑ, ΑΒ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΒΓ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΓΑ, ΑΒ· ἄρα οἱ ΓΑ, ΑΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα ὁ ΓΑ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἔστωσαν πάλιν, οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ τις αὐτοὺς καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἄρα θὰ μετρῇ καὶ ὅλον τὸν ΓΑ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΓΑ, ΑΒ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΒΓ. Ἄρα οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι οἱ Β, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

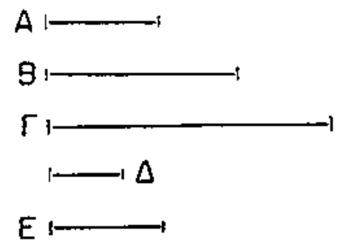
Διότι, ἐὰν οἱ Β, Α δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτοὺς ὁ Γ. Ἐπειδὴ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β, ἄρα ὁ Γ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ, καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, ἐν ᾧ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς

Α μετρήσει τις ἀριθμός. οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

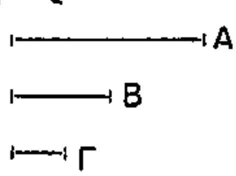


Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω· καί ἐστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει. ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.



Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τοὺς Β, Α ἀριθμός τις· ἄρα οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσιν ἀριθμόν τινα, τὸ γινόμενον δὲ τούτων μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος, οὗτος θὰ μετρῇ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς.

Διότι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἂς δίδωσι τὸν Γ, τὸν δὲ Γ ἂς μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ μετρεῖ ἕνα ἐκ τῶν Α, Β.

Διότι, ἂς μὴ μετρῇ τὸν Α· καὶ ὁ Δ εἶναι πρῶτος· οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 29). Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Γ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Β. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (θεωρ. 19). Οἱ δὲ Δ, Α εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (θεώρ. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν δὲν μετρῇ τὸν Β, θὰ μετρῇ τὸν Α. Ὁ Δ ἄρα μετρεῖ ἕνα ἐκ τῶν Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

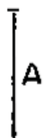
Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι σύνθετος ἀριθμός, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτὸν καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Β εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτὸν καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Β, ὁ δὲ Β μετρεῖ τὸν Α, καὶ ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Α. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Γ εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Κατὰ τὸν συλλογισμὸν τοῦτον θὰ ληφθῇ τέλος ἀριθμός τις πρῶτος, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ (τὸν Α). Διότι, ἐὰν δὲν ληφθῇ, θὰ μετρῶσι τὸν Α ἄπειροι ἀριθμοί, ἐκ *ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. ληφθήσεταί τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει.*

Ἅπας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.



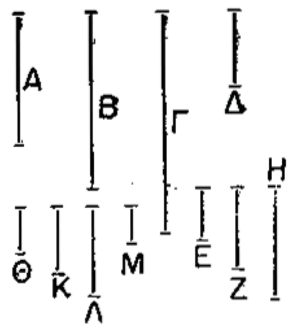
Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.



Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η. καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονταί [τινες] τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου· ὅπερ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα θὰ ληφθῇ πρῶτός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὅστις θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α.

Πᾶς ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32.

Πᾶς ἀριθμὸς ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ Α εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις πρῶτος (θεώρ. 31).

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Δοθέντων ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ.

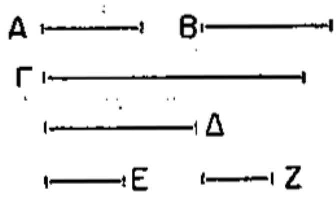
Οἱ Α, Β, Γ ἢ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι οἱ μικρότεροι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (θεώρ. 21).

Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 3), καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς ἕκαστον τῶν Ε, Ζ, Η. Καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας (θεώρ. 15). Οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα μετροῦσι τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ (ὁρ. 21). Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐὰν οἱ Ε, Ζ, Η δὲν εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, θὰ ὑπάρχωσι μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν Ε,Ζ,Η εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α καὶ ἕκαστος τῶν Κ, Λ ἕκαστον τῶν Β,Γ. Ὅσας δὲ φορὰς ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἂς εἶναι εἰς τὸν Μ· καὶ ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ Μ καὶ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ. καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.



Οἱ Α, Β γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε·

ἕκαστος ἄρα τῶν Κ, Λ μετρεῖ ἕκαστον τῶν Β,Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας, καὶ ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Θ μονάδας (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁ Μ μετρεῖ καὶ ἕκαστον τῶν Β, Γ κατὰ τὰς εἰς ἕκαστον τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας, ὁ Θ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν Α (ὁρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α. Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Ε, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Θ, Μ (θεώρ. 19). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ Ε τοῦ Θ· ἄρα καὶ ὁ Μ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ Δ (θεώρ. 13, καὶ V. 14). Καὶ μετρεῖ (ὁ Μ) τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ὁ Δ ἐλήφθη ὡς τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Ε, Ζ, Η εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

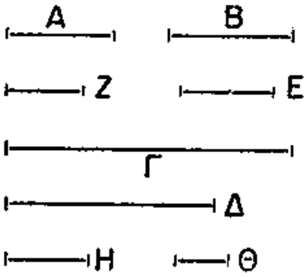
Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσιν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι.

Διότι οἱ Α, Β ἢ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει τὸν Γ (θεώρ. 16). Οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Γ (ὁρ. 16). Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ἂς μετρῶσι τὸν Δ. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· ἄρα ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ (ὁρ. 16). Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 19). Οἱ δὲ Α, Β εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 21)· ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ε ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Β, Ε δίδει τοὺς Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17). Μετρεῖ

μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ. ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

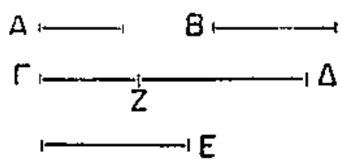


λε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσουσιν. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ· μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον (ὁρ. 21)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν μετροῦσιν ἄρα οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β.

Ἂς μὴ εἶναι τώρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β οἱ Ζ, Ε (θεώρ. 33)· ἄρα εἶναι ἴσος ὁ Α$\times$Ε πρὸς τὸν Β$\times$Ζ (θεώρ. 19). Καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Γ· οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Γ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστος (ὁ Γ, ἐκ τῶν μετρουμένων ὑπὸ τῶν Α, Β). Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ἂς μετρῶσι τὸν Δ. Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Η, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Θ. Ἄρα ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Δ (ὁρ. 16). Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Α, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Θ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (θεώρ. 19). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· οἱ δὲ Ζ, Ε εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20)· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Ε, Η δίδει τοὺς Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17). Ὁ δὲ Ε μετρεῖ τὸν Η· καὶ ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον (ὁρ. 21)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

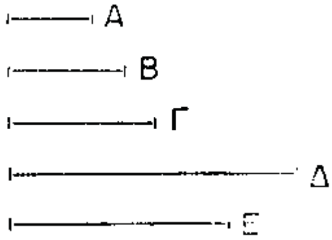
Διότι ἂς μετρῶσιν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν ὁ Ε δὲν μετρῇ τὸν ΓΔ, ὁ Ε μετρῶν τὸν ΔΖ ἂς ἀφίνῃ ὑπόλοιπον τὸν ΓΖ$<$Ε. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Ε, ὁ δὲ Ε μετρεῖ τὸν ΔΖ, καὶ οἱ Α,Β ἄρα θὰ μετρῶσι τὸν ΔΖ. Μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· ἄρα θὰ μετρῶσι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΓΖ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ Ε· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ὁ Ε δὲν μετρεῖ τὸν ΓΔ· ἄρα τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λςʹ.

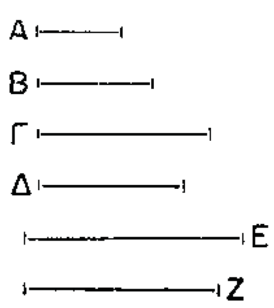
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.



Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσιν [τινα] ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρείτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος [τὸν Ε] μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσιν.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ [τὸν Ε· καὶ] οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρείτωσαν τὸν Ζ. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Γ, Δ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λζʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

36.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι (τὸ ἐ.κ.π.).

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοί, οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ (θεώρ. 34). Τότε ὁ Γ ἢ μετρεῖ ἢ δὲν μετρεῖ τὸν Δ. Πρότερον ἂς τὸν μετρῇ· μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ, ἄρα μετροῦσι τὸν Δ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὁ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β, Γ θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Δ. Ἂς μετρῶσι τὸν Ε. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ε, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος θὰ μετρήσῃ τὸν Ε (θεώρ. 35). Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος εἶναι ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον ἀριθμὸν μετροῦσι τὸν Δ.

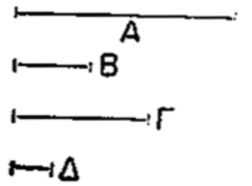
Ἂς μὴ μετρῇ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Ε (θεώρ. 34). Ἐπειδὴ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Λέγω τώρα, ὅτι οὗτος εἶναι καὶ ὁ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ μετρῶσι οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Ε. Ἂς μετρῶσι τὸν Ζ. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ζ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος θὰ μετρήσῃ τὸν Ζ (θεώρ. 35). Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος εἶναι Δ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Ζ (θεώρ. 35). Ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Γ, Δ μετρούμενος εἶναι ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Ε. Ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν ἀριθμὸς μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ, ὁ μετρούμενος θὰ ἔχῃ μέρος ὁμώνυμον πρὸς τὸν μετροῦντα.

Διότι ἂς μετρῆται ὁ ἀριθμὸς Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β· λέγω, ὅτι ὁ Α ἔχει ὁμώνυμον μέρος πρὸς τὸν Β.

Ὁσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ.

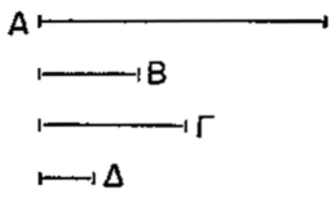


ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β. ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω [ἀριθμὸς] ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

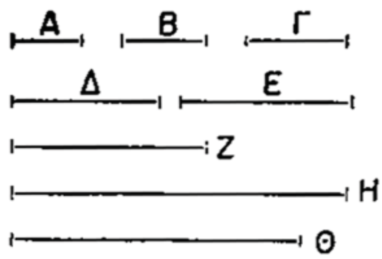


Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α. ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη.



Ἔστωσαν γὰρ τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η.

Ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος ὤν. εἰ γὰρ μή, ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Διότι ὅσας φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Γ. Ἐπειδὴ ὁ Β μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Δ τὸν ἀριθμὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Γ καὶ ὁ Β τὸν Α. Ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις μετρεῖ ἡ μονὰς Δ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Γ τὸν Α (θεώρ. 15)· ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Β εἶναι μέρος ὁμώνυμον πρὸς αὐτόν· καὶ ὁ Γ ἄρα εἶναι τοῦ Α ὁμώνυμον μέρος πρὸς τὸν Β. Ὥστε ὁ Α ἔχει μέρος τὸν Γ, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁμώνυμος πρὸς τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ ὁ,τιδήποτε μέρος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ὁμωνύμου πρὸς τὸ μέρος ἀριθμοῦ.

Διότι ἂς ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς Α ὁτιδήποτε μέρος τὸν Β, καὶ ἔστω ὁ ἀριθμὸς Γ ὁμώνυμος πρὸς τὸ μέρος Β· λέγω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Β εἶναι μέρος τοῦ Α ὁμώνυμον πρὸς τὸν Γ, εἶναι δὲ καὶ ἡ μονὰς μέρος τοῦ Γ ὁμώνυμον πρὸς αὐτόν, ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Γ καὶ ὁ Β τὸν Α. Ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Γ τὸν Α (θεώρ. 15)· ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλάχιστος ὢν θὰ περιέχῃ τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλάχιστος ὢν θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ.

Διότι ἔστωσαν ὁμώνυμοι πρὸς τὰ μέρη Α, Β, Γ ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε, Ζ καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὁ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ὁ Η.

Ὁ Η ἄρα ἔχει ὁμώνυμα μέρη πρὸς τοὺς Δ, Ε, Ζ (θεώρ. 37). Πρὸς δὲ τοὺς Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη εἶναι τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα περιέχει τὰ μέρη Α, Β, Γ. Λέγω τώρα, ὅτι τὰ περιέχει καὶ ἐλάχιστος ὤν. Διότι, ἐὰν δὲν τὰ περιέχῃ, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ Η, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ. Ἔστω ὁ Θ. Ἐπειδὴ ὁ Θ περιέχει τὰ μέρη Α, Β, Γ, *Β, Γ μέρη, ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν. τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται. καί ἐστιν ἐλάσσων τοῦ Η· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

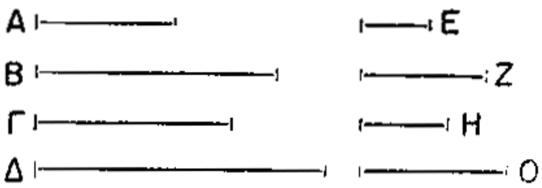
ὁ Θ ἄρα θὰ μετρῆται ὑπὸ ὁμωνύμων πρὸς τὰ μέρη Α, Β, Γ ἀριθμῶν (θεώρ. 38). Πρὸς δὲ τὰ μέρη Α, Β, Γ ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα μετρεῖται ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ. Καὶ εἶναι μικρότερος τοῦ Η· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἄρα ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ Η, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

α'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.



Εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος [τῶν Α, Β, Γ, Δ] τῷ πλήθει [τῶν Ε, Ζ, Η, Θ], δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς. οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολ-

ΒΙΒΛΙΟΝ VIII.

1.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

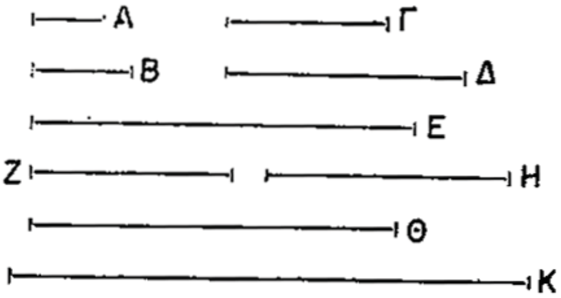
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, ἔστωσαν μικρότεροι τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα (VII. 14) εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (VII. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ μικρότεροι ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, εἰς τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος μεταξὺ ἐλαχίστων ἀριθμῶν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις εἰς τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δώσῃ τὸν Γ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας ἂς δώσῃ τὸν Δ, καὶ λαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.



Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, [οὕτως] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ, πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, [οὕτως] ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Θ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὅ τε Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσιν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Ε πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ζ, Κ πεποίηκεν· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσιν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν, ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

ἀκόμη ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δώσῃ τὸν Ε, καὶ ἀκόμη ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ, Ε ἂς δώσῃ τοὺς Ζ, Η, Θ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δώσῃ τὸν Κ.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Γ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (VII. 17). Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἔδωσε τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β πολλαπλασιάσας τὸν Β ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Δ, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ ἔδωσε τοὺς Ζ, Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ἔδωσε τοὺς Η, Θ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες τὸν Ε ἔδωσαν τοὺς Θ, Κ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22), οἱ Α, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἕκαστος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Γ, Ε ἕκαστον δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Ζ, Κ· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 27). Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς (θεώρ. 1). Οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

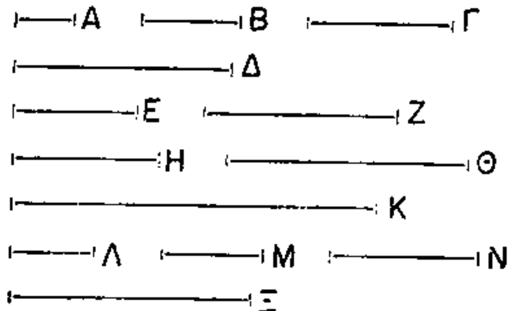
Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι τετράγωνοι, ἐὰν δὲ τέσσαρες, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι κύβοι.

γ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν, καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καί εἰσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὅ τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

3.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν λόγον τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ (VII. 33), τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς εἰς περισσότερον (θεώρ. 2), μέχρις ὅτου τὸ λαμβανόμενον πλῆθος τῶν ἀριθμῶν γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

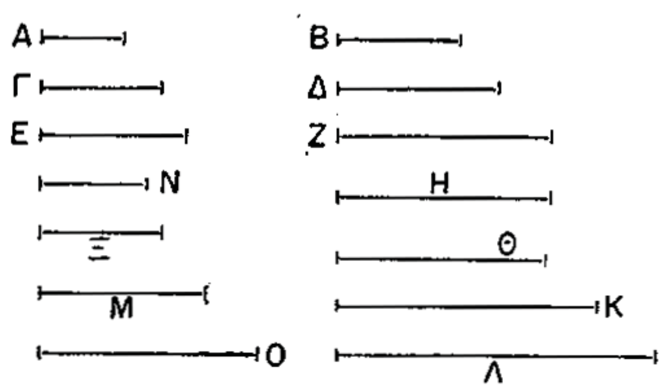
Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει ὡς γινόμενον ἕκαστον τῶν Η, Κ (θεώρ. 2 πόρ.), πολλαπλασιάσας δὲ ἕκαστον τῶν Η, Κ δίδει ὡς γινόμενον ἕκαστον τῶν Λ, Ξ (θεώρ. 2 πόρ.), καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι δὲ καὶ οἱ Λ, Μ Ν, Ξ ἐλάχιστοι, ἐν ᾧ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, Δ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Λ,Μ, Ν, Ξ, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἄρα ὁ μὲν Α εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Λ, ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἶναι οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Λόγων δοθέντων ὁσωνδήποτε μὲ ἐλαχίστους ἀριθμοὺς νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ τοὺς δοθέντας λόγους.

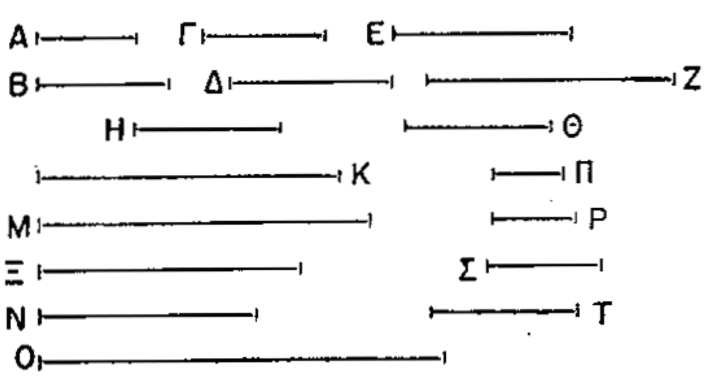
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι μὲ ἐλαχίστους ἀριθμοὺς καὶ ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἰς λόγους, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η.



καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω. ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρεῖται ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Μ.



καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Β, Γ ὁ ἀριθμὸς Η (VII. 34) Γ. Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Η, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Α τὸν Θ, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Γ μετρεῖ τὸν Η, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Δ τὸν Κ. Ὁ δὲ Ε ἢ μετρεῖ τὸν Κ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἂς τὸν μετρῇ πρότερον. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Κ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ ὁ Ζ τὸν Λ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν Θ καὶ ὁ Β τὸν Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἀκόμη ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα εἶναι **ὡς ἐν** συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἰς λόγους ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐὰν οἱ Θ, Η, Κ, Λ δὲν εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐχόντων τοὺς λόγους τοῦ Α πρὸς Β καὶ τοῦ Γ πρὸς Δ καὶ τοῦ Ε πρὸς Ζ, ἔστωσαν ἐλάχιστοι οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20), ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ξ· οἱ Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ξ· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ θὰ μετρήσῃ τὸν Ξ (VII. 35). Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Θ, Η, Κ, Λ εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ὡς ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

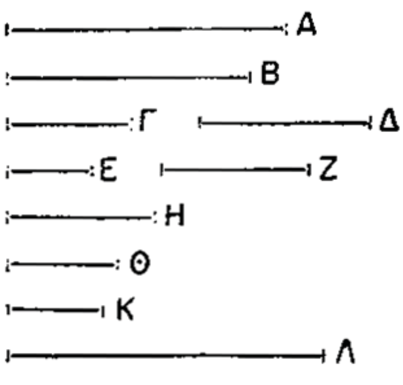
Ἂς μὴ μετρῇ τώρα ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν Ε, Κ ὁ Μ (VII. 34). Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Κ μετρεῖ τὸν Μ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ἕκαστος τῶν Θ, Η ἕκαστον τῶν Ν, Ξ ἀντιστοίχως, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Μ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο. Ἐπειδὴ μετρεῖ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν καὶ ὁ Η τὸν Ξ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21). Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἰσάκις μετρεῖ ὁ Ε τὸν Μ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ ,οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21)· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα εὑρίσκονται ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους καὶ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι εἰς τοὺς

Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α Β, Γ Δ, Ε Ζ λόγοις. εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς Α Β, Γ Δ, Ε Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς Α Β, Γ Δ, Ε Ζ λόγοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ των πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.



Λόγων γὰρ δοθέντων τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ Ε, Δ Ζ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως λόγους Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχωσιν ἀριθμοί τινες ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μικρότεροι τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἔχοντες τοὺς λόγους Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ. Ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20), ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ρ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ρ· οἱ Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ρ. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Ρ (VII. 35). Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Ρ. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ[1]· καὶ ὁ Κ ἄρα μετρεῖ τὸν Σ (VII. ὁρ. 21). Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ (VII. 20). Οἱ Ε, Κ ἄρα μετροῦσι τὸν Σ. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Σ. Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Ε, Κ εἶναι ὁ Μ (VII. 35)· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν Σ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα εἶναι ἐλάχιστοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους τῶν Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστωσαν πλευραὶ οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Διότι, δοθέντων τῶν λόγων καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ τοῦ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἂς ληφθῶσιν ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἔχοντες τοὺς λόγους τῶν Γ πρὸς Ε καὶ Δ πρὸς Ζ (θεώρ. 4) οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Λ.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν Γ ἔδωσε τὸν Α, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Ε ἔδωσε τὸν Λ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ·

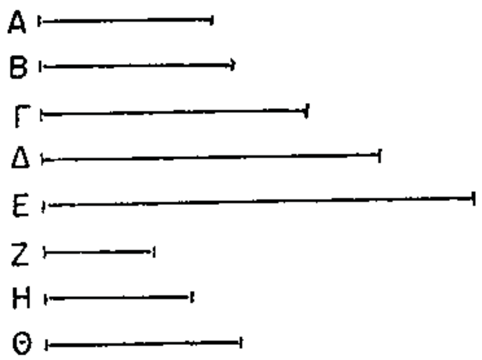
1. Διότι Η:Κ=Γ:Δ =Ρ:Σ, ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος.

ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, [οὕτως] ὁ Α πρὸς τὸν Β. ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.



Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α, Β, Γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ· ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ. καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ]. καί ἐστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἔδωσε τὸν Λ, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β (VII. 17). 'Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. 'Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) εἶναι ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (VII. 14). 'Ο δὲ Η πρὸς τὸν Κ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν [δηλ. $Η : Κ = (Γ : Ε) . (Δ : Ζ)$][1]· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

'Εὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος νὰ μὴ μετρῇ τὸν δεύτερον, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ μετρῇ κανένα.

"Εστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α ἂς μὴ μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος τις θὰ μετρῇ κανένα.

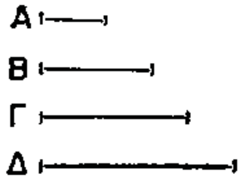
"Οτι μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε εὑρισκόμενοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ δὲν μετροῦσιν ἀλλήλους, εἶναι φανερόν· διότι οὔτε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β. Λέγω τώρα, ὅτι οὔτε ἄλλος τις θὰ μετρῇ κανένα. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῇ ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοι εἶναι οἱ Α, Β, Γ, ἂς ληφθῶσι τόσοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ (VII. 33). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ζ, Η, Θ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ (VII. 14). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, δὲν μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, δὲν θὰ μετρῇ ἄρα οὔτε ὁ Ζ τὸν Η (VII. ὁρ. 21)· δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ζ μονάς· διότι ἡ μονὰς μετρεῖ πάντα ἀριθμόν. Καὶ εἶναι οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3) (οὔτε ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Θ). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὔτε ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Γ (VII. ὁρ. 21). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος τις μετρεῖ τινα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

'Εὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος μετρῇ τὸν τελευταῖον, θὰ μετρῇ καὶ τὸν δεύτερον.

1. Διότι $Η:Κ=(Η:Θ).(Θ:Κ)$ καὶ $Η:Θ=Γ:Ε$, $Θ:Κ=Δ:Ζ$.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

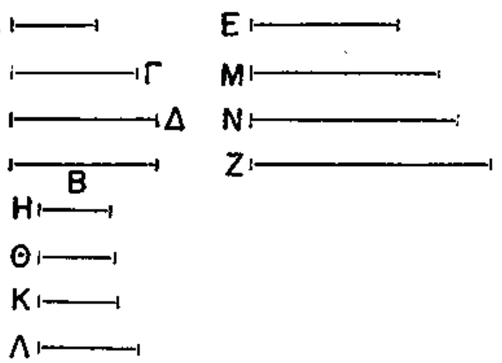


Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας [αὐτοῖς] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.



Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Β, Γ, Δ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α ἂς μετρῇ τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Β.

Διότι ἐὰν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Β, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ μετρῇ κανένα (θεώρ. 6)· μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. Μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβληθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

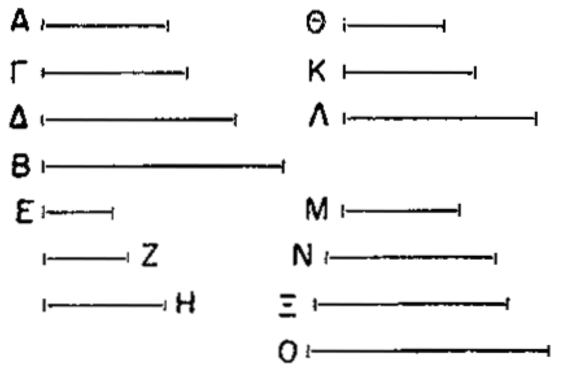
Διότι ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ (δηλ. νὰ γίνῃ ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β) καὶ ἂς γίνῃ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ παρεμβάλλονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μεταξὺ τῶν Α, Β, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ τῶν Ε, Ζ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Α, Β, Γ, Δ, ἂς ληφθῶσι τόσοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ (VII. 33)· οἱ ἄκροι ἄρα ἐκ τούτων οἱ Η, Λ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Η, Θ, Κ, Λ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ (VII. 14). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η, Λ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (VII. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἰσάκις ἄρα ὁ Η μετρεῖ τὸν Ε καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. Ὅσας λοιπὸν φορὰς ὁ Η μετρεῖ τὸν Ε, τόσας φορὰς καὶ ἕκαστος τῶν Θ, Κ ἂς μετρῇ ἕκαστον τῶν Μ, Ν ἀντιστοίχως (δηλ. ὁ Θ τὸν Μ καὶ ὁ Κ τὸν Ν)· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ. Οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ (VII. ὁρ. 21). Ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ· οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Ε, Ζ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε



μονάς· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἑκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ τὸν Μ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ

9.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ μεταξὺ αὐτῶν παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμοί, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

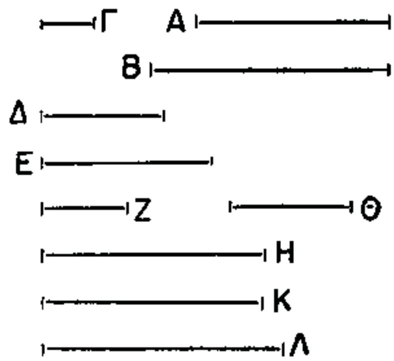
Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Γ, Δ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μονὰς Ε· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ (γεωμ. μέσα) παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἔχοντες τὸν λόγον τῶν Α, Γ, Δ, Β οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ καὶ πάντοτε εἷς περισσότερον, μέχρις ὅτου τὸ πλῆθος αὐτῶν γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β (θεώρ. 2). Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ μὲν Ζ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν δίδει τὸν Θ, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Μ, καὶ ὁ Η πολλαπλασιάσας μὲν ἑαυτὸν δίδει τὸν Λ, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ο (θεώρ. 2, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η, εἶναι δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η (θεώρ. 3) καὶ τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β, ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Γ, Δ, Β· ἴσος ἄρα εἶναι ὁ μὲν Μ πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ Ο πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν δίδει τὸν Θ, ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Θ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ζ μονάδας (VII. ὁρ. 16). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Ζ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ (VII. ὁρ. 21). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Μ, ὁ Θ ἄρα μετρεῖ τὸν Μ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ζ μονάδας (VII. ὁρ. 16). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν ἀριθμὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Ζ καὶ ὁ Θ τὸν Μ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ (VII. ὁρ. 21). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Εἶναι δὲ ἴσος ὁ Μ πρὸς τὸν Α· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ *ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμόν, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ι'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἑκατέρου καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἵ τε Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω, ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.



Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα ἀριθμὸς τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ [μονὰς] πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Α. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Κ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ

Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν καὶ μεταξὺ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν μεταξὺ ἑκάστου δύο ἀριθμῶν καὶ τῆς μονάδος παρεμβληθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ ἑκάστου αὐτῶν καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ τῶν (δύο) ἀριθμῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ (ἑκάστου) τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἀριθμοὶ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β.

Διότι ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ τὸν Θ, ἕκαστος δὲ τῶν Δ, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Κ, Λ.

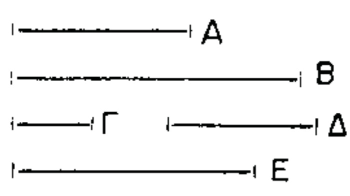
Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ Δ τὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Ἡ δὲ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· καὶ ὁ ἀριθμὸς ἄρα Δ μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε. Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ μὲν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Η, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Θ (VII. 17), εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (VII. 18). Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ε, Θ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Κ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς

πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τῶν Θ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.



Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ε, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸν Κ. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Δ, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει ἕκαστον τῶν Κ, Λ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ (VII. 18). 'Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. 'Ακόμη ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Θ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Λ, Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β (VII. 17). 'Ως δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. 'Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. "Οσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρεμβάλλονται μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἔχει λόγον τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸ τετράγωνον.

"Εστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ ἀριθμὸς Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον Γ πρὸς Δ εἰς τὸ τετράγωνον.

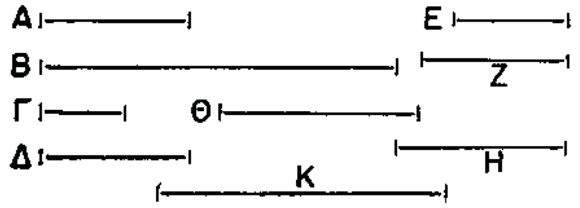
Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι τετράγωνος, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ Γ, ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β. 'Επειδὴ λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Γ, Δ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Ε, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε (VII. 17). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ εἰς τὸ τετράγωνον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ε, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον ὃν λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον, τοῦ Α πρὸς τὸν Ε (V. ὁρ. 9). 'Ως δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. 'Ο Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον, τῆς πλευρᾶς Γ πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.



Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως, ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Θ, Κ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Θ, Κ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α [ἄρα] πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Δύο κύβων ἀριθμῶν ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον ἔχει λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸν κύβον.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστω πλευρὰ ὁ ἀριθμὸς Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ Α ἔχει λόγον πρὸς τὸν Β τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, εἰς τὸν κύβον.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Ε, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ, ὁ δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Η, ἕκαστος δὲ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Θ, Κ.

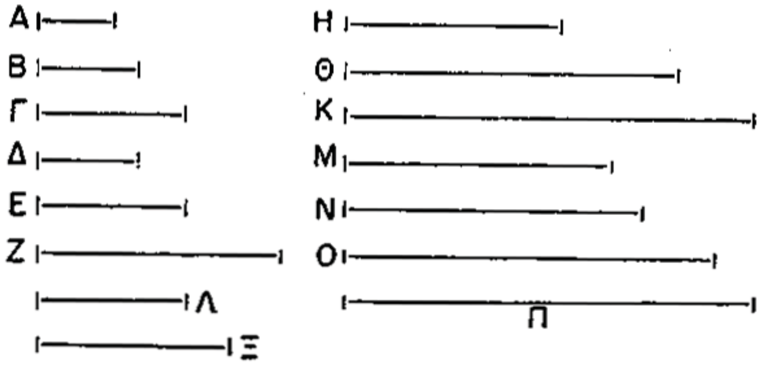
Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι κύβος, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε, ὁ Γ ἄρα τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Δ τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, τὸν Η δὲ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Γ, Δ δίδει ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Ε, Ζ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ (VII. 17). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η (VII. 18). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ε, Ζ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Θ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει ἕκαστον τῶν Θ, Κ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ (VII. 18). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ζ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Κ, Β ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι οἱ Θ, Κ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, εἰς τὸν κύβον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Θ, Κ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον (τὸν λόγον τῶν κύβων) τοῦ Α πρὸς τὸν Θ (V. ὁρ. 10). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τριπλάσιον (τῶν κύβων) τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι οἵ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.



Ὁ μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιείτω. καὶ πάλιν ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλήθει, τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

13.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ἕκαστος πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ γινόμενόν τι, τὰ ἐξ αὐτῶν γινόμενα θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλασιάσωσι τὰ σχηματισθέντα γινόμενα, καὶ αὐτὰ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ [καὶ πάντοτε περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες ἂς δίδωσιν τοὺς Δ, Ε, Ζ, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες ἂς δίδωσι τοὺς Η, Θ, Κ· λέγω, ὅτι οἱ Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Λ, ἕκαστος δὲ τῶν Α, Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Μ, Ν ἀντιστοίχως. Καὶ πάλιν ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας ἂς δίδῃ τὸν Ξ, ἕκαστος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Ο, Π ἀντιστοίχως.

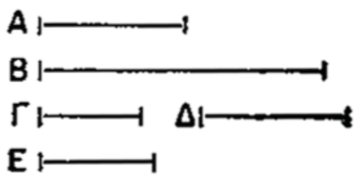
Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ ἀνωτέρω (προηγ. θεώρημα) ἀποδεικνύομεν, ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ἀκόμη οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Ξ, Ζ καὶ ἀκόμη οἱ Η, Μ, Ν, Θ πρὸς τοὺς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ εἶναι ἴσον τὸ μὲν πλῆθος τῶν Δ, Λ, Ε πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ξ, Ζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν Η, Μ, Ν, Θ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Θ, Ο, Π, Κ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς μετρῇ τετράγωνον, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ; Δ, ὁ δὲ Α ἂς μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.



Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ [ποιείτω], ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω. φανερὸν δή, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε· οἱ Α, Ε, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Ε, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ (VII. ὁρ. 21).

Πάλιν ἂς μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι οἱ Α, Ε, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Καὶ εἶναι οἱ Α, Ε, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν ἀριθμὸς κύβος μετρῇ ἀριθμὸν κύβον, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ κύβος θὰ μετρῇ τὸν κύβον.

Διότι ἂς μετρῇ κύβος ἀριθμὸς ὁ Α τὸν κύβον Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν ἂς δίδῃ τὸν Ε, ὁ δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ, ἕκαστος δὲ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Θ, Κ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 12). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ (VII. ὁρ. 21)· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

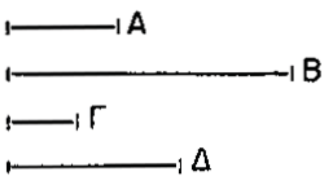
Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδὲ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω [δὴ] πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.



Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

16.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς δὲν μετρῇ τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ δὲν μετρῇ τὴν πλευράν, οὔτε ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ καὶ ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Β· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι, ἐὰν ὁ Γ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ ὁ Α τὸν Β (θεώρ. 14). Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· οὔτε ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Ἂς μὴ μετρῇ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἐὰν ὁ Α μετρῇ τὸν Β, θὰ μετρῇ καὶ ὁ Γ τὸν Δ (θεώρ. 14). Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ· οὔτε ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς δὲν μετρῇ κύβον ἀριθμόν, οὔτε ἡ πλευρὰ μετρεῖ τὴν πλευράν· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ δὲν μετρῇ τὴν πλευράν, οὔτε ὁ κύβος μετρεῖ τὸν κύβον.

Διότι κύβος ἀριθμὸς ὁ Α ἂς μὴ μετρῇ κύβον ἀριθμὸν τὸν Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστω πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ δὲν μετρεῖ τὸν Δ.

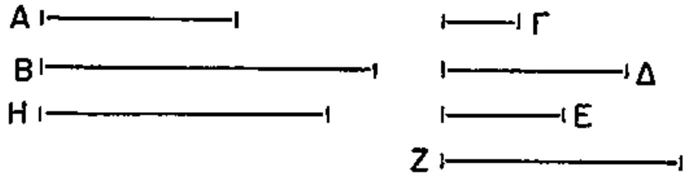
Διότι, ἐὰν ὁ Γ μετρῇ τὸν Δ, καὶ ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β (θεώρ. 15).

Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· οὔτε ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β.
Διότι, ἐὰν ὁ Α μετρῇ τὸν Β, καὶ ὁ Γ θὰ μετρῇ τὸν Δ (θεώρ. 15).
Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ· οὔτε ἄρα ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. λέγω οὖν, ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον [πλευράν].



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, [οὕτως] ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Η, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν Η. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους (VII. ὁρ. 22), εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω λοιπόν, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς καὶ ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον (τὸν λόγον τῶν τετραγώνων) ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, τουτέστι τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς (δηλ. $Α : Β = Γ^2 : Ε^2 = Δ^2 : Ζ^2$).

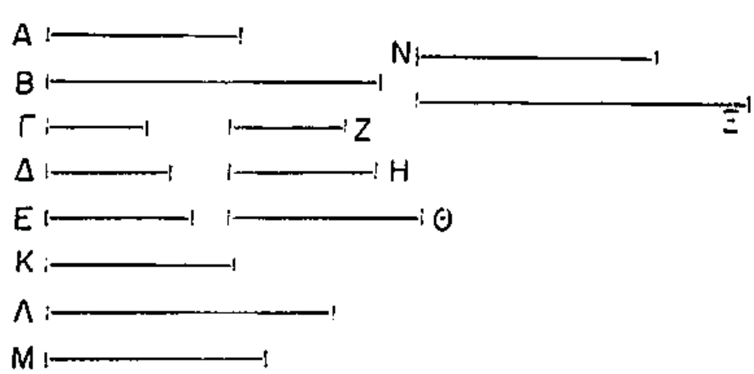
Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ (VII. 13). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Β. Ὁ Δ ὅμως πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η (VII. 17). Ἀλλ' ὡς εἶναι ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως εἶναι ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ Α, Η, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον (τῶν τετραγώνων) ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Η, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει πρὸς τὸν Η (δηλ. $Α : Β = Α^2 : Η^2$) (V. ὁρ. 9). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· (δηλ. $Α : Β = Γ^2 : Ε^2 = Δ^2 : Ζ^2$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Μεταξὺ δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ μέσοι ἀνάλογοι· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστωσαν *οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. λέγω, ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.*



Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστιν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ, οἱ Κ, Λ [ἄρα] ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ Μ. ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. ἑκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε, ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστιν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως πλευραὶ οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους (VII. ὁρ. 22), εἶναι ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλλονται δύο ἀριθμοὶ μέσοι ἀνάλογοι καὶ ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ (δηλ. $Α : Β = Γ^3 : Ζ^3 = Δ^3 : Η^3 = Ε^3 : Θ^3$).

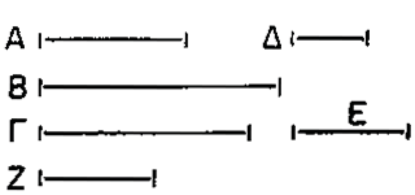
Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Κ, ὁ δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η ἂς δίδῃ τὸν Λ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η καὶ τῶν μὲν Γ, Δ εἶναι γινόμενον ὁ Κ, τῶν δὲ Ζ, Η ὁ Λ, οἱ Κ, Λ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί (VII. 22)· τῶν Κ, Λ ἄρα ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος (θεώρ. 18). Ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Μ. Ὁ Μ ἄρα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Κ, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Μ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. Οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς Η (VII. 13). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἕκαστος τώρα τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ ἂς δίδῃ ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Ν, Ξ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι στερεὸς ἀριθμός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, Ε, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Γ, Δ δίδει τὸν Α. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Γ, Δ εἶναι ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Λ δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ δίδει τὸν Α, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ν, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει ἕκαστος τῶν Ν, Ξ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ *ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.*

Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.



Εἰλήφθωσαν [γὰρ] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ οἱ Δ, Ε· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὥστε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η. ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η. οἱ Α, Β πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν Ξ, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β (VII. 17). 'Αλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὄχι μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τῶν πλευρῶν.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ἢ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοί ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ν, Ξ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Ν (δηλ. $A : B = A^3 : N^3$, V. ὁρ. 10). 'Αλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢ ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν Ζ ἢ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η ἢ καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ (εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma^3 : Z^3 = \Delta^3 : H^3 = E^3 : \Theta^3$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

'Εὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι.

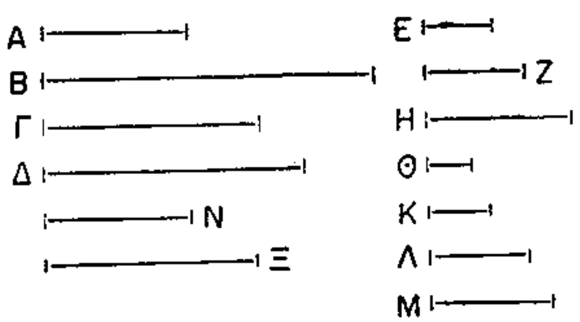
Διότι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β ἂς παρεμβάλληται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ οἱ Δ, Ε (VII. 33)· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ (VII. 20). Ὅσας τώρα φορὰς ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· ὁ Ζ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Ὥστε ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Δ, Ζ. Πάλιν ἐπειδὴ οἱ Δ, Ε εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Γ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Ε τὸν Β (VII. 20) Ὅσας τώρα φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Β, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Η. Ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Η μονάδας· ὁ Η ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Β (VII. ὁρ. 16). Ὁ Β ἄρα εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Ε, Η. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν· αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.



Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ τρεῖς οἱ Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ, οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ. φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν. ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ Ε ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν καὶ ὅμοιοι. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ζ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Γ, Β ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η (VII. 13). Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅμοιοι στερεοί.

Διότι ἂς παρεμβάλλωνται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί.

Διότι ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Ε, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν Ε, Η παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Ζ, οἱ ἀριθμοὶ ἄρα Ε, Η εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 20). Ἔστωσαν λοιπὸν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ ἀριθμοὶ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ. Εἶναι φανερὸν ἄρα ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον καὶ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ (VII. 14). Εἶναι δὲ οἱ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὅσας τώρα φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ν. Ὁ Ν ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Ὁ δὲ Ε εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Θ, Κ δίδει τὸν Α. Ἄρα ὁ Α εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Γ, Δ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Η τὸν Β (VII. 20). Ὅσας φορὰς τώρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν

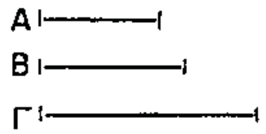
Β. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ. ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοί εἰσιν.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β. οἱ Α, Β ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

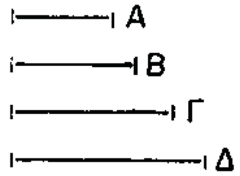


Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β, οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Ξ. Ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Β. Ὁ δὲ Η εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Λ, Μ δίδει τὸν Β. Ἄρα ὁ Β εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα εἶναι στερεοί.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὅμοιοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Ν, Ξ πολλαπλασιάσαντες τὸν Ε δίδουσι τοὺς Α, Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ (VII. 18), τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἶναι οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

Διότι, ἐπειδὴ τῶν Α, Γ ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Β , οἱ Α, Γ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (θεώρ. 20). Ὁ δὲ Α εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ τέταρτος θὰ εἶναι κύβος.

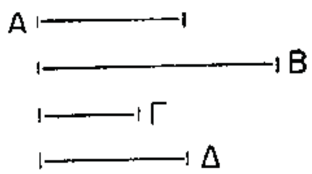
Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α ἔστω κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος.

Διότι, ἐπειδὴ τῶν Α, Δ ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ (θεώρ. 21). Ὁ δὲ Α εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν.

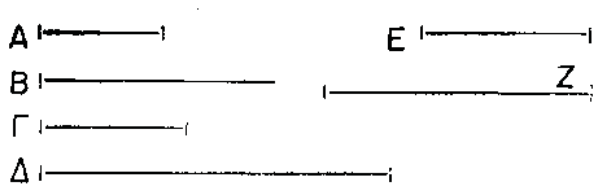


Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν, οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω [δή], ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

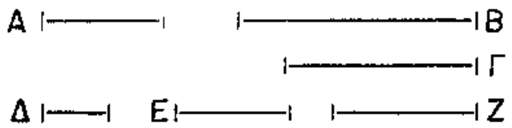


Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπιπτέτωσαν οἱ Ε, Ζ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστι κύβος ὁ Α, κύβος ἄρα καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.



Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλά-

Διότι ἂς ἔχωσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχουσιν ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν Δ, ὁ δὲ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι τετράγωνοι, οἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἄρα παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 18). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β ἄρα παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι τετράγωνος (θεώρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ἂς ἔχωσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α ἔστω κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β εἶναι κύβος.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι κύβοι, οἱ Γ, Δ εἶναι ὅμοιοι στερεοί· ἄρα μεταξὺ τῶν Γ, Δ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 19). Ὅσοι δὲ παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι παρεμβάλλονται καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (θεώρ. 8)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί. Ἂς παρεμβάλλωνται οἱ Ε, Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ε, Ζ, Β καὶ ὁ Α εἶναι κύβος, ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος (θεώρ. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

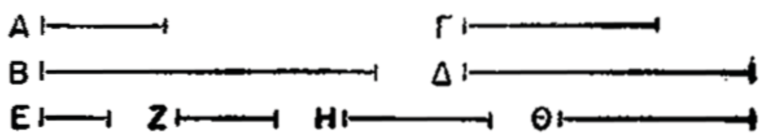
Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι, ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 18). Ἂς παρεμβληθῇ καὶ ἔστω ὁ Γ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν *χιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Β οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσιν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καί εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

κζ'.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.



Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν, τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος οἱ Ε, Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσίν. καί ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Β οἱ Δ, Ε, Ζ (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι (θεώρ. 2. πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί, ἄρα παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 19). Ἂς παρεμβληθῶσιν οἱ Γ, Δ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι πρὸς τούτου; κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Ε, Ζ, Η, Θ (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Ε, Θ εἶναι κύβοι (θεώρ. 2. πόρ.). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϑ'.

α'.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ, οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. καί ἐστιν

ΒΙΒΛΙΟΝ IX.

1.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ. Ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (VIII. 18). Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμοί, ὅσοι παρεμβάλλονται εἰς αὐτούς, τόσοι θὰ παρεμβάλλωνται καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον (VIII. 8)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός. Καὶ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος (VIII. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι τετράγωνον, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

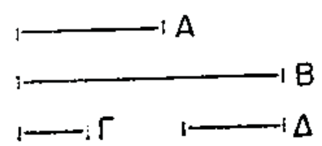
Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν τετράγωνον Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος, ἀλλ' εἶναι καὶ ὁ Γ, οἱ Δ, Γ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Ἄρα μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος (VIII. 18). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν *ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν [οἱ] ἀριθμοί· οἱ ἄρα Α, Β ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

γ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρὰ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. φανερὸν δή ἐστιν, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Α. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α. τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. καί ἐστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος (VIII. 8)· ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (VIII. 20)· οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ κύβος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του τὸν Β· λέγω, ὅτι ὁ Β εἶναι κύβος.

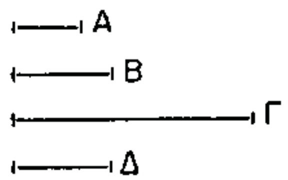
Διότι ἂς ληφθῇ πλευρὰ τοῦ Α ὁ Γ καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του, ἂς δίδῃ τὸν Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας (VII. ὁρ. 16). Ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (VII. ὁρ. 21). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α, ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Μεταξὺ ἄρα τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Α παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Γ, Δ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπαλασιάσας τὸν ἑαυτὸν του δίδει τὸν Β, ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Μεταξὺ δὲ τῆς μονάδος καὶ τοῦ Α παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί· ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι κύβος (VIII. 23). Καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ὁ κύβος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν κύβον ἀριθμὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι κύβος.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν.

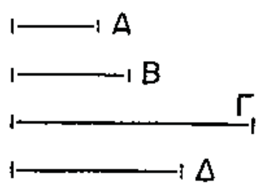


καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ Α, Β. τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

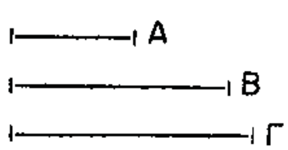


Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.



Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κύβος (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι κύβοι, οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Δ, Γ θὰ παρεμβληθῶσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι κύβος (VIII. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας δίδῃ κύβον, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς θὰ εἶναι κύβος.

Διότι κύβος ἀριθμὸς ὁ Α πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν κύβον Γ· λέγω, ὅτι ὁ Β εἶναι κύβος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κύβος (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Δ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ (VII. 17). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Δ, Γ εἶναι κύβοι, εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ εἶναι ὁ Α κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος (VIII. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ κύβον, καὶ αὐτὸς θὰ εἶναι κύβος.

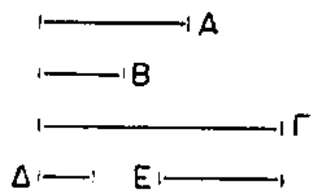
Διότι ὁ ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ κύβον τὸν Β· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α εἶναι κύβος.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, ἄρα ὁ Γ εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ *τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν Β, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ζ΄.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

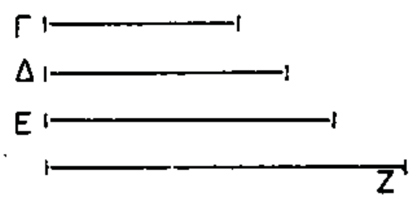


Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β.

δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως εἶναι ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Β, Γ εἶναι κύβοι, εἶναι ὅμοιοι στερεοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Β, Γ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 19). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (VIII. 8). Καὶ εἶναι ὁ Β κύβος· ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι στερεός.

Διότι ὁ σύνθετος ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας ἀριθμόν τινα τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι στερεός.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ Δ, καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ δὲ Α εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε, ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσαν τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἄρα ὁ Γ εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Δ, Ε, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος θὰ εἶναι τετράγωνος καὶ οἱ ἕνα παραλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος θὰ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ὁ δὲ ἕβδομος θὰ εἶναι συγχρόνως κύβος καὶ τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες πέντε.

Ἔστωσαν ἀπὸ τῆς μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες ἕνα, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ εἶναι συγχρόνως κύβος καὶ τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες πέντε.

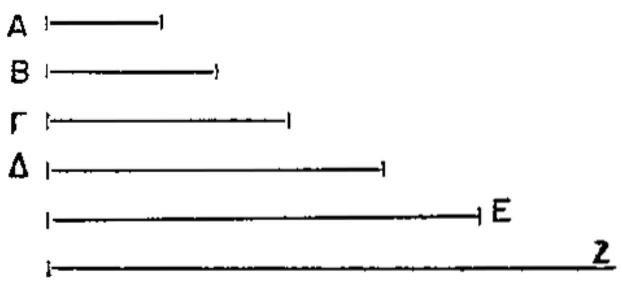
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Α τὸν Β (VII. ὁρ. 21).

ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστιν, καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστίν, καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.



Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Α τετράγωνος, καὶ ὁ Γ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ [καὶ] οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Β τετράγωνος, καὶ ὁ Δ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β (VII. ὁρ. 16)· ἄρα ὁ Β εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ Β εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ζ εἶναι τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ οἱ παραλείποντες ἕνα εἶναι ὅλοι τετράγωνοι. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ εἶναι κύβος καὶ ὅλοι (ἀπ 'αὐτοῦ) οἱ παραλείποντες δύο. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, ἄρα ὁ Γ εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ Γ εἶναι κύβος, καὶ ὁ Ζ ἄρα εἶναι κύβος (VIII. 23). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ τετράγωνος· ἄρα ὁ ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι καὶ κύβος καὶ τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ (ἀπὸ τοῦ ἑβδόμου) παραλείποντες πέντε εἶναι καὶ κύβοι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι τετράγωνος, καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι τετράγωνοι. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι κύβος, καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι κύβοι.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι θὰ εἶναι τετράγωνοι.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες ἕνα, ἀπεδείχθη (θεώρ. 8)· λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Γ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Πάλιν ἐπειδὴ καὶ οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι.

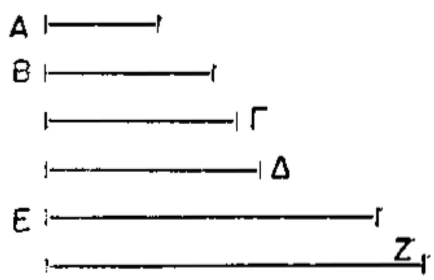
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καί ἐστιν ὁ Α κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστίν· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Α κύβος, καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστίν, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος [καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων].



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α· ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο. οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. λέγω, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος· τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος. καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Β πρὸς τὸν

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι.
Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο, ἀπεδείχθη (θεώρ. 8)· λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι. Διότι, ἐπειδὴ ὡς εἶναι ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως εἶναι ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β. Καὶ εἶναι ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ γενόμενος εἶναι κύβος (θεώρ. 3)· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι κύβος, καὶ ὁ Δ ἄρα εἶναι κύβος (VIII. 23). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε εἶναι κύβος καὶ ὁμοίως ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα δὲν εἶναι τετράγωνος, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ὅλων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσιν ἕνα. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα δὲν εἶναι κύβος, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ὅλων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσι δύο.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἂς μὴ εἶναι τετράγωνος· λέγω, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι παραλείπουσιν ἕνα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος (θεώρ. 8)· οἱ Β, Γ ἄρα ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β · οἱ Α, Β ἄρα ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (VIII. 26)· καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος· τετράγωνος ἄρα εἶναι καὶ ὁ Α· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Γ τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς εἶναι τετράγωνος ἐξαιρέσει τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων ἕνα.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ὁ Α κύβος. Λέγω, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων δύο.

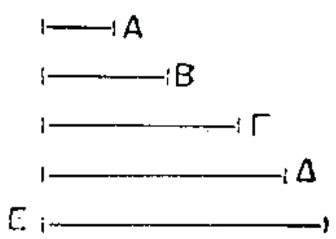
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος· εἶναι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος· διότι εἶναι τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς

Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον. καί ἐστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν· ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. κύβος ἄρα καὶ ὁ Α· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω, ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Πόρισμα.

Καὶ φανερόν, ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου ἐπὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ.—ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος πρὸς κύβον· καὶ εἶναι ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι κύβος (VII. 13, VIII. 25). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, καὶ ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β κύβον. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ κύβον, καὶ αὐτὸς θὰ εἶναι κύβος (θεώρ. 6). Ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Δ κύβος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος κανεὶς εἶναι κύβος ἐξαιρέσει τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν παραλειπόντων δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ μικρότερος μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω, ὅτι ἐκ τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β μετρεῖ τὸν Ε κατά τινα τῶν Γ, Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Α μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ μονὰς Α μετρεῖ τὸν Δ καὶ ὁ Β τὸν Ε (VII. 15). Ἡ δὲ μονὰς Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὥστε ὁ μικρότερος ὁ Β μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον τὸν Ε κατά τινα ἀριθμὸν ἐκ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Πόρισμα.

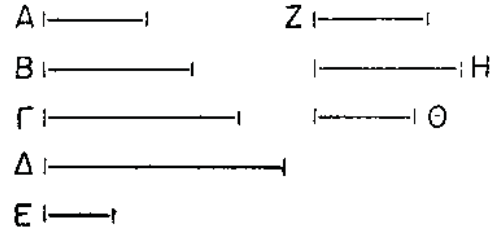
Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἣν τάξιν ἔχει ὁ μετρῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει, ἀναδρομικῶς ὅμως, ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὑφ' ὅσων τυχὸν πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται ὁ τελευταῖος, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ

Δ· λέγω, ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται.



Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. μὴ γάρ· καί ἐστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Θ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Α ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Ε, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. σύνθετοι ἄρα. οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ [πρώτου] ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ, ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὥστε ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ

Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι ὑφ' ὅσων πρώτων ἀριθμῶν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρῆται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ Α.

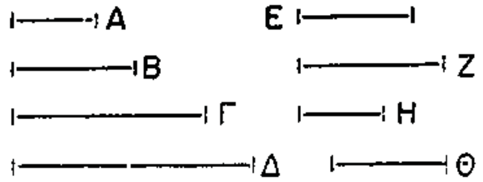
Διότι ἂς μετρῆται ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Διότι ἔστω, ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ. Καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος (VII. 29)· ἄρα οἱ Ε, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἂς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν ἀριθμὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας, ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ. 'Αλλ' ὅμως καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἔδωσε τὸν Δ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21)· οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ. "Ας τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Γ. 'Αλλ' ὅμως κατὰ τὸ προηγούμενον (θεώρ. 11. πόρ.) καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Η. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις (VII. 20) καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Β. "Ας τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Β. 'Αλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν ἔδωσε τὸν Β (θεώρ. 8)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Θ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Α. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ (VII. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις (VII. 20) καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἄρα μετρεῖ ὁ Ε τὸν Α ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. 'Αλλὰ καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα οἱ Ε, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. "Αρα εἶναι σύνθετοι. Οἱ δὲ σύνθετοι μετροῦνται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (VII. 15). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως πρῶτος, ὁ δὲ πρῶτος δὲν μετρεῖται ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ ἢ τοῦ ἑαυτοῦ του (VII. ὁρ. 12), ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Ε· ὥστε ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἐξ ὅσων πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν θὰ μετρηθῇ καὶ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

'Εὰν ἀπὸ μονάδος ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ

μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ.



Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, ἔστω ὁ αὐτός. φανερὸν δή, ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστιν. σύνθετος ἄρα. πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου μετρηθήσεται πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. λέγω, ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτὸς καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε. ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν, ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἔστι πρῶτος. εἰ γάρ, καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ, ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστιν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η, ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν

ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι πρῶτος, ὁ μέγιστος δὲν θὰ μετρῆται ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου ἐκτὸς ὑπὸ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α ἔστω πρῶτος· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν ὁ Δ δὲν μετρεῖται ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ Ε καὶ ὁ Ε ἂς μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα ἐκ τῶν Α, Β, Γ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Ε δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι ἐὰν ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12), ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος, μὴ ὢν πρὸς αὐτὸν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ε πρῶτος. Ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ (VII. 32)· ὁ Ε ἄρα μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· λέγω τώρα, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου θὰ μετρῆται πλὴν τοῦ Α. Διότι, ἐὰν ὁ Ε μετρῆται ὑπὸ ἄλλου, ὁ δὲ Ε μετρῇ τὸν Δ, καὶ ἐκεῖνος ἄρα θὰ μετρῇ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος (θεώρ. 12) μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Ζ. Λέγω, ὅτι ὁ Ζ πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἐὰν ὁ Ζ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ καὶ μετρῇ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρῇ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. Ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 11)· καὶ ὁ Ε ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ζ ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Ζ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α, ἀποδεικνύοντες πάλιν, ὅτι ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν εἶναι καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12) πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ (VII. 32)· ὁ Ζ ἄρα μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Λέγω τώρα, ὅτι ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου θὰ μετρηθῇ πλὴν τοῦ Α. Διότι, ἐὰν ἄλλος τις πρῶτος μετρῇ τὸν Ζ, ὁ δὲ Ζ μετρῇ τὸν Δ, καὶ ἐκεῖνος ἄρα θὰ μετρῇ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (θεώρ. 12) πρῶτον ὄντα μὴ ὢν πρὸς αὐτὸν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ζ, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ (θεώρ. 11)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Ε, Ζ. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ (VII. 19). Ὁ δὲ Α μετρεῖ τὸν Ε· καὶ ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Γ. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Η. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β εἶναι ὁ αὐτός καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὸν Η, ὁ Ζ ἄρα πολλαπλασιά-

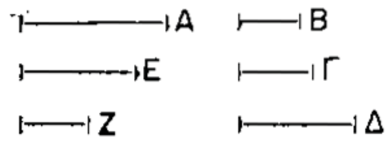
16

Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η. ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ, ὁ Η πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ, ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Η. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Β, Γ, Δ.



Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσιν. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν· ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός. τὸν Ζ ἄρα μετροῦσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α· ὅπερ ἀδύνατον. ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς παρὲξ τῶν Β, Γ, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

σας τὸν Η δίδει τὸν Γ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ (θεώρ. 11)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γινόμενον τῶν Ζ, Η. Ὑπάρχει ἄρα ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 19). Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Ἄς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Θ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Θ, ὁ Η ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Β. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β (θεώρ. 8)· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Θ, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Α. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η (VII. 19). Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ μετρῆται ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς μετρῆται ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν, ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

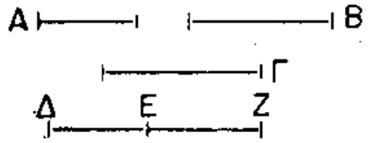
Διότι ἂς μετρῆται ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς Α ὑπὸ τῶν πρώτων Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν Β, Γ, Δ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε νὰ μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Β, Γ, Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α, ἂς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Α. Καὶ ὁ Α μετρεῖται ὑπὸ τῶν πρώτων ἀριθμῶν Β, Γ, Δ. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι γινόμενόν τι, τὸ δὲ γινόμενον τοῦτο μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος, θὰ μετρῇ καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς (VII. 30). Ἄρα οἱ Β, Γ, Δ θὰ μετρήσωσιν ἕνα τῶν Ε, Ζ. Ὅμως δὲν θὰ μετρήσωσι τὸν Ε· διότι ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς οὐδένα τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός. Ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ Α· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Α εἶναι ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὸν Α πρῶτος ἀριθμὸς ἄλλος ἐκτὸς τῶν Β, Γ, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, δύο οἱοιδήποτε προστεθέντες εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτοι.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.



Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσιν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. [ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν]. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστι μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί [εἰσι]. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἔτι διελθόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ. οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

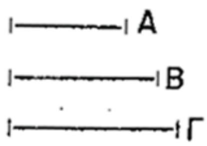
Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι δύο οἱοιδήποτε ἐκ τῶν Α, Β, Γ προστεθέντες θὰ εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτοι, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α καὶ ἀκόμη οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, οἱ ΔΕ, ΕΖ (VIII. 2). Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ μὲν ΔΕ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Α, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β καὶ ἀκόμη ὁ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Γ (VIII. 2). Καὶ ἐπειδὴ οἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἐλάχιστοι, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρὸς ἕκαστον ἀντιστοίχως θὰ εἶναι πρῶτος (VII. 28). Καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ ΔΕ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ΕΖ· ἄρα οἱ ΔΖ, ΔΕ εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν ΕΖ. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρός τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος (VII. 24)· ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ΕΖ ἀριθμὸς πρῶτος· ὥστε καὶ τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΕΖ εἶναι πρῶτος (VII. 25). [Διότι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ γινόμενος ἐκ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνός) εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον]. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν ΖΔ, ΔΕ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΕ σὺν τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ (II. 3)· τὸ τετράγωνον ἄρα τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΕΖ. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ ΔΕ εἶναι ὁ Α, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι ὁ Β, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ΕΖ εἶναι ὁ Γ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ εἶναι πρῶτοι. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Β, Γ πρὸς τὸν Α εἶναι πρῶτοι. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτοι. Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΔΖ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΕ, ΕΖ, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτος (VII. 25). Ἀλλὰ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΖ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ τὰ τετράγωνα ἄρα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι. Δι' ἀφαιρέσεως (τοῦ ΔΕ×ΕΖ), τὰ τετράγωνα τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ληφθέντος γινομένου τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοι. Καὶ δι' ἄλλης ἀφαιρέσεως (τοῦ ΔΕ×ΕΖ), τὰ τετράγωνα ἄρα τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι. Καὶ εἶναι τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ ΔΕ ὁ Α, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ΕΖ ὁ Γ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Γ πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

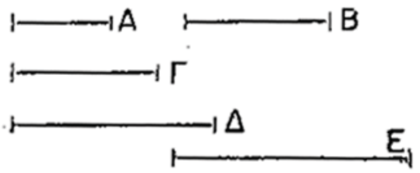


Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ Α τὸν Γ ἐμέτρει· ὥστε ὁ Α καὶ τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν θὰ εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Β εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν θὰ εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ τελευταῖος πρὸς ἄλλον τινά.

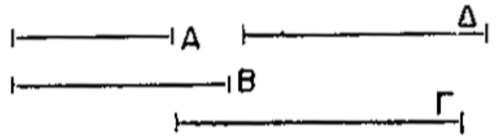
Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (VII. 13). Οἱ δὲ Α, Δ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20). Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ (VII. ὁρ. 21)· ὥστε καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Γ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ (VII. 21)· Ἀλλ' ὁ Α ἐμέτρει τὸν Γ· ὥστε ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Δ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.



Οἱ δὴ Α, Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσηύρηται ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω, ὅτι τοῖς Α, Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσηυρήσθω ὁ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστιν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἤτοι οὖν οὔκ εἰσιν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ καὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ

18.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς.

Οἱ Α, Β ἢ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Καὶ ἐὰν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀπεδείχθη ἤδη (θεώρ. 16), ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τρίτος ἀνάλογος.

Ἀλλὰ τώρα ἔστωσαν οἱ Α, Β μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Γ. Ὁ Α τώρα ἢ θὰ μετρῇ τὸν Γ ἢ δὲν θὰ τὸν μετρῇ. Ἂς τὸν μετρῇ πρῶτον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ· ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Γ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Β. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ (VII. 19)· πρὸς τοὺς Α, Β ἄρα εὑρέθη τρίτος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Γ· λέγω, ὅτι πρὸς τοὺς Α, Β εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ εὑρεθῇ ὁ Δ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ Β (VII. 19). Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ Β εἶναι ὁ Γ. Ὥστε ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Γ· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὸν Δ· ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς τοὺς Α, Β τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων νὰ ἐξετασθῇ πότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τέταρτος ἀνάλογος.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἐξετασθῇ, πότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς τέταρτος ἀνάλογος.

Οὗτοι ἢ δὲν θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν δὲν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ θὰ εἶναι, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε εἶναι ὡς τὸν Α πρὸς τὸν Β, τὸν Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, δι' ἴσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Γ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β, Γ δυνατόν ἐστιν τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ Α, Γ μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Α ἄρα τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. ἀνάλογον ἄρα [ἐστίν] ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προσηύρηται ὁ Ε.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω, ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν Β, Γ ἐστιν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ. ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ. ἀλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

αὐτῶν οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ πρὸς αὐτοὺς ἀριθμὸς τέταρτος ἀνάλογος (θεώρ. 17). Ἂς μὴ εἶναι τώρα οἱ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἐν ᾧ οἱ ἄκροι πάλιν νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς εὑρεθῇ ὁ Δ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε (VII. 14). Οἱ δὲ Α, Γ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20). Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς τοὺς Α,Β,Γ.

Ἀλλὰ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ Α,Γ ἂς μὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς. Διότι ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα ἢ μετρεῖ τὸν Δ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἂς τὸν μετρῇ πρῶτον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β,Γ. Ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε (VII. 19)· πρὸς τοὺς Α, Β, Γ ἄρα εὑρέθη τέταρτος ἀνάλογος ὁ Ε.

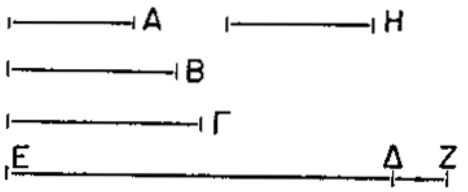
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος ἀριθμὸς πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς εὑρεθῇ ὁ Ε. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Γ (VII. 19). Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Δ· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸν Δ. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ· ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Ἀλλὰ καὶ δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος ἀριθμὸς πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Δ. Ἀλλὰ τέλος οἱ Α, Β, Γ ἂς μὴ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οὔτε οἱ ἄκροι νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἐὰν μὲν ὁ Α μετρῇ τὸν Δ, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέταρτος ἀνάλογος πρὸς αὐτούς, ἐὰν δὲ δὲν τὸν μετρῇ, εἶναι ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

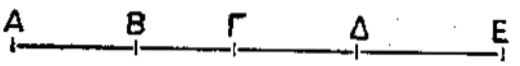


Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα.ʹ

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

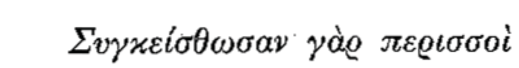


Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ.ʹ

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ᾽ ἑκάστου ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ (VII. 36) καὶ ἔστω ὁ ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τὸν ΔΕ ἡ μονὰς ΔΖ. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἔστω προηγουμένως, ὅτι εἶναι πρῶτος· συνεπῶς ἔχομεν εὕρει πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β, Γ, ΕΖ περισσοτέρους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω, ὅτι ὁ ΕΖ δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα θὰ μετρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (VII. 31). Ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ πρώτου Η· λέγω, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρός τινα ὁ αὐτός. Οἱ δὲ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν ΔΕ· καὶ ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· θὰ μετρῇ συνεπῶς καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὴν μονάδα ΔΖ, ὁ Η ἀριθμός ὤν· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Η ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι πρῶτος. Ἄρα εὑρέθησαν περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοὶ τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ὁσοιδήποτε ἄρτιοι ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἄρτιοι οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΑΕ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι ἄρτιος, ἔχει μέρος ἥμισυ (VII. ὁρ. 6)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. Ὁ ἀριθμὸς δὲ ὁ διαιρούμενος διὰ δύο εἶναι ἄρτιος· ἄρα ὁ ΑΕ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΕ εἶναι ἄρτιος.

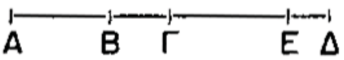
Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι περιττός, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἀπὸ ἑκάστου, ἕκαστος τῶν ἀπομενόντων θὰ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 21).

δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὁ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοί, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

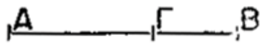


Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ ΔΕ. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσεται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

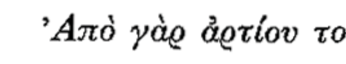


Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς [ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ] ἄρτιος [ἄρα] ἐστὶν ὁ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.



Ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ΄.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Εἶναι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιος. Καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττός, καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς προστεθῶσιν ὁσοιδήποτε περιττοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ἔστω ἀριθμὸς περιττός, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΔ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΓΔ ἡ μονὰς ΔΕ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΓΕ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· εἶναι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος (θεώρ. 22)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα ΑΕ εἶναι ἄρτιος. Καὶ ὁ ΔΕ εἶναι ἡ μονάς. Ἄρα ὁ ΑΔ εἶναι περιττὸς (VII. ὁρ. 7)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ὁ ἄρτιος ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΑΒ εἶναι ἄρτιος, ἔχει μέρος ἥμισυ (VII. ὁρ. 6)· ὥστε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρα ὁ ΑΓ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι περιττός.

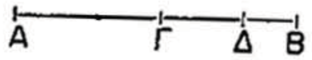
Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ὁ περιττὸς ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΒΓ ἡ μονὰς ἡ ΓΔ· ἄρα ὁ ΔΒ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7). Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΑΔ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24). Καὶ ὁ ΓΔ εἶναι ἡ μονάς· ὁ ΓΑ ἄρα εἶναι περιττὸς (VII. ὁρ. 7)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἄρτιος.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

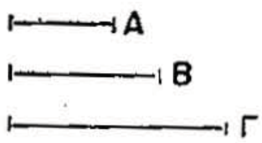
Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω [γὰρ] μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. περισσὸς ἄρα ὁ ΓΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.

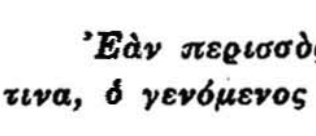


Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν Α, Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ περιττοῦ τοῦ ΑΒ ὁ περιττὸς ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΑΒ εἶναι περιττός, ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ΒΔ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΑΔ εἶναι ἄρτιος. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ ΓΔ εἶναι ἄρτιος (VII. ὁρ. 7)· ὥστε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι περιττός.

Διότι, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ περιττοῦ ΑΒ ὁ ἄρτιος ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΑ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἡ ΑΔ· ἄρα ὁ ΔΒ εἶναι ἄρτιος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΓΔ εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 24). Ἄρα ὁ ΓΑ εἶναι περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας ἄρτιον δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι ἄρτιος.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν ἄρτιον Β, τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι ἄρτιος.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τόσων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν Β, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες εἰς τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ εἶναι ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. Ἐὰν δὲ ὁσοιδήποτε ἄρτιοι ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἄρτιος (θεώρ. 21). Ἄρα ὁ Γ εἶναι ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας περιττὸν δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι περιττός.

Διότι ἂς δίδῃ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τὸν Β, τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι περιττός.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν Β, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν Α, Β περιττός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ

Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

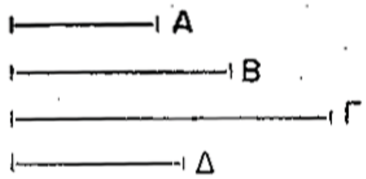
Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ, ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος. οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίων ἔστω ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Α [καὶ] πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν [οἱ Α, Γ] πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ· καί ἐστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καί ἐστιν ὁ Γ ἄρτιος, καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει [ὁ Δ]. τοῦ δὲ Γ ἥμισύ ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α. ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἐστιν. οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

περιττῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι περιττόν. Ὥστε ὁ Γ εἶναι περιττὸς (θεώρ. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς μετρῇ ἄρτιον ἀριθμόν, θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ.

Διότι ἂς μετρῇ ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α τὸν ἄρτιον Β· λέγω, ὅτι θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β, ἂς μετρῇ αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ δὲν εἶναι περιττός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι περιττός. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Γ, ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Β. Ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι περιττὸν (θεώρ. 23). Ὁ Β ἄρα εἶναι περιττός· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐλήφθη ἄρτιος. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Γ περιττός· ἄρα ὁ Γ εἶναι ἄρτιος. Ὥστε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β ἀρτιάκις. Συνεπῶς θὰ μετρήσῃ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρός τινα ἀριθμόν, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι πρῶτος.

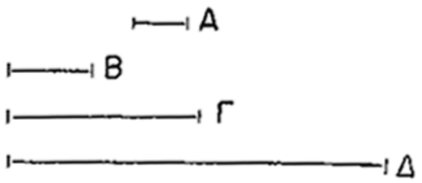
Διότι ἔστω ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πρῶτος πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β, τοῦ δὲ Β ἔστω διπλάσιος ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν Γ.

Διότι, ἐὰν οἱ Α, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ εἶναι ὁ Α περιττός· περιττὸς ἄρα εἶναι καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ περιττὸς ὢν μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Γ εἶναι ἄρτιος, ἄρα ὁ Δ θὰ μετρῇ καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ Γ. Τοῦ δὲ Γ ἥμισυ εἶναι ὁ Β· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α. Ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ὁ Α δὲν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ· οἱ Α, Γ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος.

Ἀπὸ γὰρ δύαδος τῆς Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

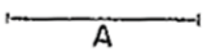


Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος [τῶν Β, Γ, Δ] ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω, ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονάς. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ. καί ἐστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι [καὶ] ἑκάτερος τῶν Β, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

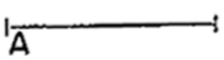


Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστιν, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δή, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔσται ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός.



Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν δίχα καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ

Διότι ἂς διπλασιασθῶσιν ἀπὸ τῆς δυάδος Α ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιοι.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερόν· διότι ἔχει διπλασιασθῆ ἀπὸ δυάδος (VII. ὁρ. 8). Λέγω, ὅτι καὶ μόνον. Διότι ἂς ληφθῇ ἡ μονάς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπὸ μονάδος εὑρίσκονται ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α εἶναι πρῶτος, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου θὰ μετρῆται ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος (VII. ὁρ. 8). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστος τῶν Β, Γ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ περιττὸν τὸν ἥμισυν, εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός.

Διότι ἂς ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς Α τὸν ἥμισυν περιττόν· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός.

Ὅτι μὲν λοιπὸν εἶναι ἀρτιάκις περιττός, εἶναι φανερόν· διότι ὁ ἥμισυς αὐτοῦ περιττὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις (VII. ὁρ. 9). Λέγω τώρα, ὅτι καὶ μόνον. Διότι, ἐὰν ὁ Α θὰ εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν (VII. ὁρ. 8)· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περιττὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον· ὁ Α ἄρα εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε εἶναι ἐκ τῶν διπλασιαζομένων ἀπὸ δυάδος μήτε ἔχῃ τὸν ἥμισυν περιττόν, εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

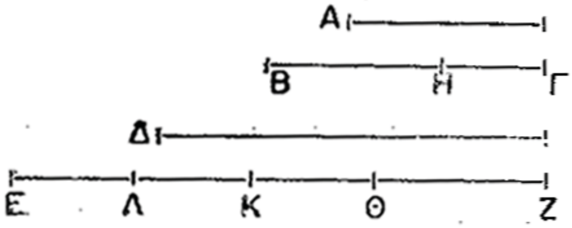
Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ εἶναι ἐκ τῶν διπλασιαζομένων ἀπὸ δυάδος, μήτε νὰ ἔχῃ τὸν ἥμισυν περιττόν· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

Ὅτι μὲν λοιπὸν ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερὸν (VII. ὁρ. 8)· διότι δὲν ἔχει τὸν ἥμισυν περιττόν. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἀρτιάκις περιττός. Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν Α διὰ δύο, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ διὰ δύο καὶ συνεχίσωμεν πάντοτε, θὰ καταντήσωμεν εἰς τινα περιττὸν ἀριἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὔ, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Ἔστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος ἑκάτερος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΒΗ ἴσος ἐστίν, λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΓ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΖΛ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ. διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΓΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ Α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ δι-

θμόν, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Διότι, ἐὰν δὲν τὸν μετρῇ, θὰ καταντήσωμεν εἰς δυάδα καὶ ὁ Α θὰ εἶναι εἷς τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν (VII. ὁρ. 9). Ὥστε ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις περιττός. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. Ὁ Α ἄρα εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἀφαιρεθῶσι δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἀπὸ τοῦ τελευταίου ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον, θὰ εἶναι ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ ἑαυτοῦ.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ ἴσος πρὸς τὸν Α ἕκαστος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ὡς εἶναι ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, ΒΓ, Δ.

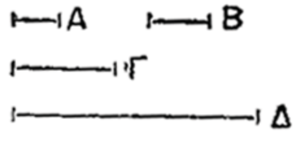
Διότι ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, πρὸς δὲ τὸν Δ ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΖΚ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΒΓ, ἐν ᾧ ὁ ΖΘ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΒΗ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΘΚ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΗΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α (VII. 13), ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ πρὸς τὸν ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΖΚ, ὁ δὲ Α πρὸς τὸν ΖΘ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΖΛ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ. Καὶ δι᾽ ἀφαιρέσεως (VII. 11 καὶ 13) ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ. Εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ὅλοι οἱ ἡγούμενοι πρὸς ὅλους τοὺς ἑπομένους (VII. 12)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. Εἶναι δὲ ἴσος ὁ μὲν ΚΘ πρὸς τὸν ΓΗ, ὁ δὲ ΖΘ πρὸς τὸν Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α· εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς ὅλους τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ (τὸ ἄθροισμά των)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

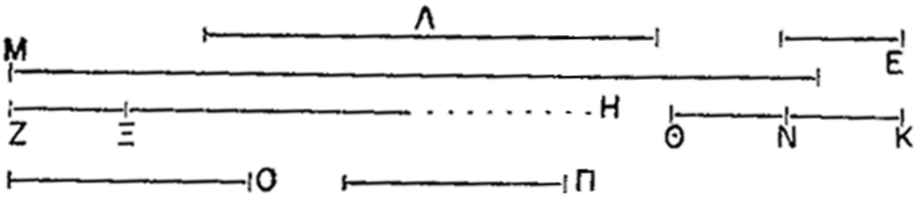
Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀνα-

πλασίονι ἀναλογίᾳ ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.



Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α, Μ. καί ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ. ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καί ἐστι δυὰς ὁ



Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ΖΗ τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Λ, ΚΘ, Ε. καί ἐστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Λ, ΘΚ, Ε. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΖΞ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Λ Μ, καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ. καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. ἀλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καί ἐστιν ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν

λογίᾳ μὲ λόγον ἓν πρὸς δύο, μέχρις ὅτου τὸ ἄθροισμα ὅλων γίνῃ πρῶτος καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν τελευταῖον δίδῃ τινά, ὁ γενόμενος θὰ εἶναι τέλειος.

Διότι ἃς ληφθῶσιν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἓν πρὸς δύο, μέχρις ὅτου τὸ ἄθροισμα ὅλων γίνῃ πρῶτος, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμά των ὁ Ε, καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἃς δίδῃ τὸν ΖΗ. Λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ εἶναι τέλειος.

Διότι ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Α, Β, Γ, Δ ἃς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε μὲ λόγον ἓν πρὸς δύο ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ (VII. 14). Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Μ (VII. 19). Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Μ εἶναι ὁ ΖΗ. Ὁ Α ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν ΖΗ· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν ΖΗ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Καὶ εἶναι δυὰς ὁ Α· ἄρα εἶναι διπλάσιος ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἶναι δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε καὶ ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ λόγον ἓν πρὸς δύο. Ἃς ἀφαιρεθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ τελευταίου τοῦ ΖΗ ἴσος πρὸς τὸν πρῶτον Ε ἕκαστος τῶν ΘΝ, ΖΞ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ ἑαυτοῦ (θεώρ. 35). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Λ, ΚΘ, Ε. Καὶ εἶναι ὁ ΝΚ ἴσος πρὸς τὸν Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Λ, ΘΚ, Ε. Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΖΞ ἴσος πρὸς τὸν Ε, ὁ δὲ Ε ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ τὴν μονάδα. Ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ εἶναι ἴσος καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ τὴν μονάδα· καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἐκτὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς μετρῇ τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο ἃς μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Ο μετρεῖ τὸν ΖΗ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Π· ὁ Π ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ο δίδει τὸν ΖΗ. Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἔδωσε τὸν ΖΗ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ (VII. 19). Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ μονάδος ὑπάρχουσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα δὲν θὰ μετρῆται ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ πλὴν τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 13). Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Ο δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ· δὲν θὰ μετρῇ ἄρα ὁ Ο τὸν Δ. Ἀλλ' ὡς εἶναι ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, οὕτως εἶναι ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὔτε ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Π (VII. ὁρισμ. 21). Καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριμὴ μετρεῖ, πρῶτος [ἐστίν]. οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· καί ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ Β ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε οἱ Ε, ΘΚ, Λ. καί εἰσιν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Λ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε· ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Λ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. καί ἐστιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ Ο ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον· ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός. οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρήσει τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῇ μονάδι ἴσος. τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θμὸς πρὸς πάντα, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος (VII. 29). Οἱ Ε, Π ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· καὶ εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Ο καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Ἔστω, ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Β. Καὶ ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Β, Γ, Δ, τόσοι ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἶναι οἱ Ε, ΘΚ, Λ πρὸς τοὺς Β, Γ, Δ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Λ (VII. 14). Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Β, Λ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε (VII. 19)· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Π, Ο· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Π, Ο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Λ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. Καὶ εἶναι ὁ Π ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Β καὶ ὁ Λ ἄρα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Ο· ὅπερ ἀδύνατον· διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν ληφθέντων εἶναι ὁ αὐτός. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τὸν ΖΗ ἀριθμός τις ἄλλος ἐκτὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. Τέλειος δὲ ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὰ μέρη του (VII. ὁρ. 23)· τέλειος ἄρα εἶναι ὁ ΖΗ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

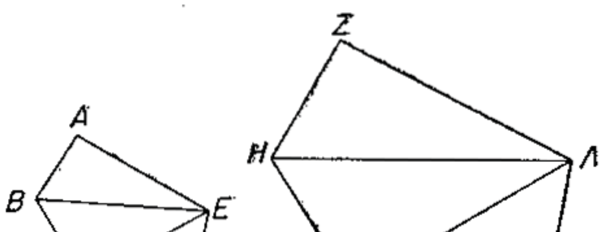
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

VI, 20.

Ἄλλως.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ. λέγω, ὅτι ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ. πάλιν ἐπεὶ ὅμοιόν [ἐστι] τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



VI, 27.

Ἄλλως.

Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ καὶ παραβληθὲν

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

VI, 20.

Ἄλλως.

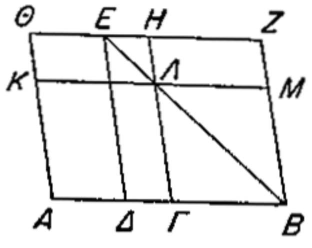
Ἀποδεικνύομεν δὲ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον προχειρότερον, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ὁμόλογα.

Διότι ἂς ληφθῶσι πάλιν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ. Λέγω, ὅτι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ : τρίγωνον ΖΗΛ = $ΒΕ^2 : ΗΛ^2$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγ. ΒΕΓ : τρίγ. ΗΛΘ = $ΒΕ^2 : ΗΛ^2$. Εἶναι ἄρα τρίγ. ΑΒΕ : τρίγ. ΖΗΛ = τρίγ. ΒΕΓ : τρίγ. ΗΛΘ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΘ, ἄρα ΕΒΓ : ΛΗΘ = $ΓΕ^2 : ΘΛ^2$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ τρίγ. ΕΓΔ : τρίγ. ΛΘΚ = $ΓΕ^2 : ΘΛ^2$. Εἶναι ἄρα τρίγ. ΒΕΓ : τρίγ. ΛΗΘ= τρίγ. ΓΕΔ : τρίγ. ΛΘΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ΕΒΓ : ΛΗΘ = ΑΒΕ : ΖΗΛ. Καὶ ὡς ἄρα ΑΒΕ : ΖΗΛ = ΒΕΓ : ΗΛΘ = ΕΓΔ : ΛΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI, 27.

Ἄλλως.

Διότι ἔστω πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΛΒ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΕΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῷ ΛΒ. λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ τοῦ ΑΕ.

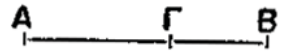


Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒ τῷ ΛΒ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΖ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ΛΖ τοῦ ΚΕ. ἴσον δὲ τὸ ΛΖ τῷ ΔΛ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ. κοινὸν [προσκείσθω] τὸ ΚΔ. ὅλον ἄρα τὸ ΑΛ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI, 30.

Ἄ λ λ ω ς.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI, 31.

Ἄ λ λ ω ς.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις [τε] καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ἀφοῦ παραβληθῇ τὸ ΑΛ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τὸ ΛΒ, καὶ ἂς παραβληθῇ πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τὸ ΕΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καί ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον τὸ ΛΒ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΕ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΛΒ, εἶναι ταῦτα περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΕΒ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπειδὴ ΛΖ = ΛΘ, διότι καὶ ΖΗ = ΗΘ, ἄρα ΛΖ > ΚΕ. Εἶναι δὲ ΛΖ = ΔΛ (I. 43). Ἄρα ΔΛ > ΕΚ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος τὸ ΚΔ. Ἄρα ΑΛ > ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI, 30.

Ἄλλως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Πρέπει ἡ ΑΒ νὰ τμηθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε $ΑΒ \times ΒΓ = ΓΑ^2$ (II. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΒ \times ΒΓ = ΓΑ^2$, εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$ (VI. 17). Ἡ ΑΒ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI, 31.

Ἄλλως.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουσι λόγον οἷον τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εὐθύγραμμον $= (ΓΒ : ΒΑ)^2$. Εἶναι δὲ καὶ $ΒΓ^2 : ΒΑ^2 = (ΓΒ : ΒΑ)^2$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εὐθύγραμμον $= ΓΒ^2 : ΒΑ^2$· Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι εὐθύγραμμον ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς εὐθύγραμμον ἀπὸ τῆς $ΓΑ = ΒΓ^2 : ΓΑ^2$. Ὥστε καὶ ὡς τὸ εὐθύγραμμον ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων $ΒΑ + ΑΓ = ΒΓ^2 : ΒΑ^2 + ΑΓ^2$. Εἶναι δὲ $ΒΓ^2 = ΒΑ^2 + ΑΓ^2$. Ἄρα εὐθύγραμμον ἀπὸ τῆς ΒΓ = ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

VI, 33.

Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ. καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστιν ἴση, ἴσον ἄρα [ἐστί] καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΒΗΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΒΓ, ΗΓΚ ἴσος ἐστίν. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΛΚ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τῷ ΕΘΝ τομεῖ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΕΘΖ τομέων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς· καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τοῦ ΕΘΝ τομέως, καὶ εἰ ἴση, ἴσος, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

[Πόρισμα]

Καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

VII, 20.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ

VI, 33.

Λέγω, ὅτι καὶ ὡς τόξ. ΒΓ : τόξ. ΕΖ = τομεὺς ΗΒΓ : τομέα ΘΕΖ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΓ, ΓΚ καὶ ἀφοῦ ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν τόξων ΒΓ, ΓΚ τὰ σημεῖα Ξ, Ο ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

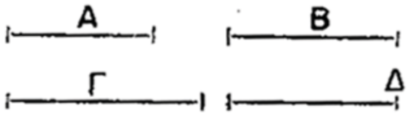
Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΒΗ, ΗΓ ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΓΗ, ΗΚ καὶ ἡ βάσις ΒΓ = βάσιν ΓΚ, ἄρα τρίγ. ΗΒΓ = τρίγ. ΗΓΚ. Καὶ ἐπειδὴ τόξ. ΒΓ = τόξ. ΓΚ, εἶναι καὶ τόξ. ΒΑΓ = τόξ. ΓΑΚ· ὥστε καὶ γωνία ΒΞΓ = γων. ΓΟΚ. Τὸ τμῆμα ἄρα ΒΞΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΟΚ. Καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων χορδῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ βαίνοντα δὲ ἐπὶ ἴσων χορδῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ἄρα τμῆμα ΒΞΓ = τμῆμα ΓΟΚ. Εἶναι δὲ καὶ τρίγ. ΗΒΓ = τρίγ. ΗΓΚ· καὶ ὅλος ἄρα ὁ τομεὺς ΒΗΓ = πρὸς ὅλον τὸν τομέα ΗΓΚ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τομ. ΗΚΛ = τομ. ΗΒΓ = τομ. ΗΓΚ. Οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΛΚ εἶναι μεταξύ των ἴσοι. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ἴσοι μεταξύ των καὶ οἱ τομεῖς ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ. Ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ τόξον ΛΒ τοῦ τόξου ΒΓ, τοσαυταπλάσιος εἶναι καὶ ὁ τομεὺς ΗΒΛ τοῦ τομέως ΗΒΓ. Διά τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ τόξον ΝΕ τοῦ τόξου ΕΖ, τοσαυταπλάσιος εἶναι καὶ ὁ τομεὺς ΘΕΝ τοῦ τομέως ΘΕΖ. Ἐὰν ἄρα τόξ. ΒΛ = τόξ. ΕΝ, εἶναι καὶ τομεὺς ΒΗΛ = τομέα ΕΘΝ, καὶ ἐὰν τόξ. ΒΛ $>$ τόξ. ΕΝ, εἶναι καὶ τομ. ΒΗΛ $>$ τομ. ΘΕΝ, καὶ ἐὰν τόξ. ΒΛ $<$ τόξ. ΕΝ, εἶναι καὶ τομ. ΒΗΛ $<$ τομ. ΘΕΝ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν τόξα τὰ ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΕΘΖ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν τόξου ΒΓ καὶ τοῦ τομέως ΗΒΓ καὶ τὸ τόξον ΒΛ καὶ ὁ τομεὺς ΗΒΛ, τοῦ δὲ τόξου ΕΖ καὶ τοῦ τομέως ΘΕΖ ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ τὸ τόξον ΕΝ καὶ ὁ τομεὺς ΘΕΝ· καὶ ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἐὰν τόξ. ΒΛ $\gtreqless$ τόξ. ΕΝ, εἶναι καὶ τομεὺς ΒΗΛ $\gtreqless$ τομέως ΕΘΝ. Εἶναι ἄρα τόξ. ΒΓ : τόξ. ΕΖ = τομ. ΗΒΓ : τομ. ΘΕΖ.

[Πόρισμα]

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τομεὺς : τομέα = γωνία : γωνίαν.

VII, 20. [Ἐξ ἄλλου κώδικος]

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, εἶναι *τοῦ μέσου. καὶ ἐὰν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς*

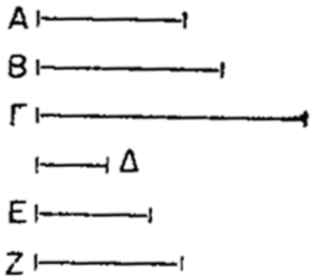


τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. λέγω, ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Δ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ὑπὸ [τῶν] Β, Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII, 22.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.



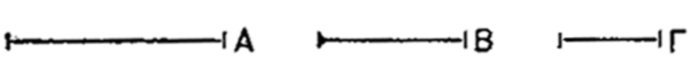
Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII, 31.

Ἄλλως.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α. λέγω, ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ἐπεὶ γὰρ σύνθετός



ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β. λέγω, ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μή, σύν-

ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου. Καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ A, B, Γ, ὥστε $A:B = B:\Gamma$. Λέγω, ὅτι $A \times \Gamma = B^2$. Διότι ἂς ληφθῇ $B = \Delta$. Εἶναι ἄρα $A : B = \Delta : \Gamma$. Ἄρα $A \times \Gamma = B \times \Delta$ (VII. 19). Ἀλλὰ $B \times \Delta = B^2$ διότι $B = \Delta$. Ἄρα $A \times \Gamma = B^2$.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω $A \times \Gamma = B^2$. Λέγω, ὅτι $A : B = B : \Gamma$. Διότι, ἐπειδὴ $A \times \Gamma = B^2$, εἶναι δὲ $B^2 = B \times \Delta$, εἶναι ἄρα $A : B = \Delta : \Gamma$. Ἀλλὰ $B = \Delta$. Εἶναι ἄρα $A : B = B : \Gamma$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII. 22 [Ἐξ ἄλλου κώδικος]

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι ἴσοι πρὸς αὐτοὺς κατὰ τὸ πλῆθος καὶ λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, καὶ δι' ἴσου θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ καὶ ἄλλοι ἴσοι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτοὺς οἱ Δ, E, Z καὶ λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἔστω δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, ἤτοι $A : B = E : Z$ καὶ $B : \Gamma = \Delta : E$. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου εἶναι $A : \Gamma = \Delta : Z$.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A : B = E : Z$, ἄρα εἶναι $A \times Z = B \times E$ (VII. 19). Πάλιν, ἐπειδὴ $B : \Gamma = \Delta : E$, ἄρα εἶναι $\Delta \times \Gamma = B \times E$· Ἐδείχθη δὲ καὶ $A \times Z = B \times E$. Ἄρα $A \times Z = \Delta \times \Gamma$. Εἶναι ἄρα $A : \Gamma = \Delta : Z$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

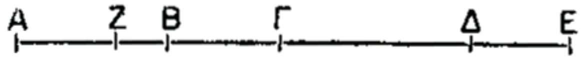
VII. 31.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A. Λέγω, ὅτι μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Δ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος καὶ ἔστω ὁ ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ B. Λέγω, ὅτι ὁ B εἶναι πρῶτος. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι σύνθετος. Ἄρα θὰ μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ. Ἂς μετρῆται ὑπὸ τοῦ Γ. Ἄρα $\Gamma < B$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ *θετός ἐστιν. μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ἀλλ' ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ ἐλάσσων ὢν τοῦ Β· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετός ἐστι. πρῶτος ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

IX, 22.

Ἄλλως.

Ἢ καὶ οὕτως· ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒ περιττός ἐστιν, ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτοῦ μονὰς ἡ ΖΒ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΖ ἄρτιός ἐστιν. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΒΓ περιττός ἐστιν, καί ἐστι μονὰς ἡ ΖΒ, ἄρτιος ἄρα ὁ ΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΖ ἄρτιος. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.



τὸν Β, ἀλλ' ὁ Β μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Α μικρότερος ὢν τοῦ Β· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ Β σύνθετος. Ἄρα εἶναι πρῶτος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX, 22.

Ἄλλως.

Ἢ καὶ τοιουτοτρόπως· ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ΑΒ εἶναι περιττός, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μονὰς ἡ ΖΒ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ΑΖ εἶναι ἄρτιος. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ ΒΓ εἶναι περιττὸς καὶ ΖΒ εἶναι ἡ μονάς, ἄρα ὁ ΖΓ εἶναι ἄρτιος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ ΑΖ ἄρτιος. Ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΓ εἶναι ἄρτιος. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ ΓΕ εἶναι ἄρτιος. Ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΕ εἶναι ἄρτιος.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ V.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

3. Ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις δύο ὁμογενῶν (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν περιέχει καὶ τὸν λόγον τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν.

4. Οὗτος ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς· ἐὰν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta$ λαμβανόμενον πολλάκις ὑπερβαίνει τὸν α. Ὁ ὁρισμὸς ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου, τὸ ὁποῖον ἐξεφράσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου (τόμ. I σ. 24).

5. Ἡ ἑρμηνεία τούτου παρέχεται εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν σ. 19.

7. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἑρμηνείας τοῦ ὁρισμοῦ 5 ἐὰν ἡ τομὴ $\alpha : \beta$ εἶναι ἀνωτέρα τῆς τομῆς $\gamma : \delta$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$. (ἢ $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, ἐὰν $\mu A > \nu B$ καὶ συγχρόνως $\mu\Gamma \leqq \nu\Delta$).

8. Διὰ τούτου νοεῖται ἡ συνεχὴς ἀναλογία $\alpha : \beta = \beta : \gamma$.

9. Ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, τότε $\alpha : \gamma = (\alpha : \beta)^2 = \alpha^2 : \beta^2$ (πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha : \beta = \beta : \gamma$ ἐπὶ $\frac{\alpha}{\beta}$).

Τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἔχει διπλασίονα λόγον, ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον σημαίνει, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ τρίτον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου (ἢ πρὸς τὸν λόγον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἰς τὸ τετράγωνον).

10. Ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, τότε $\alpha : \delta = (\alpha : \beta)^3 = \alpha^3 : \beta^3$. Ἐν ᾧ τέσσαρα μεγέθη τὰ α, β, γ, δ εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τέταρτον εἶναι τριπλασίων τοῦ λόγου τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον, δηλ. $\alpha : \delta = (\alpha : \beta)^3$. Καὶ γενικῶς ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta = \ldots = \varkappa : \lambda$, τότε $\alpha : \lambda = (\alpha : \beta)^\nu = \alpha^\nu : \beta^\nu$.

11. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta = \ldots\ldots \varkappa : \lambda$, ὁμόλογα μεγέθη εἶναι τὰ α, γ, ...κ καὶ τὰ β, δ ..... λ.

12. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ (ἐναλλὰξ λόγος).

13. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $\beta : \alpha = \delta : \gamma$ (ἀνάπαλιν λόγος).

14. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $(\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$ (σύνθεσις λόγου).

15. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $(\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta$ (διαίρεσις λόγου, διελόντι).

16. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $\alpha : (\alpha - \beta) = \gamma : (\gamma - \delta)$ (ἀναστροφὴ λόγου).

17. Ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη α, β .....ν, A, B.....N

καὶ
$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= A : B \\ \beta : \gamma &= B : \Gamma \\ \gamma : \delta &= \Gamma : \Delta \\ &\vdots \\ \mu : \nu &= M : N \end{aligned}$$

τότε ὁ δι' ἴσου λόγος ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\alpha : \nu = A : N$. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εἰς τὸ 22 θεώρημα.

18. Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη τὰ α, β, γ καὶ ἄλλα τρία τὰ A, B, Γ καὶ εἶναι $\alpha : \beta = B : \Gamma$, $\beta : \gamma = A : B$, τότε ὁ δι' ἴσου λόγος ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ εἶναι ἡ $\alpha : \gamma = A : \Gamma$. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εἰς τὸ 23ον θεώρ. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν τεταραγμένην ταύτην ἀναλογίαν, ἡ προηγουμένη ἀναλογία τοῦ ὁρισμοῦ 17 ἔπρεπε νὰ ὀνομάζεται «τεταγμένη» ἀναλογία. Ἡ λέξις τεταγμένη ἀπαντᾷ πράγματι εἰς μερικοὺς κώδικας· ὁ Heiberg ὅμως δὲν τὴν ἐθεώρησεν αὐθεντικὴν καὶ τὴν ἀπήλειψεν εἰς τὴν ἔκδοσίν του.

Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν ἀφορᾷ εἰς τὰ σύμμετρα καὶ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη. Τὰ μεγέθη παρίστανται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, ὁτὲ μὲν μὲ ἓν γράμμα, ὁτὲ δὲ μὲ δύο.

Θεώρ. 1. Ἐὰν $AB = \rho . E$, $\Gamma\Delta = \rho . Z$, τότε $AB + \Gamma\Delta$ δηλ. $\rho . E + \rho . Z = \rho\ (E + Z)$.

Ἂς διαιρεθῇ τὸ AB εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ E μεγέθη, τὰ AH, HB, καὶ τὸ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Z μεγέθη τὰ $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$. Τὸ πλῆθος τῶν AH, HB εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$. Τότε θὰ εἶναι

$$AB = AH + HB = E + E$$

$$\Gamma\Delta = \Gamma\Theta + \Theta\Delta = Z + Z.$$ Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν $AB + \Gamma\Delta = \quad = (E + Z) + (E + Z)$ ἢ $2\ (E + Z)$. Ἐὰν τὸ AB διαιρεθῇ εἰς ρ μεγέθη ἴσα πρὸς τὸ E καὶ τὸ $\Gamma\Delta$ εἰς ρ μεγέθη ἴσα πρὸς τὸ Z, τότε θὰ εἶναι $AB = E + E + E + \ldots\ldots + E = \rho . E$, καὶ

$$\Gamma\Delta = Z + Z + Z + \ldots\ldots + Z = \rho . Z.$$ Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν:

$$AB + \Gamma\Delta = (E + Z) + (E + Z) + (E + Z) + \ldots\ldots + (E + Z) \text{ ἢ}$$

$$AB + \Gamma\Delta = \rho(E + Z) = \rho E + \rho Z.$$ Δηλ. ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ ἀριθμὸν ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν· τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές· πρόκειται περὶ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

2. Ἐὰν $AB = \rho . \Gamma$, $\Delta E = \rho . Z$ καὶ $BH = \lambda . \Gamma$, $E\Theta = \lambda . Z$, τότε θὰ εἶναι $AB + BH = AH = (\rho + \lambda) . \Gamma$ καὶ $\Delta E + E\Theta = \Delta\Theta = (\rho + \lambda) . Z$.

Διότι $AB = \Gamma + \Gamma + \Gamma + \ldots\ldots = \rho . \Gamma$

$BH = \Gamma + \Gamma + \Gamma + \ldots\ldots = \lambda . \Gamma$. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν:

$AB + BH = AH = \quad = \rho . \Gamma + \lambda . \Gamma$. Καὶ κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα $= (\rho + \lambda) . \Gamma$. Ὁμοίως $\Delta E + E\Theta = \Delta\Theta = (\rho + \lambda) . Z$.

3. Ἐὰν $A = B . \rho$, $\Gamma = \Delta . \rho$ καὶ $EZ = A . \lambda$, $H\Theta = \Gamma . \lambda$, θὰ εἶναι καὶ $EZ = B . (\rho . \lambda)$, $H\Theta = \Delta(\rho . \lambda)$. Διότι ἂς διαιρεθῇ τὸ EZ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ A μεγέθη τὰ EK, KZ καὶ τὸ $H\Theta$ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ μεγέθη τὰ $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$. Τὸ πλῆθος τῶν EK, KZ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$.

Θὰ εἶναι δηλ. $ΕΖ = ΕΚ + ΚΖ + ... = Β . ρ + Β . ρ + Β . ρ + ...$ (1).

$$ΗΘ = ΗΛ + ΛΘ + ... = Δ . ρ + Δ . ρ + Δ . ρ + ... \quad (2)$$

Ἡ (1) κατὰ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον θεώρημα εἶναι $ΕΖ = Β(ρ + ρ + ρ + \cdots)$ ἢ $= ρ(Β + Β + Β + ...)$ ἢ $ΕΖ = Β(ρ . λ) = ρ . (Β . λ)$. Ὁμοίως ἐκ τῆς (2), $ΗΘ = Δ(ρ . λ) = ρ . (Δ . λ)$. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

4. Ἐὰν $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, $Ε = Α . ρ$, $Ζ = Γ . ρ$, $Η = Β . λ$, $Θ = Δ . λ$, τότε θὰ εἶναι $\frac{Ε}{Η} = \frac{Ζ}{Θ}$. Διότι ἔστω $Κ = Ε . μ$, $Λ = Ζ . μ$, $Μ = Η . ν$, $Ν = Θ . ν$. Κατὰ τὸ τρίτον θεώρημα ἔχομεν $Κ = Α(ρ . μ)$, $Λ = Γ(ρ . μ)$, $Μ = Β(λ . ν)$, $Ν = Δ(λ . ν)$. Καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$ καὶ Κ, Λ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Γ, καὶ Μ, Ν εἶναι ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Δ, ἐὰν ἄρα $Κ > Μ$ θὰ εἶναι καὶ $Λ > Ν$. Ἐὰν $Κ = Μ$ θὰ εἶναι καὶ $Λ = Ν$. Καὶ ἐὰν $Κ < Μ$ θὰ εἶναι καὶ $Λ < Ν$. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Κ, Λ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Ε, Ζ τὰ δὲ Μ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Η, Θ. Θὰ εἶναι ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 $\frac{Ε}{Η} = \frac{Ζ}{Θ}$. Ἐπειδὴ ἡ σχέσις $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$ περιέχει καὶ τοὺς ἀσυμμέτρους, τὸ θεώρημα δηλοῖ κατὰ τὸν Cl. Thaer, ὅτι πολλαπλασιασμὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ρητὸν δίδει ἐξαγόμενον μὴ ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν παρίσταται ὁ πραγματικὸς ἀριθμός.

5. Ἐὰν $ΑΒ = ΓΔ . ρ$, $ΑΕ = ΓΖ . ρ$, τότε θὰ εἶναι καὶ $ΑΒ - ΑΕ = (ΓΔ - ΓΖ) . ρ$. Διότι ἂς ληφθῇ $ΕΒ = ΓΗ . ρ$. Ἐπειδὴ $ΑΕ = ΓΖ . ρ$ καὶ $ΕΒ = ΓΗ . ρ$, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη θὰ εἶναι :

$ΑΕ + ΕΒ = ΓΖ . ρ + ΓΗ . ρ$ ἢ $ΑΒ = (ΓΖ + ΓΗ) . ρ = ΗΖ . ρ$ (1). Ἔχει δὲ ληφθῇ $ΑΕ = ΓΖ . ρ$ καὶ $ΑΒ = ΓΔ . ρ$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $ΗΖ = ΓΔ$. Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης τοῦ ΓΖ ἔχομεν $ΗΖ - ΓΖ = ΓΔ - ΓΖ$ ἢ $ΗΓ = ΖΔ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΕ = ΓΖ . ρ$ καὶ $ΕΒ = ΗΓ . ρ$, εἶναι δὲ $ΗΓ = ΖΔ$, ἄρα $ΕΒ = ΖΔ . ρ$ δηλ. τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΕΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Κατὰ δὲ τὴν ὑπόθεσιν $ΑΕ = ΓΖ . ρ$ καὶ $ΑΒ = ΓΔ . ρ$· ἄρα τὸ ΕΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Δηλ. ἡ διαφορὰ $ΑΒ - ΑΕ$ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς $ΓΔ - ΓΖ$, ὁσάκις εἶναι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ.

6. Ἐὰν $ΑΒ = Ε . ρ$, $ΓΔ = Ζ . ρ$ καὶ $(ΑΒ - ΗΒ) = ΑΗ = Ε . λ$, $(ΓΔ - ΘΔ) = ΓΘ = Ζ . λ$, τότε θὰ εἶναι ἢ $ΗΒ = Ε$, $ΘΔ = Ζ$, ἢ $ΗΒ = Ε . μ$, $ΘΔ = Ζ . μ$.

Ἔστω πρῶτον $ΗΒ = Ε$. Λέγω, ὅτι καὶ $ΘΔ = Ζ$. Ἂς ληφθῇ $ΓΚ = Ζ$. Ἐπειδὴ $ΑΗ = Ε . λ$, $ΓΘ = Ζ . λ$, εἶναι δὲ $ΗΒ = Ε$, $ΓΚ = Ζ$, δι' ἀντιστοίχων προσθέσεων κατὰ μέλη λαμβάνομεν (κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα):

$$\text{ΑΗ} + \text{ΗΒ} = \text{Ε}\,.\,\lambda + \text{Ε} \text{ ἢ } \text{ΑΒ} = \text{Ε}\,(\lambda + 1)$$

καὶ $\text{ΓΘ} + \text{ΓΚ} = \text{Ζ}\,.\,\lambda + \text{Ζ}$ ἢ $\text{ΚΘ} = \text{Ζ}\,(\lambda + 1)$, (1). Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν δὲ εἶναι : $\text{ΑΒ} = \text{Ε}\,.\,\rho$, $\text{ΓΔ} = \text{Ζ}\,.\,\rho$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Ε, Ζ καὶ $\text{ΑΒ} = \text{Ε}(\lambda + 1)$, θὰ εἶναι ἄρα καὶ $\text{ΓΔ} = \text{Ζ}\,(\lambda + 1)$. Εἶναι δὲ κατὰ τὴν (1) καὶ $\text{ΚΘ} = \text{Ζ}(\lambda + 1)$. Συνεπῶς $\text{ΚΘ} = \text{ΓΔ}$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὸ ΓΘ, ἔχομεν $\text{ΚΘ} - \text{ΓΘ} = \text{ΓΔ} - \text{ΓΘ}$ ἢ $\text{ΚΓ} = \text{ΘΔ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη $\text{ΓΚ} = \text{Ζ}$, ἄρα $\text{ΘΔ} = \text{Ζ}$. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἀποδείξεως ἐὰν ληφθῇ $\text{ΗΒ} = \text{Ε}\,.\,\mu$, ὅτε θὰ εἶναι $\text{ΘΔ} = \text{Ζ}\,.\,\mu$.

Εἰς τὸ VII βιβλίον ἐπαναλαμβάνονται αἱ ἀνωτέρω καὶ ἄλλαι προτάσεις τοῦ V βιβλίου, διότι ὁ Εὐκλείδης διατηρεῖ τὴν διάκρισιν μεγέθους καὶ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

7. Ἔστω $\text{Α} = \text{Β}$, Γ τυχόν. Τότε $\frac{\text{Α}}{\text{Γ}} = \frac{\text{Β}}{\text{Γ}}$ καὶ $\frac{\text{Γ}}{\text{Α}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Β}}$. Ἂς ληφθῇ $\text{Α}\,.\,\rho = \text{Δ}$, $\text{Β}\,.\,\rho = \text{Ε}$, $\text{Ζ} = \text{Γ}\,.\,\lambda$. Ἐπειδὴ $\text{Α} = \text{Β}$, ἕπεται $\text{Δ} = \text{Ε}$. Ἐὰν λοιπὸν $\text{Δ} \gtreqless \text{Ζ}$, θὰ εἶναι καὶ $\text{Ε} \gtreqless \text{Ζ}$. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Δ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὸ δὲ Ζ τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Γ· καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 θὰ εἶναι $\frac{\text{Α}}{\text{Γ}} = \frac{\text{Β}}{\text{Γ}}$.

Διὰ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἀφοῦ ληφθῶσι τὰ πολλαπλάσια τῶν Α, Β, Γ ὡς προηγουμένως, τότε ἐὰν $\text{Ζ} \gtreqless \text{Δ}$ θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $\text{Ζ} \gtreqless \text{Ε}$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν Ζ πολλαπλάσιον τοῦ Γ, τὰ δὲ Δ, Ε ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β. Συνεπῶς κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 θὰ εἶναι $\frac{\text{Γ}}{\text{Α}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Β}}$.

8. (Πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος). Ἔστω $\text{ΑΒ} \neq \text{Γ}$ καὶ δὴ καὶ $\text{ΑΒ} > \text{Γ}$, τυχὸν δὲ τὸ Δ. Λέγω ὅτι 1) $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Δ}} > \frac{\text{Γ}}{\text{Δ}}$. Διότι ἔστω $\text{Γ} = \text{ΒΕ}$, $\text{ΑΒ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΒ}$ καὶ ἔστω πρότερον $\text{ΑΕ} < \text{ΕΒ}$ [δηλ. $(\text{ΑΒ} - \text{Γ}) < \text{Γ}$]. Τὸ ΑΕ (δηλ. ἡ διαφορὰ ΑΒ—Γ) ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ κατά τινα στιγμὴν τὸ Δ (ἀξίωμα συνεχείας, ὁρισμ. 4). Ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ τὸ ΖΗ, ὅτε θὰ εἶναι $\text{ΑΕ}\,.\,\rho = \text{ΖΗ} > \text{Δ}$, (1). Ἐπίσης ἂς ληφθῇ $\text{ΕΒ}\,.\,\rho = \text{ΗΘ}$ καὶ $\text{Γ}\,.\,\rho = \text{Κ}$. Καὶ ἂς ληφθῇ ἀκόμη $\text{Λ} = 2.\text{Δ}$, $\text{Μ} = 3.\text{Δ}$..... μέχρις ὅτου λάβωμεν τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ Δ, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\text{Κ}(= \text{Γ}\,.\,\rho)$. Ἔστω τοῦτο τὸ Ν, ὥστε νὰ εἶναι $\text{Ν} = 4\text{Δ} > \text{Κ}$. Ἀφοῦ τὸ Ν εἶναι τὸ πρῶτον μεγαλύτερον τοῦ Κ, πολλαπλάσιον τοῦ Δ, τὸ Κ εἶναι τὸ πρῶτον μικρότερον τοῦ Ν, πολλαπλάσιον τοῦ Δ. Συνεπῶς $\text{Κ} \geqq \text{Μ}$ (τὸ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ). Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΖΗ} = \text{ΑΕ}\,.\,\rho$
$\text{ΗΘ} = \text{ΕΒ}\,.\,\rho$, διὰ προσθέ-

σεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $ΖΗ + ΗΘ = ΖΘ = (ΑΕ + ΕΒ)\rho = ΑΒ . \rho$ εἶναι δὲ καὶ $Κ = Γ . \rho$.

Πάλιν, ἐπειδὴ $ΗΘ = ΕΒ . \rho$, $Κ = Γ . \rho$, εἶναι δὲ $ΕΒ = Γ$, ἄρα $ΗΘ = Κ$. Τὸ δὲ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ (δηλ. $Κ \geqq Μ$). Ἄρα καὶ τὸ ΗΘ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ (δηλ. $ΗΘ \geqq Μ$). Ὥστε

$$ΗΘ \geqq Μ$$

καὶ ἐκ τῆς (1) ····· $ΖΗ > Δ$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν : $ΖΗ + ΗΘ = ΖΘ > Μ + Δ$. Ἀλλὰ $Μ + Δ = Ν$. Διότι $Μ = 3Δ$ καὶ συνεπῶς $Μ + Δ = 4Δ$. Ἐπειδὴ δὲ $Ν = 4Δ$, ἄρα $Μ + Δ = Ν$. Ἀλλὰ $ΖΘ > Μ + Δ$. Ἄρα $ΖΘ > Ν$. Τὸ δὲ $Ν > Κ$. Καὶ εἶναι τὰ ΖΘ, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ, τὸ δὲ Ν ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Δ· ἤτοι

εἶναι $\rho.ΑΒ > Ν = 4Δ$ $\qquad\qquad\qquad$ $\rho . ΑΒ > \lambda . Δ$

$\rho . Γ = Κ < Ν = 4Δ$ ἢ καλοῦντες $Ν = \lambda . Δ$ $\qquad$ $\rho . Γ < \lambda . Δ$.

Καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, $\dfrac{ΑΒ}{Δ} > \dfrac{Γ}{Δ}$.

Σύγχρονος διατύπωσις ὁλοκλήρου τῆς ἀποδείξεως.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ α, β καὶ $\alpha > \beta$, ἄλλο δὲ τυχὸν τὸ γ. Λέγω, ὅτι $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\beta} > \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Α′.) $\alpha - \beta < \beta$ καὶ Β′.) $\beta < \alpha - \beta$ [ἡ τρίτη περίπτωσις $\alpha - \beta = \beta$ θεωρεῖται κοινὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ παραλείπεται, διότι εἶναι προφανὲς ὅτι $\dfrac{2\beta}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\beta} > \dfrac{\gamma}{2\beta}$. Ἄλλως τε ἐνταῦθα πρόκειται κυρίως περὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν].

Α. 1. Ἔστω πρῶτον $\alpha - \beta < \beta$. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου τὸ μικρότερον τῶν μεγεθῶν, τὸ $\alpha - \beta$, τὸ ὁποῖον βεβαίως εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ μικροτέρου β ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον α, ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ τὸ τυχὸν μέγεθος γ (ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν εἶναι τοῦτο ἢ θὰ ὑπερβῇ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος α· τὸ νόημα τοῦ ἀξιώματος εἶναι, ὅτι ἐὰν δοθῶσι δύο μεγέθη, ἓν πολὺ μικρὸν καὶ ἄλλο πολὺ μέγα, τὸ μικρότερον λαμβανόμενον ν φορὰς ($\nu = 2, 3.....$) θὰ ὑπερβῇ τὸ μεγαλύτερον, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν ἐλήφθη τοῦτο). Ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ $(\alpha - \beta)$, ὥστε $\mu(\alpha - \beta) > \gamma$. Ἐπίσης ἂς ληφθῇ ἰσάκις πρὸς τοῦτο πολλαπλάσιον τοῦ β τὸ μβ. Καὶ τέλος ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ γ, ὥστε τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο νὰ εἶναι τὸ πρώτως μεγαλύτερον τοῦ μβ ἤτοι $\nu\gamma > \mu\beta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μβ εἶναι τὸ πρώτως μικρότερον τοῦ νγ, τοῦτο, τὸ μβ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ $(\nu - 1)\gamma$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν σχέσιν $\nu\gamma > \mu\beta \geqq (\nu - 1)\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ $\mu(\alpha - \beta) > \gamma$ καὶ $\mu\beta \geqq (\nu - 1)\gamma$, διὰ προσθέσεως τῶν ἀνισοτήτων τούτων κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν $\mu\alpha > \nu\gamma$, (1). Εἶναι δὲ $\mu\beta < \nu\gamma$, (2). Εἰς τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν τέσσαρα μεγέθη τὰ α, γ, β, γ. Τὸ πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου τὸ μα ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου τοῦ νγ, τὸ πολλαπλά-

σιον τοῦ τρίτου τὸ μβ, ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου, εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου τοῦ νγ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τοῦ νγ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, ἐὰν μα $>$ νγ καὶ μβ $\leqq$ νγ, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
Ἐνταῦθα κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ ἀνισότης, ἀφοῦ μβ εἶναι μόνον $<$ νγ.

A. 2. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (1) ὡς ἑξῆς· νγ $>$ μβ καὶ νγ $<$ μα, τότε κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ 7 θὰ ἔχωμεν $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

B. 1. Ἔστω δεύτερον β $<$ α - β. Τὸ μικρότερον μέγεθος β ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ τὸ τυχὸν μέγεθος γ, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν εἶναι τοῦτο. Ἔστω τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ β, ὥστε μβ $>$ γ. Ἐπίσης ἂς ληφθῇ ἰσάκις πρὸς τοῦτο πολλαπλάσιον τοῦ α - β τὸ μ(α - β). Καὶ τέλος ἂς ληφθῇ τοιοῦτον πολλαπλάσιον τοῦ γ, ὥστε τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο νὰ εἶναι τὸ πρώτως μεγαλύτερον τοῦ μ(α - β) ἤτοι νγ $>$ μ(α - β). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μ(α - β) εἶναι τὸ πρώτως μικρότερον τοῦ νγ, τὸ μ(α - β) θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ (ν - 1)γ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν σχέσιν νγ $>$ μ(α - β) $\geqq$ (ν - 1)γ. Καὶ ἐπειδὴ μβ $>$ γ καὶ μ(α - β) $\geqq$ (ν - 1)γ, διὰ προσθέσεως τῶν ἀνισοτήτων τούτων κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν μα $>$ νγ, (1). Εἶναι δὲ μ(α - β) $<$ νγ. Καὶ ἐπειδὴ α - β $>$ β, θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον μβ $<$ νγ (2). Εἰς τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν τέσσαρα μεγέθη τὰ α, γ, β, γ, καὶ ἐν ᾧ πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ ἰσάκις πρὸς τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου εἶναι μόνον μικρότερον (ἠδύνατο νὰ εἶναι καὶ ἴσον καὶ νὰ ἰσχύῃ ὁ ὁρισμὸς 7) πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

B. 2. Ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν A.2. θεωροῦμεν τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (1) ὡς ἑξῆς νγ $>$ μβ καὶ νγ $<$ μα. Καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7, $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

9. Ἐὰν $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$, τότε A = B. Καὶ ἐὰν $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B}$, πάλιν A = B.

10. Ἔστω 1) $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$, τότε θὰ εἶναι A $>$ B. 2) Ἔστω $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$. Τότε θὰ εἶναι B $<$ A.

1. Ἐὰν δὲν εἶναι A $>$ B, θὰ εἶναι A $\lesseqgtr$ B. Ἰσότης ἀποκλείεται, διότι τότε θὰ ἦτο $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$, ἐν ᾧ ἔχει ληφθῇ $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$. Οὔτε δὲ A $<$ B, διότι τότε κατὰ τὸ θεώρ. 8 θὰ ἦτο $\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Gamma}$. Ὅθεν ἀπομένει A $>$ B.

2. Ἐὰν δὲν εἶναι $B < A$, θὰ εἶναι $B \geqq A$. Ἰσότης ἀποκλείεται, διότι τότε θὰ ἦτο $\frac{\Gamma}{B} = \frac{\Gamma}{A}$, ἐν ᾧ ἔχει ληφθῆ $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$. Οὔτε δὲ $B > A$, διότι τότε κατὰ τὸ θεώρ. 8 θὰ ἦτο $\frac{\Gamma}{B} < \frac{\Gamma}{A}$. Ὅθεν ἀπομένει $B < A$.

11. Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$.

Διότι ἃς ληφθῶσι τῶν A, Γ, E ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $\mu.A$, $\mu.\Gamma$, $\mu.E$ (H, Θ, K), τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νB, $\nu\Delta$, νZ (Λ, M, N). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν A, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μA, $\mu\Gamma$, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νB, $\nu\Delta$, ἄρα (ὁρισμ. 5) ἐὰν $\mu A \gtreqqless \nu B$, θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $\mu\Gamma \gtreqqless \nu\Delta$ (1). Πάλιν ἐπειδὴ $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Γ, E ἰσάκις πολλαπλασιά τὰ $\mu\Gamma$, μE, τῶν δὲ Δ, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $\nu\Delta$, νZ ἄρα (ὁρισ. 5) ἐὰν $\mu\Gamma \gtreqqless \nu\Delta$, θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $\mu E \gtreqqless \nu Z$.

Ἀλλὰ ἐὰν $\mu\Gamma \gtreqqless \nu\Delta$, θὰ εἶναι ἐκτῆς (1) καὶ $\mu A \gtreqqless \nu B$.

Ὥστε καὶ ἐὰν $\mu A \gtreqqless \nu B$, θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $\mu E \gtreqqless \nu.Z$.

Καὶ εἶναι τὰ μὲν μA, μE ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν A, E, τὰ δὲ νB, νZ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν B, Z. Καὶ κατὰ τὸν ὁρ. 5, $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$. Τὸ θεώρημα εἶναι ταυτόσημον πρὸς τὸ ἀξίωμα «τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα» (κοινὴ ἔννοια I, 1). Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀναγκαία, διότι πρόκειται καὶ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων.

12. Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$, τότε $\frac{A}{B} = \frac{A+\Gamma+E}{B+\Delta+Z}$. Καὶ ἐνταῦθα πρόκειται καὶ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων, ἡ δὲ ἰσότης $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$ ἐξησφαλίσθη ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μA, $\mu\Gamma$, μE (H, Θ, K), τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νB, $\nu\Delta$, νZ (Λ, M, N). Ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μA, $\mu\Gamma$, μE, τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νB, $\nu\Delta$, νZ, ἄρα ἐὰν $\mu A \gtreqqless \nu B$ θὰ εἶναι συγχρόνως $\mu\Gamma \gtreqqless \nu\Delta$, $\mu E \gtreqqless$

νZ. Καὶ διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη (κατὰ τὸ 1 θεώρ.) θὰ ἔχωμεν: $\mu(A+\Gamma+E) \gtreqless \nu(B+\Delta+Z)$. Εἶναι δὲ τὸ μὲν μA ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ μ $(A+\Gamma+E)$, τὸ δὲ νB ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ν $(B+\Delta+Z)$. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισ. 5, $\frac{A}{B}=\frac{A+\Gamma+E}{B+\Delta+Z}$.

13. Ἐὰν $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$, $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{E}{Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{B} > \frac{E}{Z}$.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{E}{Z}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὑπάρχουσιν ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Ε καὶ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Δ, Ζ, ὥστε πολ. Γ > πολ. Δ καὶ πολ. Ε $\eqslantless$ πολ. Ζ. (ὁρ. 7). Ἂς ληφθῶσι τοιαῦτα πολλαπλάσια καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μΓ, μΕ (Η, Θ), τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νΔ, νΖ (Κ, Λ), ὥστε νὰ εἶναι μΓ > νΔ καὶ μΕ $\eqslantless$ νΖ (τὸ Θ = μΕ νὰ μὴ ὑπερέχῃ τοῦ Λ = νΖ). Καὶ ὁσαπλάσιον μὲν εἶναι τὸ μΓ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ἤτοι ἂς ληφθῇ Μ = μΑ, ὁσαπλάσιον δὲ εἶναι τὸ νΔ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ καὶ τὸ Ν τοῦ Β, ἤτοι ἂς ληφθῇ Ν=νΒ. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μΑ, μΓ, τῶν δὲ Β, Δ ἐλήφθησαν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ νΒ, νΔ, ἐὰν ἄρα μΑ $\gtreqless$ νΒ θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ

$$\mu\Gamma \gtreqless \nu\Delta. \text{ Εἶναι δὲ } \mu\Gamma > \nu\Delta.$$

Ἄρα μΑ > νΒ. Τὸ δὲ μΕ $\eqslantless$ νΖ. Καὶ εἶναι τὰ μὲν μΑ, μΕ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Ε τὰ δὲ νΒ, νΖ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Ζ. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν 7 εἶναι $\frac{A}{B} > \frac{E}{Z}$.

14. Ἐὰν $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ Α>Γ, θὰ εἶναι καὶ Β>Δ. Διότι, ἐπειδὴ Α>Γ καὶ τὸ Β εἶναι ἄλλο τυχὸν μέγεθος θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρ. 8, $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{B}$. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἄρα $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\Gamma}{B}$. Καὶ κατὰ τὸ θεώρ. 10 εἶναι Β > Δ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν Α = Γ, θὰ εἶναι καὶ Β = Δ, καὶ ἂν Α < Γ, θὰ εἶναι καὶ Β < Δ.

15. Ἔστω ΑΒ = μΓ, ΔΕ = μΖ. Λέγω, ὅτι $\frac{\Gamma}{Z}=\frac{\mu\Gamma}{\mu Z}$. Διότι, ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μεγέθη περιέχει τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχει καὶ τὸ ΔΕ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ἔστω

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AH} + \mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta B} \;\; (\mathrm{AH} = \mathrm{H\Theta} = \mathrm{\Theta B} = \Gamma)$$

καὶ $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{K} + \mathrm{K}\Lambda + \Lambda\mathrm{E}\ (\Delta\mathrm{K} = \mathrm{K}\Lambda = \Lambda\mathrm{E} = \mathrm{Z})$. Ἐπειδὴ $\mathrm{AH} = \mathrm{H\Theta} = \mathrm{\Theta B}$ καὶ $\Delta\mathrm{K} = \mathrm{K}\Lambda = \Lambda\mathrm{E}$ εἶναι κατὰ τὸ 7 θεώρ. $\frac{\mathrm{AH}}{\Delta\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{H\Theta}}{\mathrm{K}\Lambda} = \frac{\mathrm{\Theta B}}{\Lambda\mathrm{E}}$.
Καὶ κατὰ τὸ 12 θεώρ. $\frac{\mathrm{AH}}{\Delta\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{AH}+\mathrm{H\Theta}+\mathrm{\Theta B}}{\Delta\mathrm{K}+\mathrm{K}\Lambda+\Lambda\mathrm{E}}$. Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{AH} = \Gamma$, $\Delta\mathrm{K} = \mathrm{Z}$, καὶ $\mathrm{AH} + \mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta B} = \mathrm{AB} = \mu\Gamma$, $\Delta\mathrm{K} + \mathrm{K}\Lambda + \Lambda\mathrm{E} = \Delta\mathrm{E} = \mu\mathrm{Z}$, ἄρα $\frac{\Gamma}{\mathrm{Z}} = \frac{\mu\Gamma}{\mu\mathrm{Z}} \left(= \frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}\right)$.

16. Ἐὰν $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\mathrm{A}}{\Gamma} = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}$. Ἂς ληφθῇ $\mathrm{E} = \mu\mathrm{A}$, $\mathrm{Z} = \mu\mathrm{B}$, $\mathrm{H} = \nu\Gamma$, $\Theta = \nu\Delta$. Ἐπειδὴ τὰ Ε, Ζ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β. καὶ τὰ Η, Θ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ, ἄρα κατὰ κατὰ τὸ θεώρ. 15 εἶναι $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$. Καὶ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἄρα κατὰ τὸ θεώρ. 11 εἶναι $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$. (1). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Η, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ εἶναι ἄρα (θεώρ. 15) $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{H}}{\Theta}$. Ἄρα (θεώρ. 11) $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{H}}{\Theta} \left(\text{ἢ } \frac{\mu\mathrm{A}}{\mu\mathrm{B}} = \frac{\nu\Gamma}{\nu\Delta}\right)$. Κατὰ δὲ τὸ 14 θεώρ. ἐὰν $\mu\mathrm{A} \gtreqless \nu\Gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\mu\mathrm{B} \gtreqless \nu\Delta$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει κατὰ τὸν ὁρισμ. 5, ὅτι $\frac{\mathrm{A}}{\Gamma} = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}$.

17. Ἔστω $\mathrm{AB} = \mathrm{AE} + \mathrm{BE}$, $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{Z}$ καὶ $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\mathrm{Z}}$. Λέγω, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{BE}}{\mathrm{BE}} = \frac{\Gamma\Delta-\Delta\mathrm{Z}}{\Delta\mathrm{Z}}$ ἢ $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\Delta\mathrm{Z}}$, (1).

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας (1) τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΔΖ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ (δηλ. $\mu\mathrm{AE}$, $\mu\mathrm{EB}$, $\mu\Gamma\mathrm{Z}$, $\mu\Delta\mathrm{Z}$) καὶ τῶν παρονομαστῶν τῆς αὐτῆς ἀναλογίας ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ (δηλ. $\nu\mathrm{EB}$, $\nu\Delta\mathrm{Z}$) [διατηροῦμεν τὴν γραφὴν τοῦ κειμένου ΕΒ, ἀντὶ ΒΕ]. Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{H\Theta} = \mu\mathrm{AE}$, $\Theta\mathrm{K} = \mu\mathrm{EB}$, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\mathrm{H\Theta} + \Theta\mathrm{K} = \mathrm{HK} = \mu(\mathrm{AE} + \mathrm{EB})$ ἤτοι $\mathrm{HK} = \mu\mathrm{AB}$. Ὥστε τὸ ΗΘ καὶ τὸ ΗΚ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΕ, ΑΒ ($\mathrm{H\Theta} = \mu\mathrm{AE}$, $\mathrm{HK} = \mu\mathrm{AB}$). Εἶναι δὲ καὶ $\mathrm{H\Theta} = \mu\mathrm{AE}$, $\Lambda\mathrm{M} = \mu\Gamma\mathrm{Z}$, ἤτοι τὸ ΗΚ καὶ τὸ ΛΜ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, ΓΖ ($\mathrm{HK} = \mu\mathrm{AB}$, $\Lambda\mathrm{M} = \mu\Gamma\mathrm{Z}$).

Πάλιν ἐπειδὴ $\Lambda\mathrm{M} = \mu\Gamma\mathrm{Z}$ καὶ $\mathrm{MN} = \mu\Delta\mathrm{Z}$, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $\Lambda\mathrm{M} + \mathrm{MN} = \Lambda\mathrm{N} = \mu(\Gamma\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{Z}) = \mu\Gamma\Delta$. Προηγουμένως ὅμως εὕρομεν $\mathrm{HK} = \mu\mathrm{AB}$ καὶ ἐλήφθη $\Lambda\mathrm{M} = \mu\Gamma\mathrm{Z}$. Ἄρα ΗΚ, ΛΝ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Πάλιν ἐπειδὴ $ΘΚ = μΕΒ$, $ΚΞ = νΕΒ$, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $ΘΚ + ΚΞ = ΘΞ = ΕΒ(μ + ν)$. Ὁμοίως $ΜΝ = μΖΔ$ καὶ $ΝΠ = νΔΖ$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $ΜΝ + ΝΠ = ΜΠ = ΔΖ(μ + ν)$. Ὥστε ἔχομεν $ΗΚ = μΑΒ$, $ΛΝ = μΓΔ$, $ΘΞ = ΕΒ(μ + ν)$, $ΜΠ = ΔΖ(μ + ν)$, ἤτοι ἐλήφθησαν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια καὶ τῶν ΕΒ, ΔΖ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{ΑΒ}{ΒΕ} = \frac{ΓΔ}{ΔΖ}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $μΑΒ$, $μΓΔ$, τῶν δὲ ΕΒ, ΔΖ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $(μ + ν)ΕΒ$, $(μ + ν)ΔΖ$, ἐὰν ἄρα (ὁρ. 5)

$$μΑΒ \gtreqless (μ + ν)ΕΒ \text{ θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ } μΓΔ \gtreqless (μ + ν)ΔΖ.$$

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $μΑΒ > (μ + ν)ΕΒ$ (δηλ. $ΗΚ > ΘΞ$). Ἀλλὰ $ΗΚ = ΗΘ + ΘΚ$ καὶ $ΘΞ = ΘΚ + ΚΞ$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος τὸ κοινὸν ΘΚ ἔχομεν $ΗΚ - ΘΚ > ΘΞ - ΘΚ$ ἢ $ΗΘ > ΚΞ$.

Κατὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $μΓΔ > (μ + ν)ΔΖ$ (δηλ. $ΛΝ > ΜΠ$). Ἀλλὰ $ΛΝ = ΛΜ + ΜΝ$ καὶ $ΜΠ = ΜΝ + ΝΠ$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $ΛΝ > ΜΠ$ τὸ κοινὸν ΜΝ ἔχομεν $ΛΝ - ΜΝ > ΜΠ - ΜΝ$ ἢ $ΛΜ > ΝΠ$. Ἐὰν ἑπομένως $ΗΘ > ΚΞ$, εἶναι συγχρόνως $ΛΜ > ΝΠ$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν $ΗΘ \eqslantless ΚΞ$ εἶναι συγχρόνως $ΛΜ \eqslantless ΝΠ$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ ΗΘ, ΚΞ, ΛΜ, ΝΠ διὰ τῶν ἴσων των, ὅτε εἶναι $μΑΕ \gtreqless νΕΒ$ καὶ συγχρόνως $μΓΖ \gtreqless νΔΖ$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 ὅτι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$.

Σημειοῦμεν ἐνταῦθα, ὅτι κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀκολουθεῖται ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος. Ἡ πρὸς ἀπόδειξιν σχέσις $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$ θεωρεῖται ὡς ἀληθὴς καὶ ἐκ ταύτης διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν φθάνομεν εἰς τὴν πρότασιν $μΑΕ \gtreqless νΕΒ$ καὶ συγχρόνως $μΓΖ \gtreqless νΔΖ$, ἥτις ἐπάγεται τὴν ἀλήθειαν $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5.

18. Ἔστω $ΑΕ + ΕΒ = ΑΒ$, $ΓΖ + ΖΔ = ΓΔ$. Ἐὰν $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$ τότε εἶναι καὶ $\frac{ΑΕ + ΕΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ + ΖΔ}{ΖΔ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΖΔ}$.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΖΔ}$, τότε θὰ ὑπάρχῃ μέγεθός τι (ἀριθμός τις) $\Delta H \lesseqgtr Z\Delta$, τὸ ὁποῖον θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H}$. Ἔστω πρότερον $\Delta H < Z\Delta$. Τότε θὰ ὑπάρχῃ μέγεθός τι ΓH, ὥστε $\Gamma\Delta = \Gamma H + H\Delta$. Καὶ ἀφοῦ $\Delta H < Z\Delta$, θὰ εἶναι $\Gamma H > \Gamma Z$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H}$ ἢ $\frac{AE + EB}{EB} = \frac{\Gamma H + H\Delta}{\Delta H}$, θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρ. 17 $\left(\frac{AE + EB - EB}{EB} = \frac{\Gamma H + H\Delta - \Delta H}{\Delta H}\right)$ καὶ $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H}$. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι καὶ $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$. Συνεπῶς $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$. Ἀλλὰ $\Gamma H > \Gamma Z$. Ἄρα $\Delta H > Z\Delta$. Ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐλήφθη $\Delta H < Z\Delta$. Ὥστε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H < Z\Delta}$. Ἐὰν λάβωμεν $\Delta H > Z\Delta$, τότε εἶναι $\Gamma H < \Gamma Z$. Διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἐξ ἀρχῆς ἀποδείξεως καταλήγομεν εἰς τὴν σχέσιν $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma H}{\Delta H} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$. Ἀλλὰ $\Gamma H < \Gamma Z$. Ἄρα $\Delta H < Z\Delta$· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐλήφθη $\Delta H > Z\Delta$. Ὥστε ἀποκλείεται καὶ $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta H > Z\Delta}$. Ὅθεν ἀπομένει $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$. Προϋποτίθεται ἡ ὕπαρξις τετάρτης ἀναλόγου, θεωρουμένων ὁμογενῶν τῶν δύο μεγεθῶν ἐκ τῶν τριῶν.

19. Ἔστω $AB = AE + EB$, $\Gamma\Delta = \Gamma Z + Z\Delta$ ($AE \gtreqless EB$, $\Gamma Z \gtreqless Z\Delta$).

Ἐὰν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AB - EB}{\Gamma\Delta - Z\Delta}$ ἤτοι $= \frac{AE}{\Gamma Z}$, τότε εἶναι καὶ $\frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Διότι, ἐπειδὴ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, εἶναι καὶ $\frac{AB}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z}$ (θεώρ. 16), (1). Καὶ κατὰ τὸ θεώρ. 17 εἶναι $\frac{AB - AE}{AE} = \frac{\Gamma\Delta - \Gamma Z}{\Gamma Z}$ ἢ $\frac{EB}{AE} = \frac{Z\Delta}{\Gamma Z}$. Καὶ κατὰ τὸ θεώρ. 16 εἶναι $\frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Ἄρα $\frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Προϋποτίθεται ἡ δυνατότης ὑπάρξεως τετάρτης ἀναλόγου θεωρουμένων τῶν δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν.

Πόρισμα.

Ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$. Ἀλλὰ $EB = AB - AE$ καὶ $Z\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma Z$. Ἑπομένως, ἐὰν $\frac{AB}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z}$, ὡς εἶναι ἡ σχέσις (1) τοῦ θεωρήματος, τότε εἶναι καὶ $\frac{AB}{AB-AE}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta-\Gamma Z}$ ἢ $\frac{AB}{EB}=\frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$ (ἢ ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, τότε $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma}{\gamma-\delta}$. Ἡ σχέσις ἰσχύει καὶ ἂν $\beta > \alpha$, $\delta > \gamma$, ἀλλὰ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν εἶχον τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ σχέσις γράφεται $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$ καὶ τὸ πόρισμα ἰσχύει, ἤτοι $\frac{\beta}{\beta-\alpha}=\frac{\delta}{\delta-\gamma}$). Τὰ μεγέθη ὑποτίθενται ὁμογενῆ (ὁμοειδῆ) ἀνὰ δύο. Εἰς ἕνα κώδικα ὑπάρχει καὶ ἄλλο πόρισμα, τὸ ὁποῖον ἑρμηνεύει ἀνώνυμος σχολιαστὴς τῶν Στοιχείων. Ὁ Heiberg δὲν τὸ ἐθεώρησε γνήσιον καὶ τὸ ἀπήλειψεν εἰς τὴν ἔκδοσίν του.

20. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα τρία ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ τὰ Δ, Ε, Ζ καὶ $A : B = \Delta : E$,

$$B : \Gamma = E : Z.$$

Ἐὰν ληφθῶσιν οἱ δι' ἴσου λόγοι, δηλ. λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, ἤτοι $A : \Gamma = \Delta : Z$, τότε, ἐὰν $A \gtreqqless \Gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\Delta \gtreqqless Z$.

Ἔστω 1) $A > \Gamma$. Ἐπειδὴ τὸ $B \neq A, \Gamma$ θὰ εἶναι $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{B}$, (1). Ἀλλὰ $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$,(2) καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$ ἔχομεν $\frac{\Gamma}{B}=\frac{Z}{E}$, (3). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\frac{\Delta}{E} > \frac{Z}{E}$. Ἄρα $\Delta > Z$.

Ἔστω 2) $A = \Gamma$. Τότε θὰ εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{B}$ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$ ἔχομεν $\frac{\Gamma}{B}=\frac{Z}{E}$, ἐν ᾧ ἐκ τῆς (2) $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$. Συνεπῶς $\frac{\Delta}{E}=\frac{Z}{E}$. Ἄρα $\Delta = Z$.

Ἔστω 3) $A < \Gamma$. Τότε $\frac{A}{B} < \frac{\Gamma}{B}$. Ἀλλὰ $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ καί, ὡς ἀνωτέρω, $\frac{\Gamma}{B}=\frac{Z}{E}$. Συνεπῶς $\frac{\Delta}{E} < \frac{Z}{E}$. Ἄρα $\Delta < Z$.

21. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα τρία τὰ Δ, Ε, Ζ καὶ ἔστω, ὅτι ἀνὰ δύο εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ἤτοι $A : B = E : Z$ καὶ $B : \Gamma = \Delta : E$, (1). Ἐὰν $A \gtreqqless \Gamma$ τότε καὶ $\Delta \gtreqqless Z$.

Ἔστω πρῶτον $A > \Gamma$. Ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι ἄλλο τι, θὰ ἔχωμεν $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{B}$. Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}$. Ἄρα $\frac{E}{Z} > \frac{\Gamma}{B}$. Ἐκ τῆς (1) δὲ λαμβάνομεν

$\frac{E}{\Delta} = \frac{\Gamma}{B}$. Ἄρα $\frac{E}{Z} > \frac{E}{\Delta}$. Ἄρα $Z < \Delta$ ἤτοι $\Delta > Z$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐὰν $A \gtreqless \Gamma$, ὅτε $\Delta \gtreqless Z$.

22. Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ A, B, Γ καὶ ἄλλα τόσα κατὰ τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἀνὰ δύο, ἤτοι $A : B = \Delta : E$, $B : \Gamma = E : Z$. Λέγω, ὅτι $A : \Gamma = \Delta : Z$.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ ($H = \mu A$ $\Theta = \mu\Delta$) τῶν δὲ B, E ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ ($K = \nu B$, $\Lambda = \nu E$), καὶ ἀκόμη τῶν Γ, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ M, N ($M = \lambda\Gamma$, $N = \lambda Z$). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$ καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, εἶναι ἄρα κατὰ τὸ θεώρ. 4, $\frac{H}{K} = \frac{\Theta}{\Lambda}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $\frac{K}{M} = \frac{\Lambda}{N}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ H, K, M καὶ ἄλλα τρία τὰ Θ, Λ, N, λαμβανόμενα ἀνὰ δύο εἰς τὸν αὐτὸν λόγον (ἤτοι $\frac{H}{K} = \frac{\Theta}{\Lambda}, \frac{K}{M} = \frac{\Lambda}{N}$), κατὰ τὸ 20. θεώρ. ἐὰν $H \gtreqless M$ εἶναι συγχρόνως καὶ $\Theta \gtreqless N$, ἢ $\mu A \gtreqless \lambda\Gamma$ καὶ συγχρόνως $\mu\Delta \gtreqless \lambda Z$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει κατὰ τὸν ὁρισ. 5 ὅτι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$.

23. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ καὶ ἄλλα τρία τὰ Δ, E, Z, νὰ εὑρίσκωνται δὲ ἀνὰ δύο εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ἤτοι νὰ εἶναι $A : B = E : Z$, $B : \Gamma = \Delta : E$. Λέγω, ὅτι $A : \Gamma = \Delta : Z$. Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K ($H = \mu A$, $\Theta = \mu B$, $K = \mu\Delta$), τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N ($\Lambda = \nu\Gamma$, $M = \nu E$, $N = \nu Z$).

Καὶ ἐπειδὴ τὰ H, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν A, B, θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρ. 15, $\frac{A}{B} = \frac{H}{\Theta}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $\frac{E}{Z} = \frac{M}{N}$. Καὶ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$. Ἄρα $\frac{H}{\Theta} = \frac{M}{N}$, (1). Καὶ ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}$, καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{B}{\Delta} = \frac{\Gamma}{E}$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ Θ, K εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν B, Δ, θὰ εἶναι $\frac{B}{\Delta} = \frac{\Theta}{K}$. Ἀλλὰ $\frac{B}{\Delta} = \frac{\Gamma}{E}$. Ἄρα $\frac{\Theta}{K} = \frac{\Gamma}{E}$, (2). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Λ, M εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, E, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma}{E} = \frac{\Lambda}{M}$.

Ἀλλὰ $\frac{\Gamma}{E} = \frac{\Theta}{K}$ (ἐκ τῆς (2)). Ἄρα $\frac{\Theta}{K} = \frac{\Lambda}{M}$. Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{\Theta}{\Lambda} = \frac{K}{M}$. Ἐδείχθη δὲ $\frac{H}{\Theta} = \frac{M}{N}$ (ἡ 1). Εὑρέθη λοιπὸν $\frac{H}{\Theta} = \frac{M}{N}$, $\frac{\Theta}{\Lambda} = \frac{K}{M}$, (3). Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ Η, Θ, Λ καὶ ἄλλα τρία τὰ Κ, Μ, Ν καὶ λαμβάνονται ἀνὰ δύο εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, (ἡ 3), κατὰ τὸ θεώρ. 21, ἐὰν $H \gtreqless \Lambda$, θὰ εἶναι συγχρόνως καὶ $K \gtreqless N$ (ἢ $\mu A \gtreqless \nu\Gamma$ καὶ συγχρόνως $\mu\Delta \gtreqless \nu Z$). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Δ, τὰ δὲ Λ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Ζ. Τοῦτο ὅμως σημαίνει κατὰ τὸν ὁρισ. 5 ὅτι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$.

24. Ἐὰν $\frac{AB}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{Z}$, $\frac{BH}{\Gamma} = \frac{E\Theta}{Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{AB + BH}{\Gamma} = \frac{\Delta E + E\Theta}{Z}$ ἢ $\frac{AH}{\Gamma} = \frac{\Delta\Theta}{Z}$. Ἐπειδὴ $\frac{BH}{\Gamma} = \frac{E\Theta}{Z}$, ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{\Gamma}{BH} = \frac{Z}{E\Theta}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{AB}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{Z}$ καὶ $\frac{\Gamma}{BH} = \frac{Z}{E\Theta}$ $\left(\text{δηλ.} \begin{matrix} AB : \Gamma = \Delta E : Z \\ \Gamma : BH = Z : E\Theta \end{matrix}\right)$, ἐὰν λάβωμεν τὸν δι' ἴσου λόγον (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων), θὰ εἶναι $\frac{AB}{BH} = \frac{\Delta E}{E\Theta}$. Καὶ κατὰ τὸ 18 θεώρ. $\frac{AB + BH}{BH} = \frac{\Delta E + E\Theta}{E\Theta}$ ἢ $\frac{AH}{BH} = \frac{\Delta\Theta}{E\Theta}$. Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{BH}{\Gamma} = \frac{E\Theta}{Z}$ ἤτοι ἔχομεν
$$\begin{matrix} AH : BH = \Delta\Theta : E\Theta \\ BH : \Gamma = E\Theta : Z . \end{matrix}$$

Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον ἔχομεν $\frac{AH}{\Gamma} = \frac{\Delta\Theta}{Z}$.

25. Ἔστω τέσσαρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{E}{Z}$ καὶ ΑΒ τὸ μέγιστον, Ζ τὸ ἐλάχιστον (ἤτοι $AB > \Gamma\Delta > Z$ καὶ $AB > E > Z$). Λέγω ὅτι $AB + Z > \Gamma\Delta + E$. Ἄς ληφθῇ $E = AH$, $Z = \Gamma\Theta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{E}{Z}$ καὶ $E = AH$, $Z = \Gamma\Theta$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AH}{\Gamma\Theta}$.

Ἔστω ΑΒ — ΑΗ = ΗΒ, ΓΔ — ΓΘ = ΘΔ. Ὅθεν θὰ εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{HB}{\Theta\Delta}$ (θεώρ. 19). Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ $>$ ΓΔ. Ἄρα **ΗΒ $>$ ΘΔ, (1)**. Καὶ ἐπειδὴ ΑΗ = Ε, Ζ = ΓΘ, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη **ἔχομεν ΑΗ + Ζ** = Ε + ΓΘ. Ἐὰν τὴν ἰσότητα ταύτην προσθέσωμεν κατὰ **μέλη εἰς τὴν** ἀνισότητα (1), λαμβάνομεν ΑΗ + ΗΒ + Ζ $>$ ΓΘ + ΘΔ + Ε ἢ **ΑΒ + Ζ $>$** ΓΔ + Ε.

[Ἐὰν ΓΔ = Ε, τότε $\frac{AB+Z}{2} > E$, **ἤτοι τὸ ἀριθμητικὸν** μέσον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ **γεωμετρικοῦ**, ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AB}{E} = \frac{E}{Z}$].

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ VI.

Θεώρ. 3. Ὅμοιον θεώρημα μὲ **διχοτόμον ἐξωτερικῆς** γωνίας δὲν περιελήφθη εἰς τὰ Στοιχεῖα, διότι τοῦτο δὲν **θεωρεῖται** « Στοιχεῖον», ἐπειδὴ προκύπτει ἐκ τοῦ θεωρήματος 3, δι' ὁμοίας **κατασκευῆς** καὶ ἀποδείξεως.

8. Πόρισμα. 1) ΒΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ, 2) **ΒΓ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΔ** καὶ ΒΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΔΓ.

16. Ἐὰν ΑΒ : ΓΔ = Ε : Ζ, εἶναι καὶ **ΑΒ × Ζ = ΓΔ ×** Ε καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἐὰν Α : Β = Β : Γ, εἶναι καὶ **Α × Γ = Β^2** καὶ ἀντιστρόφως.

23. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 λόγος συγκείμενος **ἐκ λόγων** νοεῖται τὸ γινόμενον δύο λόγων.

Συμπληρώνομεν τὸ παραλληλόγραμμον **ΔΗ καὶ** λαμβάνομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Κ. Τῶν βάσεων ΒΓ, ΓΗ καὶ **τῆς εὐθείας Κ** εὑρίσκομεν κατὰ τὸ 12 θεώρ. τὴν τετάρτην ἀνάλογον καὶ ἔστω **αὕτη ἡ Λ. Τότε** εἶναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma H} = \frac{K}{\Lambda}$, (1). Τῶν τριῶν τώρα εὐθειῶν ΔΓ, ΓΕ, **Λ εὑρίσκομεν** τὴν τετάρτην ἀνάλογον καὶ ἔστω αὕτη ἡ Μ. Τότε εἶναι $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E} = \frac{\Lambda}{M}$, **(2). Πολλαπλασιάζομεν** τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ὅτε ἔχομεν $\frac{B\Gamma}{\Gamma H} \times \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E} = \frac{K}{\Lambda} \times \frac{\Lambda}{M} = \frac{K}{M}$, (3). Ὁ λόγος $\frac{K}{M}$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν λόγων $\frac{B\Gamma}{\Gamma H}$, $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$. **Τώρα** πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{K}{M}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον **τῶν δοθέντων** παραλληλογράμμων ΑΓ, ΓΖ. Ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΓ, **ΓΘ ἔχουσι** τὸ αὐτὸ ὕψος, θὰ εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (θεώρ. 1) ἤτοι $\frac{ΑΓ}{ΓΘ}=\frac{ΒΓ}{ΓΗ}$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) $\frac{ΒΓ}{ΓΗ}=$ $=\frac{Κ}{Λ}$. Ἄρα $\frac{ΑΓ}{ΓΘ}=\frac{Κ}{Λ}$, (4). Ὁμοίως διὰ τὰ παραλληλόγραμμα ΓΘ, ΓΖ θὰ εἶναι $\frac{ΓΘ}{ΓΖ}=\frac{ΔΓ}{ΓΕ}$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (2) $\frac{ΔΓ}{ΓΕ}=\frac{Λ}{Μ}$. Ἄρα $\frac{ΓΘ}{ΓΖ}=\frac{Λ}{Μ}$, (5). Τὰς (4) καὶ (5) γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς· $ΑΓ : ΓΘ = Κ : Λ$

$ΓΘ : ΓΖ = Λ : Μ$.

Λαμβάνοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) ἔχομεν $ΑΓ : ΓΖ = Κ : Μ$. Ἀντικαθιστῶντες ἐκ τῆς (3) τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{Κ}{Μ}$ ἔχομεν $\frac{ΑΓ}{ΓΖ}=\frac{ΒΓ}{ΓΗ}\times\frac{ΔΓ}{ΓΕ}$, καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

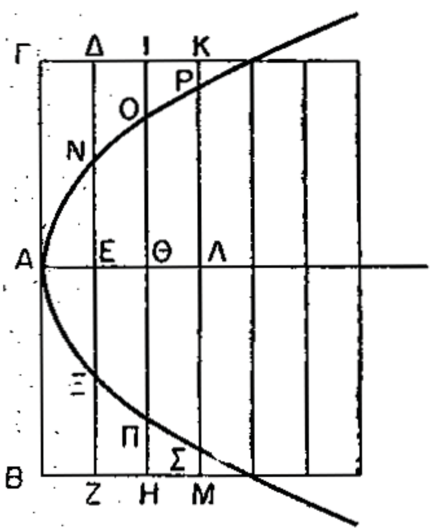
27. Τὸ θεώρημα 27 ἀποτελεῖ τὸν διορισμόν, δηλαδὴ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀμέσως κατωτέρω προβλήματος 28. Πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ 29, εἶναι συναφὲς τὸ πρόβλημα 44 τοῦ Ι βιβλίου τῶν Στοιχείων. Τὰ τρία προβλήματα ἀφοροῦσιν εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, δηλ. τὴν παραβολήν, τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν. Ὡς τομαὶ στερεῶν ἐμελετήθησαν αἱ κωνικαὶ γραμμαὶ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου, μαθητοῦ τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Ἐρατοσθένης ἀναφέρει τὰς γραμμὰς ταύτας ὡς «μεναιχμείους τριάδας»[1]. Τὰ ἀνωτέρω ὅμως τρία προβλήματα, ὡς καὶ τὸ θεώρημα, θεωροῦνται πυθαγορικῆς προελεύσεως, ὡς συνάγεται ἐκ σχολίου τοῦ Πρόκλου εἰς τὸ 44ον πρόβλημα τοῦ Ι βιβλίου τῶν Στοιχείων[2]. Ὁ Πρόκλος γράφει τὰ ἀκόλουθα· « ἔστι μὲν ἀρχαῖα φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον (σημ. ὁ Εὔδημος ἔγραψε τὴν πρώτην ἱστορίαν τῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη) καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολὴν τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων». Ἐπεξηγοῦμεν πρῶτον τὸ 44ον πρόβλημα τοῦ Ι βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Ι. 44. Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ, παρὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παραβληθῇ τυχοῦσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια Γ (παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον πρὸς τρίγωνον), ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν Δ (σχ. 1). Θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή, εἰς τὸ σχῆμα ἡ ΒΑΛ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΖΕ (εἰς τὸ ὁποῖον μετασχηματίζομεν τὸ τρίγωνον) τὸ ἔχομεν παραβάλει παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΒΑΛ.

1 Ε. Σταμάτη Τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, σ.9, (1949).

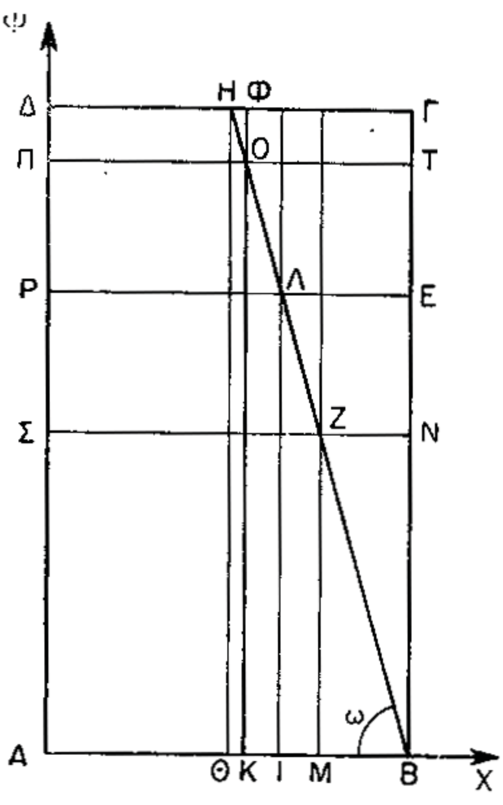
2. Πρόκλου Σχόλια εἰς Ι Στοιχείων σ. 419, Teubner.

Τοῦτο εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ΕΞ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ = ΑΒ καὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΓΑΛ, ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΓΑΛ = ΒΑΛ. Τοῦτο εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ΕΝ. Τὸ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραβληθὲν παραλληλόγραμμον ΑΒΗΘ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ΘΠ. Τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβληθὲν παραλληλόγραμμον ΑΓΙΘ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ΘΟ. Τὰ σημεῖα Ξ, Ν, Π, Ο εἶναι σημεῖα τῆς παραβολῆς. Ἐὰν καλέσωμεν ΑΒ=ΑΓ= $2p$, $ΑΘ = \chi$, $ΘΟ = \psi$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\psi^2 = 2p\chi$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ, ΑΒΗΘ, ΑΒΜΛ εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν μετασχηματίσει τυχούσας εὐθυγράμμους ἐπιφανείας $Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$. Τὰς αὐτὰς ἐπιφανείας ἔχομεν παραβάλει παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΓΑΛ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ΒΑΛ. Ὅθεν τὸ πρόβλημα περιέχει τὴν κατασκευὴν τῆς παραβολῆς ἐν ἐπιπέδῳ. Ἡ δοθεῖσα σταθερὰ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς.



Σχ. 1.

Θεώρ. 27. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 2). Ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς ΑΒ ὑψοῦμεν τυχοῦσαν κάθετον τὴν ΘΗ καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΘΗΔ, ΘΒΓΗ. (Ἡ ΘΗ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάθετος. Ἐξετάζομεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν). Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως πρὸς τοῦτο κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΘΒΓΗ. Τὸ παραβληθὲν παραλληλόγραμμον τὸ ΑΘΗΔ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων ἐπὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας ΑΒ παραλληλογράμμων. Τυχόντα ἄλλα «οὕτω πως παραβεβλημένα» παραλληλόγραμμα εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς· Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΗΒ καὶ ἐκ τῶν τυχόντων σημείων αὐτῆς Ο, Λ, Ζ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΔ.



Σχ. 2.

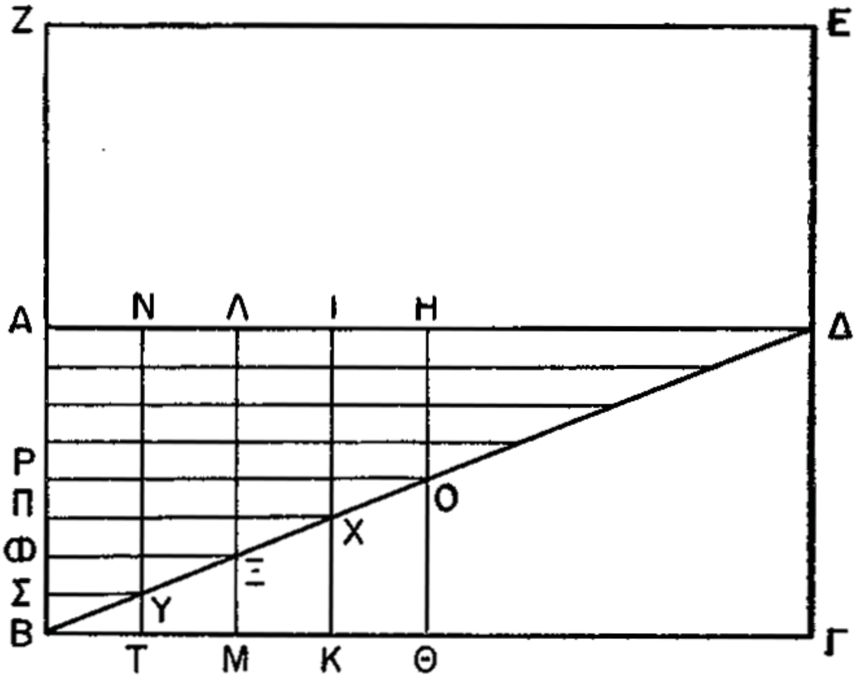
Τότε ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὰ ἑξῆς τρία παραλληλόγραμμα (πλὴν τοῦ ΑΘΗΔ). 1) Τὸ ΑΚΟΠ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΤΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ. 2) Τὸ ΑΙΛΡ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΙΒΕΛ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ. 3) Τὸ ΑΜΖΣ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΜΒΝΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ἀναλυτικῶς τὸ θεώρημα 27, θεωροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν $AB = \alpha$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ψ. Ἔστω δὲ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΗΒ τὸ Ζ. Τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΖΣ = Ε εἶναι συνάρτησις τῆς μορφῆς $E = f(\chi, \psi)$, ὅπου $\psi = \varphi(\chi)$. Ἡ μεταβλητὴ ψ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ ἐκ τῆς σχέσεως $\psi = (\alpha - \chi)\varepsilon\varphi\omega$, ἐὰν καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν ΗΒΘ. Ἐὰν ἡ γωνία ω εἶναι 45^0, τότε λαμβάνομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν ὁποίαν θ' ἀναπτύξωμεν κατωτέρω, κύκλον. Ἐνταῦθα ὅμως δὲν πρόκειται περὶ κύκλου, ἀλλὰ περὶ ἐλλείψεως. Τὸ μέγιστον παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον λαμβάνεται, ἂν ΘΒ = ΑΘ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ «Μένων» (86e — 87b), ἔνθα ὁ Σωκράτης λέγει εἰς εἰς τὸν Μένωνα ὅτι, προκειμένου εἰς γεωμέτρης ν' ἀπαντήσῃ ἂν δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι ἐγγράψιμος εἰς δοθέντα κύκλον, ὡς τρίγωνον, θὰ εἴπῃ, ὅτι ἄλλο συμβαίνει ἂν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια παραταθῇ (κατὰ τὸν Εὐκλείδην παραβληθῇ) εἰς τὴν γραμμὴν αὐτοῦ (τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου) καὶ ἐλλείπῃ ἄλλη τόση ἐπιφάνεια ὅση εἶναι ἡ παρατεταμένη, καὶ ἄλλο ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο (Ἴδε προτεινομένην λύσιν τοῦ προβλήματος, Ε. Σταμάτη, περιοδικὸν «Πλάτων», 1951, τεῦχος Β', σελ. 218).

28. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ παρὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον κατὰ τὸ πρόβλημα (σχ. 3). Θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον. Εἰς τὸ μέσον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν κάθετον ΡΟ καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΡΟΗ, ΡΒΘΟ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΟ. Ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΟ λαμβάνομεν τυχόντα σημεῖα τὰ Υ, Ξ, Χ καὶ φέρομεν ἐκ τούτων τὰς καθέτους, τὰς ΥΣ, ΝΤ, ΞΦ, ΛΜ, ΧΠ, ΙΚ. Τότε παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὰ ἑξῆς τέσσαρα παραλληλόγραμμα.

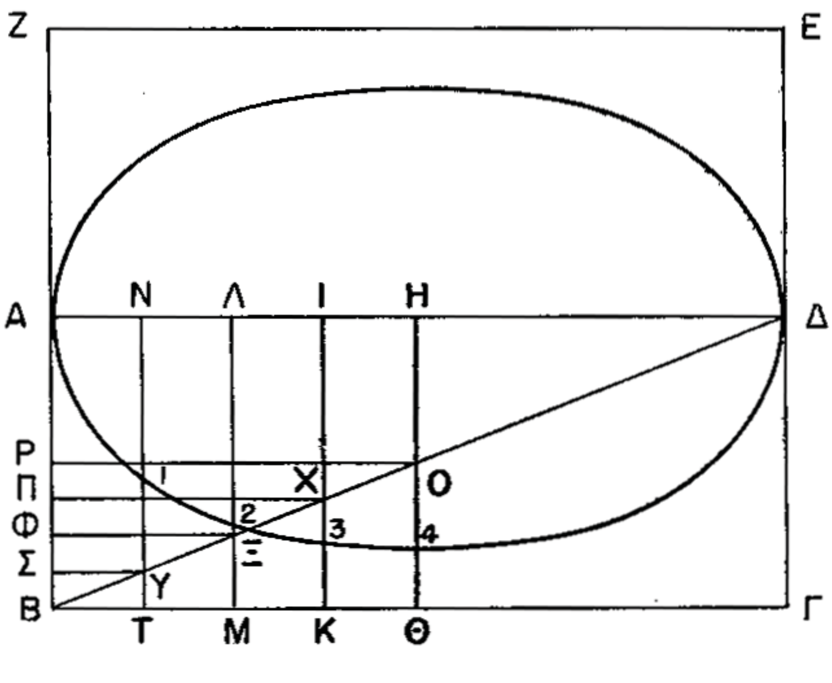
1) Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΣΥΝ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΤΝ) τὸ παραλ. ΣΒΤΥ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ (Ι. 43). 2) Τὸ παραλ. ΑΦΞΛ. ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΜΛ) τὸ παραλ. ΦΒΜΞ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ. 3) Τὸ παραλ. ΑΠΧΙ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες

τὸ παραλ. ΑΒΚΙ) τὸ παραλ. ΠΒΚΧ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ. 4) Τὸ παραλ. ΑΡΟΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΘΗ) τὸ παραλ. ΡΒΘΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΡΟΗ. Κατὰ τὸ θεώρημα 27 τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παραλληλογράμμων εἶναι τὸ ΑΡΟΗ.



Σχ. 3.

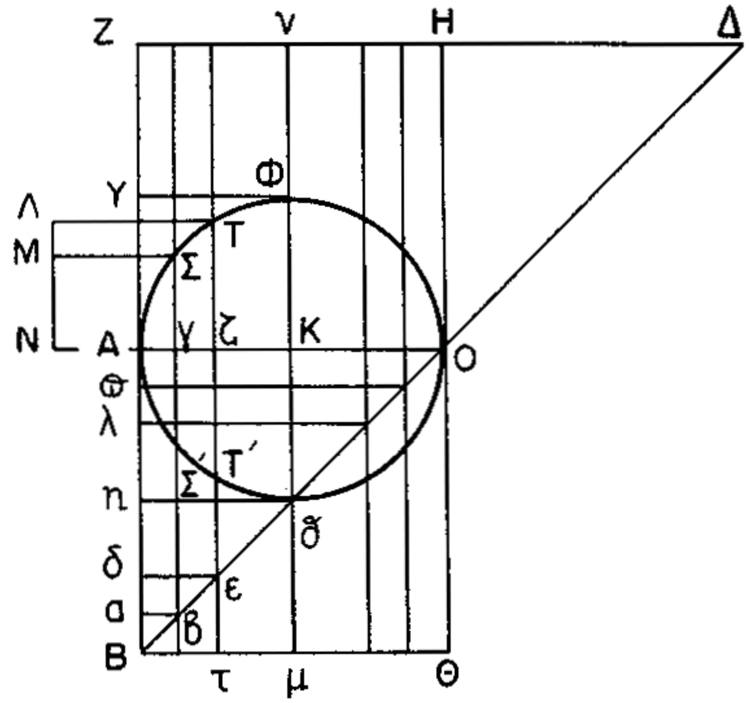
Τὸ παραλ. ΑΣΥΝ (σχῆμα 4) εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{\text{ΑΣ. ΑΝ}}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΤ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ν, λαμβάνομεν τμῆμα Ν1 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΦΞΛ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{\text{ΑΦ. ΑΛ}}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Λ λαμβάνομεν τμῆμα Λ2 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλ. ΑΠΧΙ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{\text{ΑΠ. ΑΙ}}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΙΚ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ι λαμβάνομεν τμῆμα Ι3 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλ. ΑΡΟΗ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{\text{ΑΡ. ΑΗ}}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΘ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Η λαμβάνομεν τμῆμα Η4



Σχ. 4.

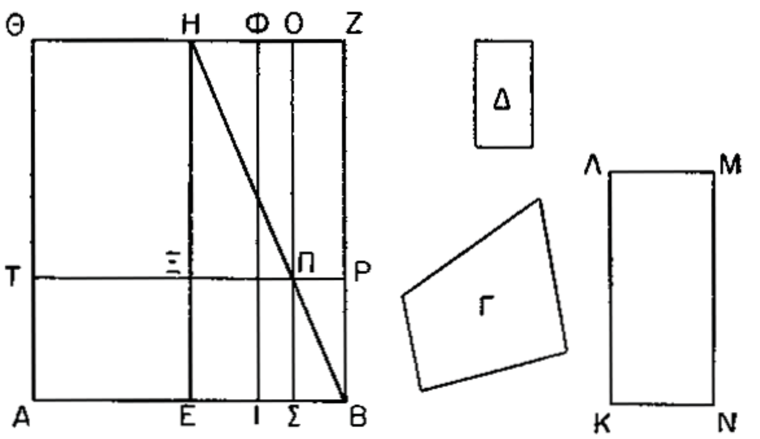
ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Ὅσον περισσότερα σημεῖα ἔχομεν λάβει ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΟ, τόσον ἀκριβεστέρα εἶναι ἡ προκειμένη κατασκευή. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν ληφθεισῶν πλευρῶν τῶν τετραγώνων τὰ 1, 2, 3, 4 λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{4}$ καμπύλης γραμμῆς, ἡ ὁποία εἶναι ἔλλειψις. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ΒΟ, ΑΗ, θὰ συναντηθῶσιν αὗται εἰς τὸ Δ. Σχηματίζομεν τὸ παραλ. ΖΒΓΕ καὶ λαμβάνοντες τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς ΟΔ ἐκτελοῦμεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἡ ὁποία θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἄλλο $\frac{1}{4}$ τῆς καμπύλης τὸ 4Δ. Τὸ συμμετρικὸν πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς καμπύλης, πρὸς τὸ Α4Δ, εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ἄξονος ΑΔ μᾶς δίδει τὸ ἄλλο ἥμισυ τῆς ἐλλείψεως. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ λάβωμεν ἐπίσης, ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΖΔ καὶ λάβωμεν τυχόντα σημεῖα ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκτελέσωμεν ὁμοίαν τῆς ἀνωτέρω κατασκευήν. Ἂς καλέσωμεν τὴν δοθεῖσαν σταθερὰν εὐθεῖαν $ΑΒ = 2p$, τὸ τυχὸν μῆκος $ΑΔ = 2α$ καὶ θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Ν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΔ, ὥστε $ΑΝ = χ$. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΤΝ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλ. ΣΒΤΥ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ, (τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΑΡΟΗ). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν θεωρουμένων παραλληλογράμμων ἔχομεν $\frac{ΒΣ}{ΣΥ} = \frac{ΒΣ}{χ} = \frac{2p}{2α}$, ἐξ ἧς $ΒΣ = χ. \frac{p}{α}$. Ἐὰν καλέσωμεν τὴν $Ν1 = ψ$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $ψ^2 = 2\ p.χ - \frac{pχ^2}{α}$, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων ἐφάπτεται τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ $ΑΒ = 2p$ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς ἐλλείψεως. Ὅταν παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον ΑΡΟΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλ. ΡΒΘΟ, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδ. πρὸς τὸ παραλ. τοῦτο τετραγώνου εἶναι ὁ μικρὸς ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως ὁ Η4, ἤτοι $(Η4)^2 = ψ^2 = β^2 = α.\ p.$ (Ἐλάβομεν θετικῶς τὴν ΑΒ ἀντὶ τῆς ΑΖ, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς ἀρνητικῆς ῥίζης τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως).

Εἰς τὸ σχῆμα 5 ἔχει ληφθῆ $ΑΒ = ΑΟ$, δηλ. $2p = 2α$. Ἔστω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΟ τὸ ζ καὶ $Αζ = Χ$. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ πρέπει νὰ παραβληθῇ παραλ. τὸ Αδεζ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τὸ παραλ. δΒτε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ηΒμθ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΑηθΚ. Ἐνταῦθα ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶναι $\frac{Βδ}{δε} = \frac{ΒΑ}{ΑΟ} = 1$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλ. ΑΒτζ $= 2p.\ χ$. Καὶ εἶναι ἐκ τῆς σχέσεως τῆς ὁμοιότητος $Βδ = δε = χ$. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρὸς ἀφαίρεσιν παραλ. τοῦ δΒτε $= \chi^2$. Ἄρα $(\zeta T')^2 = \zeta T\Lambda N\zeta = \psi^2 = 2\rho\chi - \chi^2$ ἢ $\psi^2 = 2\alpha\chi - \chi^2 = \chi\,(2\alpha - \chi)$. Ἡ σχέσις $\psi^2 = \chi\,(2\alpha - \chi)$ εἶναι ἐκείνη, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ M. Cantor ὡς ἑρμηνείαν τοῦ θεωρήματος 27, ἡ ὁποία ὅμως, ὡς εἶναι προφανές, ἀφορᾷ εἰς τὴν κατασκευὴν κύκλου καὶ εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος 27, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔλλειψιν [1]. (Καὶ ἐνταῦθα ἐθεωρήσαμεν τὴν ΑΒ θετικῶς).



Σχ. 5.

Τὸ πρόβλημα 28 δὲν ἀφορᾷ μόνον εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς ἐλλείψεως. Ἀφορᾷ κυρίως εἰς τὴν λύσιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (τῆς ἐλλείψεως) μὲ συντελεστὰς μὴ ῥητούς. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 6), ἡ δοθεῖσα τυχοῦσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια Γ καὶ τυχὸν παραλληλόγραμμον Δ. Πρέπει παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἰσοδ. πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Γ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν παραλ. Δ. Περιορισμὸς (διορισμός) : Ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια Γ δὲν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραβαλλομένου παραλ. ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παραλληλογράμμων κατὰ τὸ θεώρημα 27). Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ τὸ ΕΒΖΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ. Ἐὰν τὸ ΑΗ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Γ, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός.



Σχ. 6.

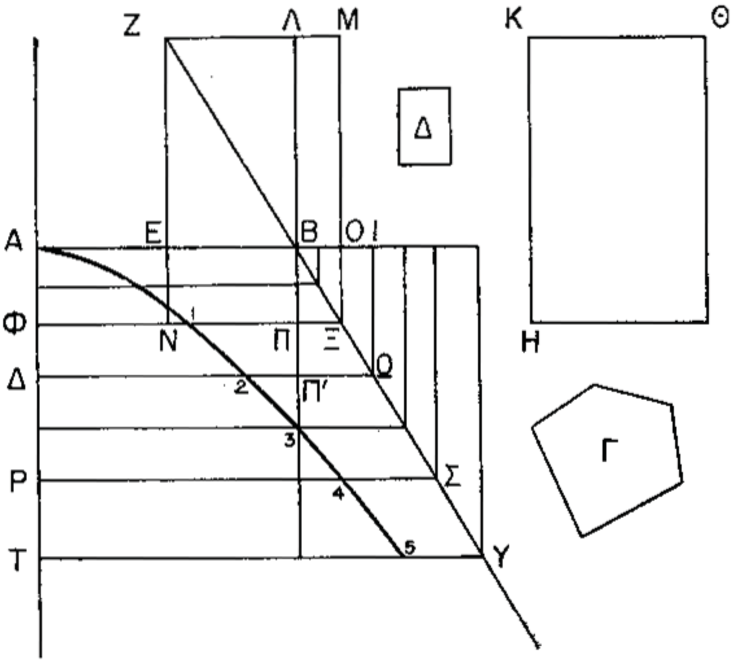
1. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1907 σ. 289, Teubner.

Διότι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παρεβλήθη παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἰσοδ. πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλ. τὸ ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν δὲν εἶναι παραλ. ΑΗ $=$ Γ, θὰ εἶναι παραλ. ΘΕ $>$ Γ (ἀποκλείεται κατὰ τὸν διορισμὸν τοῦ θεωρ. 27 νὰ εἶναι ΘΕ $<$ Γ). Ἔστω τὸ πλάτος κ καὶ τὸ μῆκος μ τοῦ δοθέντος παραλ. Δ, ὁπότε ἔχει κατασκευασθῇ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\kappa}{\mu}=\frac{EB}{EH}$. Ἀφοῦ παραλ. ΘΕ $>$ Γ, θὰ εἶναι καὶ παραλ. ΗΒ $>$ Γ. Λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν παραλ. ΗΒ $-$ Γ καὶ τὴν μετασχηματίζομεν εἰς παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ, ἔστω τὸ ΚΛΜΝ. [Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ παραλ. ΚΛΜΝ μετασχηματίζει τὴν διαφορὰν παραλ. ΗΒ $-$ Γ εἰς παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ΕΗ. Ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην μικροτέρα τῆς ΕΒ. Ἔστω, ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἡ ΕΙ, ὁπότε τὸ ἴσον (κατὰ τὸ ἐμβαδὸν) πρὸς τὴν διαφορὰν παραλ. ΗΒ $-$ Γ παραλληλόγραμμον θὰ εἶναι τὸ ΗΕΙΦ. Μεταξὺ ΕΙ καὶ ΕΒ εὑρίσκει τὴν μέσην ἀνάλογον, ἔστω ΕΣ, καὶ μετασχηματίζει τὸ παραλ. ΗΕΙΦ εἰς ἰσοδ. πρὸς τοῦτο, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ λαμβάνων ὡς πλάτος τὴν ΕΣ $=$ ΛΜ (θεώρ. 25), τὸ ΚΛΜΝ. Ἐκ τῆς εὑρέσεως τῆς μέσης ἀναλόγου ΕΣ $=$ ΛΜ θὰ ἔχωμεν $\frac{EB}{\Lambda M}=\frac{\Lambda M}{EI}$, ἐξ ἧς $(\Lambda M)^2 = EB \,.\, EI$, καὶ $\Lambda M=\sqrt{EB\,.\,EI}$, (1). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΗΒ, Δ καὶ ΚΛΜΝ ἔχομεν $\frac{K\Lambda}{\Lambda M}=\frac{EH}{EB}$, ἐξ ἧς $K\Lambda=\Lambda M.\,\frac{EH}{EB}$ (2). Ἐὰν καλέσωμεν $EH=\alpha$, $EB=p$, τότε παραλ. $HB-\Gamma=\alpha.\,p-\Gamma$. Ἀφοῦ ἡ μία πλευρὰ τοῦ παραλ. $\alpha.\,p-\Gamma$ εἶναι $EH=\alpha$, ἡ ἄλλη ΕΙ θὰ εἶναι $\frac{\alpha p-\Gamma}{\alpha}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν $\Lambda M=\sqrt{\frac{\alpha p-\Gamma}{\alpha}.\,p}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) θὰ ἔχωμεν $K\Lambda=\frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{\alpha p-\Gamma}{\alpha}\cdot p}$, (3). Ἤτοι ἔχομεν ἐκφράσει τὴν ΚΛ συναρτήσει τῶν α,p καὶ Γ]. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ παραλ. ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παραλ. ΚΜ. Ἔστω ἡ μὲν ΚΛ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΗΖ. Ἄρα ΗΕ $>$ ΚΛ καὶ ΖΗ $>$ ΛΜ. Ἃς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΗΕ ἴση πρὸς τὴν ΚΛ ἡ ΗΞ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΖ ἴση πρὸς τὴν ΛΜ ἡ ΗΟ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΞΗΟΠ. Ἄρα τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ. Ἄρα καὶ τὸ ΗΠ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ. Ἄρα τὸ ΗΠ καὶ τὸ ΗΒ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαγωνίου τῆς ΗΠΒ. Ἃς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Π αἱ ΤΡ, ΟΣ. Ἀφοῦ ἡ διαφορὰ παραλ. ΗΒ $-$ Γ εὑρέθη ἴση πρὸς παραλ. ΗΠ, θὰ εἶναι Γ $=$ ΗΒ $-$ ΗΠ, ἤτοι Γ $=$ γνώμων ΕΒΖΟΠΞ, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ τὸ παραλ. ΑΣΠΤ, διότι παραλ. ΟΡ $=$ παραλ.

ΞΣ καὶ παραλ. ΞΒ = παραλ. ΤΕ. Ἄρα παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παρεβλήθη τὸ παραλ. ΤΣ = Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ παραλ. ΠΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. [Εὑρέθη δηλ. ἡ ΠΣ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς ΣΟ — ΟΠ, (4). Ἡ ΣΟ = ΕΗ = α καὶ ἡ ΟΠ = ΚΛ. Καλοῦντες τὴν ΠΣ = χ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) τὴν ΣΟ, καὶ τὴν ΟΠ διὰ τῆς ἴσης ΚΛ ἐκ τῆς ἐντὸς τῶν προηγουμένων ἀγκυλῶν σχέσεως (3), θὰ ἔχωμεν $\chi = \alpha - \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{\alpha p - \Gamma}{\alpha}\cdot p}$. Εἰς τὸ θεώρημα δὲν ὑπολογίζεται ἡ θετικὴ ῥίζα. Ὅτι ἡ ΠΣ = χ εἶναι ῥίζα δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως φαίνεται ὡς ἑξῆς· Ἔστω, ὅτι εὑρέθη κατὰ τὴν κατασκευὴν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἡ εὐθεῖα ΠΣ = χ, ὅτε ΗΞ = α — χ, ἐν ᾧ ΕΗ = α, ΕΒ = p. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\Sigma B}{\Sigma \Pi} = \frac{p}{\alpha}$ λαμβάνομεν $\Sigma B = \frac{p}{\alpha}\cdot\chi$ καὶ ἑπομένως $E\Sigma = p - \frac{p}{\alpha}\cdot\chi$. Ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια Γ θὰ ἰσοῦται κατὰ τὸ πρόβλημα καὶ τὸν διορισμὸν τοῦ θεωρ. 27 πρὸς ΗΕΒΖ — ΗΞΠΟ. Καὶ εἶναι ΗΕΒΖ = α. p, $H\Xi\Pi O = (HE - E\Xi)\,.\,E\Sigma = (\alpha - \chi)\left(p - \frac{p}{\alpha}\cdot\chi\right)$. Ἤτοι $\Gamma = (\alpha - \chi)\left(p - \frac{p}{\alpha}\cdot\chi\right)$, ἢ $\Gamma = 2p\chi - \frac{p\chi^2}{\alpha}$ ἢ $\frac{p\chi^2}{\alpha} - 2p\chi + \Gamma = O$, ἐξ ἧς $\chi = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha.\Gamma}{p}} = \alpha \pm \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{\alpha p - \Gamma}{\alpha}\cdot p}$.

29. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ὡς παραλληλόγραμμον καὶ νὰ ὑπερβάλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ (σχ. 7). Λαμβανομεν τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ, ὥστε $\frac{EB}{EZ}$ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν πλευρῶν τοῦ $\Delta = \frac{p}{\alpha}$. Ἀναγράφομεν ἀπὸ τῆς ΕΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΛΒ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν Δ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΛΒ + Γ, τὸ μετασχηματίζομεν εἰς παραλ. ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, ἔστω τὸ ΗΘ. Ἔστω δὲ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΖΛ ἡ ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΖΕ ἡ ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραλ. ΗΘ $>$ παραλ. ΖΒ, ἄρα ΚΘ $>$ ΖΛ καὶ ΚΗ $>$ ΖΕ. Προεκτείνομεν τὰς ΖΛ, ΖΕ καὶ λαμβάνομεν ΖΛΜ = ΚΘ, ΖΕΝ = ΚΗ. Συμπληροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ. Ἄρα τὸ παραλ. ΜΝ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΕΛ. Ἄρα τὸ παραλ. ΜΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΕΛ. Ἄρα καὶ τὸ παραλ. ΜΝ καὶ τὸ παραλ. ΕΛ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον. Ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΖΞ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΗΘ = ΕΛ + Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ = ΜΝ, ἄρα ΜΝ =

$ΕΛ + Γ$. Ἑπομένως $Γ = ΜΝ - ΕΛ$. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ὁ γνώμων ΒΕΝΞΜΛ. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΕ = ΕΒ$, παραλ. $ΑΝ =$ παραλ. ΝΒ. Ἀλλὰ παραλ. $ΝΒ =$ παραλ. ΛΟ. Ἄρα παραλ. $ΑΝ =$ παραλ. ΛΟ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ παραλ. ΕΞ, ὅτε θὰ εἶναι $ΑΞ = ΛΟ + ΕΞ$ $=$ γνώμων ΒΕΝΞΜΛ, ἤτοι $Γ = ΑΞ$. Ἄρα παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ τὸ ΑΞ, τὸὁποῖον ὑπερβάλλει (τὸ ΑΦΠΒ) κατὰ τὸ παραλ. ΠΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ, ἐπειδὴ τὸ ΠΟ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ, πρὸς ὃ τὸ Δ εἶναι ὅμοιον.



Σχ. 7.

[Ἐὰν καλέσωμεν $ΕΖ = α$, $ΕΒ = p$, $ΟΞ = ΒΠ = χ$, θὰ ἔχωμεν $\frac{ΒΟ}{χ} = \frac{p}{α}$, ἐξ ἧς $ΒΟ = \frac{p}{α} \cdot χ$ · Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλ. $ΑΒΠΦ = 2p \cdot χ$, τοῦ δὲ παραλ. ΒΠΞΟ τὸ ἐμβαδὸν $= χ \cdot ΒΟ$ ἢ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΒΟ διὰ τοῦ ἴσου της $= \frac{pχ^2}{α}$ $χ^2$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐμβαδῶν θὰ εἶναι $2pχ + \frac{p}{α} χ^2$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΦΞ ὑπάρχει σημεῖόν τι ἔστω τὸ 1, ὥστε $(Φ1)^2 = = 2pχ + \frac{p}{α} χ^2$. ἤτοι ἡ εὐθεῖα Φ1 εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς $2pχ + \frac{p}{α}$. Ἐὰν καλέσωμεν ταύτην ψ, θὰ εἶναι $ψ^2 = 2pχ + \frac{p}{α} \cdot χ^2$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων. Ἡ κατασκευὴ παρέχει τὴν $ΟΞ = χ$, μίαν ρίζαν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὑπερβολῆς, ὅτι δίδεται ἄλλη τυχοῦσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια ἔστω Γ′, καὶ ἔστω ὅτι μετασχηματίζομεν ταύτην εἰς τὸ ἰσοδ. παραλ. ΑΔΩΙ, τὸ ὁποῖον παραβάλλομεν παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τότε παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλ. ΑΔΩΙ, τὸ ὁποῖον ὑπερβάλλει τὸ παραλ. ΑΔΠ′Β κατὰ τὸ παραλ. ΒΠ′ΩΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΛΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν παραλ. Δ. Τοῦ ΑΔΩΙ ὑπάρχει ἰσοδύναμον τετράγωνον πλευρᾶς Δ2].

Σημ. Ὁ M. Cantor[1] ἰσχυρίζεται 1) ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι (εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδονται τὰ τρία προβλήματα) καὶ ὁ Εὐκλείδης δὲν ἐγνώριζον, ὅτι ἡ παραβολὴ παραλληλογράμμων καὶ διὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις παρίστανε τὰς τρεῖς κωνικὰς γραμμὰς ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ 2) ὅτι ὁ Εὐκλείδης δὲν διέκρινεν, ὅτι αἱ κωνικαὶ αὐταὶ γραμμαί, ἂν τὰς ἐγνώριζεν, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς προκυπτούσας ἐκ τομῶν κώνου. Εἰδικώτερον φρονεῖ ὁ M. Cantor, ὅτι ὁ Εὐκλείδης δὲν ἐσκέφθη νὰ μετατρέψῃ τὰ παραβαλλόμενα παραλληλόγραμμα εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα, ὁπότε αἱ κορυφαὶ τῶν τετραγώνων τούτων ἑνούμεναι παρέχουσι τὰς κωνικὰς γραμμάς. Ἀντίθετον πρὸς τὴν γνώμην ταύτην ἐκφράζουσιν ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Arneth καὶ ὁ Δανὸς Zeuthen εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ « Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα » (Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum). Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ M. Cantor εἶναι 1) ὅτι τὰ προβλήματα I. 44, VI. 28, VI. 29 δὲν πραγματεύεται ὁ Εὐκλείδης ὁμοῦ, ἀλλὰ κεχωρισμένως. 2) Ἐὰν ὁ Εὐκλείδης ἐγνώριζεν, ὅτι ἡ μετατροπὴ τῶν παραλληλογράμμων εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα παρέχει τὰς κωνικὰς γραμμὰς ἐν ἐπιπέδῳ θὰ κατεχώριζε τοῦτο εἰς τὰ Στοιχεῖα. Καὶ 3) ὁ Εὐκλείδης θὰ κατεχώριζεν εἰς ἄλλα μέρη τῶν Στοιχείων τὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων προκυπτούσας κωνικὰς γραμμάς, ὡς πράττει τοῦτο διὰ τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς II. 11, IV. 10, XIII. 1 (καὶ VI. 30). Ἐπὶ τούτων σημειώνομεν τὰ ἑξῆς· 1) Τὸ πρόβλημα 44 περιλαμβάνεται εἰς τὸ I βιβλίον, διότι εἶναι χρήσιμον διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἄλλων προτάσεων τοῦ I βιβλίου. 2) Τὰ προβλήματα 28 καὶ 29 δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ περιληφθῶσιν εἰς τὸ I βιβλίον, διότι προϋποθέτουσι γνῶσιν τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ V βιβλίου. 3) Ἔχομεν παράδειγμα παραλείψεως τῆς γεωμετρικῆς προτάσεως, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὰς σχέσεις δύο πλευρῶν τριγώνου, ὅταν ἀχθῇ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας, διὰ τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι ἠγνοεῖτο ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ σπουδαιότερον ὅμως ἐπιχείρημα ἐναντίον τῶν ἀνωτέρω ἰσχυρισμῶν εἶναι, ὅτι ὁ Εὐκλείδης περιέλαβεν εἰς τὰ Στοιχεῖα μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τὰ ἀπαραίτητα διὰ τὴν ἵδρυσιν τοῦ ὅλου οἰκοδομήματος τῶν Στοιχείων καὶ ὅτι οὐδαμοῦ εἰς τὰ Στοιχεῖα ἀναφέρεται ἀριθμητικός τις ὑπολογισμός. Οὔτε μίαν φορὰν ἀναφέρονται αἱ λέξεις Κανὼν καὶ Διαβήτης, τὰ ὁποῖα καὶ μόνα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ Στοιχεῖα διὰ κατασκευάς. Τέλος εἶναι γνωστόν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶχε γράψει πραγματείαν περὶ κωνικῶν τομῶν, ἡ ὁποία δὲν σῴζεται.

---

1. Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik, σελ. 291, 1907, Teubner.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ VII.

Τὰ βιβλία VII, VIII, IX περιέχουσι τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, ὁτὲ μὲν μὲ ἓν γράμμα, ὁτὲ δὲ μὲ δύο.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

3. $A = B \cdot \rho$. Ὁ B εἶναι μέρος τοῦ A.

4. $B = \frac{\mu}{\nu} A$. Ὁ B εἶναι μέρη τοῦ A.

8. $4 \times 6 = 24$. Ὁ 24 εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, διότι $\frac{24}{6} = 4$ καὶ $24 : 4 = 6$.

9. $4 \times 5 = 20$. Ὁ 20 εἶναι ἀρτιάκις περιττός, διότι $20 : 4 = 5$.

[10. $5 \times 4 = 20$. Ὁ 20 εἶναι περισσάκις ἄρτιος, διότι $20 : 5 = 4$].

11. $3 \times 7 = 21$. Ὁ 21 εἶναι περισσάκις περιττός, διότι $21 : 7 = 3$, $21 : 3 = 7$.

17. $3 \times 5 = 15$. Ὁ 15 καλεῖται ἐπίπεδος ἀριθμός, (διότι παριστάνει καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου ἐπιφανείας, διαστάσεων 3 καὶ 5).

18. $3 \times 5 \times 6 = 90$. Ὁ 90 καλεῖται στερεὸς ἀριθμός, (διότι παριστάνει καὶ τὸν ὄγκον στερεοῦ, διαστάσεων 3, 5 καὶ 6).

21. Ἐὰν $A = B \cdot \rho$ καὶ $\Gamma = \Delta \cdot \rho$, τότε $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (1)

» $A \cdot \rho = B$ » $\Gamma \cdot \rho = \Delta$, » $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (2)

» $A = \frac{\mu}{\nu} B$ » $\Gamma \frac{\mu}{\nu} = \Delta$, » $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (3)

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶναι ἀντίστοιχος πρὸς τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ V βιβλίου.

23. Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του. Ἑρμηνεία τῶν τελείων ἀριθμῶν γίνεται μετὰ τὴν ἐπεξήγησιν τοῦ 36 θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου, τοῦ συναφοῦς πρὸς τοὺς τελείους ἀριθμούς.

Ἀξιώματα τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τῶν Στοιχείων (κοιναὶ ἔννοιαι καὶ αἰτήματα) δὲν περιέλαβεν ὁ J. Heiberg εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν. Τοιαῦτα ὅμως περιέχει ἡ ἔκδοσις Campanus, ἡ πρώτη διὰ τοῦ Τύπου γενομένη ἔκδοσις τῶν Στοιχείων κατὰ τὸ 1482 ἐν Βενετίᾳ εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν ἐξ ἐκδόσεως εἰς τὴν ἀραβικήν.

Θεώρ. 1. Διότι ἔστωσαν δύο ἄνισοι ἀριθμοί, οἱ ΑΒ, ΓΔ (νοεῖται ἐκ τῆς ἀποδείξεως $AB > \Gamma\Delta$). Ἐὰν ὁ ΑΒ διαιρούμενος διὰ τοῦ ΓΔ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, ὁ διαιρέτης ΓΔ διαιρούμενος διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διαιρούμενον διὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ἀφήσῃ ὑπόλοιπον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου ὑπόλοιπόν τι εἶναι ἡ μονάς, οἱ ἀριθμοὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἔστω:

$$\mathrm{AB} = \Gamma\Delta \cdot \rho_1 + \mathrm{ZA} = \mathrm{BZ} + \mathrm{ZA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Gamma\Delta = \mathrm{ZA} \cdot \rho_2 + \mathrm{H}\Gamma = \Delta\mathrm{H} + \mathrm{H}\Gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\mathrm{ZA} = \mathrm{H}\Gamma \cdot \rho_3 + \Theta\mathrm{A} = \mathrm{Z}\Theta + \Theta\mathrm{A} = \mathrm{Z}\Theta + 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

[ὁ ΑΒ διαιρούμενος διὰ τοῦ ΓΔ δίδει πηλίκον ρ_1 καὶ ὑπόλοιπον ΖΑ. Καλοῦμεν δὲ $\Gamma\Delta \cdot \rho_1 = \mathrm{BZ}$. Ὁ ΓΔ διαιρούμενος διὰ τοῦ ΖΑ δίδει πηλίκον ρ_2 καὶ ὑπόλοιπον ΗΓ. Καλοῦμεν δὲ $\mathrm{ZA} \cdot \rho_2 = \Delta\mathrm{H}$. Ὁ ΖΑ διαιρούμενος διὰ τοῦ ΗΓ δίδει πηλίκον ρ_3 καὶ ὑπόλοιπον $\Theta\mathrm{A} = 1$. Καλοῦμεν δὲ $\mathrm{H}\Gamma \cdot \rho_3 = \mathrm{Z}\Theta$]. Λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι καὶ ὅτι ἔχουσι κοινὸν μέτρον τὸν ἀριθμὸν Ε. Ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ· ἄρα ἐκ τῆς (1) καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΒΖ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Ε καὶ τὸν ΑΒ· ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν $\mathrm{AB} - \mathrm{BZ} = \mathrm{ZA}$. Ὁ ΖΑ μετρεῖ ἐκ τῆς (2) τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΔΗ. Ἄρα ὁ Ε μετρῶν τὸν ΖΑ θὰ μετρῇ καὶ τὸν ΔΗ. Ἀφοῦ δὲ ὁ Ε μετρεῖ ἐξ ὑποθέσεως τὸν ΓΔ, θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $\Gamma\Delta - \Delta\mathrm{H} = \mathrm{H}\Gamma$. Ὁ ΗΓ ἐκ τῆς (3) μετρεῖ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΖΘ. Ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΖΘ. Μετρεῖ ὅμως καὶ τὸν ΖΑ. Ἄρα μετρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν $\mathrm{ZA} - \mathrm{Z}\Theta = \Theta\mathrm{A} = 1$. Ἄρα ὁ Ε ἀριθμὸς ὢν (πλῆθος μονάδων) μετρεῖ τὴν μονάδα· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ ΑΒ, ΓΔ δὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον, ἤτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων.

	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ΑΒ	ΓΔ	ΑΖ	ΗΓ
$\rho_1 \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{BZ}$	$\rho_2 \cdot \mathrm{AZ} = \Delta\mathrm{H}$	$\rho_3 \cdot \mathrm{H}\Gamma = \mathrm{Z}\Theta$	
$\mathrm{AB} - \mathrm{BZ} = \mathrm{AZ}$	$\Gamma\Delta - \Delta\mathrm{H} = \mathrm{H}\Gamma$	$\mathrm{AZ} - \mathrm{Z}\Theta = \Theta\mathrm{A} = 1$	

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος τῆς ἀνθυφαιρέσεως ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ θεώρημα ὅμως, ὡς καί τινα ἑπόμενα, θεωροῦνται πυθαγορικὰ καὶ ὄχι εὐκλείδεια.

2. Ἔστωσαν οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ $\mathrm{AB} > \Gamma\Delta$ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Ἐὰν ὁ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΑΒ εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι μετρεῖ καὶ τὸν ἑαυτόν του. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ ΓΔ εἶναι ὁ μ. κ. δ., διότι οὐδεὶς μεγαλύτερος τοῦ ΓΔ μετρεῖ αὐτόν. Ἐὰν δὲ ὁ ΓΔ δὲν μετρῇ τὸν ΑΒ, ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως θὰ εὕρωμεν τέλος ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον θὰ μετρῇ τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον.

Διότι τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον δὲν θὰ εἶναι ἡ μονάς, ἐπειδὴ τότε οἱ ἀριθμοὶ ΑΒ, ΓΔ θὰ ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἔστω λοιπὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{AB} = \rho_1 \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{EA} = \mathrm{BE} + \mathrm{EA} \quad (\text{καλοῦμεν, } \rho_1 \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{BE}) \;\ldots\ldots\; (1)$$
$$\Gamma\Delta = \rho_2 \cdot \mathrm{EA} + \mathrm{Z}\Gamma = \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\Gamma \quad (\text{καλοῦμεν } \rho_2 \cdot \mathrm{EA} = \Delta\mathrm{Z}) \;\ldots\ldots\; (2)$$
$$\mathrm{EA} = \rho_3 \cdot \mathrm{Z}\Gamma + \mathrm{O} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι ΓΔ > ΕΑ > ΖΓ. Ὁ ΖΓ μετρεῖ ἐκ τῆς (3) τὸν ΕΑ. Ὁ δὲ ΕΑ ἐκ τῆς (2) μετρεῖ τὸν ΔΖ· ἄρα ὁ ΖΓ μετρεῖ τὸν ΔΖ. Ὁ ΖΓ ὡς μετρῶν τὸν ἑαυτόν του καὶ τὸν ΔΖ μετρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΔΖ + ΖΓ = ΓΔ. Ὁ ΓΔ ἐκ τῆς (1) μετρεῖ τὸν ΒΕ. Ἄρα ὁ ΖΓ ὡς μετρῶν τὸν ΓΔ μετρεῖ καὶ τὸν ΒΕ. Ἀλλ' ὁ ΖΓ ἐκ τῆς (3) μετρεῖ τὸν ΕΑ. Ἄρα ὁ ΖΓ μετρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΒΕ + ΕΑ = ΑΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ. Ἄρα μετρεῖ τοὺς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ, ἤτοι εἶναι κοινὸν μέτρον αὐτῶν (κοινὸς διαιρέτης). Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον (μ. κ. δ.). Διότι, ἐὰν ὁ ΖΓ δὲν εἶναι μ. κ. μ. τῶν ΑΒ, ΓΔ θὰ μετρῇ τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμός τις Η > ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρεῖ ἐξ ὑποθέσεως τὸν ΓΔ, ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ ἐκ τῆς (1) τὸν ΒΕ, ἄρα ὁ Η μετρεῖ τὸν ΒΕ. Μετρεῖ δὲ ὁ Η καὶ τὸν ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ μετρῇ ὁ Η καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ — ΒΕ = ΕΑ. Ὁ δὲ ΕΑ ἐκ τῆς (2) μετρεῖ τὸν ΔΖ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΔΖ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Η καὶ τὸν ΓΔ. Ἄρα μετρεῖ ὁ Η καὶ τὴν διαφορὰν ΓΔ — ΔΖ = ΖΓ. Ἀλλὰ Η > ΖΓ. Ἄρα ὁ μεγαλύτερος μετρεῖ τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ΖΓ. Ἄρα ὁ ΖΓ εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον (ὁ μ. κ. δ) τῶν ἀριθμῶν ΑΒ, ΓΔ.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων.

	ρ_1	ρ_2	ρ_3
ΑΒ	ΓΔ	ΕΑ	ΖΓ
$\rho_1 \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{BE}$	$\rho_2 \cdot \mathrm{EA} = \Delta\mathrm{Z}$	$\rho_3 \cdot \mathrm{Z}\Gamma = \mathrm{EA}$	
$\mathrm{AB} - \mathrm{BE} = \mathrm{EA}$	$\Gamma\Delta - \Delta\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\Gamma$	$\mathrm{EA} - \mathrm{EA} = 0$	

Σημ. Ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ ὡς γνωστὰς τὰς προτάσεις : 1) ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 2) ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Οἱ νεώτεροι ἑρμηνευταὶ δικαιολογοῦσι τὴν παράλειψιν ταύτην ὑποστηρίζοντες, ὅτι ὁ Εὐκλείδης δὲν ἐθεώρησε τὰς προτάσεις ταύτας βασικάς, στοιχεῖα, τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον τὰς παρέλειψεν. Ἐπὶ τούτου σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς: Εἰς τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία τῶν Στοιχείων, μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως, ἐπαναλαμβάνεται πάντοτε ἡ πρὸς ἀπόδειξιν πρότασις καὶ σημειοῦται, «ὅπερ ἔδει δεῖξαι ἢ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν ἡ ἐπανάληψις τῆς προτάσεως μετὰ τὴν ἀπόδειξιν γίνεται σπανίως. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ παράλειψις αὕτη ἀσφαλῶς δὲν ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ ὅτι αὕτη ὀφείλεται εἰς τοὺς μεταγενεστέρους ἐκδότας τῶν Στοιχείων αὐτοῦ, εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδομεν καὶ τὴν παράλειψιν τῶν ἀνωτέρω ἀποδείξεων. Ἡ σύγχρονος διαδιατύπωσις τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως εἶναι ἡ κάτωθι, ἐὰν δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ $A > B$ καὶ καλέσωμεν τὰ διαδοχικὰ πηλίκα $\rho_1, \rho_2 \cdots$, καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2 \ldots$

$$
\begin{aligned}
A &= \rho_1 B + \upsilon_1 \\
B &= \rho_2 \upsilon_1 + \upsilon_2 \\
\upsilon_1 &= \rho_3 \upsilon_2 + \upsilon_3 \qquad (1) \\
\upsilon_{\nu-2} &= \rho_\nu \upsilon_{\nu-1} + \upsilon_\nu \quad \text{ὅπου } A > B > \upsilon_1 > \upsilon_2 \ldots > \upsilon_\nu > \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ἐὰν υ_ν εἶναι μηδέν, τότε $\upsilon_{\nu-1}$ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἐὰν υ_ν μένῃ πάντοτε > 0, τότε, ὅταν $\nu \to \infty$, $\upsilon_\nu \to 0$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ A, B εἶναι ἀσύμμετροι. Ἡ τελευταία παρατήρησις ἀπαντᾷ εἰς τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων διὰ μεγέθη. Εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως, ὡς γνωστόν, στηρίζεται ἐπίλυσις διοφαντικῶν ἐξισώσεων καὶ ἡ θεωρία τῶν συνεχῶν κλασμάτων.

3. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ. Ἂς ληφθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον (μ. κ. δ.) τῶν Α, Β καὶ ἔστω ὁ Δ. Ὁ Δ ἢ μετρεῖ τὸν Γ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ.

Α΄) Ἔστω ὅτι τὸν μετρεῖ, ὁπότε ὁ Δ εἶναι κοινὸν μέτρον (κ. δ.) τῶν Α, Β, Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν ὁ Δ δὲν εἶναι μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ, θὰ εἶναι τῶν Α, Β, Γ ἄλλος τις ἀριθμὸς μ. κ. μ. καὶ ἔστω ὁ $E > \Delta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Ε μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ τοὺς Α, Β. Ἄρα καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν τὸν Δ (κατὰ τὸ πόρισμα). Εἶναι δὲ ὁ $\Delta < E$. Ἄρα ὁ μεγαλύτερος Ε μετρεῖ τὸν μικρότερον Δ. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Δ. Ἄρα ὁ Δ εἶναι μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ.

Β΄) Ἔστω ὅτι ὁ Δ δὲν μετρεῖ τὸν Γ. Λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς μετρῶν τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ βέβαια τοὺς Α, Β καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς καὶ τὸν Γ. Ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ ἀριθμός τις. Ἄρα οἱ Δ, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς ληφθῇ τὸ μ. κ. μ. τῶν Δ, Γ καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ὁ δὲ Δ μετρεῖ τοὺς Α, Β καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ. Ἄρα ὁ Ε εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν ὁ Ε δὲν εἶναι μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ, θὰ εἶναι ἄλλος τις ἀριθμὸς καὶ ἔστω οὗτος $Ζ > Ε$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, μετρεῖ καὶ τοὺς Α, Β καὶ ἄρα καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ὁ Ζ καὶ τὸν Γ. Ἄρα ὁ Ζ μετρεῖ τοὺς Δ, Γ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν τὸν Ε. Ἀλλὰ $Ζ > Ε$. Ἤτοι ὁ μεγαλύτερος ὁ Ζ μετρεῖ τὸν μικρότερον τὸν Ε. Ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Ε ἄρα εἶναι τὸ μ. κ. μ. (μ. κ. δ) τῶν Α, Β, Γ.

[*Σημ.* Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἐφαρμογὴν τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ. Ἔχει ἀποδειχθῆ ἡ εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν· ὅταν ἐδόθησαν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ δύο πρῶτοι ἀνεπληρώθησαν διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, καὶ εὑρέθη ὁ μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ μ. κ. δ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ. Ἐὰν ἐδίδοντο τέσσαρες ἀριθμοί, θὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν τριῶν πρώτων καὶ κατόπιν θ' ἀναχθῇ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ μ. κ. δ. τῶν τριῶν πρώτων καὶ τοῦ τετάρτου ἀριθμοῦ. Δηλ. ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ν ἀριθμῶν, γνωρίζομεν καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. $(ν+1)$ ἀριθμῶν, $(ν \geqq 2)$. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν καὶ ἡ ἀπόδειξις παρέχεται, δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ μ. κ. δ. τῶν δύο πρώτων καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ. Οὐδαμοῦ ὁ Εὐκλείδης ὁμιλεῖ περὶ εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. τεσσάρων, πέντε κλπ. ἀριθμῶν, διότι τὴν θεωρεῖ αὐτονόητον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τοῦ τρίτου θεωρήματος].

4. [Ἐὰν $Δ = ρ\,.\,δ$, ὁ δ εἶναι μέρος τοῦ Δ. Ἐὰν $Δ = \frac{μ}{ν}\,δ$, $(μ < ν)$, ὁ Δ εἶναι μέρη τοῦ δ].

Ἔστω $Α > ΒΓ$ καὶ ἔστωσαν πρῶτον οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπειδὴ δὲν εἶναι $Α = ρ \cdot ΒΓ$ καὶ εἶναι $Α > ΒΓ$, ὁ Α περιέχει τὰς μονάδας τοῦ ΒΓ. Ἄρα ὁ ΒΓ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 4 εἶναι μέρη τοῦ Α (δηλ. $\frac{μ}{ν}$ Α).

Ἔστω δεύτερον, ὅτι οἱ Α, ΒΓ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Τότε ἢ θὰ εἶναι $Α = ρ \cdot ΒΓ$ ἢ ὄχι. Ἐὰν εἶναι $Α = ρ \cdot ΒΓ$, ὁ ΒΓ εἶναι μέρος τοῦ Α $\left(ΒΓ = \frac{Α}{ρ}\right)$. Ἐὰν δὲν εἶναι $Α = ρ \cdot ΒΓ$, τότε ἂς λάβωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν Α, ΒΓ καὶ ἔστω οὗτος ὁ Δ, ὁπότε θὰ εἶναι $Α = ν \cdot Δ$, (1) καὶ $ΒΓ = μ.\,Δ$, (2). Ἀφοῦ δὲ $Α > ΒΓ$, εἶναι $ν > μ$. Ἐκ τῶν (2) καὶ (1) ἔχομεν $ΒΓ = \frac{μ}{ν}\,Α$. Ἤτοι ὁ ΒΓ εἶναι μέρη τοῦ Α.

5. Ἐὰν $ΒΓ = ρΑ$, $ΕΖ = ρΔ$, τότε εἶναι $ΒΓ + ΕΖ = ρ\,(Α + Δ)$. Διότι, ἐπειδὴ $ΒΓ = ρΑ$, $ΕΖ = ρΔ$, ὁ ΒΓ περιέχει τόσας μονάδας Α, ὅσας μονάδας Δ περιέχει ὁ ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς μονάδας του τὰς ἴσας ἑκάστην πρὸς Α, τὰς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰς μονάδας του τὰς ἴσας ἑκάστην πρὸς Δ, τὰς ΕΘ, ΘΖ, ἤτοι

$$\mathrm{B\Gamma = BH + H\Gamma = A + A + \dots\dots + A = \rho \cdot A}, \quad (\mathrm{BH = H\Gamma = \dots\dots})$$
$$\mathrm{EZ = E\Theta + \Theta Z = \Delta + \Delta + \dots\dots + \Delta = \rho \cdot \Delta}, \quad (\mathrm{E\Theta = \Theta Z = \dots\dots})$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $\mathrm{B\Gamma + EZ = (BH + E\Theta) + (H\Gamma + \Theta Z) = (A + \Delta) + \dots\dots(A + \Delta) = \rho \cdot A + \rho \cdot \Delta}$ ἢ $\mathrm{B\Gamma + EZ = \rho(A + \Delta) = \rho A + \rho\Delta}$. Ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ ἀκέραιον, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

6. Ἐὰν $\mathrm{AB} = \frac{\mu}{\nu}\Gamma$, $\Delta\mathrm{E} = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{Z}$ ($\mu < \nu$), θὰ εἶναι $\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{E} = \frac{\mu}{\nu}(\Gamma + \mathrm{Z})$. Διότι ἂς διαιρεθῇ ὁ ΑΒ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ τὰ ΑΗ, ΗΒ (ΑΗ = ΗΒ) καὶ ὁ ΔΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ Ζ τὰ ΔΘ, ΘΕ (ΔΘ = ΘΕ) ἤτοι :

$$\mathrm{AB = AH + HB} = \frac{\Gamma}{\nu} + \frac{\Gamma}{\nu} + \dots\dots + \frac{\Gamma}{\nu}, = \frac{\mu}{\nu}\Gamma.$$
$$\Delta\mathrm{E} = \Delta\Theta + \Theta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{Z}}{\nu} + \frac{\mathrm{Z}}{\nu} + \dots\dots + \frac{\mathrm{Z}}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{Z}.$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν $\frac{\Gamma}{\nu}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν $\frac{\mathrm{Z}}{\nu}$. Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{E} = (\mathrm{AH} + \Delta\Theta) + (\mathrm{HB} + \Theta\mathrm{E}) = \left(\frac{\Gamma}{\nu} + \frac{\mathrm{Z}}{\nu}\right) + \left(\frac{\Gamma}{\nu} + \frac{\mathrm{Z}}{\nu}\right) + \dots\dots + \left(\frac{\Gamma}{\nu} + \frac{\mathrm{Z}}{\nu}\right)$
$= \frac{\mu}{\nu}\Gamma + \frac{\mu}{\nu}\mathrm{Z}$.

ἢ $\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{E} = \qquad = \frac{1}{\nu}(\Gamma + \mathrm{Z}) + \frac{1}{\nu}(\Gamma + \mathrm{Z}) + \dots\dots + \frac{1}{\nu}(\Gamma + \mathrm{Z}) = \frac{\mu}{\nu}\Gamma + \frac{\mu}{\nu}\mathrm{Z}$

ἢ $\mathrm{AB} + \Delta\mathrm{E} = \frac{\mu}{\nu}(\Gamma + \mathrm{Z}) = \frac{\mu}{\nu}\Gamma + \frac{\mu}{\nu}\mathrm{Z}$.

[Ἤτοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ κλάσμα, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ κλάσμα].

7. Ἔστω $\mathrm{AB - AE = EB}$, $\Gamma\Delta - \Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\Delta$. Ἐὰν $\mathrm{AB} \,.\, \rho = \Gamma\Delta$, (1), $\mathrm{AE}.\rho = \Gamma\mathrm{Z}$, (2), θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{AB - AE}).\rho = \Gamma\Delta - \Gamma\mathrm{Z}$, ἢ $\mathrm{EB}.\rho = \mathrm{Z}\Delta$. Διότι ἔστω $\mathrm{EB} \,.\, \rho = \Gamma\mathrm{H}$, (3). Ἐκ τῶν 2) καὶ (3) διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $(\mathrm{AE + EB}).\rho = \Gamma\mathrm{Z} + \Gamma\mathrm{H}$, ἢ $\mathrm{AB}.\rho = \mathrm{HZ}$. (4), (ἐὰν καλέσωμεν $\Gamma\mathrm{Z} + \Gamma\mathrm{H} = \mathrm{HZ}$.) Ἐκ τῶν (1) καὶ (4), $\mathrm{HZ} = \Gamma\Delta$· ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὸ κοινὸν ΓΖ ἔχομεν $\mathrm{HZ} - \Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta - \Gamma\mathrm{Z}$ ἢ $\Gamma\mathrm{H} = \mathrm{Z}\Delta$. Ἐκ τῆς (3) ἄρα $\mathrm{EB} \,.\, \rho = \mathrm{Z}\Delta$. [Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἄλλων, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων· ἢ διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον].

8. Ἔστω $ΑΒ - ΑΕ = ΕΒ$, $ΓΔ - ΓΖ = ΖΔ$. Ἐὰν $ΑΒ = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ$, $ΑΕ = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ$, θὰ εἶναι καὶ $(ΑΒ - ΑΕ) = \frac{\mu}{\nu}\,(ΓΔ - ΓΖ)$. Διότι ἂς ληφθῇ $ΑΒ = ΗΘ$ καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ΗΘ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΔ καὶ ὁ ΑΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΓΔ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΓΖ. Θὰ ἔχωμεν δηλ. $ΗΘ = ΗΚ + ΚΘ$ καὶ $ΑΕ = ΑΛ + ΛΕ$ ἢ

$$ΗΘ = ΗΚ + ΚΘ = \frac{ΓΔ}{\nu} + \frac{ΓΔ}{\nu} + \cdots + \frac{ΓΔ}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ \qquad (1)$$

$$ΑΕ = ΑΛ + ΛΕ = \frac{ΓΖ}{\nu} + \frac{ΓΖ}{\nu} + \cdots + \frac{ΓΖ}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΓΔ > ΓΖ$, θὰ εἶναι καὶ $ΗΚ > ΗΜ$, ὅπου $ΗΜ = ΑΛ = ΛΕ$. Ὁμοίως $ΚΘ > ΚΝ$, ὅπου $ΚΝ = ΛΕ$, ἢ $\frac{ΓΔ}{\nu} > \frac{ΓΖ}{\nu}$. Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τὴν (1) κατὰ μέλη ἔχομεν (ἀφοῦ $ΗΜ = ΑΛ$, $ΚΝ = ΛΕ$)

$$ΗΘ - ΑΕ = (ΗΚ - ΗΜ) + (ΚΘ - ΚΝ) \text{ ἢ } = \left(\frac{ΓΔ}{\nu} - \frac{ΓΖ}{\nu}\right) + \left(\frac{ΓΔ}{\nu} - \frac{ΓΖ}{\nu}\right) + \cdots + \left(\frac{ΓΔ}{\nu} - \frac{ΓΖ}{\nu}\right) = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ - \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ.$$

$$\text{ἢ } ΗΘ - ΑΕ = (ΗΚ - ΗΜ) + (ΚΘ - ΚΝ) = \left(\frac{ΓΔ - ΓΖ}{\nu}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{ΓΔ - ΓΖ}{\nu}\right) = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ - \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ.$$

$$\text{ἢ } ΗΘ - ΑΕ = (ΗΚ - ΗΜ) + (ΚΘ - ΚΝ) = \frac{\mu}{\nu}\,(ΓΔ - ΓΖ) = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ - \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ΗΘ = ΑΒ$, θὰ εἶναι $ΑΒ - ΑΕ = \frac{\mu}{\nu}\,(ΓΔ - ΓΖ) = \frac{\mu}{\nu}\,ΓΔ - \frac{\mu}{\nu}\,ΓΖ$. Ἢ $ΕΒ = \frac{\mu}{\nu}\,ΖΔ$. [Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον. Ἢ ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ κλάσμα καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα].

9. Ἐὰν $\lambda\,.\,Α = ΒΓ$, $\lambda\,.\,Δ = ΕΖ$, θὰ εἶναι καί :

1) $\mu \cdot ΒΓ = ΕΖ$, ἐὰν $\mu \cdot Α = Δ$, καὶ 2) $ΒΓ = \frac{\mu}{\nu} ΕΖ$, ἐὰν $Α = \frac{\mu}{\nu} Δ$.

1. Ἄς διαιρεθῇ ὁ ΒΓ εἰς τοὺς λ τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τὸν Α τοὺς ΒΗ, ΗΓ καὶ ὁ ΕΖ εἰς τοὺς λ τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΘ, ΘΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Δ. Ὥστε θὰ εἶναι

$ΒΓ = ΒΗ + ΗΓ = Α + Α + \ldots\ldots + Α$ (1)
$ΕΖ = ΕΘ + ΘΖ = Δ + Δ + \ldots\ldots + Δ$ (2). Ἀλλὰ $Δ = \mu \cdot Α$. Ἄρα
$ΕΖ = \quad = \mu Α + \mu Α + \ldots\ldots + \mu Α$ (3). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ μ, θὰ ἔχωμεν $ΒΓ \cdot \mu = \mu Α + \mu Α + \ldots\ldots + \mu Α$, ἤτοι ἐκ τῆς (3), $\mu ΒΓ = ΕΖ$.

2. Κατόπιν τῆς αὐτῆς διαιρέσεως τῶν ΒΓ, ΕΖ, θὰ εἶναι
$ΒΓ = ΒΗ + ΗΓ = Α + Α + \ldots\ldots + Α$

$ΕΖ = ΕΘ + ΘΖ = Δ + Δ + \ldots. + Δ$. Ἀλλὰ $Α = \frac{\mu}{\nu} Δ$, ὅτε $ΒΓ =$

$$= \frac{\mu}{\nu} Δ + \frac{\mu}{\nu} Δ + \ldots\ldots + \frac{\mu}{\nu} Δ = \frac{\mu}{\nu} (Δ + Δ + \ldots. + Δ).$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, ἔχομεν $ΒΓ = \frac{\mu}{\nu} ΕΖ$.

10. Ἐὰν $ΑΒ = \frac{\mu}{\nu} Γ$, $ΔΕ = \frac{\mu}{\nu} Ζ$, θὰ εἶναι 1) $Γ = \frac{\varkappa}{\lambda} Ζ$, ἐὰν $ΑΒ = \frac{\varkappa}{\lambda} ΔΕ$ καὶ 2) $\rho Γ = Ζ$, ἐὰν $\rho ΑΒ = ΔΕ$. [$Γ = \rho Ζ$, ἐὰν $ΑΒ = \rho ΔΕ$ παραλείπεται]. Αἱ σχέσεις $ΑΒ = \frac{\mu}{\nu} Γ$, (1), $ΔΕ = \frac{\mu}{\nu} Ζ$, (2) συνεπάγονται κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21 (ἐπεξ. ὁρισμ. 21, 3) τὴν ἀναλογίαν $\frac{ΑΒ}{Γ} = \frac{ΔΕ}{Ζ}$. Τὸ θεώρημα πραγματεύεται τὰς δύο περιπτώσεις ὁμοῦ. Τὴν πρώτην, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὰ μέρη, καὶ τὴν δευτέραν, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὸ μέρος. Ἐνταῦθα τὰς διαχωρίζομεν.

1. Ἐὰν $ΑΒ = \frac{\varkappa}{\lambda} ΔΕ$, θὰ εἶναι $Γ = \frac{\varkappa}{\lambda} Ζ$. Πολλαπλασιάζομεν τὴν (2) ἐπὶ $\frac{\varkappa}{\lambda}$, ὅτε ἔχομεν $\frac{\varkappa}{\lambda} ΔΕ = \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\nu} Ζ$, (3). Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΑΒ = \frac{\mu}{\nu} Γ$, (4) καὶ $ΑΒ = \frac{\varkappa}{\lambda} ΔΕ$, (5). Ἐκ τῶν (3), (4) (5) λαμβάνομεν $\frac{\mu}{\nu} Γ = \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\nu} Ζ$. Ἐξ ἧς $Γ = \frac{\varkappa}{\lambda} Ζ$. Ἤτοι ἐὰν $ΑΒ = \frac{\varkappa}{\lambda} ΔΕ$,

εἶναι καὶ $\Gamma = \frac{\varkappa}{\lambda} Z$. [Αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις συνεπάγονται κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21 τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{\Gamma}{Z}$].

2. Ἐὰν $\rho AB = \Delta E$, θὰ εἶναι $\rho\Gamma = Z$. Πολλαπλασιάζομεν τὴν (1) ἐπὶ ρ, ὅτε ἔχομεν $\rho AB = \rho \frac{\mu}{\nu} \Gamma$, (6). Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Delta E = \frac{\mu}{\nu} Z$, (7) καὶ $\Delta E = \rho AB$, (8). Ἐκ τῶν (6), (7), (8) λαμβάνομεν $\rho \frac{\mu}{\nu} \Gamma = \frac{\mu}{\nu} Z$. Καὶ ἐκ ταύτης $\rho\Gamma = Z$. Ἤτοι ἐὰν $\rho AB = \Delta E$, εἶναι καὶ $\rho\Gamma = Z$. [Αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις συνεπάγονται κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21 τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{\Gamma}{Z}$].

Εἰς τὸ θεώρημα διακρίνομεν τὰς κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις :

$$1)\ AB = \lambda\Gamma,\ \Delta E = \lambda Z \quad \begin{cases} \text{ἐὰν } AB = \rho\Delta E, & \text{θὰ εἶναι καὶ } \Gamma = \rho Z. \\ \text{»}\ AB = \frac{\mu}{\nu}\Delta E & \text{» » »}\ \Gamma = \frac{\mu}{\nu} Z. \\ \text{»}\ \rho AB = \Delta E & \text{» » »}\ \rho\Gamma = Z. \end{cases}$$

$$2)\ AB = \frac{\mu}{\nu}\Gamma,\ \Delta E = \frac{\mu}{\nu} Z \quad \begin{cases} \text{»}\ AB = \rho\Delta E & \text{» » »}\ \Gamma = \rho Z \\ \text{»}\ AB = \frac{\varkappa}{\lambda}\Delta E & \text{» » »}\ \Gamma = \frac{\varkappa}{\lambda} Z. \\ \text{»}\ \rho AB = \Delta E & \text{» » »}\ \rho\Gamma = Z \end{cases}$$

$$3)\ \theta\,.\,AB = \Gamma,\ \theta.\Delta E = Z \quad \begin{cases} \text{»}\ AB = \rho\Delta E & \text{» » »}\ \Gamma = \rho Z \\ \text{»}\ AB = \frac{\mu}{\nu}\Delta E & \text{» » »}\ \Gamma = \frac{\mu}{\nu} Z. \\ \text{»}\ \rho AB = \Delta E & \text{» » »}\ \rho\Gamma = Z. \end{cases}$$

Ὁ Εὐκλείδης ἀποδεικνύει ἐκ τῶν τριῶν ὑποπεριπτώσεων τῆς (2) τὰς δύο τελευταίας. Ἐπὶ τῶν ἀποδείξεων τούτων στηρίζονται καὶ αἱ ἀποδείξεις τῶν ἄλλων ὑποπεριπτώσεων. Αἱ 1, 2, 3 περιπτώσεις συνεπάγονται κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21 τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{Z}$, ἐν ᾧ αἱ πρὸς τὰ δεξιὰ τούτων ἐννέα ὑποπεριπτώσεις συνεπάγονται τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{\Gamma}{Z}$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21.

11. Ἔστω $AB - AE = EB$, $\Gamma\Delta - \Gamma Z = Z\Delta$. Ἐὰν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{AB - AE}{\Gamma\Delta - \Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$ $\left(\text{δηλ. } \frac{EB}{Z\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}\right)$. Ἐπειδὴ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, θὰ ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21,

$$\text{ἢ } \rho \,.\, AB = \Gamma\Delta, \quad \rho AE = \Gamma Z$$

$$\text{ἢ } \quad AB = \frac{\mu}{\nu}\,\Gamma\Delta, \ AE = \frac{\mu}{\nu}\,\Gamma Z$$

$$\text{ἢ } \quad AB = \rho\Gamma\Delta, \quad AE = \rho\Gamma Z.$$

Τὸ θεώρημα πραγματεύεται ὁμοῦ τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις διὰ τῆς φράσεως τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰς ὁποίας διαχωρίζομεν. 1) $\rho AB = \Gamma\Delta$, $\rho AE = \Gamma Z$. Δι᾽ ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $\rho\,(AB - AE) = \Gamma\Delta - \Gamma Z$. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $\rho AB = \Gamma\Delta$. Ὁ $(AB - AE)$ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ $(\Gamma\Delta - \Gamma Z)$, οἷον εἶναι ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$. Καὶ κατὰ τὸν ὁρ. 21 (ἐπεξ. ὁρ. 21), 2) θὰ εἶναι $\frac{AB - AE}{\Gamma\Delta - \Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. 2) $AB = \frac{\mu}{\nu}\Gamma\Delta$, $AE = \frac{\mu}{\nu}\Gamma Z$. Δι᾽ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $AB - AE = \frac{\mu}{\nu}(\Gamma\Delta - \Gamma Z)$. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $AB = \frac{\mu}{\nu}\Gamma\Delta$. Ὁ ἀριθμὸς $(AB - AE)$ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ $(\Gamma\Delta - \Gamma Z)$, οἷα εἶναι ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$. Καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 21 (ἐπεξ. ὁρ. 21, 3) θὰ εἶναι $\frac{AB - AE}{\Gamma\Delta - \Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. [Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν: Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{\rho}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \rho$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$. 1) $\rho\alpha = \beta$, $\rho\gamma = \delta$, $\rho\,(\alpha - \gamma) = \beta - \delta$, $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta}$. 2) $\nu\alpha = \mu\beta$, $\nu\gamma = \mu\delta$, $\nu\,(\alpha - \gamma) = \mu\,(\beta - \delta)$, $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}$. 3) $\alpha = \rho\beta$, $\gamma = \rho\delta$, $\alpha - \gamma = \rho(\beta - \delta)$, $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \rho = \frac{\alpha}{\beta}$].

12. Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{B} = \frac{A + \Gamma}{B + \Delta}$. Διότι, ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ θὰ ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν περιπτώσεων: 1) $\rho A = B$, $\rho\Gamma = \Delta$, 2) $A = \frac{\mu}{\nu}B$, $\Gamma = \frac{\mu}{\nu}\Delta$, 3) $A = \rho B$, $\Gamma = \rho\Delta$. Τὸ θεώρημα πραγματεύεται τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις. Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ὡς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Ἐνταῦθα προσθέτομεν κατὰ μέλη ἀντί, ὡς ἐκεῖ, ν᾽ ἀφαιρῶμεν.

13. Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$. Διότι, διὰ νὰ εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, θὰ ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν περιπτώσεων, 1) $\rho A = B$, $\rho\Gamma = \Delta$, 2) $A = \frac{\mu}{\nu} B$, $\Gamma = \frac{\mu}{\nu} \Delta$, 3) $A = \rho B$, $\Gamma = \rho\Delta$ (ὁρ. 21). Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις κατὰ τὸ 10ον θεώρημα εἶναι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$. Τὸ θεώρημα πραγματεύεται τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ὁμοῦ διὰ τῆς φράσεως τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

14. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ. Ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$ καὶ $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z}$

$\left(\begin{matrix} \text{ἢ } A : B = \Delta : E \\ B : \Gamma = E : Z \end{matrix}\right)$ θὰ εἶναι καὶ $A : \Gamma = \Delta : Z$. (δι' ἴσου λόγοι).

Διότι, ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{A}{\Delta} = \frac{B}{E}$, (1). Ὁμοίως ἐπειδὴ $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z}$ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{B}{E} = \frac{\Gamma}{Z}$, (2). Ἄρα ἐκ τῶν (1) καὶ (2) $\frac{A}{\Delta} = \frac{\Gamma}{Z}$. Καὶ ἐναλλὰξ ἄρα $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$.

[*Σημ.* Ἐὰν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ καὶ αἱ ἀναλογίαι (1) $A : B = E : Z$
(2) $B : \Gamma = Z : H$
(3) $\Gamma : \Delta = H : \Theta$, ἕπεται $A : \Delta = E : \Theta$.
Διότι ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἀπεδείχθη προηγουμένως $A : \Gamma = E : H$. Ἐὰν τώρα λάβωμεν καὶ τὸν λόγον $\Gamma : \Delta = H : \Theta$, θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα $A : \Delta = E : \Theta$. Ἤτοι ἀνηγάγομεν τὰς τρεῖς δοθείσας ἀναλογίας εἰς δύο, ἐξ ὧν ἀπεδείχθη ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως. Δηλ. ἀφοῦ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ἰσχύει διὰ ν ἀναλογίας, ἰσχύει καὶ διὰ $(\nu + 1)$, $\nu \geqq 2$. Καὶ ἐνταῦθα ἔχομεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ].

15. Ἔστω $A = 1$ καὶ $\frac{A}{B\Gamma} = \frac{\Delta}{EZ}$. Τότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{A}{\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ ἢ $\frac{1}{\Delta} = \frac{B\Gamma}{Z}$. Διότι, ἐπειδὴ ἰσάκις ἡ μονὰς Α μετρεῖ τὸν ΒΓ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσας μονάδας Α ἔχει ὁ ΒΓ, τόσους ἀριθμοὺς Δ ἔχει καὶ ὁ ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὸ πλῆθος τῶν μονάδων του Α, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν του Δ, ὅτε θὰ εἶναι $B\Gamma = BH + H\Theta + \cdots + \Theta\Gamma$ $(BH = H\Theta = \Theta\Gamma = A = 1)$ καὶ $EZ = EK + K\Lambda + \cdots + \Lambda Z$ $(EK = K\Lambda = \Lambda Z = \Delta)$.
Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ΒΗ, ΗΘ,....ΘΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ΕΚ, ΚΛ,....ΛΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες ΒΗ, ΗΘ...

εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΚ, ΚΛ.... εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἄρα $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{EK}}=\frac{\mathrm{H\Theta}}{\mathrm{K\Lambda}}=.....=\frac{\Theta\Gamma}{\Lambda\mathrm{Z}}$. Καὶ κατὰ τὸ 12 θεώρ. θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{EK}}=$ $\frac{\mathrm{BH}+\mathrm{H\Theta}+.....+\Theta\Gamma}{\mathrm{EK}+\mathrm{K\Lambda}+.....+\Lambda\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}}$. Ἀλλὰ $\mathrm{BH}=\mathrm{A}=1$ καὶ $\mathrm{EK}=\Delta$. Ἄρα $\frac{1}{\Delta}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}}$.

16. Ἐὰν $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\Gamma$ καὶ $\mathrm{B}\times\mathrm{A}=\Delta$, θὰ εἶναι $\Gamma=\Delta$. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς (Ε) τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Ἑπομένως ἡ μονὰς (Ε) μετρεῖ ἰσάκις τὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἄρα θὰ εἶναι $\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$. Καὶ ἐναλλὰξ (θεώρ. 15) $\frac{1}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}$, (1). Ἐπίσης ἐπειδὴ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει τὸν Δ, ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Ἑπομένως ἡ μονὰς (Ε) μετρεῖ ἰσάκις τὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἄρα εἶναι $\frac{1}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}}{\Delta}$, (2). Καὶ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὁ Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν Γ καὶ τὸν Δ. Ἄρα $\Gamma=\Delta$ (ἰδιότης ἀντιμεταθέσεως).

17. Ἐὰν $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\Delta$ καὶ $\mathrm{A}\times\Gamma=\mathrm{E}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}=\frac{\Delta}{\mathrm{E}}$.

Διότι, ἐπειδὴ $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\Delta$, ὁ Β μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς (Ζ) μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἄρα εἶναι $\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{B}}{\Delta}$, (1). Ἐπίσης ἐπειδὴ $\mathrm{A}\times\Gamma=\mathrm{E}$, ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς (Ζ) μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Ἄρα $\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{\Gamma}{\mathrm{E}}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{\mathrm{B}}{\Delta}=\frac{\Gamma}{\mathrm{E}}$. Καὶ ἐναλλὰξ ἄρα $\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}=\frac{\Delta}{\mathrm{E}}$.

18. Ἐὰν $\mathrm{A}\times\Gamma=\Delta$, $\mathrm{B}\times\Gamma=\mathrm{E}$, θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Delta}{\mathrm{E}}$. Διότι, ἐπειδὴ $\mathrm{A}\times\Gamma=\Delta$ καὶ $\mathrm{B}\times\Gamma=\mathrm{E}$, θὰ εἶναι κατὰ τὸ 16 θεώρ. $\Gamma\times\mathrm{A}=\Delta$ καὶ $\Gamma\times\mathrm{B}=\mathrm{E}$. Καὶ κατὰ τὸ 17 θεώρ. ἄρα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Delta}{\mathrm{E}}$.

19. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων· καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ.

1) Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν ἀναλογίᾳ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ ἔστω $\mathrm{A}\times\Delta = \mathrm{E}$, $\mathrm{B}\times\Gamma = \mathrm{Z}$. Λέγω, ὅτι εἶναι $\mathrm{E}=\mathrm{Z}$. Ἂς ληφθῇ $\mathrm{A}\times\Gamma = \mathrm{H}$. Ἐπειδὴ $\mathrm{A}\times\Gamma = \mathrm{H}$ καὶ $\mathrm{A}\times\Delta = \mathrm{E}$, εἶναι κατὰ τὸ 17ον θεώρ. $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Ἄρα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}$, (1). Πάλιν, ἐπειδὴ $\mathrm{A}\times\Gamma = \mathrm{H}$ καὶ $\mathrm{B}\times\Gamma = \mathrm{Z}$, εἶναι κατὰ τὸ 18ον θεώρ. $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}}$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}}$. Καὶ κατὰ τὸ 9ον θεώρ. τοῦ V βιβλίου $\mathrm{E} = \mathrm{Z}$. [Σημ. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρ. 9 τοῦ V βιβλίου τὸ ἀφορῶν εἰς μεγέθη (καὶ ἀσύμμετρα) ἐφαρμόζεται εἰς ἀριθμούς. Ἐκ τούτου παρατηρεῖ ὁ Zeuthen, ὅτι ἀποκαθίσταται διὰ τοῦ 19ου θεωρήματος ἑνότης μεταξὺ τῆς θεωρίας τῶν μεγεθῶν καὶ τῶν ἀριθμῶν («Sur la constitution des livres arithmétiques des Élements d' Euclide» Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1910, σελ. 412, 413)].

2) Ἔστωσαν τώρα οἱ 4 ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, καὶ $\mathrm{A}\times\Delta = \mathrm{B}\times\Gamma$. Τότε θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἂς ληφθῇ $\mathrm{A}\times\Gamma = \mathrm{H}$, (1) καὶ $\mathrm{A}\times\Delta = \mathrm{E}$, (2), $\mathrm{B}\times\Gamma = \mathrm{Z}$, (3). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}$ καὶ ἐκ τῶν (1) καὶ (3) $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}}$. Ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{E} = \mathrm{Z}$, ἕπεται $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

20. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, ΓΔ, ΕΖ, $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{EZ}}$ ἀνάγωγον. Τότε θὰ εἶναι $\Gamma\Delta\,.\,\rho = \mathrm{A}$ καὶ $\mathrm{EZ}\,.\,\rho = \mathrm{B}$.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι $\Gamma\Delta\,.\,\rho = \mathrm{A}$, $\mathrm{EZ}\,.\,\rho = \mathrm{B}$, ἔστω ὅτι εἶναι $\Gamma\Delta = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{A}$ καὶ $\mathrm{EZ} = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{B}$. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ μέρη τοῦ Α τὰ ΓΗ, ΗΔ καὶ ὁ ΕΖ εἰς τὰ μέρη τοῦ Β τὰ ΕΘ, ΘΖ ἤτοι :

$$\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{H} + \mathrm{H}\Delta + \cdots \text{ ἢ } = \frac{\mathrm{A}}{\nu} + \frac{\mathrm{A}}{\nu} + \cdots\cdots + \frac{\mathrm{A}}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{A} \quad (1)$$

$$\mathrm{EZ} = \mathrm{E}\Theta + \Theta\mathrm{Z} + \cdots \text{ ἢ } = \frac{\mathrm{B}}{\nu} + \frac{\mathrm{B}}{\nu} + \cdots + \frac{\mathrm{B}}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\mathrm{B}, \ (2).$$

Ἐπειδὴ $\Gamma\mathrm{H} = \mathrm{H}\Delta = \cdots$ καὶ $\mathrm{E}\Theta = \Theta\mathrm{Z} = \ldots$.καὶ τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\mathrm{E}\Theta} = \frac{\mathrm{H}\Delta}{\Theta\mathrm{Z}} = \cdots$ ἢ

$$=\frac{\frac{A}{\nu}}{\frac{B}{\nu}}=\frac{\frac{A}{\nu}}{\frac{B}{\nu}}=\cdots\cdots=\frac{\frac{A}{\nu}}{\frac{B}{\nu}}.$$ Καὶ κατὰ τὸ 12 θεώρ. θὰ εἶναι

$$\frac{\Gamma H}{E\Theta}=\frac{\Gamma H+H\Delta}{E\Theta+\Theta Z} \;\; \text{ἢ} \;\; \frac{\frac{A}{\nu}+\frac{A}{\nu}+\frac{A}{\nu}+\cdots+\frac{A}{\nu}}{\frac{B}{\nu}+\frac{B}{\nu}+\frac{B}{\nu}+\cdots+\frac{B}{\nu}}. \text{ Ἢ } \frac{\Gamma H}{E\Theta}=\frac{\Gamma\Delta}{EZ}=\frac{\frac{\mu}{\nu}A}{\frac{\mu}{\nu}B}.$$

Ἀλλὰ ὁ μὲν ΓΗ εἶναι μικρότερος τοῦ ΓΔ, ὁ δὲ ΕΘ εἶναι μικρότερος τοῦ ΕΖ καὶ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ κλάσμα $\frac{\Gamma\Delta}{EZ}$ εἶναι ἀνάγωγον. Ἄρα δὲν εἶναι $\Gamma\Delta=\frac{\mu}{\nu}A$ καὶ $EZ=\frac{\mu}{\nu}B$. Ἄρα εἶναι $\Gamma\Delta.\rho=A$ καὶ $EZ.\,\rho=B$, ἐφ' ὅσον ἐδόθη ἡ σχέσις $\frac{\Gamma\Delta}{EZ}=\frac{A}{B}$ (ὁρ. 21).

21. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι δὲν ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ μικρότεροι τῶν Α, Β εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχουσι μικρότεροι τῶν ἀριθμῶν Α, Β εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ Γ, Δ, ὥστε $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Τότε κατὰ τὸ 20ον θεώρ. εἶναι $\Gamma.\,\rho=A$ καὶ $\Delta.\,\rho=B$, ἤτοι ὁ ρ μετρεῖ καὶ τὸν Α καὶ τὸν Β, ἐν ᾧ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν ὑπάρχουσι μικρότεροι τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν Α, Β εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ αὐτούς.

22. Ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου. Διότι, ἐὰν οἱ Α, Β δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις, ἔστω ὁ Γ, ὅτε θὰ εἶναι $A=\Gamma.\,\Delta$, $B=\Gamma.\,E$. Καὶ κατὰ τὸ 17 θεώρ. θὰ εἶναι $\frac{\Delta}{E}=\frac{A}{B}$. Ἀφοῦ δὲ ὁ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Δ καὶ ὁ Β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε, οἱ ἀριθμοὶ Δ, Ε εἶναι μικρότεροι ἀντιστοίχως τῶν Α, Β καὶ εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐξ ὑποθέσεως οἱ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ἄρα δὲν εἶναι $A=\Gamma.\Delta$, $B=\Gamma.E$, ἤτοι οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

23. Ἔστω Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $A=\Gamma.\rho$. Λέγω, ὅτι οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ἔχωσι κοινὸν μέτρον, ἔστω Δ, ὅτε θὰ εἶναι $\Gamma=\mu\Delta$, $B=\nu\Delta$. Ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ, ἄρα καὶ τὸν Α. Μετρεῖ ὅμως ὁ Δ καὶ τὸν Β. Ὥστε μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

24. Ἐὰν Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε $A\times B$, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἔστω $A\times B=\Delta$. Λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἔστω, ὅτι μετρεῖ αὐταὺς ὁ Ε. Ἐπειδὴ οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸν δὲ Γ μετρεῖ ἀριθμός τις, ὁ Ε, οἱ Α, Ε ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 23). Ἔστω $E \times Z = \Delta$. Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως εἶναι καὶ $A \times B = \Delta$. Ἄρα $E \times Z = A \times B$. Ἐξ ἧς $\frac{E}{A} = \frac{B}{Z}$ (θεώρ. 19). Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι καὶ οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (θεώρ. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Μετρεῖ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Β, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐδεὶς ἄρα ἀριθμὸς μετρεῖ τοὺς Γ, Δ· οὗτοι ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

25. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $A^2 = \Gamma$ Λέγω, ὅτι Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ἂς ληφθῇ $A = \Delta$. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $A = \Delta$, θὰ εἶναι καὶ Δ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἕκαστος ἄρα τῶν Δ, Α εἶναι πρὸς τὸν Β πρῶτος. Ἄρα καὶ τὸ γινόμενον $\Delta \times A$ θὰ εἶναι πρὸς τὸν Β πρῶτος (θεώρ. 24). Ἀλλὰ $\Delta \times A = A^2 = \Gamma$. Ἄρα οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

26. Ἔστω Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ Α, Δ ἐπίσης· ὁμοίως Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ Β, Δ ἐπίσης. Τότε θὰ εἶναι Ε $(= A \times B)$ καὶ Ζ $(= \Gamma \times \Delta)$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Α, Β εἶναι πρὸς τὸν Γ πρῶτος, θὰ εἶναι καὶ $E = A \times B$ πρὸς τὸν Γ πρῶτος. Ἐπίσης ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Α, Β εἶναι πρὸς τὸν Δ πρῶτος, θὰ εἶναι καὶ $E = A \times B$ πρὸς τὸν Δ πρῶτος. Ὥστε ὁ Ε εἶναι πρὸς ἕκαστον τῶν Γ,Δ πρῶτος· ἄρα ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Γ, Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Ζ (θεώρ. 24).

27. Ἐὰν Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε καὶ A^ν, B^ν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ν ἀκέραιος). Ἔστω $A \times A = \Gamma$ $(= A^2)$, $A \times \Gamma = \Delta (= A^3)$ $B \times B = E$ $(= B^2)$, $B \times E = Z$ $(= B^3)$. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $A \times A = \Gamma$, ἄρα οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θ. 25). Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $B \times B = E$, ἄρα οἱ Γ, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θ. 25). Πάλιν, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $B \times B = E$, ἄρα οἱ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θ. 25) Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ εἶναι πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε, ἕκαστος πρὸς ἕκαστον πρῶτος, θὰ εἶναι καὶ τὸ γινόμενον $A \times \Gamma$ πρὸς τὸ γινόμενον $B \times E$ πρῶτος (θ. 26). Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $A \times \Gamma = \Delta$ $(= A^3)$ καὶ τὸ γινόμενον $B \times E = Z$ $(= B^3)$. Ἄρα οἱ Δ, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

[Σημ. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς· δίδονται οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀφοῦ ἀποδεικνύεται, ὅτι οἱ A^2, B^2 (Γ,Ε) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀποδεικνύεται κατόπιν, ὅτι οἱ A^3, B^3 (Δ, Ζ) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἡ ἐκφώνησις ὅμως τοῦ θεωρήματος λέγει «καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει» καὶ τὴν φράσιν ταύτην ὁ Heiberg θεωρῶν οὐχὶ τελείως γνησίαν θέτει ἐντὸς ἀγκυλῶν. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ φράσις εἶναι γνησία. Ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει τὸν ἰσχυρισμόν του διὰ $\nu = 2$ καὶ $\nu = 3$ καὶ δὲν χρειάζεται τοῦτο ν' ἀποδειχθῇ διὰ $\nu = 4$ κλπ. διότι ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία].

28. 1. Ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(AB + B\Gamma) = A\Gamma$ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ΑΓ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις, ἔστω ὁ Δ. Ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τοὺς ΑΓ,ΑΒ, θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $A\Gamma - AB = B\Gamma$. Μετρεῖ ὅμως ὁ Δ καὶ τὸν ΑΒ, ἤτοι μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΒΓ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ ΑΓ, ΑΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις διὰ τοὺς ΑΓ, ΒΓ. 2. Ἔστω τώρα ΑΓ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $A\Gamma = AB + B\Gamma$. Λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις, ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΑΓ. Ὥστε ὁ Δ μετρεῖ τοὺς ΑΓ, ΑΒ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν μετρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμός τις. Ἄρα εἶναι οὗτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

29. Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ μετρῇ τὸν Β. Λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις, ἔστω ὁ Γ. Ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Β, ὁ δὲ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β, ὁ Γ ἄρα δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοὺς Β, Α, ἄρα μετρεῖ τὸν Α πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οὐδεὶς μετρεῖ τοὺς Α, Β, ἤτοι οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

30. Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν μετρῆται δι' ἀριθμοῦ τινος πρώτου, καὶ εἷς τῶν παραγόντων μετρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Ἔστω $A \times B = \Gamma$ καὶ ὁ Γ νὰ μετρῆται ὑπὸ τοῦ πρώτου Δ. Λέγω, ὅτι ὁ Δ μετρεῖ ἕνα τῶν Α, Β. Ἔστω ὅτι ὁ Δ δὲν μετρεῖ τὸν Α. Καὶ εἶναι πρῶτος ὁ Δ. Ἄρα οἱ Α, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἔστω $\Gamma = \Delta \times E$. Ἀλλὰ καὶ $A \times B = \Gamma$. Ἄρα $\Delta \times E = A \times B$. Ἄρα $\frac{\Delta}{A} = \frac{B}{E}$. Οἱ δὲ Δ, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ μετροῦσιν ἰσάκις ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, ἤτοι ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ὁ Δ δὲν μετρῇ τὸν Β, μετρεῖ τὸν Α. Ἄρα ὁ Δ μετρεῖ ἕνα τῶν Α, Β.

31. Πᾶς σύνθετος ἀριθμός, μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α. Λέγω, ὅτι μετρεῖται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Β. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Β εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ. Ἔστω ὅτι ὁ Β μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Γ. Ἐὰν ὁ Γ εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, διότι ὁ Γ μετρῶν τὸν Β μετρεῖ καὶ τὸν Α. Ἐὰν ὁ Γ δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ. Ἐὰν οὗτος εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Ἐὰν δὲν εἶναι, συνεχίζομεν ὡς ἀνωτέρω, μέχρις ὅτου εὑρεθῇ πρῶτος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν Α. Διότι, ἐὰν δὲν εὑρεθῇ, θὰ μετρῶσι τὸν Α ἄπειροι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου. Ὅπερ, προκειμένου περὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα θὰ ληφθῇ πρῶτός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν Α. [Τὸ θεώρημα τοῦτο διατυποῦται σήμερον ὡς τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καθ' ὃ πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον].

32. Διότι, ἐὰν μὲν εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἰσχύει. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

33. Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Ἐὰν οἱ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι οἱ ζητούμενοι. Ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ληφθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον (μ. κ. δ.) τῶν Α, Β, Γ καὶ ἔστω ὁ Δ. Τότε θὰ εἶναι $Α = Ε \times Δ$, (α), $Β = Ζ \times Δ$, (β) $Γ = Η \times Δ$, (γ). Συνεπῶς οἱ Ε, Ζ, Η μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς Α,Β,Γ. Ἄρα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, ἤτοι εἶναι $\frac{Α}{Β} = \frac{Ε}{Ζ}$, (1), $\frac{Α}{Γ} = \frac{Ε}{Η}$, (2), $\frac{Β}{Γ} = \frac{Ζ}{Η}$, (3). (Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (α), (β), (γ), ἢ κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ 21, ὅτε εἶναι $\frac{Α}{Ε} = \frac{Β}{Ζ}$, ... καὶ ἐναλλάξ). Λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α,Β,Γ οἱ Θ, Κ, Λ ($Ε > Θ$, $Ζ > Κ$, $Η > Λ$), ὅτε ἕκαστος τῶν Θ,Κ,Λ θὰ μετρῇ ἰσάκις ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ καὶ ἐστω τὸ κοινὸν μέτρον ὁ Μ. Τότε θὰ εἶναι $Α = Θ \times Μ$, (4), $Β = Κ \times Μ$, (5), $Γ = Λ \times Μ$, (6). Ἐκ τῶν (α), (β), (γ) καὶ τῶν (4), (5), (6) λαμβάνομεν $Ε \times Δ = Θ \times Μ$, $Ζ \times Δ = Κ \times Μ$, $Η \times Δ = Λ \times Μ$. (Τὸ θεώρημα ἐξετάζει τὴν πρώτην ἰσότητα). Ἐκ τῆς πρώτης ἰσότητος ἔχομεν $\frac{Ε}{Θ} = \frac{Μ}{Δ}$ (καὶ ἐκ τῶν ἄλλων

$\left.\frac{Z}{K}=\frac{M}{\Delta}, \frac{H}{\Lambda}=\frac{M}{\Delta}\right)$. Ἀλλὰ ὁ Ε $\rangle$ Θ. Ἄρα καὶ ὁ Μ $\rangle$ Δ. Καὶ μετρεῖ ὁ Μ τοὺς Α,Β,Γ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ Δ εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Ἄρα δὲν ὑπάρχουσι μικρότεροι τῶν Ε, Ζ, Η ἀριθμοὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ [ὥστε ἁπλοποιοῦμεν μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ἀριθμούς, ἂν διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν].

34. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. Οὗτοι θὰ εἶναι ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. 1) Ἔστω πρῶτον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς ληφθῇ τὸ γινόμενον $A \times B = \Gamma$. Λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι τὸ ἐλ. κ. π. τῶν Α, Β. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Γ, ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Δ, ὁπότε $\Delta \langle \Gamma$, καὶ $\Delta = A \times E$, $\Delta = B \times Z$, ἤτοι $A \times E = B \times Z$. Ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{Z}{E}$, (1). Ἐπειδὴ δὲ $A \times B = \Gamma$ καὶ $A \times E = \Delta$, διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εἶναι $\frac{B}{E} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (2). Εἰς τὴν (1) οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἑπομένως ὁ Ζ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ ὁ Ε ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Β, ἤτοι ὁ Β μετρεῖ τὸν Ε. Ἄρα εἰς τὴν (2) καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ, ἤτοι ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ Α, Β δὲν μετροῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ Γ, ἤτοι ὁ Γ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β. 2) Ἔστω δεύτερον, ὅτι οἱ Α, Β δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς ληφθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β οἱ Ζ, Ε, ὅτε εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{Z}{E}$. (Εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. τῶν Α, Β, ἔστω Δ, ὅτε θὰ εἶναι $A = \Delta \times Z$, $B = \Delta \times E$, καὶ διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη). Τότε θὰ ἔχωμεν $A \times E = B \times Z = \Gamma$. Ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Γ. Λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Γ, ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Δ, ὁπότε $\Delta \langle \Gamma$. Τότε θὰ ἔχωμεν $\Delta = A \times H$ καὶ $\Delta = B \times \Theta$. Ἄρα $A \times H = B \times \Theta$. Συνεπῶς $\frac{A}{B} = \frac{\Theta}{H}$. Καὶ εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{Z}{E}$. Ἄρα $\frac{Z}{E} = \frac{\Theta}{H}$. Ἀλλὰ οἱ Ζ, Ε εἶναι οἱ ἐλάχιστοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον καὶ συνεπῶς ὁ Η εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ ὁ Θ τοῦ Ζ, ἤτοι ὁ Ε μετρεῖ τὸν Η (καὶ ὁ Ζ τὸν Θ). Καὶ ἐπειδὴ $A \times E = \Gamma$ καὶ $A \times H = \Delta$, διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εἶναι $\frac{E}{H} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Ὁ δὲ Ε μετρεῖ τὸν Η. Ἄρα καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὁ Γ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β. [Ὥστε τὸ ἐλ. κ. πολ. δύο πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. Ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν. Διὰ τούτου διαιροῦμεν ἕνα τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν καὶ μὲ τὸ ληφθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄλλον. Τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ.]

35. Οἱ ἀριθμοὶ Α, Β μετροῦσι τὸν ΓΔ. Ὁ δὲ Ε εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β. Λέγω, ὅτι ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ. Διότι, ἐὰν ὁ Ε δὲν μετρεῖ τὸν ΓΔ, θὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον ἔστω $ΓΖ < Ε$. Τότε θὰ εἶναι $ΓΔ = Ε \times ρ + ΓΖ$ ἢ $ΓΔ - ΓΖ = Ε \times ρ$, (1) ἢ $ΖΔ = Ε \times ρ$, ἐὰν κληθῇ ΖΔ ἡ διαφορὰ $ΓΔ - ΓΖ$. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Ε, θὰ μετρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΖΔ. Μετροῦσιν ὅμως οἱ Α, Β ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν ΓΔ. Ἄρα θὰ μετρῶσι καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $ΓΔ - ΖΔ = ΓΖ$ (ἐκ τῆς (1)). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ ΓΖ εἶναι μικρότερος τοῦ Ε. Ὄχι λοιπὸν δὲν μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ· ἄρα τὸν μετρεῖ.

36. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ. Ἂς ληφθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν δύο ἐξ αὐτῶν τῶν Α, Β, ἔστω ὁ Δ. Ὁ Γ ἢ μετρεῖ τὸν Δ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἔστω πρῶτον, ὅτι τὸν μετρεῖ. Μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ. Ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Δ. Λέγω, ὅτι ὁ Δ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Ε, ὁπότε $Δ > Ε$. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ε, ἄρα μετροῦσιν αὐτὸν καὶ οἱ Α, Β. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Δ, μετρεῖ τὸν Ε, ἤτοι ὁ μεγαλύτερος μετρεῖ τὸν μικρότερον. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ Δ. Ἔστω δεύτερον, ὅτι ὁ Γ δὲν μετρεῖ τὸν Δ. Λαμβάνομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Γ, Δ καὶ ἔστω Ε. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Δ καὶ ὁ Ε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Δ, ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Ε. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε. Ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ε. Λέγω, ὅτι ὁ Ε εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Ζ, ὁπότε $Ζ < Ε$. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ζ, ἄρα καὶ οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Ζ. Ἑπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, καὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Δ μετρεῖ τὸν Ζ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ. Ἄρα οἱ Δ, Γ μετροῦσι τὸν Ζ. Ἄρα καὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Δ, Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Ε, μετρεῖ τὸν Ζ, ἤτοι ὁ μεγαλύτερος μετρεῖ τὸν μικρότερον. Ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ Α, Β, Γ δὲν μετροῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ Ε. Ἄρα ὁ Ε εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Α, Β, Γ [ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐλ. κ. πολ. τριῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν δύο ἐξ αὐτῶν καὶ κατόπιν μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. Ἀπεδείχθη δηλ., ὅτι ἀφοῦ ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ θεωρήματος εἶναι ἀληθὴς διὰ δύο ἀριθμούς (ὁ τρόπος δηλ. εὑρέσεως τοῦ ἐλ. κ. πολ. δύο ἀριθμῶν) θὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ $2 + 1$ ἀριθμούς. Ἤτοι ἐὰν ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος ἰσχύῃ διὰ ν ἀριθμούς, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ $(ν + 1)$, $ν \geqq 2$. Ὥστε καὶ ἐνταῦθα ἔχομεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ].

37. Ἔστω $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{1}$. Καὶ ἐναλλὰξ $\frac{Α}{Γ} = \frac{Β}{1}$. Ἡ μονὰς εἶναι τὸ $\frac{1}{Β}$ τοῦ

Β. Ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τὸ $\frac{1}{Β}$ τοῦ **Α. Ἤτοι ὁ Α** ἔχει μέρος τὸν Γ, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁμώνυμος πρὸς τὸν Β.

38. Ἐὰν ὁ Α ἔχῃ μέρος τὸν Β καὶ ὁ Γ εἶναι τὸ $\frac{1}{Β}$ τοῦ Α, ὁ Α διαιρεῖται διὰ Γ.

39. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις **ἐλάχιστος ὢν** θὰ ἔχῃ τὰ δοθέντα μέρη. Ἔστωσαν τὰ μέρη (κλάσματα) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ πρὸς τὰ μέρη ταῦτα εἶναι οἱ 3, 4, 5. Ὁ 3 περιέχει **τρίτα**, ὁ 4 περιέχει τέταρτα καὶ ὁ 5 περιέχει πέμπτα. Εὑρίσκομεν **τὸ ἐλ. κ. πολ.** τῶν 3, 4, 5 τὸ 60. Ὁ 60 περιέχει $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ καὶ συνεπῶς περιέχει $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Τὸ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ τοῦ 60 εἶναι $\frac{20}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60}$. Ἑπομένως τὰ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ τοῦ 60 εἶναι $\frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$. Δὲν ὑπάρχει δὲ μικρότερος τοῦ 60, διότι ὁ 60 **εἶναι** ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ὁ διαιρούμενος διὰ 3, 4, 5. (Τροπὴ ἑτερωνύμων **κλασμάτων** εἰς ὁμώνυμα).

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ VIII.

Θεώρ. 1. Οἱ ἀριθμοὶ Α,Β,Γ,Δ εἶναι « ἑξῆς **ἀνάλογον** », δηλ. ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὡς $\frac{Α}{Β} = \frac{Β}{Γ} = \frac{Γ}{Δ}$. Πρόκειται περὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Τὸ θεώρημα λέγει, ὅτι εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν **πρόοδον ἔχουσαν** ν ὅρους, ἐὰν ὁ πρῶτος καὶ ὁ νυοστὸς ὅρος εἶναι πρῶτοι πρὸς **ἀλλήλους**, οἱ ὅροι τῆς προόδου εἶναι οἱ ἐλάχιστοι οἱ ἀποτελοῦντες τοιαύτην **γεωμ.** πρόοδον.

Διότι, ἐὰν οἱ Α, Β, Γ, Δ δὲν **εἶναι οἱ** ἐλάχιστοι, ἔστω ὅτι ὑπάρχουσιν ἐλάχιστοι εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν **λόγον πρὸς** αὐτοὺς οἱ Ε, Ζ, Η, Θ, ἤτοι ὅτι εἶναι

$$Α : Β = Ε : Ζ$$
$$Β : Γ = Ζ : Η$$
$$Γ : Δ = Η : Θ.$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς δι' ἴσου λόγους (λῆψις **τῶν ἄκρων** καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων), θὰ ἔχωμεν $Α : Δ = Ε : Θ$. **Οἱ Α, Δ εἶναι** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ **ἐλάχιστοι** ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις **καὶ** ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, δηλ. ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ **τὸν Ε, ἤτοι** ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα **οἱ Ε, Ζ, Η, Θ δὲν εἶναι** εἰς τὸν **αὐτὸν** λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, Δ, ὄντες μικρότεροι τούτων. Ἄρα οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

2. Νὰ σχηματισθῇ ἡ γεωμ. πρόοδος μὲ τοὺς ν ἐλαχίστους ὅρους, ὅταν δοθῇ ὁ λόγος. Ἔστω ὁ λόγος $\frac{Α}{Β}$ καὶ $ν = 4$. Λαμβάνομεν $Α \times Α = Γ$, (1), $Α \times Β = Δ$, (2), $Β \times Β = Ε$, (3), καὶ $Α \times Γ = Ζ$, (4), $Α \times Δ = Η$, (5), $Α \times Ε = Θ$, (6), $Β \times Ε = Κ$, (7). (Θέτει πρῶτον $ν = 3$ καὶ κατόπιν $ν = 4$). 1). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) $\frac{Α}{Β} = \frac{Δ}{Ε}$. Ἄρα $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ} = \frac{Δ}{Ε}$, (α). Εὑρέθησαν ἑπομένως τρεῖς ὅροι γεωμ. προόδου οἱ Γ,Δ,Ε, ὥστε ἕκαστος λόγος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{Α}{Β}$. Εἶναι δὲ $Γ = Α^2$, $Δ = Α \times Β$, $Ε = Β^2$, ἤτοι ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι $Α^2, Α.Β, Β^2$ καὶ ἡ συνεχὴς ἀναλογία εἶναι $\frac{Α^2}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{Β^2}$, τῆς ὁποίας ἕκαστος λόγος εἶναι $= \frac{Α}{Β}$. 2) Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἔχομεν $\frac{Γ}{Δ} = \frac{Ζ}{Η}$. Ἄρα, ἀφοῦ $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, εἶναι $\frac{Α}{Β} = \frac{Ζ}{Η}$, (8). Ἐκ τῶν (5) καὶ (6), $\frac{Δ}{Ε} = \frac{Η}{Θ}$. Ἄρα ἐκ τῆς (α), $\frac{Α}{Β} = \frac{Η}{Θ}$, (9). Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) $\frac{Α}{Β} = \frac{Θ}{Κ}$, (10). Ἄρα ἐκ τῶν (8), (9) καὶ (10) ἔχομεν $\frac{Α}{Β} = \frac{Ζ}{Η} = \frac{Η}{Θ} = \frac{Θ}{Κ}$. Ἄρα εὑρέθησαν τέσσαρες ὅροι γεωμ. προόδου οἱ Ζ, Η, Θ, Κ, ὥστε ἕκαστος λόγος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{Α}{Β}$. Εἶναι δὲ $Ζ = Α^3$, $Η = Α^2.Β$, $Θ = Α.Β^2$, $Κ = Β^3$, ἤτοι ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι $Α^3$, $Α^2.Β$, $Α.Β^2$, $Β^3$ καὶ ἡ συνεχὴς ἀναλογία εἶναι $\frac{Α^3}{Α.{}^2Β} = \frac{Α.{}^2Β}{Α.Β^2} = \frac{Α.Β^2}{Β^3}$, τῆς ὁποίας ἕκαστος λόγος εἶναι $= \frac{Α}{Β}$. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἀποδεικνύεται, ὅτι οἱ ὅροι τῶν δύο γεωμ. προόδων εἶναι οἱ ἐλάχιστοι.

Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῆς γεωμ. ταύτης προόδου εἶναι προφανής. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ σχηματισμὸς γεωμ. προόδου μὲ $ν + 1$ ὅρους, ἡ ἐκ ταύτης συνεχὴς ἀναλογία μὲ ν λόγους, καὶ ἔστω ὁ λόγος τῆς προόδου ὁ $\frac{Α}{Β}$. Τότε ἡ γεωμ. πρόοδος θὰ εἶναι $Α^ν$, $Α^{ν-1}.Β$, $Α^{ν-2}.Β^2$, ..., $Α^2.Β^{ν-2}$, $Α.Β^{ν-1}$,

B^{ν} καὶ ἡ ἐκ ταύτης συνεχὴς ἀναλογία $\frac{A^{\nu}}{A^{\nu-1}.B} = \frac{A^{\nu-1}.B}{A^{\nu-2}.B^2} = \ldots\ldots = \frac{A^2.B^{\nu-2}}{A.B^{\nu-1}} = \frac{A.B^{\nu-1}}{B^{\nu}}\left(=\frac{A}{B}\right)$.

Εἶναι δὲ οἱ ὅροι τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ σχηματίζοντες τὴν ἀναλογίαν ταύτην μὲ λόγον $\frac{A}{B}$. Ἤτοι ἐὰν δοθῇ ὁ λόγος καὶ ὁρισθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου ἔστω ν, τότε ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ λόγου εἰς τὴν ν-1 δύναμιν. Ὁ δεύτερος ὅρος εὑρίσκεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου διὰ τοῦ λόγου. Ὁ τρίτος διὰ διαιρέσεως τοῦ δευτέρου ὅρου διὰ τοῦ λόγου κ.ο.κ.έ. Ὁ δεύτερος ὅρος εὑρίσκεται καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου. Ὁ τρίτος διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ λόγου κ.ο.κ..έ.

Πόρισμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι τετραγωνοι, ἐὰν δὲ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ἄκροι εἶναι κύβοι. Καὶ ἐκ τοῦ γενικοῦ νόμου, ἐὰν ν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἀποτελῶσι τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν ν - 1 δύναμιν. [Φανερὸς ὁ σχηματισμὸς τῆς γ. προόδου, ὅταν ὁ λόγος εἶναι ἀκέραιος].

3. Ἀντίστροφον τοῦ πρώτου. Ἔστωσαν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (δηλ. ἡ γεωμ. πρόοδος μὲ τοὺς ἐλαχίστους ὅρους), οἱ Α, Β, Γ, Δ. Λέγω, ὅτι Α, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (Ἡ συνεχὴς ἀναλογία ἐκ τῆς γεωμ. προόδου Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἡ $\left.\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}\right)$.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἔχοντες τὸν λόγον τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας οἱ Ε, Ζ, κατόπιν τρεῖς ἐλάχιστοι ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον οἱ Η, Θ, Κ, κατόπιν τέσσαρες ἐλάχιστοι ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις ὅτου τὸ πλῆθος τῶν λαμβανομένων ὅρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἔστω τὸ πλῆθος τούτων τέσσαρες. Ἀφοῦ ὁ λόγος εἶναι $\frac{E}{Z}$, ἡ γ. πρόοδος κατὰ τὸ 2ον θεώρημα, ἐκ τριῶν ὅρων, θὰ εἶναι E^2, $E.Z$, Z^2 (Η, Θ, Κ), καὶ ἡ γ. πρόοδος ἐκ τεσσάρων ὅρων θὰ εἶναι E^3, E^2Z, $E.Z^2$, Z^3 (Λ, Μ, Ν, Ξ). Καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{E}{Z}$ εἶναι ἀνάγωγον (οἱ ὅροι του εἶναι οἱ ἐλάχιστοι), οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Καὶ ἐπειδή, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, οἱ Η, Κ εἶναι τετράγωνοι καὶ οἱ Λ, Ξ κύβοι, οἱ Η, Κ καὶ οἱ Λ, Ξ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἐσχηματίσθησαν δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, Δ, καὶ τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ, ἕπεται ὅτι ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ. Ἄρα $Α = Λ$, $Β = Μ$, $Γ = Ν$, $Δ = Ξ$. Καὶ οἱ Λ, Ξ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα καὶ οἱ Α, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

4. Δίδονται οἱ λόγοι μὲ τοὺς ἐλαχίστους ὅρους $\frac{Α}{Β}, \frac{Γ}{Δ}, \frac{Ε}{Ζ}$ (νὰ εἶναι δηλ. τὰ κλάσματα ἀνάγωγα). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσιν ἴσοι λόγοι πρὸς τούτους μὲ τοὺς ἐλαχίστους ὅρους, οὕτως ὥστε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἑπομένου λόγου νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ προηγουμένου λόγου (νὰ εἶναι δηλ. οἱ λόγοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ). Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Β, Γ ἔστω Η, ὅτε θὰ εἶναι $Η = Β . ρ$, $Η = Γ . λ$. Σχηματίζομεν $Α . ρ = Θ$ καὶ $Δ . λ = Κ$. Ὁ Ε ἢ μετρεῖ τὸν Κ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. 1) Ἔστω πρῶτον ὅτι τὸν μετρεῖ, ὅτε θὰ εἶναι $Κ = Ε . μ$. Σχηματίζομεν $Ζ . μ = Λ$. Καὶ ἐπειδὴ $Θ = Α . ρ$ καὶ $Η = Β . ρ$, ἄρα $\frac{Α}{Β} = \frac{Θ}{Η}$. Ὁμοίως ἐπειδὴ $Η = Γ . λ$ καὶ $Κ = Δ . λ$, ἄρα, $\frac{Γ}{Δ} = \frac{Η}{Κ}$, (1). Ὁμοίως ἐπειδὴ $Κ = Ε . μ$ καὶ $Λ = Ζ . μ$, ἄρα $\frac{Ε}{Ζ} = \frac{Κ}{Λ}$. Εὑρέθησαν δηλ. ἴσοι ἀντιστοίχως λόγοι πρὸς τοὺς δοθέντας, οἱ λόγοι $\frac{Θ}{Η}, \frac{Η}{Κ}, \frac{Κ}{Λ}$, εἰς τοὺς ὁποίους ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἑπομένου κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ προηγουμένου κλάσματος (λόγου). Ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύεται, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Θ, Η, Κ, Λ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι οἱ δυνάμενοι νὰ σχηματίσωσιν αὐτοὺς τοὺς λόγους. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι οἱ Θ, Η, Κ, Λ οἱ ἐλάχιστοι οἱ σχηματίζοντες ἴσους ἀντιστοίχως λόγους πρὸς τοὺς $\frac{Α}{Β}, \frac{Γ}{Δ}, \frac{Ε}{Ζ}$, ἔστωσαν ἐλάχιστοι οἱ Ν,Ξ,Μ, Ο, $\left(\frac{Α}{Β} = \frac{Ν}{Ξ}, \frac{Γ}{Δ} = \frac{Ξ}{Μ}, \frac{Ε}{Ζ} = \frac{Μ}{Ο} \right)$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{Α}{Β} = \frac{Ν}{Ξ}$, οἱ δὲ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ξ. Ἄρα οἱ Β, Γ μετροῦσι τὸν Ξ. Ἄρα καὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Β, Γ θὰ μετρῇ τὸν Ξ. Ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η. Ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ὑπάρχουσιν ἄρα ἄλλοι μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν Θ, Η, Κ, Λ εἰς ἴσους ἀντιστοίχως λόγους τοὺς

$\frac{Α}{Β}, \frac{Γ}{Δ}, \frac{Ε}{Ζ}$, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι $\frac{Α}{Β}=\frac{Θ}{Η}, \frac{Γ}{Δ}=\frac{Η}{Κ}, \frac{Ε}{Ζ}=\frac{Κ}{Λ}$.

2) Ἔστω δεύτερον, ὅτι ὁ Ε δὲν μετρεῖ τὸν Κ. Τηρουμένων τῶν ἀνωτέρω, λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Ε, Κ, ἔστω τὸ Μ, ὁπότε $Μ = Ε . ν$ καὶ $Μ = Κ . τ$. Σχηματίζομεν $Θ . τ = Ν$, $Η . τ = Ξ$ καὶ $Ζ . ν = Ο$. Καὶ ἐπειδὴ $Ν = Θ . τ$, $Ξ = Η . τ$, ἄρα $\frac{Θ}{Η}=\frac{Ν}{Ξ}$. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ὅμως πρώτης περιπτώσεως εἶναι $\frac{Α}{Β}=\frac{Θ}{Η}$. Ἄρα $\frac{Α}{Β}=\frac{Ν}{Ξ}$. Ὁμοίως ἐπειδὴ $Ξ = Η . τ$, $Μ = Κ . τ$, ἄρα $\frac{Ξ}{Μ}=\frac{Η}{Κ}$. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ὅμως πρώτης περιπτώσεως εἶναι $\frac{Γ}{Δ}=\frac{Η}{Κ}$. Ἄρα $\frac{Γ}{Δ}=\frac{Ξ}{Μ}$. Πάλιν, ἐπειδὴ $Μ = Ε . ν$, $Ο = Ζ . ν$, ἄρα $\frac{Ε}{Ζ}=\frac{Μ}{Ο}$. Εὕρομεν δηλ. τοὺς λόγους $\frac{Α}{Β}=\frac{Ν}{Ξ}, \frac{Γ}{Δ}=\frac{Ξ}{Μ}, \frac{Ε}{Ζ}=\frac{Μ}{Ο}$. Οἱ λόγοι ὅμως $\frac{Ν}{Ξ}, \frac{Ξ}{Μ}, \frac{Μ}{Ο}$ εἶναι ὡς νὰ εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Περαιτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπογωγῆς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Ν, Ξ, Μ, Ο εἶναι οἱ ἐλάχιστοι οἱ δυνάμενοι νὰ σχηματίσωσιν αὐτοὺς τοὺς λόγους. Διότι, ἐὰν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο δὲν εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, ἔστω ὅτι εἶναι ἐλάχιστοι οἱ Π, Ρ, Σ, Τ (ὅτε θὰ εἶναι $\frac{Α}{Β}=\frac{Π}{Ρ}, \frac{Γ}{Δ}=\frac{Ρ}{Σ}, \frac{Ε}{Ζ}=\frac{Σ}{Τ}$). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{Π}{Ρ}=\frac{Α}{Β}$, οἱ δὲ Α, Β εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἄρα ὁ Β μετρεῖ τὸν Ρ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ρ. Ἄρα οἱ Β, Γ μετροῦσι τὸν Ρ. Ἄρα καὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Β, Γ μετρεῖ τὸν Ρ. Ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η. Ἄρα ὁ Η μετρεῖ τὸν Ρ. Καὶ εἶναι $\frac{Η}{Ρ}=\frac{Κ}{Σ}$, (διότι ἐκ τῆς (1) τῆς πρώτης περιπτώσεως εἶναι $\frac{Γ}{Δ}=\frac{Η}{Κ}$ καὶ ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως $\frac{Γ}{Δ}=\frac{Ρ}{Σ}$. Ἄρα $\frac{Η}{Κ}=\frac{Ρ}{Σ}$, καὶ ἐναλλὰξ $\frac{Η}{Ρ}=\frac{Κ}{Σ}$). Ἄρα καὶ ὁ Κ μετρεῖ τὸν Σ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ. (Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{Ε}{Ζ}$ ἐλήφθη ἀνάγωγον καὶ ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως, $\frac{Ε}{Ζ}=\frac{Σ}{Τ}$). Ἄρα οἱ Ε, Κ μετροῦσι τὸν Σ. Ἄρα καὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Ε, Κ μετρεῖ τὸν Σ (VII. 35). Εἶναι δὲ ἐλ. κ.

πολ. τῶν Ε, Κ ὁ Μ. Ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν Σ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ὑπάρχουσιν ἄρα ἄλλοι μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν Ν,Ξ,Μ,Ο εἰς τοὺς ἴσους ἀντιστοίχως λόγους, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι $\frac{A}{B}=\frac{N}{\Xi}, \frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Xi}{M}, \frac{E}{Z}=\frac{M}{O}$.

Ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

1. Ἔστωσαν οἱ λόγοι $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$. Πρέπει νὰ σχηματίσωμεν ἀντιστοίχως ἰσοδυνάμους λόγους, ὥστε νὰ εἶναι οὗτοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν $3, 4 = 12$. Τότε $\frac{12}{3}=4$ καὶ $\frac{12}{4}=3$. Μὲ τὸν 4 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου δοθέντος λόγου, τοῦ $\frac{2}{3}$, καὶ ἔχομεν $\frac{2\times 4}{3\times 4}$. Μὲ τὸν 3 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου δοθέντος λόγου, τοῦ $\frac{4}{5}$, καὶ ἔχομεν $\frac{4\times 3}{5\times 3}$. Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τοῦ (5×3) καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος τρίτου λόγου, τοῦ 3. Τοῦτο εἶναι 5×3 καὶ διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος τρίτου λόγου δίδει 5. Μὲ τὸ 5 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ τρίτου δοθέντος λόγου καὶ ἔχομεν $\frac{3\times 5}{4\times 5}$. Εὕρομεν δηλ. τοὺς ἴσους ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς δοθέντας λόγους, τοὺς $\frac{8}{12}, \frac{12}{15}, \frac{15}{20}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὡς νὰ ἦσαν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

2. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}$. Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν 3, 4, τὸ ὁποῖον εἶναι $= 12$. Τότε $\frac{12}{3}=4$ καὶ $\frac{12}{4}=3$. Μὲ τὸν 4 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου λόγου τοῦ $\frac{2}{3}$ καὶ μὲ τὸν 3 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου λόγου, τοῦ $\frac{4}{5}$ καὶ ἔχομεν ἀντιστοίχως $\frac{2\times 4}{3\times 4}$, (1) $\frac{4\times 3}{5\times 3}$, (2). Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τοῦ (5×3) καὶ τοῦ 7, δηλ. τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δοθέντος τρίτου λόγου, τὸ ὁποῖον εἶναι $(5\times 3)\times 7$. Τότε $\frac{(5\times 3)\times 7}{5\times 3}=7$ καὶ $\frac{(5\times 3)\times 7}{7}=5\times 3$. Μὲ τὸν 7 πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τῶν (1) καὶ (2) καὶ μὲ

τὸν 5×3 ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ τρίτου δοθέντος λόγου τοῦ $\frac{7}{9}$, ὅτε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 4 \times 7}$, $\frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7}$, $\frac{7 \times 5 \times 3}{9 \times 5 \times 3}$ ἢ $\frac{56}{84}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{105}{135}$.

Οἱ τρεῖς τελευταῖοι λόγοι εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς δοθέντας καὶ μὲ τοὺς ἐλαχίστους κατὰ τὸ δυνατὸν ὅρους καὶ εἶναι ὡς νὰ εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Καὶ γενικῶς· ἔστωσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα: $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\theta}$. Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν β, γ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\beta \times \gamma$. Κατόπιν λαμβάνομεν $\beta \times \gamma : \beta = \gamma$ καὶ $\beta \times \gamma : \gamma = \beta$. Μὲ τὸν γ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος καὶ μὲ τὸν β τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \gamma}$ $\frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta}$, (1). Εὑρίσκομεν κατόπιν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν $(\delta \times \beta)$, ε, τὸ ὁποῖον εἶναι $(\delta \times \beta) \times \varepsilon$. Λαμβάνομεν $(\delta \times \beta) \times \varepsilon : (\delta \times \beta) = \varepsilon$ καὶ $(\delta \times \beta) \times \varepsilon : \varepsilon = \delta \times \beta$. Μὲ τὸν ε πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων (1) καὶ μὲ τὸν $\delta \times \beta$ τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου λόγου, τοῦ $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha \times \gamma \times \varepsilon}{\beta \times \gamma \times \varepsilon}$, $\frac{\gamma \times \beta \times \varepsilon}{\delta \times \beta \times \varepsilon}$, $\frac{\varepsilon \times \delta \times \beta}{\zeta \times \delta \times \beta}$, (2). Εὑρίσκομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν $(\zeta \times \delta \times \beta)$, η, τὸ ὁποῖον εἶναι $(\zeta \times \delta \times \beta) \times \eta$. Λαμβάνομεν $(\zeta \times \delta \times \beta) \times \eta : \zeta \times \delta \times \beta = \eta$ καὶ $(\zeta \times \delta \times \beta) \times \eta : \eta = \zeta \times \delta \times \beta$. Μὲ τὸν η πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων (2) καὶ μὲ τὸν $\zeta \times \delta \times \beta$ τοὺς ὅρους τοῦ τετάρτου λόγου $\frac{\eta}{\theta}$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{\alpha \times \gamma \times \varepsilon \times \eta}{\beta \times \gamma \times \varepsilon \times \eta}, \quad \frac{\gamma \times \beta \times \varepsilon \times \eta}{\delta \times \beta \times \varepsilon \times \eta}, \quad \frac{\varepsilon \times \delta \times \beta \times \eta}{\zeta \times \delta \times \beta \times \eta}, \quad \frac{\eta \times \zeta \times \delta \times \beta}{\theta \times \zeta \times \delta \times \beta}.$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\alpha \times \gamma \times \varepsilon \times \eta = \mathrm{A}$, $\beta \times \gamma \times \varepsilon \times \eta = \mathrm{B}$, $\delta \times \beta \times \varepsilon \times \eta = \Gamma$, $\zeta \times \delta \times \beta \times \eta = \Delta$, $\theta \times \zeta \times \delta \times \beta = \mathrm{E}$, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἐλαχίστους ἀριθμοὺς ἀποτελοῦντας λόγους, ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἴσους πρὸς τοὺς δοθέντας, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, $\frac{\eta}{\theta} = \frac{\Delta}{\mathrm{E}}$. Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα δὲν εἶναι ἀνάγωγα, τὰ καθιστῶμεν. Ὁ κανὼν εὑρέσεως τῶν ἴσων λόγων εἶναι προφανής.

5. Ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ **νοοῦνται οἱ** παριστῶντες τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Πλευραὶ **τῶν ἐπιπέδων** ἀριθμῶν νοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰς πλευρὰς **ὀρθογων.** παραλληλογράμμου. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστος ἐπίπεδος ἀριθμὸς **εἶναι τὸ** γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν του. Στερεοὶ δὲ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ παριστῶντες τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Πλευραὶ δὲ τῶν στερεῶν **ἀριθμῶν εἶναι αἱ** τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Ἔστω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον βάσεως $=7$ καὶ ὕψους $=4$ καὶ ἄλλο βάσεως $=5$ **καὶ ὕψους** $=3$. Τὰ ἀντίστοιχα ἐμβαδὰ (ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ) εἶναι 28 καὶ 15. Τὸ **θεώρημα ἀποδεικνύει** ὅτι $\frac{28}{15}=\frac{7}{5}\times\frac{4}{3}$. Λόγος συγκείμενος ἐκ τῶν πλευρῶν **νοεῖται τὸ** γινόμενον τῶν λόγων $\frac{7}{5}\times\frac{4}{3}$.

Ἔστωσαν οἱ ἐπίπεδοι **ἀριθμοὶ** $A=\Gamma\times\Delta$ καὶ $B=E\times Z$. Λέγω, ὅτι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{E}\times\frac{\Delta}{Z}$. Διότι, **δοθέντων τῶν λόγων** $\frac{\Gamma}{E}$, $\frac{\Delta}{Z}$, ἂς ληφθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐν συνεχείᾳ ἀριθμοὶ **(ὡς ἐν συνεχεῖ** ἀναλογίᾳ) ἔχοντες τοὺς λόγους $\frac{\Gamma}{E}$, $\frac{\Delta}{Z}$, οἱ H, Θ, K, **ὥστε νὰ εἶναι** $\frac{\Gamma}{E}=\frac{H}{\Theta}$, $\frac{\Delta}{Z}=\frac{\Theta}{K}$ (ἤτοι νὰ σχηματισθῶσιν οἱ ἴσοι λόγοι κατὰ τὸ **προηγούμενον** θεώρημα οἱ $\frac{H}{\Theta}$, $\frac{\Theta}{K}$). [Οἱ ἴσοι λόγοι πρὸς τοὺς $\frac{\Gamma}{E}$, $\frac{\Delta}{Z}$, ὡς **ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ**, σχηματίζονται ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν **E, Δ, τὸ ὁποῖον** εἶναι $E\times\Delta$. Τότε $E\times\Delta : E=\Delta$. Μὲ τὸ Δ πολλαπλασιάζομεν **ἀριθμητὴν** καὶ παρονομαστὴν τοῦ λόγου $\frac{\Gamma}{E}$ καὶ ἔχομεν $\frac{\Gamma\times\Delta}{E\times\Delta}$. Ἐπίσης εἶναι $\mathbf{E\times\Delta:\Delta=E}$. Μὲ τὸ E πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ **παρανομαστὴν τοῦ λόγου** $\frac{\Delta}{Z}$ καὶ ἔχομεν $\frac{\Delta\times E}{Z\times E}$. Οἱ ἴσοι λόγοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἶναι $\frac{\Gamma\times\Delta}{E\times\Delta}$, $\frac{\Delta\times E}{Z\times E}$ ἤτοι $\frac{H}{\Theta}$, $\frac{\Theta}{K}$, ἐὰν καλέσωμεν $\Gamma\times\Delta=H$, $\Delta\times E=\Theta$, $E\times Z=K$]. **Σχηματίζομεν** τὸ γινόμενον $\Delta\times E=\Lambda$. Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\times\Delta=A$ **καὶ** $\Delta\times E=\Lambda$, ἄρα $\frac{\Gamma}{E}=\frac{A}{\Lambda}$. Ἀλλὰ $\frac{\Gamma}{E}=\frac{H}{\Theta}$. Ἄρα $\frac{H}{\Theta}=\frac{A}{\Lambda}$, (1). Πάλιν, **ἐπειδὴ** $\Delta\times E=\Lambda$, $E\times Z=B$, ἄρα $\frac{\Delta}{Z}=\frac{\Lambda}{B}$. Ἀλλὰ $\frac{\Delta}{Z}=\frac{\Theta}{K}$. Ἄρ $\frac{\Theta}{K}=\frac{\Lambda}{B}$, **(2). Αἱ (1)** καὶ (2) γράφονται

$$\text{Η} : \Theta = \text{Α} : \Lambda$$

$$\Theta : \text{Κ} = \Lambda : \text{Β}.$$

Σχηματίζοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) ἔχομεν $\text{Η} : \text{Κ} = \text{Α} : \text{Β}$. Ἀλλὰ $\text{Η} = \Gamma \times \Delta$, $\text{Κ} = \text{Ε} \times \text{Ζ}$. Ἄρα $\frac{\Gamma}{\text{Ε}} \times \frac{\Delta}{\text{Ζ}} = \frac{\text{Α}}{\text{Β}}$. Ἡ ὕπαρξις τοῦ Θ εἶναι πάντοτε ἐξησφαλισμένη κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

6. Ἔστω ἡ συνεχὴς ἀναλογία ἐκ τῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε $\left(\text{ἢ } \frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\text{Β}}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{\text{Ε}}\right)$ καὶ ὁ Α ἂς μὴ μετρῇ τὸν Β. Λέγω, ὅτι οὐδεὶς ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε θὰ μετρῇ οὔτε ἕνα ἐκ τούτων. Ὅτι ὁ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β, ὁ Β δὲν μετρεῖ τὸν Γ κλπ., εἶναι φανερόν, διότι ὁ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β. Οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ μετρήσῃ οὔτε ἕνα ἐκ τούτων. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῇ ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ἂς θεωρήσωμεν τοὺς Α, Β, Γ καὶ ἂς λάβωμεν ἄλλους τόσους κατὰ τὸ πλῆθος τοὺς Ζ, Η, Θ τοὺς ἐλαχίστους ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ $\left(\text{νὰ εἶναι δηλ. } \frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}}, \frac{\text{Β}}{\Gamma} = \frac{\text{Η}}{\Theta}\right)$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι

$$\text{Α} : \text{Β} = \text{Ζ} : \text{Η}$$

$$\text{Β} : \Gamma = \text{Η} : \Theta,$$ δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\text{Α} : \Gamma = \text{Ζ} : \Theta$

Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}}$ καὶ ὁ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β, ἄρα καὶ ὁ Ζ δὲν μετρεῖ τὸν Η. Ἄρα ὁ Ζ δὲν εἶναι μονάς. Διότι ἡ μονὰς μετρεῖ πάντα ἀριθμόν. Καὶ εἶναι κατὰ τὸ 3ον θεώρημα οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐπειδὴ οἱ Ζ, Η, Θ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ). Ἄρα οὔτε ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Θ. Καὶ εἶναι $\text{Ζ} : \Theta = \text{Α} : \Gamma$. Ἄρα οὔτε ὁ Α μετρεῖ τὸν Γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τυχόντα ἄλλον ἀριθμόν.

8. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Α, Β παρεμβάλλωνται ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματίζεται ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β (ἢ κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ Εὐκλείδου $\frac{\text{Α}}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{\text{Β}}$) καὶ εἶναι $\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}$, τότε καὶ μεταξὺ τῶν Ε, Ζ παρεμβάλλονται ἐπίσης ἄλλοι τόσοι ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματίζεται ἡ γεωμ. πρόοδος Ε, Μ, Ν, Ζ $\left(\text{ἢ } \frac{\text{Ε}}{\text{Μ}} = \frac{\text{Μ}}{\text{Ν}} = \frac{\text{Ν}}{\text{Ζ}}\right)$. Διαιροῦμεν τοὺς Α, Γ, Δ, Β διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν καὶ ἔστω, ὅτι λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς Η, Θ, Κ, Λ. Οἱ Η, Λ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεωρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\text{Α}}{\Gamma} = \frac{\text{Η}}{\Theta}, \frac{\Gamma}{\Delta} =$

$\frac{\Theta}{K}, \frac{\Delta}{B} = \frac{K}{\Lambda}$, (1) ἢ $A : \Gamma = H : \Theta$

$$\Gamma : \Delta = \Theta : K$$
$$\Delta : B = K : \Lambda$$

ἐὰν λάβωμεν τοὺς δι' ἴσου λόγους, θὰ ἔχωμεν $A : B = H : \Lambda$. Ἀλλὰ $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$. Ἄρα $\frac{H}{\Lambda} = \frac{E}{Z}$. Ἀλλὰ οἱ Η, Λ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ συνεπῶς οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Ἄρα ὁ Η μετρεῖ τὸν Ε καὶ ὁ Λ τὸν Ζ, ἰσάκις. Ἤτοι εἶναι $E = H . \rho$, $Z = \Lambda . \rho$. Ἂς ληφθῇ $M = \Theta . \rho$, $N = K . \rho$. Ἄρα οἱ Η, Θ, Κ, Λ μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ. Ἐκ τῆς (1) ἄρα $\frac{A}{\Gamma} = \frac{E}{M}, \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{M}{N}, \frac{\Delta}{B} = \frac{N}{Z}$. Οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ἄρα καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι εἶναι $\frac{E}{M} = \frac{M}{N} = \frac{N}{Z}$. Ἐν ᾧ λοιπὸν μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β καὶ μεταξὺ Ε, Ζ $\left(\text{ἐὰν } \frac{A}{B} = \frac{E}{Z}\right)$ παρενεβλήθησαν ἐπίσης δύο ἀριθμοὶ οἱ Μ, Ν καὶ ἐσχηματίσθη ἡ γεωμ. πρόοδος Ε, Μ, Ν, Ζ. [Τὸ θεώρημα ἀφορᾷ βεβαίως εἰς τὴν παρεμβολὴν ν γεωμ. μέσων. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς διὰ τὴν παρεμβολὴν 3, 4, ... ν γεωμ. μέσων. Τὸ θεώρημα εἶναι συναφὲς πρὸς τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου τὴν μνημονευομένην εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν καὶ τὸ 3ον θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν μουσικὴν πραγματείαν αὐτοῦ Κατατομὴ Κανόνος].

9. Ἔστω Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἔστω οἱ Γ, Δ (γεωμ. μέσα), ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ συνεχὴς ἀναλογία ἡ $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{B}$ (ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β). Ἂς ληφθῶσι 1) οἱ ἐλάχιστοι δύο ἀριθμοὶ Ζ, Η, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{Z}{H} = \frac{A}{\Gamma}\left(= \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{B}\right)$, 2) τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοί, οἱ Θ, Κ, Λ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Theta}{K} = \frac{K}{\Lambda}$ (ἡ γεωμ. πρόοδος Θ, Κ, Λ) καὶ $\frac{\Theta}{K} = \frac{A}{\Gamma} = \frac{Z}{H}$, 3) τέσσαρες ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{M}{N} = \frac{N}{\Xi} = \frac{\Xi}{O}$ (ἡ γεωμ. πρόοδος Μ, Ν, Ξ, Ο) καὶ

$\frac{M}{N} = \frac{A}{\Gamma} = \frac{Z}{H}$. [Ἐὰν ἐζητεῖτο νὰ παρεμβληθῶσι γεωμ. μέσα, θὰ ἐσυνεχίζομεν 4) πέντε ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ Π, Ρ, Σ, Τ, Φ, ὥστε $\frac{\Pi}{P} = \frac{P}{\Sigma} = \frac{\Sigma}{T} = \frac{T}{\Phi}$ (ἡ γεωμ. πρόοδος Π, Ρ, Σ, Τ, Φ) καὶ Α, Β ...., $(\nu+1), \nu+2$ ἐλάχιστοι ἀριθμοί, μὲ λόγον πάντοτε $\frac{Z}{H}$, ὥστε νὰ σχηματισθῇ συνεχὴς ἀναλογία μὲ $\nu+1$ λόγους ἢ ἡ γεωμ. πρόοδος μὲ $\nu+2$ ὅρους. «Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους» ἐννοεῖ τὸν ἀνωτέρω σχηματισμὸν διὰ τὴν παρεμβολὴν ν γεωμ. μέσων].

Εἶναι φανερόν, ὅτι δοθέντος τοῦ λόγου $\frac{Z}{H}$, διὰ νὰ σχηματισθῇ συνεχὴς ἀναλογία μὲ τρεῖς ἐλαχίστους ἀριθμούς, τοὺς Θ, Κ, Λ, ἡ συνεχὴς δηλ. ἀναλογία $\frac{\Theta}{K} = \frac{K}{\Lambda}$, ἢ ἡ γεωμ. πρόοδος μὲ τοὺς ἐλαχίστους ὅρους Θ, Κ, Λ, ὁ $\Theta = Z^2$. Ὁ δεύτερος ἀριθμὸς θὰ εὑρεθῇ, ἂν διαιρέσωμεν τὸν Z^2 διὰ τοῦ λόγου $\frac{Z}{H}$, ὅτε ἔχομεν $K = Z.\,H$. Ὁ τρίτος ἀριθμὸς θὰ εὑρεθῇ, ἂν διαιρέσωμεν τὸν Κ διὰ $\frac{Z}{H}$, ὅτε ἔχομεν $\Lambda = H^2$ (κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα· ἴδε ἐπεξήγησιν τούτου). Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν μὲ τέσσαρας ἐλαχίστους ἀριθμοὺς τοὺς Μ, Ν, Ξ, Ο $\left(\frac{M}{N} = \frac{N}{\Xi} = \frac{\Xi}{O}\right)$ ἢ γ. πρόοδον μὲ τοὺς 4 ἐλαχίστους ἐν συνεχείᾳ ὅρους Μ, Ν, Ξ, Ο καὶ λόγον $\frac{Z}{H}$ κατὰ τὸ αὐτὸ δεύτερον θεώρημα, θὰ εἶναι $M = Z^3$, $N = Z^2.\,H$, $\Xi = Z.\,H^2$, $O = H^3$. Σχηματίζομεν καὶ τὴν ἀναλογίαν ταύτην.

Ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ συνεχὴς ἀναλογία $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{B}$ σχηματίζεται ἐκ τῶν ἐλαχίστων κατὰ τὸ δυνατὸν ἀριθμῶν Α, Γ, Δ, Β, κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα. Ἀλλὰ καὶ ἡ σχηματισθεῖσα συνεχὴς ἀναλογία ἡ $\frac{M}{N} = \frac{N}{\Xi} = \frac{\Xi}{O}$, ἐφ' ὅσον ἐλήφθη ὁ μὲ τοὺς ἐλαχίστους ἀριθμοὺς λόγος $\frac{Z}{H}$, ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἐλαχίστων κατὰ τὸ δυνατὸν ἀριθμῶν. Ἄρα εἶναι $M = A$, $N = \Gamma$, $\Xi = \Delta$, $O = B$. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $Z^2 = \Theta$, ἄρα ὁ

Ζ μετρεῖ τὸν Θ κατὰ τὰς μονάδας τοῦ Ζ. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἤτοι εἶναι $Z.E=Z$ καὶ $Z.Z=\Theta$. Συνεπῶς $\frac{E}{Z}=\frac{Z}{\Theta}$. Πάλιν, ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $M=Z^3$, ἀλλὰ $Z^2=\Theta$ καὶ ἐπομένως $M=\Theta.Z$, ἄρα ὁ Θ μετρεῖ τὸν Μ κατὰ τὰς μονάδας τοῦ Ζ. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἤτοι εἶναι $E.Z=Z$ καὶ $\Theta.Z=M$. Συνεπῶς $\frac{E}{\Theta}=\frac{Z}{M}$ ἢ $\frac{E}{Z}=\frac{\Theta}{M}$. Ἐδείχθη δὲ ἀνωτέρω, ὅτι $\frac{E}{Z}=\frac{Z}{\Theta}$. Ἄρα $\frac{E}{Z}=\frac{Z}{\Theta}=\frac{\Theta}{M}$. Ἐδείχθη ἐπίσης ἀνωτέρω, ὅτι $M=A$. Ἄρα $\frac{E}{Z}=\frac{Z}{\Theta}=\frac{\Theta}{A}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $\frac{E}{H}=\frac{H}{\Lambda}=\frac{\Lambda}{B}$. Ὥστε, ἐν ᾧ μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β, καὶ μεταξὺ 1, Α καὶ 1, Β παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ ἀντιστοίχως οἱ Ζ, Θ καὶ Η, Λ, διὰ νὰ σχηματισθῶσιν αἱ γεωμ. πρόοδοι 1, Ζ, Θ, Α καὶ 1, Η, Β, Λ. [Τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, προϋποθέτει τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt[\nu+1]{\frac{B}{A}}$, ἡ ὁποία κατὰ τὸ πλεῖστον εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Ἐλλείπει βεβαίως ἡ σύγχρονος ὀνοματολογία, ἡ οὐσία ὅμως τῶν ἀποδείξεων περιέχει τὴν ὕπαρξιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἡ προϋπόθεσις τῆς ὑπάρξεως τῆς $\sqrt[\nu+1]{\frac{B}{A}}$ δίδει τὴν ἀφορμὴν νὰ εἰκάσωμεν, ὅτι τὰ θεωρήματα 8, 9, 10 καὶ ἄλλα συναφῆ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τῶν Στοιχείων εἶναι εὑρήματα τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος].

10. Ἐὰν μεταξὺ τῆς μονάδος Γ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Α καὶ τῆς μονάδος Γ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Β παρεμβάλλωνται ν γεωμ. μέσα, τότε καὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Α, Β παρεμβάλλονται ν γεωμ. μέσα. Διότι ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ 1 καὶ Α τὰ γεωμ. μέσα Δ, Ε καὶ μεταξὺ 1 καὶ Β τὰ γεωμ. μέσα Ζ, Η, $\left[\text{ὥστε νὰ εἶναι } \frac{1}{\Delta}=\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{A} \text{ καὶ } \frac{1}{Z}=\frac{Z}{H}=\frac{H}{B}\right]$, (1). Λέγω, ὅτι καὶ μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλονται δύο γεωμ. μέσα.

Διότι ἂς ληφθῇ $\Delta\times Z=\Theta$ καὶ $\Delta\times\Theta=K$, $Z\times\Theta=\Lambda$.

Ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν $\Delta^2=E$, $A=\Delta\times E$, $Z^2=H$, $B=Z\times H$.

Καὶ ἐπειδὴ $\Delta^2=E$, $\Delta\times Z=\Theta$, ἄρα $\frac{\Delta}{Z}=\frac{E}{\Theta}$, (2). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (ἐπειδὴ $\Delta\times Z=\Theta$, $Z^2=H$) ἔχομεν $\frac{\Delta}{Z}=\frac{\Theta}{H}$ (3). Ἄρα $\frac{E}{\Theta}=\frac{\Theta}{H}$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\Delta \times E = A$, $\Delta \times \Theta = K$, ἄρα $\frac{E}{\Theta} = \frac{A}{K}$, (4). Καὶ ἐκ τῆς (2), $\frac{\Delta}{Z} = \frac{A}{K}$ (5).

Πάλιν, ἐπειδὴ $\Delta \times \Theta = K$, $Z \times \Theta = \Lambda$, ἄρα $\frac{\Delta}{Z} = \frac{K}{\Lambda}$. Καὶ ἐκ τῆς (4), $\frac{A}{K} = \frac{K}{\Lambda}$, (6).

Καὶ ἀκόμη ἐπειδὴ $Z \times \Theta = \Lambda$, $Z \times H = B$, ἄρα $\frac{\Theta}{H} = \frac{\Lambda}{B}$. Καὶ ἐκ τῆς (3), $\frac{\Delta}{Z} = \frac{\Lambda}{B}$, (7). Ἐδείχθη δὲ ἐκ τῶν (5) καὶ (6), $\frac{\Delta}{Z} = \frac{A}{K} = \frac{K}{\Lambda}$.

Καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς (7), $\frac{A}{K} = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{B}$. Ὥστε οἱ A, K, Λ, B εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι παρενεβλήθησαν μεταξὺ A καὶ B δύο γεωμετρικὰ μέσα.

[Καὶ ἐνταῦθα προϋποτίθεται ἡ ὕπαρξις τῆς $\sqrt[\nu+1]{\frac{A}{\Gamma}}$ καὶ $\sqrt[\nu+1]{\frac{B}{\Gamma}}$].

11. Ἔστω $\Gamma . \Gamma = A$, (1), $\Delta . \Delta = B$, (2). Ν' ἀποδειχθῇ 1) ὅτι μεταξὺ Γ^2 $(=A)$ καὶ Δ^2 $(=B)$ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος καὶ 2) ὅτι $\frac{A}{B} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$.

1. Ἂς ληφθῇ $\Gamma . \Delta = E$, (3). Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) λαμβάνομεν $A : E = \Gamma : \Delta$ καὶ ἐκ τῶν (2) καὶ (3), $E : B = \Gamma : \Delta$. Συνεπῶς $A : E = E : B$ ἢ $\frac{\Gamma^2}{\Gamma.\Delta} = \frac{\Gamma.\Delta}{\Delta^2}$.

2. Ἐπειδὴ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ A, E, B εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V βιβλίου $A : B = (A : E)^2$. Ἀλλὰ $A : E = \Gamma : \Delta$. Ἄρα $A : B = (\Gamma : \Delta)^2$.

12. Ἔστω $\Gamma . \Gamma . \Gamma = A$, $\Delta . \Delta . \Delta = B$. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι 1) μεταξὺ A, B παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί, 2) $A : B = (\Gamma : \Delta)^3$.

1. Διότι ἔστω $\Gamma . \Gamma = E$, (1), $\Gamma . \Delta = Z$, (2), $\Delta.\Delta = H$, (3), $(\Gamma^2 . \Delta) = \Gamma.Z = \Theta$, (4), $\Gamma . \Delta^2 = \Delta . Z = K$, (5). Τότε $\Gamma^3 = \Gamma . E = A$, (6), $\Delta^3 = \Delta . H = B$, (7).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\Gamma : \Delta = E : Z$. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) $\Gamma : \Delta = Z : H$. Ἐκ τῶν (6) καὶ (4), $E : Z = A : \Theta$. Ἀλλὰ $E : Z = \Gamma : \Delta$. Ἄρα $\Gamma : \Delta = A : \Theta$. Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν $\Gamma : \Delta = \Theta : K$. Ἐκ τῶν (5) καὶ (7), $Z : H = K : B$. Ἀλλὰ $Z : H = \Gamma : \Delta$. Ἄρα $\Gamma : \Delta = K : B$. Συνεπῶς $A : \Theta = \Theta : K = K : B$ $\left(\text{ἢ } \frac{\Gamma^3}{\Gamma^2 \Delta} = \frac{\Gamma^2 . \Delta}{\Gamma . \Delta^2} = \frac{\Gamma . \Delta^2}{\Delta^3}\right)$. Ὥστε μεταξὺ τῶν κύβων ἀριθμῶν Α ($=\Gamma^3$) καὶ Β ($=\Delta^3$) παρενεβλήθησαν δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Θ, Κ. Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο ἀνήγαγεν ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 430 π.Χ.) τὴν λύσιν τοῦ Δηλίου προβλήματος. Ἐὰν ὁ δοθεὶς κύβος ἔχῃ πλευρὰν $=\alpha$ καὶ λάβωμεν εὐθεῖαν $\beta = 2\alpha$, ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου εὑρίσκεται, ἂν παρεμβάλωμεν μεταξὺ β καὶ α δύο μέσας εὐθείας ἀναλόγους ψ καὶ χ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\beta}{\psi} = \frac{\psi}{\chi} = \frac{\chi}{\alpha}$. Ἡ μέση ἀνάλογος χ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου καὶ ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt[3]{2}$ (ἴδε Τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ε. Σταμάτη, 1949 καὶ Λεξικὸν «Ἥλιος»). Τὰ θεωρήματα 11 καὶ 12 ἦσαν γνωστὰ εἰς τὸν Πλάτωνα, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ διαλόγου αὐτοῦ «Τίμαιος» (31β — 32c).

13. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$ καὶ $A \times A = \Delta$, $B \times B = E$, $\Gamma \times \Gamma = Z$, $A \times \Delta = H$, $B \times E = \Theta$, $\Gamma \times Z = K$. Λέγω, ὅτι $\frac{\Delta}{E} = \frac{E}{Z}$, $\frac{H}{\Theta} = \frac{\Theta}{K}$ $\left(\text{ἢ } \frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2}, \ \frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3}\right)$.

Διότι ἔστω $A \times B = \Lambda$, $A \times \Lambda = M$, $B \times \Lambda = N$ καὶ $B \times \Gamma = \Xi$, $B \times \Xi = O$, $\Gamma \times \Xi = \Pi$.

Ἐπειδὴ $A \times A = \Delta$, $A \times B = \Lambda$, ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{\Lambda}$, (1).

Ἐπειδὴ $A \times B = \Lambda$, $B \times B = E$, ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Lambda}{E}$. Καὶ ἐκ τῆς (1), $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{E}$, (2).

Ἐπειδὴ $A \times \Delta = H$, $A \times \Lambda = M$, ἄρα $\frac{\Delta}{\Lambda} = \frac{H}{M}$, (3).

Ἐπειδὴ $A \times \Lambda = M$, $B \times \Lambda = N$, ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$, (4).

Ἐπειδὴ $B \times \Lambda = N$, $B \times E = \Theta$, ἄρα $\frac{\Lambda}{E} = \frac{N}{\Theta}$, (5).

Ἐκ τῶν (2), (3), (4) καὶ (5) ἕπεται $\frac{A}{B} = \frac{H}{M} = \frac{M}{N} = \frac{N}{\Theta}$, (α).

Ἐπίσης, ἐπειδὴ $B \times B = E$, $B \times \Gamma = \Xi$, ἄρα $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{\Xi}$, (6).

Ἐπειδὴ $B \times \Gamma = \Xi$, $\Gamma \times \Gamma = Z$, ἄρα $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Xi}{Z}$. Καὶ ἐκ τῆς (6) $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{\Xi} = \frac{\Xi}{Z}$, (7).

Ἐπειδὴ $B \times E = \Theta$, $B \times \Xi = O$, ἄρα $\frac{E}{\Xi} = \frac{\Theta}{O}$. Καὶ ἐκ τῆς (7), $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{\Xi} = \frac{\Theta}{O}$, (8).

Ἐπειδὴ $B \times \Xi = O$, $\Gamma \times \Xi = \Pi$, ἄρα $\frac{B}{\Gamma} = \frac{O}{\Pi}$, (9).

Ἐπειδὴ $\Gamma \times \Xi = \Pi$, $\Gamma \times Z = K$, ἄρα $\frac{\Xi}{Z} = \frac{\Pi}{K}$, (10). Ἐκ τῶν (7), (8), (9) καὶ (10) ἕπεται $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Theta}{O} = \frac{O}{\Pi} = \frac{\Pi}{K}$, (β). Καὶ εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$. Καὶ τὸ πλῆθος τῶν Δ, Λ, E εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν E, Ξ, Z. Ἄρα ἐκ τῶν (2) καὶ (7) $\begin{matrix} \Delta : \Lambda = E : \Xi \\ \Lambda : E = \Xi : Z \end{matrix}$. Λαμβάνοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους ἔχομεν $\Delta : E = E : Z$.

Ἐπίσης τὸ πλῆθος τῶν H, M, N, Θ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Θ, O, Π, K. Ἄρα ἐκ τῶν (α) καὶ (β) $H : M = \Theta : O$

$M : N = O : \Pi$

$N : \Theta = \Pi : K$. Λαμβάνοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους ἔχομεν $H : \Theta = \Theta : K$. Καὶ εἶναι $\Delta = A^2$, $E = B^2$, $Z = \Gamma^2$, $H = A^3$, $\Theta = B^3$, $K = \Gamma^3$. Ἤτοι ἐὰν $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2}$, $\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3}$. [Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ληφθῇ ἀκόμη ἐξ ἀρχῆς $A \times H = P$, $B \times \Theta = \Sigma$, $\Gamma \times K = T$ καὶ συνεχισθῇ ὁ αὐτὸς τρόπος ἀποδείξεως, θὰ εὕρωμεν $\frac{P}{\Sigma} = \frac{\Sigma}{T}$, δηλ. $\frac{A^4}{B^4} = \frac{B^4}{\Gamma^4}$, ἤτοι γενικῶς ἐὰν εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{A^\nu}{B^\nu} = \frac{B^\nu}{\Gamma^\nu}$. Εἶναι ἀρκετὴ ὅμως ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην δύναμιν, διότι αὕτη συνεπάγεται τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως διὰ τὴν τετάρτην δύναμιν, τὴν νυοστὴν κλπ. Φρονοῦμεν, ὅτι καὶ ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς].

14. Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ (δηλ. $A = \Gamma^2$, $B = \Delta^2$). Ἂς μετρῇ δὲ ὁ A τὸν B. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Διότι ἔστω $\Gamma \times \Delta = E$. [Μὲ λόγον τὸν $\frac{\Gamma}{\Delta}$ σχηματίζομεν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ τρεῖς ὅρους. Ὁ πρῶτος ὅρος θὰ εἶναι Γ^2, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\Gamma \times \Delta$ (διαιροῦμεν τὸν Γ^2 διὰ $\frac{\Gamma}{\Delta}$). Ὁ τρίτος θὰ εἶναι Δ^2 (διαιροῦμεν τὸν $\Gamma \times \Delta$

διὰ $\frac{Γ}{Δ}$ κατὰ τὸ 2ον θεώρ.). Ἡ γεωμ. πρόοδος θὰ εἶναι $Γ^2$, $Γ \times Δ$, $Δ^2$ ἢ Α, Ε, Β]. Ἄρα οἱ Α, Ε, Β εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ λόγον $\frac{Γ}{Δ}$, ἤτοι $\frac{A}{E} = \frac{E}{B}$. Καὶ ὁ Α μετρεῖ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸν Β. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Ε (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι $\frac{A}{E} = \frac{Γ}{Δ}$. Ἄρα καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ἔστω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β. Διότι ἔστω $Γ \times Δ = E$. Σχηματίζομεν τὴν γεωμ. πρόοδον μὲ λόγον τὸν $\frac{Γ}{Δ}$, μὲ τρεῖς ὅρους, ὅτε θὰ εἶναι $Γ^2$, $Γ \times Δ$, $Δ^2$ ἢ Α, Ε, Β ἢ $\frac{A}{E} = \frac{E}{B} \left(= \frac{Γ}{Δ}\right)$. Ἐπειδὴ $\frac{Γ}{Δ} = \frac{A}{E}$ καὶ ὁ Γ μετρεῖ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸν Δ, ἄρα καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Ε. Καὶ εἶναι $\frac{A}{E} = \frac{E}{B}$. Ἄρα καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

15. Ἔστω ὅτι ὁ κύβος ἀριθμὸς Α $(= Γ^3)$ μετρεῖ τὸν κύβον ἀριθμὸν Β $(= Δ^3)$. Λέγω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Διότι ἂς ληφθῇ $Γ \times Γ = E$, $Δ \times Δ = H$, $Γ \times Δ = Z$, $Γ \times Z = Θ$, $Δ \times Z = K$. Εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἀποτελοῦσι γεωμ. πρόοδον μὲ τρεῖς ὅρους καὶ λόγον $\frac{Γ}{Δ}$, ἤτοι εἶναι $Γ^2$, $Γ \times Δ$, $Δ^2$ $\left(ἢ \frac{Γ^2}{Γ \times Δ} = \frac{Γ \times Δ}{Δ^2}\right)$. Ὁμοίως οἱ Α, Θ, Κ, Β ἀποτελοῦσι γεωμ. πρόοδον μὲ τέσσαρας ὅρους καὶ λόγον $\frac{Γ}{Δ}$, ἤτοι εἶναι $Γ^3$, $Γ^2 \times Δ$, $Γ \times Δ^2$, $Δ^3$ $\left(ἢ \frac{Γ^3}{Γ^2 \times Δ} = \frac{Γ^2 \times Δ}{Γ \times Δ^2} = \frac{Γ \times Δ^2}{Δ^3}\right)$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Θ, Κ, Β εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α μετρεῖ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸν Β, ἄρα ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Θ (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι $\frac{A}{Θ} = \frac{Γ}{Δ} \left(= \frac{Γ^3}{Γ^2 \times Δ} = \frac{Γ}{Δ}\right)$, (1). Ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ἐὰν ὁ Γ μετρῇ τὸν Δ, καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β. Ἂς γίνῃ ἡ ἀνωτέρω κατασκευή. Εἰς τὴν (1) ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Θ. Εἶναι δὲ οἱ Α, Θ, Κ, Β εἰς γεωμ. πρόοδον. Καὶ κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ 7 θεωρήματος (τὸ ὁποῖον νοεῖται) ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

16. Ἐὰν A^2 δὲν διαιρῇ τὸν B^2, οὔτε ὁ Α διαιρεῖ τὸν Β καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἐὰν A^3 δὲν διαιρῇ τὸν B^3, οὔτε ὁ Α διαιρεῖ τὸν Β καὶ ἀντιστρόφως.

18. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ πλευραὶ τοῦ μὲν Α ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, τοῦ δὲ Β ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Ε, Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἄρα εἶναι $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{E}{Z}$. Λέγω τώρα, ὅτι μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς καὶ ὅτι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma^2}{E^2}=\frac{\Delta^2}{Z^2}$. Δηλ. $\frac{A}{B}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{E}{Z}$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $\frac{\Gamma}{E}=\frac{\Delta}{Z}$, (1). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος ἀριθμός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ, ἄρα $A=\Gamma\times\Delta$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $B=E\times Z$. Ἂς ληφθῇ $\Delta\times E=H$. Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\times\Delta=A$, $\Delta\times E=H$, ἄρα $\frac{\Gamma}{E}=\frac{A}{H}$. Καὶ ἐκ τῆς (1) ἄρα $\frac{\Delta}{Z}=\frac{A}{H}$, (2).

Πάλιν, ἐπειδὴ $E\times\Delta=H$, $E\times Z=B$, ἄρα $\frac{\Delta}{Z}=\frac{H}{B}$. Καὶ ἐκ τῆς (2) ἄρα $\frac{A}{H}=\frac{H}{B}$. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ Α, Η, Β εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ἔχει παρεμβληθῇ μεταξὺ Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογος ὁ Η.

Λέγω τώρα, ὅτι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma^2}{E^2}=\frac{\Delta^2}{Z^2}$.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Η, Β εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ $\left(\frac{A}{H}=\frac{H}{B}\right)$, ἕπεται (V. ὁρισμ. 9), ὅτι $\frac{A}{B}=\frac{A^2}{H^2}$. Ἀλλὰ ἐκ τῶν (2) καὶ (1) ἔχομεν $\frac{A}{H}=\frac{\Gamma}{E}=\frac{\Delta}{Z}$. Ἄρα $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma^2}{E^2}=\frac{\Delta^2}{Z^2}$.

19. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ (ἤτοι $A=\Gamma\times\Delta\times E$, $B=Z\times H\times\Theta$). Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους (VII. ὁρ. 22), εἶναι ἄρα $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{Z}{H}$, $\frac{\Delta}{E}=\frac{H}{\Theta}$. Λέγω, ὅτι 1) μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ καὶ 2) $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma^3}{Z^3}=\frac{\Delta^3}{H^3}=\frac{E^3}{\Theta^3}$.

1. Διότι ἔστω $\Gamma\times\Delta=K$, $Z\times H=\Lambda$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{Z}{H}$, εἶναι δὲ $\Gamma\times\Delta=K$, $Z\times H=\Lambda$, ἄρα οἱ Κ, Λ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (VII. ὁρ. 22). Ἄρα μεταξὺ Κ, Λ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ.

18). Ἔστω οὗτος ὁ Μ, ὅτε εἶναι $\frac{Κ}{Μ}=\frac{Μ}{Λ}$, (1). Καὶ κατὰ τὸ προηγ. θεώρ. (α' μέρος, ὅπου $Δ\times Ε=Η$) $Μ=Δ\times Ζ$. Ἐπειδὴ $Δ\times Γ=Κ$, $Δ\times Ζ=Μ$, ἄρα $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Κ}{Μ}$. Καὶ ἐκ τῆς (1), $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Κ}{Μ}=\frac{Μ}{Λ}$, (2). Ἄρα οἱ Κ, Μ, Λ εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ λόγον $=\frac{Γ}{Ζ}$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{Γ}{Δ}=\frac{Ζ}{Η}$, καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους $\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}$. Ἄρα $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}$. Ἄρα ἐκ τῆς (2) $\frac{Κ}{Μ}=\frac{Μ}{Λ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}$, (3). Ἂς ληφθῇ $Ε\times Μ=Ν$, $Θ\times Μ=Ξ$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ, Ε, ἄρα $Ε\times(Γ\times Δ)=Α$. Ὁ δὲ $(Γ\times Δ)=Κ$, ἤτοι $Ε\times Κ=Α$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους $Θ\times(Ζ\times Η)=Β$. Ὁ δὲ $(Ζ\times Η)=Λ$, ἤτοι $Θ\times Λ=Β$. Καὶ ἐπειδὴ $Ε\times Κ=Α$, $Ε\times Μ=Ν$, εἶναι ἄρα $\frac{Κ}{Μ}=\frac{Α}{Ν}$. Καὶ ἐκ τῆς (2) καὶ (3) $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}=\frac{Α}{Ν}$, (4). Πάλιν, ἐπειδὴ $Ε\times Μ=Ν$, $Θ\times Μ=Ξ$, εἶναι ἄρα $\frac{Ε}{Θ}=\frac{Ν}{Ξ}$. Ἀλλὰ $\frac{Ε}{Θ}=\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}$.

Ἄρα ἐκ τῆς (4), $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}=\frac{Α}{Ν}=\frac{Ν}{Ξ}$, (5). Πάλιν, ἐπειδὴ $Θ\times Μ=Ξ$, $Θ\times Λ=Β$, ἄρα $\frac{Μ}{Λ}=\frac{Ξ}{Β}$. Ἄρα ἐκ τῆς (3) καὶ (5) $\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}=\frac{Α}{Ν}=\frac{Ν}{Ξ}=\frac{Ξ}{Β}$, (6).

Ἄρα οἱ Α, Ν, Ξ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τῶν πλευρῶν, ἤτοι μεταξὺ Α, Β παρενεβλήθησαν δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Ν, Ξ.

2. Λέγω τώρα, ὅτι $\frac{Α}{Β}=\frac{Γ^3}{Ζ^3}=\frac{Δ^3}{Η^3}=\frac{Ε^3}{Θ^3}$. Διότι, ἐπειδὴ $\frac{Α}{Ν}=\frac{Ν}{Ξ}=\frac{Ξ}{Β}$, εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 10 τοῦ V βιβλίου $\frac{Α}{Β}=\frac{Α^3}{Ν^3}$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (6) εἶναι $\frac{Α}{Ν}=\frac{Γ}{Ζ}=\frac{Δ}{Η}=\frac{Ε}{Θ}$. Ἄρα $\frac{Α}{Β}=\frac{Γ^3}{Ζ^3}=\frac{Δ^3}{Η^3}=\frac{Ε^3}{Θ^3}$.

20. Ἔστω, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ὁ Γ, $\left(\text{ὅτε εἶναι } \frac{Α}{Γ}=\frac{Γ}{Β}\right)$. Λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ οἱ Δ, Ε (ὅτε $\frac{Δ}{Ε}=\frac{Α}{Γ}$ καὶ $\frac{Δ}{Ε}$ ἀνάγωγον). Ἰσάκις ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Ε τὸν Γ καὶ ἔστω $\frac{\text{Α}}{\text{Δ}} = \text{Ζ}$, $\frac{\text{Γ}}{\text{Ε}} = \text{Ζ}$, ὁπότε $\text{Α} = \text{Δ} \times \text{Ζ}$, $\text{Γ} = \text{Ε} \times \text{Ζ}$. Ὥστε ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἔχων πλευρὰς τὰς Δ, Ζ. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{\text{Δ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Β}}$ καὶ $\frac{\text{Δ}}{\text{Ε}}$ ἀνάγωγον, ἰσάκις ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Ε τὸν Β καὶ ἔστω $\frac{\text{Γ}}{\text{Δ}} = \text{Η}$, $\frac{\text{Β}}{\text{Ε}} = \text{Η}$, ὁπότε $\text{Γ} = \text{Δ} \times \text{Η}$, $\text{Β} = \text{Ε} \times \text{Η}$. Ὥστε ὁ Β εἶναι ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἔχων πλευρὰς τὰς Ε, Η. Ἄρα οἱ Α, Β εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὅμοιοι. Διότι, ἐπειδὴ $\text{Δ} \times \text{Ζ} = \text{Α}$ καὶ $\text{Ε} \times \text{Ζ} = \text{Γ}$, εἶναι ἄρα $\frac{\text{Δ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{Α}}{\text{Γ}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Β}}$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\text{Ε} \times \text{Ζ} = \text{Γ}$, $\text{Ε} \times \text{Η} = \text{Β}$, εἶναι ἄρα $\frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Β}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{Γ}}{\text{Β}} = \frac{\text{Δ}}{\text{Ε}}$ καὶ ἑπομένως $\frac{\text{Δ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}}$. Καὶ ἐναλλὰξ $\frac{\text{Δ}}{\text{Ζ}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Η}}$. Ἄρα οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι. Ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 48. Μεταξὺ τούτων παρεμβάλλεται ὁ ἀριθμὸς 24, ὥστε $\frac{12}{24} = \frac{24}{48}$. Οἱ 12 καὶ 48 εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι, ἤτοι ἕκαστος ἐκ τούτων ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, δηλ. εἶναι $12 = 3 \times 4$ καὶ $48 = 6 \times 8$ καὶ $3 : 6 = 4 : 8$. Ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰς πλευρὰς δύο ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων εἶναι ἀνάλογοι, ὅταν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος.

21. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἂς παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ (ὅτε θὰ εἶναι $\frac{\text{Α}}{\text{Γ}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Δ}} = \frac{\text{Δ}}{\text{Β}}$ ἢ ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β). Λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί.

Διότι ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, οἱ Ε, Ζ, Η, $\left(\text{ὥστε νὰ εἶναι } \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} = \frac{\text{Α}}{\text{Γ}} = \frac{\text{Γ}}{\text{Δ}}\right)$. Ἄρα οἱ Ε, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ Ε, Η παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος, ὁ Ζ, ἄρα οἱ Ε, Η εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 20). Ἔστωσαν λοιπὸν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ (ἤτοι $\text{Ε} = \text{Θ} \times \text{Κ}$), τοῦ δὲ Η πλευραὶ οἱ Λ, Μ (ἤτοι $\text{Η} = \text{Λ} \times \text{Μ}$). Εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ λόγον $\frac{\text{Θ}}{\text{Λ}} =$ ἤτοι $\left.\frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} = \frac{\text{Θ}}{\text{Λ}} = \frac{\text{Κ}}{\text{Μ}}\right)$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ καὶ τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, ἤτοι εἶναι

$\text{Ε} : \text{Ζ} = \text{Α} : \text{Γ} \quad (1)$

$\text{Ζ} : \text{Η} = \text{Γ} : \Delta$, δι' ἴσου ἄρα (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ εἶναι $\text{Ε} : \text{Η} = \text{Α} : \Delta$. Οἱ δὲ Ε, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Η τὸν Δ. Καὶ ἔστω $\text{Ε} \times \text{Ν} = \text{Α}$. Ἀλλὰ $\text{Ε} = \Theta \times \text{Κ}$. Ἄρα $\Theta \times \text{Κ} \times \text{Ν} = \text{Α}$. Ἄρα ὁ Α εἶναι στερεὸς ἔχων πλευρὰς τὰς Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Γ, Δ, Β, ἤτοι εἶναι $\frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{\text{Β}}$ (ἐκ τῶν τεσσάρων ὅρων τῆς γεωμ. προόδου Α, Γ, Δ, Β ἐθεώρησε πρῶτον τρεῖς, τοὺς Α, Γ, Δ. Τώρα θεωρεῖ τρεῖς, τοὺς Γ, Δ, Β), καὶ τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Γ, Δ, Β, ἤτοι εἶναι

$\text{Ε} : \text{Ζ} = \Gamma : \Delta$

$\text{Ζ} : \text{Η} = \Delta : \text{Β}$, δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι $\text{Ε} : \text{Η} = \Gamma : \text{Β}$. Οἱ δὲ Ε, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα ἰσάκις ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Η τὸν Β. Καὶ ἔστω $\text{Ε} \times \Xi = \Gamma$, ὅτε θὰ εἶναι καὶ $\text{Η} \times \Xi = \text{Β}$. Ἀλλὰ $\text{Η} = \Lambda \times \text{Μ}$. Ἄρα $\Lambda \times \text{Μ} \times \Xi = \text{Β}$. Ἄρα ὁ Β εἶναι στερεὸς ἔχων πλευρὰς τοὺς Λ, Μ, Ξ. Ἄρα οἱ Α, Β εἶναι στερεοί. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὅμοιοι.

Διότι, ἐπειδὴ $\text{Ε} \times \text{Ν} = \text{Α}$, $\text{Ε} \times \Xi = \Gamma$, εἶναι ἄρα $\frac{\text{Ν}}{\Xi} = \frac{\text{Α}}{\Gamma}$. Καὶ ἐκ τῆς (1), $\frac{\text{Ν}}{\Xi} = \frac{\text{Α}}{\Gamma} = \frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}} = \frac{\Theta}{\Lambda} = \frac{\text{Κ}}{\text{Μ}}$. Ἄρα εἶναι $\frac{\Theta}{\Lambda} = \frac{\text{Κ}}{\text{Μ}} = \frac{\text{Ν}}{\Xi}$. Καὶ εἶναι οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Λ, Μ, Ξ πλευραὶ τοῦ Β. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 24 καὶ 192. Μεταξὺ τούτων παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι οἱ 48 καὶ 96, ὥστε $\frac{24}{48} = \frac{48}{96} = \frac{96}{192}$. Οἱ 24 καὶ 192 εἶναι ὅμοιοι στερεοί, ἤτοι ἕκαστος τούτων ἀναλύεται εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων, δηλ. εἶναι $24 = 2 \times 3 \times 4$ καὶ $192 = 4 \times 6 \times 8$ καὶ $2 : 3 : 4 = 4 : 6 : 8$ ἢ $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$. Ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰς διαστάσεις δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι ἀνάλογοι, ὅταν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τοὺς ὄγκους τῶν δύο ὀρθογ. παραλληλεπιπέδων παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι.

22. Ἔστω $\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = \frac{\text{Β}}{\Gamma}$ ἤτοι ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Β, Γ καὶ $\text{Α} = \alpha^2$. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος. Διότι, ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν Α, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος, οἱ Α, Γ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. ἕκαστος τούτων ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, οἱ δὲ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ τοῦ μὲν Α οἱ παράγοντες εἶναι α, α, τοῦ δὲ Γ ἔστω Δ, Ε. Ἄρα εἶναι $\frac{\alpha}{\Delta}=\frac{\alpha}{E}$, ἤτοι $\Delta = E$. Ἄρα ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

23. Ἔστω $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}$, ἤτοι ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Β, Γ, Δ καὶ $A = \alpha^3$. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος. Διότι, ἐπειδὴ μεταξὺ Α, Δ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι, οἱ Α, Δ εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί, δηλ. ἕκαστος τούτων ἀναλύεται εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων, οἱ δὲ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ τοῦ μὲν Α οἱ παράγοντες εἶναι α, α, α, τοῦ δὲ Δ ἔστω οἱ Ε, Ζ, Η. Ἄρα εἶναι $\frac{\alpha}{E}=\frac{\alpha}{Z}=\frac{\alpha}{H}$, ἤτοι $E = Z = H$. Ἄρα ὁ Δ εἶναι κύβος.

Σημ. Ἐκ τῶν θεωρημάτων 22 καὶ 23 εἶναι φανερὰ ἡ γενίκευσις τοῦ θεωρήματος: Ἐὰν γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχῃ $\nu+1$ ὅρους καὶ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ν δύναμις ἀριθμοῦ τινος, καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος θὰ εἶναι ν δύναμις ἀριθμοῦ τινος (διαφόρου τοῦ πρώτου)· παρεμβάλλονται δὲ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου $\nu-1$ γεωμετρικὰ μέσα, ἀριθμοὶ ἀκέραιοι. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Β, Γ······Δ, Ε, Ζ μὲ $\nu+1$ ὅρους καὶ $A=\alpha^\nu$. Τότε θὰ εἶναι καὶ $Z=\beta^\nu$. Τὰ παρεμβαλλόμενα γεωμ. μέσα θὰ εἶναι τὸ πλῆθος $\nu-1$, αἱ ν δὲ διαστάσεις τοῦ Α θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ν διαστάσεις τοῦ Ζ. Τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Ζ θὰ τοὺς ὀνομάζωμεν τότε ν-διαστάτους, κατὰ τὴν ὀνομασίαν τῶν ἐπιπέδων καὶ στερεῶν ἀριθμῶν ($\nu > 3$). [σχηματισμὸς τῆς γ. προόδου κατὰ τὸ 2 θεώρημα μὲ λόγον κλασματικόν].

24. Ἔστω $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\Gamma=\gamma^2$, $\Delta=\delta^2$ καὶ $A=\alpha^2$. Λέγω, ὅτι καὶ $B=\beta^2$. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι τετράγωνοι, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι $\left(\text{ἤτοι } \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\right)$. Ἄρα μεταξὺ Γ, Δ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος. Ἄρα καὶ μεταξὺ Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος. Καὶ ὁ Α εἶναι τετράγωνος. Ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος (θεώρ. 22).

25. Ἔστω $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\Gamma=\gamma^3$, $\Delta=\delta^3$ καὶ $A=\alpha^3$. Λέγω, ὅτι καὶ $B=\beta^3$. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι κύβοι ἀριθμοί, ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ $\left(\text{ἤτοι } \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\right)$. Ἄρα μεταξὺ Γ, Δ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι (θεώρ. 19). Ἄρα καὶ εἰς τοὺς Α, Β, ὡς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τοὺς Γ, Δ, θὰ παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι (θεώρ. 8). Ἔστωσαν οὗτοι οἱ Ε, Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Ε, Ζ, Β καὶ ὁ Α εἶναι κύβος καὶ ὁ Β εἶναι κύβος (θεώρ. 23).

26. Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι, παρεμβάλλεται μεταξὺ τούτων εἷς μέσος ἀνάλογος (θεώρ. 18). Ἔστω οὗτος ὁ Γ, ὅτε ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι Α, Γ, Β $\left(\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}\right)$. Καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Β οἱ Δ, Ε, Ζ $\left(\frac{\Delta}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}\right)$ (θεώρ. 2). Ἄρα οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι (θεώρημα 2. πόρισμα). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\Delta}{\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ καὶ εἶναι οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι, ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. [Ἡ σχέσις $\frac{\Delta}{\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων

$$\Delta : \mathrm{E} = \mathrm{A} : \Gamma$$
$$\mathrm{E} : \mathrm{Z} = \Gamma : \mathrm{B}$$

καὶ λήψεως τῶν δι' ἴσου λόγων, δηλ. λήψεως τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, $\Delta : \mathrm{Z} = \mathrm{A} : \mathrm{B}$].

27. Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. Λέγω , ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί, παρεμβάλλονται μεταξὺ τούτων δύο μέσοι ἀνάλογοι. Ἔστωσαν οὗτοι οἱ Γ,Δ, ὅτε ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι Α,Γ,Δ,Β $\left(\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Delta}{\mathrm{B}}\right)$. Καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β οἱ Ε, Ζ, Η, Θ $\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}=\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{H}}{\Theta}\right)$, ἴσοι πρὸς αὐτοὺς κατὰ τὸ πλῆθος. Ἄρα οἱ Ε, Θ εἶναι κύβοι (θεώρ. 2 πόρ.). Καὶ εἶναι $\mathrm{E} : \Theta = \mathrm{A} : \mathrm{B}$. Ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. [Ἡ σχέσις $\frac{\mathrm{E}}{\Theta}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων

$$\mathrm{E} : \mathrm{Z} = \mathrm{A} : \Gamma$$
$$\mathrm{Z} : \mathrm{H} = \Gamma : \Delta$$
$$\mathrm{H} : \Theta = \Delta : \mathrm{B}$$

καὶ λήψεως τῶν δι' ἴσου λόγων, δηλ. λήψεως τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, $\mathrm{E} : \Theta = \mathrm{A} : \mathrm{B}$].

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ 24 καὶ 192 ($24 = 2 \times 3 \times 4$, $192 = 4 \times 6 \times 8$, ἤτοι $2 : 3 : 4 = 4 : 6 : 8$ ἢ

$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\Big)$. Μεταξὺ τῶν 24 καὶ 192 παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι οἱ 48 καὶ 96, ὥστε ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι 24, 48, 96, 192 $\Big(\frac{24}{48}=\frac{48}{96}=\frac{96}{192}\Big)$. Σχηματίζομεν τὴν γεωμ. πρόοδον ἔχουσαν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων, τὸν αὐτὸν λόγον καὶ μὲ τοὺς ἐλαχίστους ἀριθμούς. Ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$. Ἄρα ἡ πρόοδος μὲ τέσσαρας ὅρους θὰ εἶναι 1^3, 2, 4, 8. Ἑπομένως $\frac{1^3}{2^3}=\frac{24}{192}$. Ἡ γενίκευσις τοῦ θεωρήματος προκειμένου περὶ ν - διαστάτων ὁμοίων ἀριθμῶν $A=\alpha\times\alpha\times\cdots\cdots\times\alpha$ καὶ $B=\beta\times\beta\times\cdots\cdots\times\beta$ εἶναι προφανής, ὅτε $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\frac{A}{B}$.

Ὁ σχηματισμὸς τῆς γεωμ. προόδου μὲ λόγον $\frac{1}{2}$ καὶ τέσσαρας ὅρους γίνεται: $1^{4-1},\ 1^{4-1}:\frac{1}{2},\ \left(1^{4-1}:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2},\ \left[\left(1^{4-1}:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}\right]:\frac{1}{2}$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΙΧ.

1. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ἔστω $A\times B=\Gamma$. Λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι τετράγωνος. Διότι ἔστω $A\times A=\Delta$. Ἄρα ὁ Δ εἶναι τετράγωνος. Ἐπειδὴ λοιπὸν $A\times A=\Delta$, $A\times B=\Gamma$, εἶναι ἄρα $A:B=\Delta:\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, μεταξὺ αὐτῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος (VIII. 18). Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος, θὰ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος καὶ μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μὲ αὐτοὺς (VIII. 8). Ὥστε καὶ μεταξὺ Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός. Καὶ εἶναι ὁ Δ τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

2. (ἀντίστροφον προηγουμένου). Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ἔστω $A\times B=\Gamma$, τετράγωνος. Λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Διότι ἔστω $A\times A=\Delta$. Καὶ ἐπειδὴ $A\times A=\Delta$, $A\times B=\Gamma$, ἄρα $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{\Gamma}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος· ἄρα οἱ Δ, Γ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Ἄρα μεταξὺ τῶν Δ, Γ παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός· ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς

μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, ἐπειδὴ $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{\Gamma}$. Ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι· ἄρα οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

3. Διότι ἔστω ὁ κύβος ἀριθμὸς Α καὶ ἔστω $A\times A=B$. Λέγω, ὅτι ὁ Β εἶναι κύβος. Διότι ἂς ληφθῇ πλευρὰ τοῦ Α ὁ Γ καὶ ἔστω $\Gamma\times\Gamma=\Delta$. Εἶναι φανερόν, ὅτι $\Gamma\times\Delta=A$. Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\times\Gamma=\Delta$, ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἄρα $\frac{1}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}$, (1). Πάλιν, ἐπειδὴ $\Gamma\times\Delta=A$, ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας· μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἄρα $\frac{1}{\Gamma}=\frac{\Delta}{A}$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἄρα $\frac{1}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Delta}{A}$· ἄρα μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ Α παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπειδὴ $A\times A=B$, ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας· μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· εἶναι ἄρα $\frac{1}{A}=\frac{A}{B}$. Μεταξὺ δὲ τῆς μονάδος καὶ τοῦ Α παρενεβλήθησαν δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ· ἄρα καὶ μεταξὺ Α, Β θὰ παρεμβληθῶσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί· ἐὰν δὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι καὶ ὁ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι κύβος (VIII. 23). Καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος.

4. Τὸ γινόμενον κύβου ἀριθμοῦ ἐπὶ κύβον ἀριθμὸν εἶναι κύβος.

5. Ἐὰν τὸ γινόμενον κύβου ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀριθμόν τινα εἶναι κύβος, ὁ πολλαπλασιασθεὶς ἀριθμὸς εἶναι κύβος.

6. Ἐὰν τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ εἶναι κύβος, ὁ ἀριθμὸς εἶναι κύβος.

7. Τὸ γινόμενον συνθέτου ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν ἀναλύεται εἰς τρεῖς παράγοντας (τοὐλάχιστον).

8. Ἔστω ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀπὸ τῆς μονάδος, οἱ 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, (1) ἢ $\frac{1}{A}=\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Delta}{E}=\frac{E}{Z}\cdots\cdots$ ἢ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, ἡ 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ······· [Κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἔκφρασιν ὁ λόγος θὰ εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τυχόντα ἀκέραιον διάφορον τῆς μονάδος. Ἐὰν π.χ. ὁ λόγος $=\frac{1}{2}$, τότε ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονὰς ὁ δεύτερος ὅρος θὰ εἶναι $1 : \frac{1}{2} = 2$, ὁ τρίτος $2 : \frac{1}{2} = 4$, κ. ο. κ. ἑ.]

Εἰς τὴν δοθεῖσαν γεωμ. πρόοδον 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ

ὁ Β	παραλείπων ἕνα ὅρον ἀπὸ τοῦ 1, τὸν Α,	εἶναι	τετράγωνος.
ὁ Δ	» » » » » Β, τὸν Γ,	»	»
ὁ Ζ	» » » » » Δ τὸν Ε	»	»
			κ. ο. κ. ἑξ.
ὁ Γ	» δύο ὅρους ἀπὸ τοῦ 1 τοὺς Α, Β	»	κύβος
ὁ Ζ	» » » » » Γ τοὺς Δ, Ε	»	»
ὁ Ζ	» πέντε ὅρους ἀπὸ τοῦ 1 (τοὺς Α, Β, Γ, Δ, Ε)		

εἶναι συγχρόνως κύβος καὶ τετράγωνος καὶ ὅλοι οἱ ἀπ' αὐτοῦ παραλείποντες πέντε.

Α'. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{A} = \frac{A}{B}$, ὁ $B = A^2$· ἄρα ὁ Β εἶναι τετράγωνος. Ἐκ τῆς (1) παραλείποντες τὸν ἀπὸ τῆς μονάδος ἕνα ὅρον τὸν Α ἔχομεν $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ ἢ $B \,.\, \Delta = \Gamma^2$. Ἀλλὰ ὁ Β ἐδείχθη τετράγωνος (VIII. 22). Ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος. Ἀπὸ τοῦ Β ἀρχόμενοι τώρα καὶ παραλείποντες ἕνα ὅρον, τὸν Γ, ἔχομεν $\frac{\Delta}{E} = \frac{E}{Z}$ ἢ $\Delta \,.\, Z = E^2$. Ἀλλὰ ὁ Δ ἐδείχθη τετράγωνος. Ἄρα καὶ ὁ Ζ εἶναι τετράγωνος. Ἀφοῦ ἐξησφαλίσθη, ὅτι ὁ Β εἶναι τετράγωνος, ἀπεδείχθη κατόπιν διὰ δύο περιπτώσεις παραλείψεων ἐν συνεχείᾳ, ὅτι οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει, ὅταν μετὰ τὸν Ζ παραλείψωμεν τὸν Η, ὁπότε ὁ Θ εἶναι τετράγωνος κ.ο.κ.ἑ. Δηλαδὴ ὁ ἰσχυρισμὸς ἀφοῦ ἰσχύει διὰ ν παραλείψεις ἢ διὰ ν ὅρους, οἱ ὁποῖοι εἶναι τετράγωνα, ἰσχύει καὶ διὰ $\nu + 1$ ὅρους. Χρησιμοποιεῖ δηλ. ἐνταῦθα ὁ Εὐκλείδης τὸν ἀποδεικτικὸν συλλογισμὸν τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς (Vollständige Induktion). Κατὰ τὸν Cl. Thaer (Ostwalds Klassiker, ἀριθ. 240. 6. 79) ὁ πρῶτος παρατηρήσας τοῦτο εἶναι ὁ G. Vacca, τὸ 1910. Τὸν ἀποδεικτικὸν τοῦτον συλλογισμόν, ὡς γράφομεν εἰς τὸν πρόλογον, ἐξαίρει πολὺ ὁ H. Poincaré, εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις».

Β'. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{1}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$ ἕπεται $A \,.\, B = \Gamma$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δειχθέντων ὅμως, ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ δὴ καὶ ἴσος πρὸς A^2. Ἄρα $A^3 = \Gamma$, ἤτοι ὁ Γ εἶναι κύβος, καὶ ἔχει παραλείψει ἀπὸ τῆς μονάδος (δηλ. μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ αὐτοῦ) δύο, τοὺς Α, Β. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{E} = \frac{E}{Z}$, ἤτοι ἐκ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τῶν ἀριθμῶν Γ, Δ, Ε, Ζ ὁ Γ ἐδείχθη κύβος. Ἄρα καὶ ὁ Ζ εἶναι κύβος (VIII. 23). Καὶ ἔχει παραλείψει ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτοῦ κύβου τοῦ Γ, δύο, τοὺς Δ, Ε. Ὁ ὅμοιος συλλογισμὸς ἐὰν θεωρήσωμεν περαιτέρω τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν Ζ, Η, Θ, Κ, $\left(\frac{Z}{H} = \frac{H}{\Theta} = \frac{\Theta}{K}\right)$, ὅτε ὁ Κ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι κύβος, κ. ο. κ. ἑ.

Γ΄. Ὁ Ζ ἐδείχθη, ὅτι εἶναι τετράγωνος καὶ κύβος. Καὶ ἔχει παραλείψει ἀπὸ τῆς μονάδος πέντε ὅρους. Ὥστε κατὰ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς οἱ διαλείποντες (παραλείποντες) πέντε εἶναι τετράγωνοι καὶ κύβοι. Καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις Β΄. καὶ Γ΄., ἀφοῦ ὁ ἰσχυρισμὸς ἰσχύει διὰ ν παραλείψεις (εἰς τὴν Β΄ δύο ὅρων, εἰς τὴν Γ΄ πέντε ὅρων) θὰ ἰσχύει καὶ διὰ $\nu+1$. ($\nu \geqq 2$). Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς εἰς τὸ θεώρ. 9.

9. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος μετὰ τὴν μονάδα, ὁ Α, ἔστω τετράγωνος. Λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι. Ἐὰν ὁ Α εἶναι κύβος, καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι.

Α΄) Ὅτι μὲν ὁ Β εἶναι τετράγωνος καὶ οἱ ἕνα παραλείποντες, ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Μένει νὰ δειχθῇ, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι τετράγωνοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος (VIII. 22). Πάλιν ἐπειδὴ οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι τετράγωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τοὺς λοιπούς.

Β΄) Ἔστω ὅτι ὁ Α εἶναι κύβος. Λέγω, ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι κύβοι. Ὅτι μὲν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ εἶναι κύβος καὶ οἱ παραλείποντες δύο, ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ἐπειδὴ τώρα $\frac{1}{A} = \frac{A}{B}$, ἕπεται $A \times A = B$. Καὶ εἶναι ὁ Α κύβος. Τὸ τετράγωνον δὲ κύβου ἀριθμοῦ εἶναι κύβος (θεώρημα 3). Ἄρα ὁ Β εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α εἶναι κύβος, ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος (VIII. 23). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε εἶναι κύβος καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι.

10. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ $\left(\frac{1}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Delta}{E} = \frac{E}{Z}\right)$, ὅπου ὁ Α δὲν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Λέγω, ὅτι οὐδεὶς ἄλλος ὅρος τῆς γεωμ. προόδου εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος, πλὴν τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, τοῦ Β, καὶ ὅλων ὅσοι ἀπὸ τούτου παραλείπουσιν ἕνα ὅρον.

1) Διότι ἔστω ὅτι ὁ Γ εἶναι τετράγωνος, εἶναι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· (διότι, ἀφοῦ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάς, ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ὁ λόγος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν). Τότε ὁ λόγος Β : Γ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἀλλὰ $\frac{B}{\Gamma} = \frac{A}{B}$. Ἄρα οἱ Α, Β ἔχουσι λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (VIII. 26)· καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος. Ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι τετράγωνος· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα ὁ Γ δὲν εἶναι τετράγωνος.

[2) Ὁ Δ εἶναι τετράγωνος. Διότι $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ ἢ $B.\ \Delta = \Gamma^2 = K$. Ἐπειδὴ ὁ Κ εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς καὶ ὁ Β εἶναι ἐπίσης τετράγωνος, ἄρα ὁ Δ εἶναι τετράγωνος.

3) Ὁ Ε δὲν εἶναι τετράγωνος. Διότι ἐὰν εἶναι, ὁ λόγος $\frac{\Delta}{E}$ θὰ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἀλλὰ $\frac{\Delta}{E} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἄρα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Γ, Δ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Καὶ εἶναι ὁ Δ τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐδείχθη, ὅτι ὁ Γ δὲν εἶναι τετράγωνος].

4) Ἐὰν ὁ Α δὲν εἶναι κύβος, τότε ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι κύβος καὶ ἀπὸ τούτου ὅλοι οἱ παραλείποντες δύο ὅρους καὶ οὐδεὶς ἄλλος. Διότι ἔστω ὅτι ὁ Δ εἶναι κύβος. Εἶναι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος. (Διότι, ἀφοῦ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάς, ὁ τέταρτος ὅρος εἶναι ὁ λόγος εἰς τὴν τρίτην δύναμιν). Καὶ εἶναι $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{B}{\Gamma}$. Καὶ ὁ Β ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸν Γ, ὃν κύβος πρὸς κύβον. Καὶ ὁ Γ εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{1}{A} = \frac{A}{B}$, ἕπεται $B = A \times A$. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ κύβον, καὶ ὁ ἀριθμὸς εἶναι κύβος (θεώρ. 6). Ἄρα καὶ ὁ Α εἶναι κύβος· ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα ὁ Δ δὲν εἶναι κύβος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδεὶς ἄλλος εἶναι κύβος πλὴν τοῦ τετάρτου καὶ τῶν ἀπὸ τούτου παραλειπόντων δύο ὅρους.

11. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος ἔχουσα ν ὅρους ἡ Α,Β,Γ,Δ,Ε .... ὅπου $A=1$. Λέγω, ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β μετρεῖ τὸν Ε κατά τινα τῶν Γ, Δ. Διότι, ἐπειδὴ $\frac{1}{B} = \frac{\Delta}{E}$, ἄρα ἰσάκις ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Β καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Ἐναλλὰξ ἄρα $\frac{1}{\Delta} = \frac{B}{E}$. Ἡ δὲ μονὰς μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας. Ἄρα καὶ ὁ Β μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας (δηλ. κατὰ Δ). Ὥστε ὁ μικρότερος ὁ Β μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον τὸν Ε κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων μεταξὺ Β, Ε. [Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, εἰς τὴν γεωμ. πρόοδον $1, \omega, \omega^2 \cdots \omega^\nu$ θὰ εἶναι $\omega^\nu : \omega = \omega^{\nu-1}$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν ὅμως τοῦ θεωρήματος καὶ τὸ συμπέρασμα τῆς ἀποδείξεως «ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β κλπ. », εἶναι $\omega^\nu : \omega^\mu = \omega^{\nu-\mu}$ $(\mu < \nu)$].

Πόρισμα. Ἔστω ἡ γ. πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 ········ Ὁ 9 κατέχει τὴν δευτέραν τάξιν ἀπὸ τῆς μονάδος (ἀπὸ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά). Ἂς θεωρήσωμεν τὸν ὅρον 729. Τοῦτον μετρεῖ ὁ 9 κατὰ τὸν 81. Ὁ 81 κατέχει τὴν δευτέραν τάξιν ἀπὸ τοῦ 729, ἀπὸ δεξιῶν ὅμως πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ὅρους 27 καὶ 6561. Ὁ 27 κατέχει τὴν τρίτην τάξιν ἀπὸ τῆς μονάδος, ἀπὸ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Μετρεῖ δὲ ὁ 27 τὸν 6561 κατὰ τὸν 243. Ὁ 243 κατέχει ἐπίσης τὴν τρίτην τάξιν ἀπὸ τοῦ 6561, κατ' ἀντίθετον ὅμως διεύθυνσιν, ἤτοι ἀπὸ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. [Καὶ ἐκ τοῦ πορίσματος συνάγεται ἡ γενίκευσις τοῦ θεωρ. 11].

12. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος 1, Α, Β, Γ, Δ ···· $\left(\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} \cdot\cdot\right)$. Λέγω, ὅτι ὑφ' ὅσων πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν θὰ μετρῆται καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα, ὁ Α. Διότι ἂς μετρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ ὁ Δ, ὑπὸ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Διότι ἔστω ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ· καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος. Ἄρα οἱ Ε, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Ζ, ὅτε θὰ εἶναι $\Delta = \mathrm{E} \times \mathrm{Z}$, (1). Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ λαμβάνομεν $\Delta = \mathrm{A} \times \Gamma$, (2). Συνεπῶς ἐκ τῶν (2) καὶ (1), $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Z}}{\Gamma}$. Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ συνεπῶς οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς καὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις, καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ καὶ ἔστω $\Gamma = \mathrm{E} \times \mathrm{H}$, (3). Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἰς τὴν γεωμ. πρόοδον 1, Α, Β, Γ, Δ···· ὁ μικρότερος ὁ Α μετρεῖ τὸν μεγαλύτερον τὸν Γ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὴν πρόοδον ὅρων. Κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος ὁ Α κατέχει τὴν πρώτην τάξιν ἀπὸ τῆς μονάδος, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Συνεπῶς, ὁ ἀριθμὸς δι' οὗ ὁ Α μετρεῖ τὸν Γ, θὰ κατέχῃ τὴν πρώτην τάξιν ἀπὸ τοῦ Γ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Τοιοῦτος ὅμως ἀριθμὸς εἶναι ὁ Β. Ἄρα $\Gamma = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, (4).Συνεπῶς ἐκ τῶν (4) καὶ (3), $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{E} \times \mathrm{H}$. Ἄρα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}}$. Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι καὶ οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς καὶ μετρεῖ ἰσάκις ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Β. Ἔστω ὅτι τὸν μετρεῖ κατὰ τὸν Θ, ὅτε θὰ εἶναι Β =

$E \times \Theta$, (5). Ἀλλὰ ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{1}{A} = \frac{A}{B}$ ἔχομεν $B = A^2$, (6). Ἐκ τῶν (5), καὶ (6), $E \times \Theta = A^2$. Ἄρα $\frac{E}{A} = \frac{A}{\Theta}$. Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ μετρεῖ ἰσάκις ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α, ὡς ἡγούμενος πρὸς ἡγούμενον. Τοῦτο ὅμως, ἐν ᾧ ὑπετέθη ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον· (ἀδύνατον εἶναι, ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ). Ἄρα οἱ Ε, Α δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα εἶναι σύνθετοι. Οἱ δὲ σύνθετοι μετροῦνται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε ἐλήφθη πρῶτος, ὁ δὲ πρῶτος δὲν μετρεῖται παρὰ μόνον ὑπὸ τοῦ ἑαυτοῦ του, ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α,Ε· ὥστε ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ. Ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑφ' ὅσων πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται ὁ Δ, ὑπὸ τῶν αὐτῶν πρώτων θὰ μετρῆται καὶ ὁ Α.

13. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 1, Α, Β, Γ, Δ....... καὶ ἔστω ὁ Α πρῶτος. Λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος ὅρος τῆς προόδου ὁ Δ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται εἰμὴ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ.

Διότι ἔστω ὅτι μετρεῖται ὁ Δ ὑπὸ ἄλλου τινὸς τοῦ Ε καὶ ὅτι ὁ Ε δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Ε δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν ὁ Ε εἶναι πρῶτος καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ κατ' ἀνάγκην καὶ τὸν Α (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα 12), ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος, ἐν ᾧ ὁ Ε δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Ε δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Ἄρα ὁ Ε μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Λέγω, ὅτι ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου μετρεῖται πλὴν τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν μετρῆται ὁ Ε ὑπὸ ἄλλου τινὸς πρώτου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ὁ ἄλλος ἐκεῖνος θὰ μετρῇ καὶ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α (κατὰ τὸ θεώρ. 12) πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ἔστω ὅτι τὸν μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ, ἤτοι $\Delta = E \times Z$. Λέγω, ὅτι ὁ Ζ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρός τινα τῶν Α, Β, Γ.

Διότι, ἐὰν ὁ Ζ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ καὶ μετρῇ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, ἄρα καὶ εἷς τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. Ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 11. Καὶ ἐνταῦθα φαίνεται ἡ γενίκευσις τοῦ θ. 11). Ἄρα καὶ ὁ Ε εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα ὁ Ζ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Ζ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α, ἀποδεικνύοντες πάλιν ὅτι ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος. Διότι, ἐὰν εἶναι καὶ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Ζ δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα εἶναι σύνθετος. Πᾶς δὲ σύνθετος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ. Λέγω, ὅτι οὗτος δὲν μετρεῖται ὑπὸ ἄλλου τινὸς πρώτου πλὴν τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν ἄλλος τις πρῶτος μετρῇ τὸν Ζ, ὁ δὲ Ζ μετρῇ τὸν Δ, ἄρα καὶ ὁ ἄλλος ἐκεῖνος θὰ μετρῇ τὸν Δ· ὥστε θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ. Καὶ ἐπειδὴ $\Delta = \mathrm{E} \times \mathrm{Z}$ καὶ $\Delta = \mathrm{A} \times \Gamma$ [ἐκ τῆς προόδου $\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, ἤτοι τῆς σχέσεως $\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$], ἄρα $\mathrm{A} \times \Gamma = \mathrm{E} \times \mathrm{Z}$· ἄρα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Z}}{\Gamma}$. Ὁ δὲ Α μετρεῖ τὸν Ε· ἄρα καὶ ὁ Ζ τὸν Γ. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Η, ὥστε $\Gamma = \mathrm{Z} \times \mathrm{H}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma = \mathrm{Z} \times \mathrm{H}$ καὶ $\Gamma = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ (ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$), ἕπεται ὅτι $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{Z} \times \mathrm{H}$. Ἄρα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}}$. Ὁ δὲ Α μετρεῖ τὸν Ζ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν Β. Ἂς τὸν μετρῇ κατὰ τὸν Θ, ὁπότε $\mathrm{B} = \mathrm{H} \times \Theta$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ Θ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{B} = \mathrm{H} \times \Theta$ καὶ $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$ $\left(\text{ἐκ τῆς σχέσεως } \frac{1}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)$, ἄρα $\Theta \times \mathrm{H} = \mathrm{A}^2$. Συνεπῶς $\frac{\Theta}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}$. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· ἄρα καὶ ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται εἰ μὴ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ.

14. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῆται ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς Α καὶ ὑπὸ τοῦ πρώτου Ε, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Β, Γ, Δ. Ἔστω ὅτι ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὸν Ζ, ὅτε θὰ εἶναι $\mathrm{A} = \mathrm{E} \times \mathrm{Z}$. Ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν μετρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (Β, Γ, Δ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν), τότε καὶ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου θὰ μετρῆται ὑπὸ τοῦ πρώτου τούτου ἀριθμοῦ (VII. 30). Ἄρα οἱ Β, Γ, Δ μετροῦσιν ἕνα τῶν Ε, Ζ. Καὶ τὸν μὲν Ε δὲν τὸν μετροῦσι, διότι ἐλήφθη πρῶτος καὶ πρὸς οὐδένα τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· ἄρα θὰ μετρῶσι τὸν Ζ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ Α (ἀφοῦ $\mathrm{A} = \mathrm{E} \times \mathrm{Z}$). Ὅπερ ἀδύνατον· διότι ὁ Α εἶναι ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ. Ἄρα οὐδεὶς πρῶτος μετρεῖ τὸν Α ἐκτὸς τῶν Β, Γ, Δ.

15. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ (δηλ. ἡ γεωμ. πρόοδος) οἱ Α, Β, Γ, οὕτως ὥστε οἱ λόγοι $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$ νὰ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἴσων λόγων πρὸς αὐτούς. Λέγω, ὅτι 1) $(\mathrm{A} + \mathrm{B})$, Γ 2) $(\mathrm{B} + \Gamma)$, Α 3) $(\mathrm{A} + \Gamma)$, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, οἱ ΔΕ, ΕΖ (νὰ ληφθῇ δηλ. ὁ λόγος $\frac{\Delta E}{EZ}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, ἴσος πρὸς τοὺς λόγους $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$, ἀποτελουμένους ἐξ ἐλαχίστων ὅρων, καὶ νὰ σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος μὲ τρεῖς ὅρους. Κατὰ τὸ δεύτερον θεώρ. τοῦ VIII βιβλίου σχηματίζομεν τὴν γεωμ. πρόοδον, ἡ ὁποία θὰ εἶναι $\frac{\Delta E^2}{\Delta E\times EZ}=\frac{\Delta E\times EZ}{EZ^2}$ ἢ ΔE^2, $\Delta E\times EZ$, EZ^2]. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀφοῦ αἱ δύο γεωμ. πρόοδοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν (ἀνάγωγον) λόγον καὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν ἐλαχίστων ἀριθμῶν, θὰ ἔχωσι τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους των ἴσους, ἤτοι $(\Delta E)^2 = A$, $\Delta E\times EZ = B$, $(EZ)^2 = \Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἐλάχιστοι (τὸ κλάσμα δηλ. $\frac{\Delta E}{EZ}$ εἶναι ἀνάγωγον), εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ ἄθροισμά των πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 28). Ἄρα ΔΖ $(=\Delta E + EZ)$ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἀλλὰ ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα οἱ ΔΖ, ΔΕ εἶναι πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοι. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος. Ὥστε $Z\Delta\times\Delta E$ καὶ ΕΖ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 24.) Ὥστε καὶ $Z\Delta \times \Delta E$ καὶ $(EZ)^2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 25). [Διότι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ (ὁ $Z\Delta\times\Delta E$ καὶ ΕΖ) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸν ἄλλον εἶναι πρῶτος]. Ἀλλὰ $Z\Delta\times\Delta E = (\Delta E)^2 + \Delta E\times EZ$ [ἐὰν εὐθεῖά τις, ἔστω ἡ ΔΖ, τμηθῇ εἴς τι σημεῖον, ἔστω Ε, τότε $\Delta Z\times\Delta E = \Delta E\times EZ + (\Delta E)^2$ ἢ $(\alpha+\beta)\,\alpha = \alpha^2+\alpha\beta$, II. 3 καὶ σελ. 14 I τόμου]. Ἄρα $(\Delta E)^2 + \Delta E\times EZ$ καὶ $(EZ)^2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ εἶναι $(\Delta E)^2 = A$, $\Delta E\times EZ = B$, $(EZ)^2 = \Gamma$. Ἄρα $(A+B)$, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $(B+\Gamma)$, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ΔΕ, ΕΖ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους θὰ εἶναι καὶ ἕκαστος τῶν ΔΖ $(=\Delta E + EZ)$, ΕΖ πρὸς τὸν ΔΕ πρῶτος. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος. Ὥστε $\Delta Z\times EZ$ καὶ ΔΕ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 24). Ὥστε καὶ $\Delta Z\times EZ$ καὶ $(\Delta E)^2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 25). Ἀλλὰ $\Delta Z\times EZ = (EZ)^2 + \Delta E\times EZ$ (κατὰ τὸ 3 θ. τοῦ II βιβλίου, σχ. 15ου θεωρ. IX βιβλ., θεωροῦντες τὴν εὐθεῖαν ΔΖ καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, θὰ εἶναι ἢ $\Delta Z\times\Delta E = (\Delta E)^2 + \Delta E\times EZ$, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως, ἢ $\Delta Z\times EZ = (EZ)^2 + \Delta E\times EZ$, ὡς εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν). Ἄρα $(EZ)^2 + \Delta E\times EZ$ καὶ $(\Delta E)^2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ εἶναι $(EZ)^2 = \Gamma$, $\Delta E \times EZ = B$, $(\Delta E)^2 = A$. Ἄρα $(B + \Gamma)$, A εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους]. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ $(A + \Gamma)$, B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ ὁ ΔZ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν ΔE, EZ, θὰ εἶναι καὶ $(\Delta Z)^2$ πρὸς τὸ γινόμενον $\Delta E \times EZ$ πρῶτος (VII· 25). Ἀλλὰ (ἀφοῦ $\Delta Z = \Delta E + EZ$), $(\Delta Z)^2 = (\Delta E)^2 + (EZ)^2 + 2 \times \Delta E \times EZ$. Ἄρα $(\Delta E)^2 + (EZ)^2 + 2 \times \Delta E \times EZ$, (1) καὶ $\Delta E \times EZ$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα δι' ἀφαιρέσεως τοῦ ἑνὸς $\Delta E \times EZ$ ἐκ τῆς (1) θὰ εἶναι $(\Delta E)^2 + (EZ)^2 + \Delta E \times EZ$, (2) καὶ $\Delta E \times EZ$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ διὰ νέας ἀφαιρέσεως ἐκ τῆς (2) τοῦ $\Delta E \times EZ$ θὰ εἶναι, $(\Delta E)^2 + (EZ)^2$, καὶ $\Delta E \times EZ$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ εἶναι $(\Delta E)^2 = A$, $\Delta E \times EZ = B$, $(EZ)^2 = \Gamma$. Ἄρα $(A + \Gamma)$, B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [σημ. ἐὰν $(\alpha + \mu \,.\, \beta)$, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $(\alpha + \beta)$, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τοῦτο παριστᾷ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ $\Delta E \times EZ$].

16. Ἔστω ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ καὶ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός τις Γ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$. Ἔστω, ὅτι ὑπάρχει καὶ ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία. Οἱ A, B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, συνεπῶς οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· μετροῦσι δὲ οἱ ἐλάχιστοι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα ὁ A μετρεῖ τὸν B. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἄρα ὁ A μετρεῖ τοὺς A, B πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$.

17. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος $A, B, \Gamma, \Delta \left(\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}\right)$ καὶ οἱ ἄκροι ὅροι τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός τις, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ τελευταῖος πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ὁ E καὶ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $\frac{A}{\Delta} = \frac{B}{E}$. Οἱ δὲ A, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν B. Καὶ εἶναι (ἐκ τῆς ἐν παρενθέσει συνεχοῦς ἀναλογίας) $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$. Καὶ ὁ B ἄρα μετρεῖ τὸν Γ (VII. ὁρ. 21). Ὥστε καὶ ὁ A μετρεῖ τὸν Γ. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν Γ, ἄρα καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ. Ἀφοῦ δὲ ὁ A μετρεῖ τὸν Γ, θὰ μετρῇ καὶ τὸν Δ.

Μετρεῖ δὲ ὁ Α καὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ τοὺς Α, Δ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$.

18. Κριτήριον ὑπάρξεως τρίτου ἀναλόγου, ὅταν δοθῶσι δύο ἀριθμοί. Τότε μόνον ὑπάρχει τρίτος ἀνάλογος, ὅταν ὁ πρῶτος τῶν ἀριθμῶν μετρῇ (διαιρῇ) τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. Νὰ διερευνηθῇ, ἂν ὑπάρχῃ τρίτος ἀνάλογος. Οἱ Α, Β ἢ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἐὰν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀπεδείχθη εἰς τὸ 16 θεώρ., ὅτι δὲν ὑπάρχει τρίτος ἀνάλογος. Ἀλλ' ἔστωσαν οἱ Α, Β μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἔστω $B \times B = \Gamma$, (1). Ὁ Α ἢ μετρεῖ τὸν Γ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἂς τὸν μετρῇ πρῶτον κατὰ τὸν Δ, ἤτοι $\Gamma = A \times \Delta$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $B^2 = A \times \Delta$. Ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Delta}$. Εὑρέθη λοιπὸν εἰς τοὺς Α, Β τρίτος ἀνάλογος ὁ Δ. Δεύτερον ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Γ. Λέγω, ὅτι εἰς τοὺς Α, Β δὲν ὑπάρχει τρίτος ἀνάλογος. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ὑπάρχῃ ὁ Δ, ὅτε $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Delta}$ ἢ $B^2 = A \times \Delta$. Εἶναι δὲ $B^2 = \Gamma$. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὸν Δ. Ἐλήφθη ὅμως κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὡς μὴ μετρῶν τὸν Γ· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ τρίτος ἀνάλογος εἰς τοὺς Α, Β, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Γ (B^2).

19. Κριτήριον ὑπάρξεως τετάρτου ἀναλόγου, ὅταν δοθῶσι τρεῖς ἀριθμοί. Τότε μόνον ὑπάρχει τέταρτος ἀνάλογος, ὅταν οἱ ἄκροι δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ πρῶτος διαιρῇ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ. Νὰ διερευνηθῇ πότε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτοὺς τέταρτος ἀνάλογος ($A : B = \Gamma : X$). Οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ 1) ἢ δὲν θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους 2) ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν δὲν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους 3) ἢ δὲν θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ 4) ἢ θὰ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

1ον. (Ἡ τετάρτη ὡς ἄνω περίπτωσις). Ἐὰν οἱ Α, Β, Γ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐδείχθη εἰς τὸ 17 θεώρ., ὅτι δὲν ὑπάρχει τέταρτος ἀνάλογος.

2ον. (Ἡ πρώτη περίπτωσις) Ἐὰν οἱ Α, Β, Γ δὲν εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι καὶ τώρα δὲν ὑπάρχει τέταρτος ἀνάλογος. Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει τέταρτος ἀνάλογος ὁ Δ, ὥστε $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ ἂς ληφθῇ $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}$ $\left(\begin{matrix} A : B = \Gamma : \Delta \\ B : \Gamma = \Delta : E \end{matrix} \right)$

Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E}$ (VII. 14). Οἱ δὲ Α, Γ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις, καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος πρὸς ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ἄρα ὁ Α μετρεῖ τοὺς Α, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος.

3ον (Ἡ δευτέρα ὡς ἄνω περίπτωσις) Ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ Α, Γ νὰ μὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος. Διότι ἔστω $B \times \Gamma = \Delta$, (1). Ὁ Α ἢ μετρεῖ τὸν Δ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Πρῶτον ἂς τὸν μετρῇ καὶ ἔστω κατὰ τὸν Ε, ὅτε θὰ εἶναι $\Delta = A \times E$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἄρα $B \times \Gamma = A \times E$. Ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{E}$. Εὑρέθη λοιπὸν εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος, ὁ Ε.

Δεύτερον ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Δ. Λέγω, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς εὑρεθῇ καὶ ἔστω ὁ Ε (ὅτε θὰ εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{E}$)· ἄρα $A \times E = B \times \Gamma$. Ἀλλὰ (ἐκ τῆς (1), $B \times \Gamma = \Delta$. Ἄρα $A \times E = \Delta$. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. Ὥστε ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ, (ἐν ᾧ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν δὲν τὸν μετρεῖ)· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος ἀριθμός, ὅταν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Δ.

4ον. (Η τρίτη ὡς ἄνω περίπτωσις). Ἔστω, ὅτι οἱ Α, Β, Γ δὲν εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἄκροι Α, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἔστω $B \times \Gamma = \Delta$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ὁ Α μετρῇ τὸν Δ, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ εἰς τοὺς Α, Β, Γ τέταρτος ἀνάλογος· ἐὰν δὲ δὲν τὸν μετρῇ, εἶναι ἀδύνατον. [Διότι ἔστω $B \times \Gamma = \Delta$, (1) καὶ ὅτι ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, ὅτε θὰ εἶναι $A \times E = \Delta$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται $B \times \Gamma = A \times E$· ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{E}$, ἤτοι εὑρέθη τέταρτος ἀνάλογος ὁ Ε. Ἐὰν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Δ, δὲν ὑπάρχει τέταρτος ἀνάλογος. Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει ὁ Ε, ὅτε θὰ εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{E}$ ἢ $A \times E = B \times \Gamma$. Ἀλλὰ $B \times \Gamma = \Delta$. Ἄρα $A \times E = \Delta$. Ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὑπετέθη ὅτι δὲν τὸν μετρεῖ].

20. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Ἔστω ν τὸ πλῆθος τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α, Β, Γ.... Ἂς ληφθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. αὐτῶν, ἔστω ὁ ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τὸν ΔΕ ἡ μονάς ΔΖ. Τότε ὁ ΕΖ = (ΔΕ + ΔΖ) ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἐὰν εἶναι πρῶτος, τότε εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος καὶ τὸ προτεθὲν πλῆθος τῶν ν πρώτων ἀριθμῶν ἔγινε (ν + 1). Ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτος ὁ ΕΖ = (ΔΕ + ΔΖ), τότε θὰ μετρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, διότι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπό τινος πρώτου (VII. 31). Ἔστω ὅτι ὁ (ΔΕ + ΔΖ) μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Η. Λέγω, ὅτι ὁ Η δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ. Διότι ἔστω ὅτι ὁ Η εἶναι ὁ αὐτὸς πρός τινα τῶν Α, Β, Γ. Οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, τὸν ΔΕ. Ἄρα τὸ μετρεῖ καὶ ὁ Η (ἀφοῦ ὑπεθέσαμεν, ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ). Ὁ Η ὅμως μετρεῖ καὶ τὸν (ΔΕ + ΔΖ), ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΔΕ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὴν (ΔΕ + ΔΖ) − ΔΕ = ΔΖ. Ἀλλὰ ΔΖ εἶναι ἡ μονάς· ὅπερ ἄτοπον· (διότι ὁ Η ἀριθμὸς ὤν, δηλ. πλῆθος μονάδων, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρῇ τὴν μονάδα). Ὥστε ὁ Η δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Συνεπῶς καὶ πάλιν εὑρέθη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Η, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ ν ἔγινε (ν + 1). ($\nu \geqq 2$). [*Σημ.* Εἶναι φανερὰ ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ].

21. Τὸ ἄθροισμα ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

22. Ἔστωσαν οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄθροισμά των Ε. Λέγω, ὅτι ὁ Ε εἶναι ἄρτιος. Διότι, ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἕκαστον περιττὸν τὴν μονάδα, θὰ λάβωμεν ἀρτίους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρ. εἶναι ἄρτιον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων, ἀφοῦ τὸ πλῆθός των εἶναι ἄρτιον, θὰ εἶναι ἄρτιον. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν ἀθροισμάτων θὰ εἶναι ἄρτιον κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

23. Ὅταν τὸ πλῆθος περιττῶν εἶναι περιττός, καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶναι περιττός.

24. Ἡ διαφορὰ ἀρτίου ἀπὸ ἄρτιον εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

25. Ἡ διαφορὰ περιττοῦ ἀπὸ ἄρτιον εἶναι περιττός.

26. Ἡ διαφορὰ περιττοῦ ἀπὸ περιττὸν εἶναι ἄρτιος.

27. Ἡ διαφορὰ ἀρτίου ἀπὸ περιττὸν εἶναι περιττός.

28. Τὸ γινόμενον περιττοῦ ἐπὶ ἄρτιον εἶναι ἄρτιος [πολλαπλασιαστὴς νοεῖται ὁ περιττός]. Διότι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, VII. ὁρ. 16) τὸ πλῆθος τῶν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅρων εἶναι περιττόν, ἐν ᾧ ἕκαστος ὅρος εἶναι ἄρτιος. Καὶ κατὰ τὸ θεώρ. 21, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄρτιος.

29. Τὸ γινόμενον περιττοῦ ἐπὶ περιττὸν εἶναι περιττός. Διότι, ἀφοῦ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι περιττός, τὸ πλῆθος τῶν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅρων εἶναι περιττός. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι περιττός, ἕκαστος ὅρος προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι περιττός. Καὶ τὸ ἄθροισμα περιττῶν εἶναι περιττὸς (θεώρ. 23).

30. Ἐὰν περιττὸς διαιρῇ ἄρτιον, διαιρεῖ καὶ τὸ ἥμισυ τούτου.

Ἔστω ὁ περιττὸς Α διαιρῶν τὸν ἄρτιον Β. Λέγω, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἥμισυ τούτου. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α διαιρεῖ τὸν Β, ἄς τὸν διαιρῇ κατὰ τὸν Γ, (ὅτε εἶναι $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \Gamma$). Λέγω, ὅτι ὁ Γ δὲν εἶναι περιττός. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω περιττός. Καὶ ἐπειδὴ ὁ περιττὸς Α μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν περιττὸν Γ, ἔπεται ὅτι ὁ Β εἶναι περιττός, διότι τὸ γινόμενον περιττοῦ ἐπὶ περιττὸν εἶναι περιττὸς (θεώρ. 29). Ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ Β ἐλήφθη ἄρτιος. Ἄρα ὁ Γ εἶναι ἄρτιος. Ὥστε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ. [Σημ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις σῴζεται ἀτελής. Εἰς τὰ σχόλια ὅμως τῶν Στοιχείων, ὑπὸ ἀνωνύμου συνταχθέντα, σῴζεται ἡ ἀπόδειξις, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν γνησίαν, ἂν κρίνωμεν αὐτὴν γλωσσικῶς, καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ ὁ Α διαιρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Γ, καὶ ὁ Γ διαιρεῖ τὸν Β κατὰ τὸν Α. Καὶ ἕκαστος τῶν Β, Γ εἶναι ἄρτιος, ἔχει δηλ. μέρος ἥμισυ· θὰ εἶναι ἄρα $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{B}}{\Gamma} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{B}}{\frac{1}{2}\Gamma}$. Ἐξ οὗ $\mathrm{A} \times \frac{1}{2}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{B}$ ἢ $\frac{1}{2}\Gamma = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$].

31. Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ. Ἔστω ὁ περιττὸς ἀριθμὸς Α πρῶτος πρὸς τὸν Β, τοῦ δὲ Β διπλάσιος ἔστω ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ διαιρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις, ἔστω ὁ Δ. Καὶ ὁ Α εἶναι περιττός· ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι περιττὸς (διότι περιττὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται μόνον ὑπὸ περιττοῦ). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ περιττὸς ὢν διαιρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Γ εἶναι ἄρτιος (ὡς διπλάσιος τοῦ Β), ἄρα ὁ Δ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ Γ τὸν Β, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα. Διαιρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὥστε ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα οἱ Α, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

32. Πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς 2^ν ($\nu \geqq 2$) εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ μόνον· (ἀρτιάκις ἄρτιος = ὁ διαιρούμενος ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι ἄρτιος).

Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Β, Γ, Δ, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 2 καὶ ὁ λόγος 2. Λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιοι καὶ μόνον. Ὅτι μὲν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερόν· διότι ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4. Λέγω, ὅτι καὶ μόνον. Διότι ἄς ἔχῃ ἡ ἀνωτέρω γεωμετρικὴ πρόοδος πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα. Ὁ Α, ὁ μετὰ τὴν μονάδα, εἶναι πρῶτος. Ὁ μέγιστος ὅρος τῆς προόδου ὁ Δ δὲν μετρεῖται ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου εἰ μὴ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος. Ἑπομένως ὁ Δ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος, (διότι οὗτος εἶναι γινόμενον μόνον ἀρτίου, ἑνὸς τῶν Α, Β, Γ, ἐπὶ ἄρτιον, ἤτοι τοῦ 2 ἢ δυνάμεως τοῦ 2) Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι καὶ ἕκαστος τῶν Β, Γ εἶναι μόνον ἀρτιάκις ἄρτιος.

33. (Ἀρτιάκις περιττὸς = ὁ διαιρούμενος ὑπὸ ἀρτίου κατὰ περιττὸν ἀριθμόν). Ἐὰν τὸ ἥμισυ ἀριθμοῦ εἶναι περιττός, ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρτιάκις περιττὸς μόνον. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ εἶναι περιττός. Ὅτι μὲν ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις περιττός, εἶναι φανερόν. Διότι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ περιττὸς ὢν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ διπλασιαζόμενον (ἀρτίως λαμβανόμενον) δίδει τὸν ἀριθμόν. Λέγω, ὅτι καὶ μόνον. Διότι, ἐὰν ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ μετρῆται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ τὸ ἥμισυ εἶναι περιττός· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ Α εἶναι μόνον ἀρτιάκις περιττός. [Ἀφοῦ $\frac{A}{2} = 2\mu \pm 1$ (μ=1, 2, 3 .....), ὁ $A = 4\mu \pm 2 = 2\ (2\mu \pm 1)$, δηλ. γινόμενον ἀρτίου ἐπὶ περιττὸν (ἀρτιάκις περιττός). Ἐὰν ὁ Α ἦτο ἀρτιάκις ἄρτιος, θὰ ἦτο τῆς μορφῆς $A = 2\,\mu.\ 2\,\nu = 4.\ \mu.\ \nu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3....$). Τὸ δὲ ἥμισυ τούτου $\frac{A}{2} = 2\,\mu.\ \nu$, ἤτοι ἄρτιος, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν].

34. Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν εἶναι τῆς μορφῆς 2^{ν} ($\nu \geqq 2$), οὔτε τὸ ἥμισυ αὐτοῦ νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2\mu \pm 1$ ($\mu = 1, 2, 3, 4 \cdots$), ὁ ἀριθμὸς εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

Ἔστω τοιοῦτος ἀριθμὸς ὁ Α. Ὅτι μὲν ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, εἶναι φανερόν· διότι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δὲν εἶναι περιττός· (εἶναι δηλ. τὸ ἥμισυ ἄρτιος, λαμβανόμενον δίς, ἀρτίως). Λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι καὶ ἀρτιάκις περιττός. Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν Α διὰ 2, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ διὰ 2, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, θὰ καταντήσωμεν νὰ λάβωμεν τελικῶς ἀριθμόν τινα περιττόν. Διότι, ἐὰν τοῦτο δὲν συμβῇ, ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι 2, ὁπότε ὁ Α θὰ εἶναι τῆς μορφῆς 2^{ν} ($\nu \geqq 2$), ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε ὁ Α εἶναι ἀρτιάκις περιττός. Ἐδείχθη ὅμως ἀνωτέρω, ὅτι εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. Ἄρα ὁ Α εἶναι καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περιττός.

35. Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τὸν δεύτερον πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς διαφορᾶς τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τὸν τελευταῖον πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ τοῦ τελευταίου ὅρων.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ

$\left(\text{ἢ}\ \frac{Α}{ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{Δ} = \frac{Δ}{ΕΖ}\text{, (1) ἢ ἡ γεωμ. πρόοδος } Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ\right)$ μὲ μικρότερον ὅρον τὸν Α καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ ἕκαστος τῶν ΒΗ, ΖΘ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι δὲ $ΒΗ = ΖΘ = Α$, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διαφοραὶ $ΒΓ - ΒΗ = ΗΓ$, $ΕΖ - ΖΘ = ΕΘ$. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{ΗΓ}{Α} = \frac{ΕΘ}{Α + ΒΓ + Δ}$ [ἕκαστος ὅρος γεωμ. προόδου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸ αὐτοῦ ὅρων· οἱ ὅροι ἀκέραιοι θετικοί]. Ἂς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ τελευταίου ὅρου ΕΖ (τοῦ περιέχοντος τὸ ἄθροισμα τῶν προηγουμένων του) ὁ $ΖΚ = ΒΓ$ καὶ ὁ $ΖΛ = Δ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΖΚ = ΒΓ$ καὶ $ΖΘ = ΒΗ$ θὰ εἶναι καὶ $ΖΚ - ΖΘ = ΒΓ - ΒΗ$. Καὶ ἂν κληθῇ ἡ πρώτη διαφορὰ $= ΘΚ$ καὶ ἡ δευτέρα $= ΗΓ$, θὰ εἶναι $ΘΚ = ΗΓ$. Ἡ συνεχὴς ἀναλογία (1) γράφεται, λαμβανομένων τῶν ὅρων ἀνάπαλιν, $\frac{ΕΖ}{Δ} = \frac{Δ}{ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{Α}$. Καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $Δ = ΖΛ$, $ΒΓ = ΖΚ$, $Α = ΖΘ$, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς αὐτὴν ἔχομεν $\frac{ΕΖ}{ΖΛ} = \frac{ΖΛ}{ΖΚ} = \frac{ΖΚ}{ΖΘ}$. Καὶ διὰ « διαιρέσεως τῶν λόγων » (V. ὁρ. 15) λαμβάνομεν $\frac{ΕΖ - ΖΛ}{ΖΛ} = \frac{ΖΛ - ΖΚ}{ΖΚ} = \frac{ΖΚ - ΖΘ}{ΖΘ}$, (2). Ἡ διαφορὰ $ΕΖ - ΖΛ = ΕΛ$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ προτελευταίου ὅρου ἀπὸ τοῦ τελευταίου, ἀφοῦ $ΖΛ = Δ$. Ἡ διαφορὰ $ΖΛ - ΖΚ = ΛΚ$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ὅρου ἀπὸ τοῦ τρίτου, ἀφοῦ $ΖΚ = ΒΓ$. Καὶ ἡ διαφορὰ $ΖΚ - ΖΘ = ΚΘ$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ δευτέρου, ἀφοῦ $ΖΘ = Α$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀναλογίαν (2) ἔχομεν $\frac{ΕΛ}{ΖΛ} = \frac{ΛΚ}{ΖΚ} = \frac{ΚΘ}{ΖΘ}$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (VII. 12) λαμβάνομεν $\frac{ΚΘ}{ΖΘ} = \frac{ΕΛ + ΛΚ + ΚΘ}{ΖΛ + ΖΚ + ΖΘ}$, (3). Εἶναι δὲ $ΚΘ = ΓΗ$, $ΖΘ = Α$, $ΕΛ + ΛΚ + ΚΘ = ΕΘ$ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ τελευταίου), καὶ $ΖΛ + ΖΚ + ΖΘ = Δ + ΒΓ + Α$. Δι' ἀντικαταστάσεως ἄρα εἶναι $\frac{ΓΗ}{Α} = \frac{ΕΘ}{Α + ΒΓ + Δ}$.

[Ἡ ἀπόδειξις εἰς σύγχρονον διατύπωσιν. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $α, αω, αω^2, \cdots\cdots, αω^ν$ ἢ ἡ συνεχὴς ἀναλογία $\frac{α}{αω} = \frac{αω}{αω^2} = \frac{αω^2}{αω^3} = \ldots\ldots = \frac{αω^{ν-2}}{αω^{ν-1}} = \frac{αω^{ν-1}}{αω^ν}$. Αὕτη ἀνάπαλιν γράφεται $\frac{αω^ν}{αω^{ν-1}} = \frac{αω^{ν-1}}{αω^{ν-2}} = \ldots\ldots = \frac{αω^3}{αω^2} = \frac{αω^2}{αω}$

$= \frac{\alpha\omega}{\alpha}$. Λαμβάνοντες τὴν «διαίρεσιν» ἑκάστου λόγου, ἔχομεν $\frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha\omega^{\nu-1}}{\alpha\omega^{\nu-1}} =$
$\frac{\alpha\omega^{\nu-1}-\alpha\omega^{\nu-2}}{\alpha\omega^{\nu-2}} = \dots\dots\dots = \frac{\alpha\omega^{3}-\alpha\omega^{2}}{\alpha\omega^{2}} = \frac{\alpha\omega^{2}-\alpha\omega}{\alpha\omega} = \frac{\alpha\omega-\alpha}{\alpha}$.

Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν $\frac{\alpha\omega-\alpha}{\alpha} =$
$\frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha\omega^{\nu-1}+\alpha\omega^{\nu-1}-\alpha\omega^{\nu-2}+\dots+\alpha\omega^{3}-\alpha\omega^{2}+\alpha\omega^{2}-\alpha\omega+\alpha\omega-\alpha}{\alpha\omega^{\nu-1}+\alpha\omega^{\nu-2}+\dots+\alpha\omega^{2}+\alpha\omega+\alpha}$ ἤ
$\frac{\alpha\omega-\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha}{\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^{2}+\dots+\alpha\omega^{\nu-2}+\alpha\omega^{\nu-1}}$. Καὶ τέλος ἐκ ταύτης ἔχομεν $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^{2}+\dots\dots+\alpha\omega^{\nu-1} = \frac{\alpha(\alpha\omega^{\nu}-\alpha)}{\alpha\omega-\alpha}$.

Παρέχει δηλ. τὸ θεώρημα τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\alpha, \alpha\omega, \dots, \alpha\omega^{\nu-1}$. Ἐὰν δοθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ζητῆται νὰ σχηματισθῇ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ $(\nu+1)$ ὅρους, ὁ πρῶτος ὅρος θὰ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ λόγου εἰς τὴν ν δύναμιν· ἕκαστος ἑπόμενος ὅρος σχηματίζεται, ὡς γνωστόν, διὰ διαιρέσεως ἑκάστου προηγουμένου ὅρου διὰ τοῦ λόγου. Κατὰ ταῦτα ἡ γεωμ. πρόοδος θὰ εἶναι $\alpha^{\nu}, \alpha^{\nu-1}.\beta, \alpha^{\nu-2}.\beta^{2}, \dots\dots\dots \alpha^{2}.\beta^{\nu-2}, \alpha.\beta^{\nu-1}, \beta^{\nu}$. Κατὰ τὸ θεώρ. 35 θὰ ἔχωμεν:
$$\frac{\alpha^{\nu-1}.\beta-\alpha^{\nu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\beta^{\nu}-\alpha^{\nu}}{\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu-1}.\beta+\dots\dots\alpha^{2}.\beta^{\nu-2}+\alpha\beta^{\nu-1}}.$$
Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν $\frac{\beta^{\nu}-\alpha^{\nu}}{\beta-\alpha} = \alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\dots\dots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}$.

36. Ἐὰν θεωρήσωμεν μὲ ἀπεριορίστους ὅρους τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον 1, 2, 4, 8....., σχηματίσωμεν δὲ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ταύτης, μέχρις ὅτου μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ μερ. ἀθροίσματος, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς τέλειος.

Διότι ἔστω ἀπὸ μονάδος ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 1, Α, Β, Γ, Δ μὲ λόγον τὸν 2, μὲ ἀπεριόριστον ἀριθμὸν ὅρων καὶ μερικόν τι ἄθροισμα ταύτης ἔστω $Ε = 1+Α+Β+Γ+Δ$ νὰ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καὶ τὸ γινόμενον $Ε \times Δ = ΖΗ$. Λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Διότι ὅσοι ὅροι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Α, Β, Γ, Δ, ἄλλοι τόσοι ἂς ληφθῶσιν, ὥστε νὰ σχηματισθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν Ε καὶ λόγον τὸν 2, οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ὁπότε εἶναι $Α : Β = Ε : ΘΚ$
$$Β : Γ = ΘΚ : Λ$$
$$Γ : Δ = Λ : Μ.$$
Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέ-

σων) ἔχομεν $Α : Δ = Ε : Μ$. Ἄρα $Ε \times Δ := Α \times Μ$. Ἀλλὰ $Ε \times Δ = ΖΗ$. Ἄρα $Α \times Μ = ΖΗ$. Ἄρα ὁ ΖΗ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Μ, ἤτοι ὁ Μ μετρεῖ τὸν ΖΗ κατὰ τὰς μονάδας τοῦ Α. Καὶ εἶναι $Α = 2$. Ἄρα $2Μ = ΖΗ$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ εἶναι συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον τὸν 2, ἤτοι εἶναι $2.Λ = Μ$, $2.ΘΚ = Λ$, $2.Ε = ΘΚ$, (1), θὰ ὑπάρχῃ ἡ συνεχὴς ἀναλογία $\frac{Ε}{ΘΚ} = \frac{ΘΚ}{Λ} = \frac{Λ}{Μ} = \frac{Μ}{ΖΗ}$ ἢ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ μὲ λόγον τὸν 2. Ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς προόδου ταύτης τοῦ ΘΚ καὶ ἀπὸ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ΖΗ ἀφαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τὸν Ε καὶ ἂς λάβωμεν ἀντιστοίχως $Ε = ΘΝ$ καὶ $Ε = ΖΞ$. Κάτὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν $\frac{ΘΚ - ΘΝ}{ΘΝ} = \frac{ΖΗ - ΖΞ}{Ε + ΘΚ + Λ + Μ}$. Ἔστω $ΘΚ - ΘΝ = ΝΚ$, $ΖΗ - ΖΞ = ΞΗ$, (2). Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $\frac{ΝΚ}{ΘΝ} = \frac{ΞΗ}{Ε + ΘΚ + Λ + Μ}$. Καὶ εἶναι $ΘΚ = 2Ε$, $ΘΝ = Ε$. Ἄρα $ΝΚ = Ε$. Ἄρα $\frac{Ε}{Ε} = \frac{ΞΗ}{Ε + ΘΚ + Λ + Μ}$ ἢ $ΞΗ = Ε + ΘΚ + Λ + Μ$. Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης προσθέσωμεν τὸν $Ε = ΖΞ$ καὶ $Ε = 1 + Α + Β + Γ + Δ$, ἀντιστοίχως λαμβάνομεν (ἐκ τῆς (2), $ΖΗ = Ε + ΞΗ$), $ΖΗ = 1 + Α + Β + Γ + Δ + Ε + ΘΚ + Λ + Μ$, καὶ ὁ ΖΗ μετρεῖται ὑπὸ τῶν 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ μετρεῖται μόνον ὑπὸ τῶν 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ οὐδενὸς ἄλλου. Διότι ἔστω ὅτι μετρεῖται ὁ ΖΗ ὑπὸ ἄλλου τινὸς τοῦ Ο καὶ ὅτι ὁ Ο δὲν εἶναι πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ὁ αὐτός. Καὶ ἔστω $ΖΗ = Π \times Ο$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΖΗ = Ε \times Δ$. Ἄρα $Ε \times Δ = Π \times Ο$, (3). Ἑπομένως $\frac{Ε}{Π} = \frac{Ο}{Δ}$, (4). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{1}{Α} = \frac{Α}{Β} = \frac{Β}{Γ} = \frac{Γ}{Δ}$, ἤτοι εἰς τὴν γεωμ. πρόοδον 1, Α, Β, Γ, Δ ὁ Α εἶναι πρῶτος ($=2$), ὁ τελευταῖος ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἢ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ (θεωρ. 13). Καὶ ἐλήφθη ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· ἄρα ὁ Ο δὲν μετρεῖ τὸν Δ. Ἀλλὰ $\frac{Ο}{Δ} = \frac{Ε}{Π}$. Ἄρα οὔτε ὁ Ε μετρεῖ τὸν Π. Καὶ εἶναι ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος. Ἄρα οἱ Ε, Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· καὶ εἶναι $\frac{Ε}{Π} = \frac{Ο}{Δ}$· ἄρα ἰσάκις μετρεῖ ὁ Ε τὸν Ο καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἐκτὸς τῶν Α, Β, Γ· ἄρα ὁ Π εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα ἐκ τῶν Α, Β, Γ. Ἔστω ὅτι εἶναι ὁ $Π = Β$. Καὶ ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ ὅροι

Β, Γ, Δ, ἄλλοι τόσοι ἂς ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ Ε (μὲ λόγον 2) οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἶναι Β : Γ = Ε : ΘΚ,

Γ : Δ = ΘΚ : Λ. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι Β : Δ = Ε : Λ.

Ἄρα Β × Λ = Δ × Ε. Ἄρα ἐκ τῆς (3) Π × Ο = Β × Λ. Ἄρα $\frac{\Pi}{B} = \frac{\Lambda}{O}$.

Καὶ ἐλήφθη Π=Β. Ἄρα Ο=Λ· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἐλήφθη ὁ αὐτός. Ἄρα οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μετρεῖ τὸν ΖΗ πλὴν τῶν 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ. Καὶ ἐδείχθη, ὅτι ὁ ΖΗ = 1 + Α + Β + Γ + Δ + Ε + ΘΚ + Λ + Μ. Δηλαδὴ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του· καλεῖται δὲ τέλειος ἀριθμὸς ὁ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του· ἄρα ὁ ΖΗ εἶναι τέλειος.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κειμένου.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, λόγον τὸν 2 καὶ ἀπεριόριστον ἀριθμὸν ὅρων, ἡ $1, 2, 2^2, \cdots\cdots\cdots$ Καὶ ἔστω ὅτι μερικὸν ἄθροισμα ν ὅρων ἐκ ταύτης, ἤτοι $1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{\nu-3}+2^{\nu-2}+2^{\nu-1}=\sigma_\nu=2^\nu-1$, εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $2^{\nu-1}\times(2^\nu-1)$ εἶναι ἀριθμὸς τέλειος (ἴδε ἐπεξήγησιν, Τέλειοι ἀριθμοί, μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως).

Διότι ἂς λάβωμεν τοὺς (ν — 1) ὅρους τῆς ἀνωτέρω προόδου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου, τοὺς $2, 2^2, \cdots\cdots\cdots 2^{\nu-2}, 2^{\nu-1}$ (1) καὶ ἂς σχηματίσωμεν νέαν γεωμ. πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $2^\nu - 1$, λόγον τὸν 2 καὶ (ν — 1) ὅρους, τὴν $(2^\nu-1),\ 2.(2^\nu-1), \cdots\cdots\cdots,\ 2^{\nu-3}.(2^\nu-1),\ 2^{\nu-2}.(2^\nu-1)$, (2).

Οἱ ὅροι τῆς (1) εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους τῆς (2), ἤτοι εἶναι

$$
\begin{aligned}
2 : 2^2 &= 2^\nu - 1 : 2\,(2^\nu - 1)\\
2^2 : 2^3 &= 2\,(2^\nu - 1) : 2^2(2^\nu - 1).\\
&\vdots\\
2^{\nu-2} : 2^{\nu-1} &= 2^{\nu-3}(2^\nu - 1) : 2^{\nu-2}(2^\nu - 1).
\end{aligned}
$$

Λαμβάνοντες τοὺς δι' ἴσου λόγους (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ ἔχωμεν $2 : 2^{\nu-1} = (2^\nu - 1) : 2^{\nu-2}(2^\nu-1)$. Καὶ ἐκ ταύτης $2^{\nu-1}(2^\nu-1) = 2.\ 2^{\nu-2}\,(2^{\nu 2}-1)$. Θεωροῦμεν τώρα τὴν πρόοδον (2) μὲ ν ὅρους, ἤτοι $(2^\nu-1)$, $2\,(2^\nu-1)\cdots\cdots 2^{\nu-2}\,(2^\nu-1)$, $2^{\nu-1}\,(2^\nu-1)$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὸ προηγούμενον θεώρημα (καθ' ὃ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τὸν δεύτερον πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ τελευταίου πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πρὸ τοῦ τελευταίου ὅρων), ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{2.(2^\nu-1)-(2^\nu-1)}{2^\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}\,(2^\nu-1)-(2^\nu-1)}{(2^\nu-1)+2\,(2^\nu-1)+\ldots\ldots+2^{\nu-2}\,(2^\nu-1)} \quad \text{ἢ}$$

$$1=\frac{2^{\nu-1}(2^\nu-1)-(2^\nu-1)}{(2^\nu-1)+2(2^\nu-1)+\ldots..2^{\nu-2}(2^\nu-1)}\ \text{ἢ}$$

$2^{\nu-1}(2^\nu-1)-(2^\nu-1)=(2^\nu-1)+2(2^\nu-1)+\ldots..+2^{\nu-2}(2^\nu-1)$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ $(2^\nu-1)$, ὅτε λαμβάνομεν (εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἀναπτύσσομεν τὸ $(2^\nu-1)$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{\nu-1}$),

$2^{\nu-1}(2^\nu-1)=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{\nu-1}+(2^\nu-1)+2(2^\nu-1)+\cdots\cdots+2^{\nu-2}(2^\nu-1)$, (3).

[Οἱ προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι πάντα τὰ δυνατὰ πηλίκα τοῦ πρώτου μέλους, διαιρεθέντος τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του, πλὴν τῆς μονάδος. Πρέπει ὅμως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι μόνον οἱ προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους καὶ μόνον αὐτοὶ διαιροῦσι τὸ πρῶτον μέλος].

Λέγω, ὅτι ὁ $2^{\nu-1}(2^\nu-1)$ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν $1, 2, 2^2, \ldots.. 2^{\nu-1}$, $(2^\nu-1)$, $2(2^\nu-1),\cdots\cdots$, $2^{\nu-2}(2^\nu-1)$ καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν.

Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλος διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (3) ἐκτὸς τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους αὐτῆς, ὁ Ο, καὶ ὅτι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν ὅρων $2, 2^2,\ldots.2^{\nu-2}, 2^{\nu-1}, (2^\nu-1), 2(2^\nu-1)\cdots\cdots\cdots2^{\nu-2}(2^\nu-1)$, (4) εἶναι ὁ αὐτός. Τότε θὰ εἶναι $2^{\nu-1}(2^\nu-1)=\mathrm{O}\times\Pi$, (5), ἐὰν Π κληθῇ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ Ο. Ἐκ τῆς ἰσότητος (5) λαμβάνομεν $\dfrac{(2^\nu-1)}{\Pi}=\dfrac{\mathrm{O}}{2^{\nu-1}}$, (6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γεωμ. πρόοδος $1, 2, 2^2, \cdots\cdots, 2^{\nu-1}$ ἔχει πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, ὁ τελευταῖος αὐτῆς ὅρος, ὁ $2^{\nu-1}$, ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου διαιρεῖται παρὰ μόνον ὑπὸ τῶν $2, 2^2,\cdots\cdots 2^{\nu-3}, 2^{\nu-2}$ (θεώρ. 13). Καὶ ἐλήφθη ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν $2, 2^2, 2^3 \cdots\cdots 2^{\nu-2}\ldots..$ ὁ αὐτὸς (ἐκ τῆς 4). Συνεπῶς εἰς τὴν (6) ὁ Ο δὲν μετρεῖ τὸν $2^{\nu-1}$. Ἄρα οὔτε ὁ $(2^\nu-1)$ μετρεῖ τὸν Π. Καὶ εἶναι ὁ $(2^\nu-1)$ πρῶτος. Πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος. Ἄρα οἱ $(2^\nu-1)$, Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Οἱ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἶναι οἱ ἐλάχιστοι πρὸς τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ μετροῦσιν ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἄρα εἰς τὴν (6) ἰσάκις ὁ $(2^\nu-1)$ μετρεῖ τὸν Ο καὶ ὁ Π τὸν $2^{\nu-1}$. Ὁ δὲ $2^{\nu-1}$ ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται ἢ ὑπὸ τῶν $2, 2^2, \cdots\cdot 2^{\nu-2}$. Ἄρα ὁ Π εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν $2, 2^2, \cdots\cdots 2^{\nu-2}$. Ἔστω ὅτι εἶναι $\Pi=2^2$. Καὶ ἀπὸ ὅσους ὅρους ἀποτελεῖται ἡ γεωμ. πρόοδος $2^2, 2^3, \cdots\cdot 2^{\nu-1}$, (7) (ἀπὸ (ν—2) ὅρους), ἀπὸ τόσους ὅρους ἂς σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $(2^\nu-1)$ καὶ λόγον τὸν 2, ἡ $(2^\nu-1), 2(2^\nu-1),\cdots\cdots$, $2^{\nu-3}(2^\nu-1)$, (8). Οἱ ὅροι τῶν (7) καὶ (8) εὑρίσκονται ἀντιστοίχως εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι εἶναι

$$\begin{array}{l} 2^2 : 2^3 = (2^\nu - 1) : 2\,(2^\nu - 1) \\ 2^3 : 2^4 = 2\,(2^\nu - 1) : 2^2\,(2^\nu - 1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2^{\nu-2} : 2^{\nu-1} = 2^{\nu-4}\,(2^\nu - 1) : 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1). \end{array}$$

Δι' ἴσου ἄρα (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) θὰ εἶναι $2^2 : 2^{\nu-1} = (2^\nu - 1) : 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1)$.

Ἄρα $2^2 . 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = 2^{\nu-1}\,(2^\nu - 1)$, (9). Συνεπῶς ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $2^2 . 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = \text{Ο} \times \Pi$. Ἀλλὰ ὁ Π ἐλήφθη ἴσος μὲ 2^2. Συνεπῶς $2^2 . 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1) = \text{Ο} \times 2^2$. Ἄρα $\text{Ο} = 2^{\nu-3}\,(2^\nu - 1)$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ὁ Ο πρὸς οὐδένα τῶν $2, 2^2, \cdots 2^{\nu-1} \cdots 2^{\nu-2}(2^\nu - 1)$ ἐλήφθη ὁ αὐτός. Ἄρα οὐδεὶς ἄλλος διαιρεῖ τὸν $2^{\nu-1}\,(2^\nu - 1)$ παρὰ οἱ $1, 2, 2^2, \cdots 2^{\nu-1}, (2^\nu - 1), 2\,(2^\nu - 1), \cdots, 2^{\nu-2}\,(2^\nu - 1)$. Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων εἶναι ὁ $2^{\nu-1}\,(2 - 1)$. Ἄρα εἶναι οὗτος τέλειος.

Οἱ τέλειοι ἀριθμοί.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 23 τοῦ VII βιβλίου τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του. Ἐὰν δηλ. ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, πλὴν τῆς μονάδος, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκ τῶν διαιρέσεων τούτων λαμβανομένων πηλίκων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται τέλειος.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τελείων ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικῶς ἡ γεωμ. πρόοδος 1, 2, 4, 8, 16.......... καὶ σχηματίζονται κατὰ σειρὰν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς προόδου ταύτης. Ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος, τῆς τάξεως τῶν προσθετέων τοῦ μ. ἀθροίσματος λογιζομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, δίδει ἀριθμὸν τέλειον. Π.χ.

$\sigma_1 = 1$ (ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων θεωροῦνται δι' ἄλλους λόγους ἡ μονάς, ὁ 3 καὶ ὁ 10 τέλειοι ἀριθμοί)

$\sigma_2 = 1 + 2 = 3$. Ὁ 3 εἶναι πρῶτος· ἄρα $3 \times 2 = 6$ εἶναι τέλειος. Διότι $6 : 6 = 1$, $6 : 3 = 2$, $6 : 3 = 2$. Ἤτοι $1 + 2 + 3 = 6$.

$\sigma_3 = 1 + 2 + 4 = 7$. Ὁ 7 εἶναι πρῶτος· ἄρα $7 \times 4 = 28$ εἶναι τέλειος. Διότι $28 : 28 = 1$, $28 : 14 = 2$, $28 : 7 = 4$, $28 : 4 = 7$, $28 : 2 = 14$. Ἤτοι $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

$\sigma_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Ὁ 15 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδει τέλειον ἀριθμόν..

$\sigma_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Ὁ 31 εἶναι πρῶτος· ἄρα $31 \times 16 = 496$ εἶναι τέλειος. Πρὸς εὕρεσιν τῶν μερῶν τοῦ 496 ἀναλύομεν τοῦτον εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν 2. 2. 2. 2. 31.

Οἱ δυνατοὶ διαιρέται τοῦ 496.	*Τὰ μέρη ἢ τὰ δυνατὰ πηλίκα τοῦ 496.*
$2 \times 1 = 2$	$496 : 496 = 1$
$2 \times 2 = 4$	$496 : 248 = 2$
$2 \times 2 \times 2 = 8$	$496 : 124 = 4$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$496 : 62 = 8$
$1 \times 31 = 31$	$496 : 31 = 16$
$2 \times 31 = 62$	$496 : 16 = 31$
$2 \times 2 \times 31 = 124$	$496 : 8 = 62$
$2 \times 2 \times 2 \times 31 = 248$	$496 : 4 = 124$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 31 = 496$	$496 : 2 = 248$

Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$. Ἄρα ὁ 496 εἶναι τέλειος ἀριθμός.

$\sigma_6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Ὁ 63 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_7 = 63 + 64 = 127$. Ὁ 127 εἶναι πρῶτος· ἄρα $127 \times 64 = 8128$, τέλειος.

$\sigma_8 = 127 + 128 = 255$. Ὁ 255 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_9 = 255 + 256 = 511$. Ὁ 511 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{10} = 511 + 512 = 1023$. Ὁ 1023 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{11} = 1023 + 1024 = 2047$. Ὁ 2047 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{12} = 2047 + 2048 = 4095$. Ὁ 4095 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_{13} = 4095 + 4096 = 8191$. Ὁ 8191 εἶναι πρῶτος· ἄρα $8191 \times 4096 = 33.550.336$ εἶναι τέλειος.

Ὁ γενικὸς τύπος λήψεως τῶν τελείων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ ταῦτα $\sigma^{\nu} . 2^{\nu-1}$ ἢ $(2^{\nu} - 1) . 2^{\nu-1}$, ὅταν ὁ σ_{ν} εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου[1] γράφει, ὅτι ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς τέλειος ἀριθμός, ἀπὸ 11 ἕως 100, 101 ἕως 1000, 1001 ἕως 10.000 ἀνὰ εἷς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ $10^4 + 1$ ἕως 10^8, $10^8 + 1$ ἕως 10^{12} κ. ο. κ. διαπιστωθῇ ὕπαρξις τελείου ἀριθμοῦ, τότε εἰς ἑκάστην τοιαύτην περιοχὴν θὰ ὑπάρχῃ μόνον εἷς τέλειος ἀριθμός. Ἡ παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου εἶναι ἀληθὴς μέχρι τοῦ 10^8, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ὑπολογίσει καὶ τὸν πέμπτον τέλειον ἀριθμόν. Ὁ Ἰάμβλιχος προσθέτει ἀκόμη, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων παντὸς τελείου ἀριθμοῦ λήγῃ εἰς 6 ἢ 8. Τοῦτο εἶναι ἀληθές, ἡ ἀπόδειξις ὅμως δὲν ἐσώθη.

Κατὰ τὸ Εὐκλείδειον θεώρημα ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ὑπάρξεως τελείου ἀριθμοῦ εἶναι 1) ἡ χρησιμοποίησις ἀποκλειστικῶς τῆς γεωμ. προόδου 1, 2, 4, 8, 16,⋯ καὶ 2) ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα τῆς προόδου ταύτης εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου τούτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος.

---

1. Pistelli 1894 σ. 38. Teubner.

Κατὰ τὸν L. Kronecker[1] « ὁ Euler ἀπέδειξεν, ὅτι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου λαμβάνονται ὅλοι οἱ ἄρτιοι τέλειοι ἀριθμοὶ καὶ ὅτι οἱ περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοί, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς $(4m + 1)^{4n+1} . \chi^2$, ὅπου $4m + 1 = p$ θὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ χ περιττὸς μὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ p. Οὐδεὶς ὅμως εὑρέθη περιττὸς τέλειος ἀριθμός. Ἐξ ἄλλου δὲν κατωρθώθη ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοί ».

Ἡ ἔρευνα, ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα σ_ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, δὲν εἶναι εὔκολος. Ὁ Fermat ἀνεκοίνωσε δύο θεωρήματα ἄνευ ἀποδείξεων εὐκολύνοντα τὴν ἔρευναν, ἂν μερικόν τι ἄθροισμα σ_ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Πρὸς τοῦτο γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν (β) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἄνωθεν ταύτης εἰς σειρὰν (α) γράφομεν τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (β), ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων προσθέσωμεν τὴν μονάδα (ἤτοι τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2^ν ($\nu = 1, 2, 3 \cdots$). Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

(α)	1	2	3	4	5	6	7 $\cdots\cdots$ ν
(β)	1	3	7	15	31	63	127 $\cdots\cdots 2^\nu - 1$.

Θεώρημα 1ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε τὸ κάτωθεν τούτου ἐπὶ τῆς σειρᾶς (β) εὑρισκόμενον μερικὸν ἄθροισμα θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\kappa.\lambda} - 1$, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ $2^\kappa - 1$ καὶ διὰ τοῦ $2^\lambda - 1$, ἤτοι τὸ $2^\nu - 1 = 2^{\kappa.\lambda} - 1$ δὲν εἶναι πρῶτος.

Θεώρημα 2ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε μερικόν τι ἀντίστοιχον ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (β) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $2\,m.\,n + 1$. Ἐὰν τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα δὲν ἔχῃ διαιρέτην τῆς μορφῆς ταύτης, δὲν ἔχει γενικῶς διαιρέτην, ἤτοι εἶναι τοῦτο ἀριθμὸς πρῶτος. (Ἐπιστολὴ Fermat πρὸς Mersenne. Varia opera mathem. Tolosae 1679. fol. p. 177).

1. L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie I σ. 24, 1901. Teubner.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν ἐγένοντο αἱ κάτωθι ἀνανακοινώσεις ἐπὶ θεμάτων τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τὰς ἑξῆς σελίδας τοῦ τόμου τούτου :

Σελ.	5 - 6	« Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ » διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Β. Αἰγινήτου, 11-6-1953.
»	17	« Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις » διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Β. Αἰγινήτου, 19-11-53.
»	297 - 301	« Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου » διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μ. Στεφανίδου, κατατεθεῖσα κατὰ Νοέμβριον 1953.

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

σ. 13	στ. 15	ἀντὶ	δ^{ν}	γράφε	δ_{ν}
σ. 281	ὁρ. 7	»	$\frac{\Gamma}{A}$	»	$\frac{\Gamma}{\Delta}$
σ. 304	στ. 26	»	$\frac{\rho}{\alpha}$	»	$\frac{\rho}{\alpha}\cdot\chi^2$

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄, 1953 (XI) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 10.000

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ Γ. Σ. ΧΡΗΣΤΟΥ & ΥΙΟΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Χ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ III

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1975

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ X.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Χ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ ΙΙΙ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1975

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ X

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀναπτυσσομένην εἰς 115 θεωρήματα κατὰ τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἣν ἀκολουθοῦμεν, καὶ θεωρεῖται τὸ τελειότερον ἐκ τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ Woepcke, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θεωρεῖται σημαντική, γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «τίποτε δὲν εἶναι ὡραιότερον καὶ τελειότερον ἢ ἡ τάξις καὶ ὁ παραλληλισμὸς τῶν ἑξάδων τοῦ Χ βιβλίου. Πανταχοῦ εἰς τοῦτο διαλάμπει ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ συγγραφέως τῶν Στοιχείων»[1].

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας ἀνάγονται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους. Ἡ δημιουργία ὅμως καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων, δέον νὰ θεωρηθῇ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου (περίπου 417 — 369 π.Χ.) καὶ τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου (περίπου 408 — 355 π.Χ.). Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν[2] τὸ 9ον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βασικὸν τῆς ὅλης θεωρίας, «θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα». Περὶ τῆς συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Θεοδώρου[3] τοῦ Κυρηναίου, τοῦ διδασκάλου τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἀσυμμέτρων πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος τοῦ ἀφιερωμένου εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D — 148 B), ἔνθα γράφεται:

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Λέγε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Κάλλιστα· ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνί-

---

1. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius p. 675 (Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 453, éd. Les Belles Lettres, Paris 1950).

2. Ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ J. Heiberg, τόμ. 5ος, σ. 450.

3. Ἄρθρον Theodoros, Pauly - Wissowa, Real - Enzyklopaedie der klassischen Altertumswissenschaft.

ζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες».

['Ερμηνεία : Θ. 'Ο παρὼν ἐδῶ Θεόδωρος ἠσχολεῖτο μὲ τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδεικνύων ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετροι ἀντιστοίχως μὲ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα 3 καὶ 5 καὶ οὕτω ἐξετάζων ἀνὰ μίαν ἔφθασε μέχρι τῆς $\sqrt{17}$· ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. 'Ημεῖς λοιπὸν συνελάβομεν τὴν ἰδέαν, ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν ἐφαίνοντο ἄπειροι, νὰ περιλάβωμεν εἰς ἕνα νόμον τὴν ἔκφρασιν τῶν ριζῶν τούτων.

Σ. Μήπως ηὕρετε τοιοῦτον νόμον;

Θ. Κατ' ἐμὲ νομίζω· ἰδέ το καὶ σύ.

Σ. Λέγε.

Θ. Πάντα ἀριθμὸν τὸν ἀνελύομεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων· τὸν μὲν δυνάμενον νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων παρομοιάσαντες πρὸς τετράγωνον σχῆμα τὸν ὠνομάσαμεν τετράγωνον καὶ ἰσόπλευρον.

Σ. Καὶ πολὺ ὀρθῶς.

Θ. Τὸν δὲ μεταξὺ δύο τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀδύνατον ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων, ἀλλὰ ἢ ἔχει τὸν ἕνα παράγοντα μεγαλύτερον καὶ τὸν ἄλλον μικρότερον ἢ τὸν ἕνα μικρότερον καὶ τὸν ἄλλον μεγαλύτερον, πάντοτε δὲ οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἄνισοι, παρομοιάσαντες πρὸς τὸ πρόμηκες (ὀρθογώνιον) σχῆμα τὸν ἐκαλέσαμεν προμήκη.

Σ. Κάλλιστα. 'Αλλὰ ποῖον τὸ συμπέρασμα;

Θ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον παρέχουσι τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν ὠνομάσθησαν μῆκος, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ἐπειδὴ αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι γραμμικῶς ἐξεταζόμεναι πρὸς τὰς πρώτας, ἐν ᾧ εἶναι σύμμετροι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐκφράζοντας ἐπίπεδα, ὅταν αὗται ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον. 'Ομοίως ἐπράξαμεν καὶ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν ἴσων ἢ ἀνίσων παραγόντων.

Σ. Ἄριστα, παιδιά μου].

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ἡ ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἔχει ὡς ἑξῆς· τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\alpha\times\alpha$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς τετράγωνον σχῆμα πλευρᾶς α καὶ τὴν πλευρὰν ταύτην καλοῦμεν μῆκος. Τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\beta\times\gamma$, ἔνθα $\beta \gtrless \gamma$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (πρόμηκες σχῆμα) καὶ τὸν καλοῦμεν προμήκη. Τὴν γραμμήν, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τετραγώνου, τὴν $\sqrt{\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν δύναμιν (Σημ. Δύναμιν, διότι αὕτη ὑψουμένη, εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται, παράγει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ ἡ $(\sqrt{\beta\times\gamma})^2$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων. 'Εὰν δηλ. $A=\alpha\times\alpha\times\alpha$, ἡ πλευρὰ α καλεῖται μῆκος. 'Εὰν ὅμως $A=\alpha\times\beta\times\gamma$ (οὐχὶ κύβος ἀριθμός), τὴν πλευρὰν $\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν κύβον. (Σημ. Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὀνομασίαν δύναμις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὕτη ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον παρέχει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ $(\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma})^3$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α.

Συναφῶς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχε γράψει πραγματείαν, μὴ σωθεῖσαν, ὑπὸ τὸν τίτλον « Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν » (Περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν). [Diels, Fragm. II, σ. 141]. 'Εκ τοῦ σωθέντος τούτου τίτλου τῆς πραγματείας τοῦ Δημοκρίτου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων θὰ εἶχε σημειώσει προόδους καὶ πρὸ τῶν χρόνων τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ περιεχόμενο τοῦ X βιβλίου

Προτάσσονται τέσσαρες ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἴς τινας παλαιοτέρας τῆς τοῦ Heiberg ἐκδόσεις διαιροῦνται εἰς ἕνδεκα. Μετὰ τὸ θεώρημα 47 ἕπονται οἱ δεύτεροι ὁρισμοὶ καὶ μετὰ τὸ θεώρημα 84 οἱ τρίτοι ὁρισμοί. Οἱ δεύτεροι καὶ οἱ τρίτοι ὁρισμοὶ εἶναι ταυτόσημοι· οἱ μὲν ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, οἱ δὲ εἰς διαφοράς.

Ὁρισμὸς α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι λέγονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου· δυνάμει δὲ ἀσύμμετροι λέγονται αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα οὐδὲν χωρίον ἔχουσιν ὡς κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. γ'. Ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ὡς μέτρον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν, αἱ μὲν μήκει μόνον (γραμμικῶς θεωρούμεναι, μονοδιαστάτως) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι, αἱ δὲ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνα αὐτῶν) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Ἂς καλῆται ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ῥητὴ καὶ αἱ πρὸς ταύτην μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι ῥηταί. Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης, αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. (Ὥστε κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἔννοια τοῦ ῥητοῦ εἶναι εὐρυτέρα τῆς σημερινῆς). Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὄχι μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀσύμμετρα) αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ἄλογοι.

Ὁρ. δ'. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς δοθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητὸν καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο ῥητά. Τὰ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα (ἄρρητα) καὶ αἱ πλευραὶ τούτων ἄλογοι (ἄρρητοι). Ἐὰν τὰ ἀσύμμετρα ταῦτα εἶναι ἄλλα εὐθύγραμμα καὶ ὄχι τετράγωνα, ἂς καλῶνται ἄλογοι αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων.

1. Πρῶτον θεώρημα εἶναι ἡ περίφημος πρότασις, καθ' ἣν δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος ἢ τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὁμοίως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, θὰ ληφθῇ μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν εἶναι τοῦτο.

2. Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως (τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν), ἐὰν δὲν λαμβάνεται ὑπόλοιπον μηδέν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

3-4. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν.

5. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

6. Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Π ό ρ ι σ μ α. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Δ, Ε, (νοοῦνται μὴ τετράγωνοι) καὶ εὐθεῖά τις Α (λαμβανομένη ὡς μέτρον, ῥητή). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις ἔστω Β, ὥστε αὐτὴ καὶ ἡ Α νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα ὅμως αὐτῶν νὰ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β ὀνομάζονται τότε ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (κατὰ τὸν ὁρ. 3). Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τῶν Δ, Ε καὶ Α τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : \mathrm{E} = \mathrm{A} : \mathrm{Z}$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{B} : \mathrm{Z}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V εἶναι $\mathrm{A} : \mathrm{Z} = \mathrm{A}^2 : \mathrm{B}^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\Delta : \mathrm{E} = \mathrm{A}^2 : \mathrm{B}^2$. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (καὶ μήκει ἀσύμμετροι), διότι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσι λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

7. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

8. Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

9. Τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λό-

γον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους.

Τὰ δὲ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα μὴ ἔχοντα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

10. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μήκει ἀσυμμέτρων ἢ δυνάμει ἀσυμμέτρων.

11. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, β σύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ σύμμετρα. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ ἀσύμμετρα.

12. Ἐὰν α, β σύμμετρα πρὸς γ, εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

13. Ἐὰν α, β σύμμετρα καὶ α, γ ἢ β, γ ἀσύμμετρα εἶναι καὶ β, γ ἢ α, γ ἀσύμμετρα.

14. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, εἶναι καὶ γ, $\sqrt{\gamma^2-\delta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

15. Ἐὰν α, β σύμμετρα, εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α σύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα. Καὶ ἂν $(\alpha+\beta)$, α ἢ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

16. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α ἀσύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$. β ἀσύμμετρα. Καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει σύμμετροι (θεωρούμεναι δηλαδὴ γραμμικῶς), εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (δηλ. τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν). Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν εἶναι A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ μήκει σύμμετροι.

18. Ἔστω πάλιν $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ τὸ ἀντίστροφον.

19. Ἐὰν $A > B$ καὶ A, B εὐθεῖαι ῥηταί, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι ῥητόν.

20. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητόν, καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ῥητὸν καὶ μήκει σύμμετρον πρὸς τὸ πρῶτον τμῆμα..

21. Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν εἶναι ἄλογον καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μέση. [Σημ. Ὀρθογώνιον μέσον εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ μέση εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ].

22. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ πρῶτον.

23. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

24. Ἐὰν $A > B$ καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μέσαι μήκει σύμμετροι, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ὀρθογώνιον μέσον.

25. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\rho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων θὰ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Ῥητὸν θὰ εἶναι ἂν $\sqrt{\varkappa} = \mu\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄλλως μέσον.

26. Ἡ διαφορὰ $\rho^2 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho^2 \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων Α, Β, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν.

28. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων Α, Β, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ μέσον.

Λῆμμα 1ον. Εὕρεσις τοῦ τύπου τοῦ παρέχοντος ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \psi^2 = z^2$ τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$ ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$. Ἐὰν δὲν εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, ὁ $\varkappa\xi\sigma\tau = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Λῆμμα 2ον. Εὕρεσις μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$.

29. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ Α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει σύμμετροι.

30. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει ἀσύμμετροι.

31α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον A^2, B^2 σύμμετρα) καὶ $A \times B$ ῥητὸν καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει σύμμετροι.

31β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει ἀσύμμετροι.

32α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, καὶ $A + B$ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει σύμμετροι.

32β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει ἀσύμμετροι.

33. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου Α, Β, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον.

34. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου Α, Β, ὥστε A^2, B^2, ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν.

35. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, Α, Β, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$.

36. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα (καλούμενα ὀνόματα) ΑΒ, ΒΓ, ὥστε ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται, ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος).

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς δυωνύμου εἶναι $\rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα ρ τὸ μέτρον καὶ α, β, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ $\rho + \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι δυώνυμος.

37. Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητόν.
Ἡ εὐθεῖα $\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη.

38. ΑΒ, ΒΓ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα, $AB \times B\Gamma$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + B\Gamma^2$ ῥητόν, $AB \times B\Gamma$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μείζων.

40. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 \times B\Delta^2$ μέσον, $AB \times B\Gamma$ ῥητόν. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

41. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα. $AB^2 + B\Gamma^2$ μέσον, $AB \times B\Gamma$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς

$AB^2 + B\Gamma^2$. Ἡ εὐθεῖα $\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δύο μέσα δυναμένη. Ἡ μέση τοῦ θ. 21 καὶ αἱ ἕξ εὐθεῖαι τῶν θ. 36—41 εἶναι αἱ πρῶται ἑπτὰ κύριαι ἄλογοι (ἄρρητοι) εὐθεῖαι.

Λῆμμα. Ἔστω $A\Gamma+\Gamma B=A\Delta+\Delta B$, $A\Gamma>\Delta B>A\Delta>\Gamma B$. Τότε εἶναι $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$.

42-47. Τὰ μονώνυμα τῶν ἕξ ἀλόγων τῶν θ. 36-41 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

Ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου (ἐκ δύο ὀνομάτων) $\Delta=A+B$, ἔνθα A, B ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, θ. 36), καὶ $A>B$.

I. Ἔστω $\sqrt{A^2-B^2}$ καὶ A μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πρώτη δυώνυμος.

» 2. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ δευτέρα δυώνυμος.

» 3. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τρίτη δυώνυμος.

II. Ἔστω $\sqrt{A^2-B^2}$ καὶ A μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τετάρτη δυώνυμος.

» 5. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πέμπτη δυώνυμος.

» 6. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ ἕκτη δυώνυμος.

48-53. Εὕρεσις τῶν ἕξ τούτων δυωνύμων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μὲν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ ἔχουσι τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς δυωνύμου (θ. 36), ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

54-59. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος, τὰ ἀντίστοιχα ὕψη εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη. (Ἓξ τρίγωνα).

Λῆμμα

Ἐὰν α διάφορον τοῦ β, εἶναι $\alpha^2+\beta^2 > 2\alpha\beta$.

60-65. **Ἀντίστροφα προηγουμένων.** Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὸν καὶ τὰ ὕψη κατὰ σειρὰν εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι κατὰ σειράν, πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος.

66. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή, ἤτοι ἂν ἡ δοθεῖσα εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος,...... .... ἕκτη δυώνυμος καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος .... ἕκτη δυώνυμος.

67. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν οὖσαν ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν εἶναι καὶ αὐτὴ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἂν δηλ. εἶναι $\Gamma=A+B$ ἔνθα A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ἢ ῥητὸν ἢ μέσον καὶ Δ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ, εἶναι καὶ $\Delta=E+Z$ ἔνθα E, Z μέσαι, μόνον E^2, Z^2 σύμμετρα, καὶ $E\times Z$ ἢ ῥητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως.

68. Ἔστω ἡ μείζων $AB=AE+EB$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσύμμετρα, AE^2+EB^2 ῥητὸν

καὶ $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι μείζων, τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$ ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ ῥητόν, καὶ $ΓΖ \times ΖΔ$ μέσον.

69. Ἔστω ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη $ΑΒ=ΑΕ+ΕΒ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον καὶ $ΑΕ \times ΕΒ$ ῥητόν, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$, ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ μέσον καὶ $ΓΖ \times ΖΔ$ ῥητόν.

70. Ἔστω ἡ δύο μέσα δυναμένη $ΑΒ=ΑΕ+ΕΒ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον, $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΕ^2+ΕΒ^2$, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη τῆς μορφῆς $ΓΖ+ΖΔ$, ἔνθα $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον, $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ^2+ΖΔ^2$.

71. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα ῥητὸν καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{Α+Β}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 36, 37, 39, 40).

72. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{Α+Β}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 38, 41).

73. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα $ΑΒ>ΒΓ$ ῥητὰ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται ἀποτομή.

[ΣΗΜ. Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (ἤτοι εἶναι διαφορὰ ἄρρητος δύο ῥητῶν μονωνύμων τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα), (XIII.6). Ἐπίσης ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή, XIII.17].

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $ΑΒ>ΒΓ$ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα, καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητόν. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $ΑΒ>ΒΓ$ καὶ μόνον $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ σύμμετρα, καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

76. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ>ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ ῥητὸν καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐλάσσων.
[Σημ. Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ῥητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων, (XIII.11). Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου ἐπίσης εἶναι ἐλάσσων, (XIII.16)].

77. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ>ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ μέσον καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητόν. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

78. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ>ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ μέσον, $Α \times Β$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2$. Ἡ διαφορὰ $ΑΓ=ΑΒ-ΒΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. [Σημ. Τὰ μονώνυμα τῶν θεωρημάτων 36—41 εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν θεωρ. 73-78. Ἐκεῖ μὲν ἔχομεν πρόσθεσιν, ἐνταῦθα δὲ ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων. Ὅθεν ἐκτὸς τῆς ἀλόγου μέσης ἔχομεν καὶ 12 ἀκόμη κυρίας ἀλόγους. Ἓξ ἐκ προσθέσεως καὶ ἓξ ἐξ ἀφαιρέσεως (36-41 καὶ 73-78).

79-84. Τὰ μονώνυμα τῶν διαφορῶν τῶν θ. 73-78 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ἕπονται οἱ τρίτοι ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ταυτόσημοι πρὸς τοὺς δευτέρους. Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, ἐν ᾧ οἱ τρίτοι εἰς διαφοράς.

Ὁ μειωτέος καλεῖται ἡ ὅλη εὐθεῖα, ὁ ἀφαιρετέος ἡ προσαρμόζουσα εὐθεῖα εἰς τὴν διαφορὰν (ἀποτομήν). Ὅπως εἰς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) τοῦ θ. 36 διακρίνομεν κατὰ τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη δυωνύμων ἀλόγων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ θ. 73 διακρίνομεν κατὰ τοὺς τρίτους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη ἀποτομῶν ἀλόγων, τὴν πρώτην ἀποτομήν, τὴν δευτέραν ἀποτομήν, τὴν τρίτην ἀποτομήν, τὴν τετάρτην ἀποτομήν, τὴν πέμπτην ἀποτομήν, τὴν ἕκτην ἀποτομήν. Ἑκάστη τούτων ἔχει ἰδίαν ἰδιότητα. Κοινὸν γνώρισμα ὅλων εἶναι ἡ ἰδιότης τῆς ἀποτομῆς, ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ῥητά, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

85-90. Εὑρίσκονται ἡ πρώτη, ἡ δευτέρα, ... ἡ ἕκτη ἀποτομή.

91-96. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ριζικῶν διαφορῶν]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογρ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή, τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστοίχως ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, ἐλάσσων, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (εἶναι δηλ. τὰ ὕψη αἱ ἄρρητοι τῆς μορφῆς τῶν θ. 73-78 ἀντιστοίχως).

97-102. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν δηλ. τὰ ὕψη ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι κατὰ σειρὰν ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης .... ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, τρίτη ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ $AB = AE - EB$, ὁπότε AE, EB ῥηταὶ καὶ μόνον AE^2, EB^2 σύμμετρα. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ $\Gamma\Delta$, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\Gamma Z - Z\Delta$ ὥστε ΓZ, $Z\Delta$ ῥηταὶ καὶ μόνον ΓZ^2, $Z\Delta^2$ σύμμετρα, καὶ ἂν AB εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἢ δευτέρα ἀποτομή .... ἢ ἕκτη ἀποτομὴ θὰ εἶναι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ πρώτη ἀποτομὴ ἢ δευτέρα ἀποτομή, ... ἢ ἕκτη ἀποτομή.

104. Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω $AB = AE - EB$ ἔνθα AE, EB μέσαι καὶ μόνον AE^2 EB^2 σύμμετρα ὁπότε θὰ εἶναι $AE \times EB$ ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Ἐὰν $\Gamma\Delta = \Gamma Z - Z\Delta$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς AB, θὰ εἶναι καὶ ΓZ, $Z\Delta$ μέσαι, μόνον ΓZ^2, $Z\Delta^2$ σύμμετρα καὶ $\Gamma Z \times Z\Delta$ ἢ ῥητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως.

105-107. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἢ τὴν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν ἢ τὴν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν εἶναι καὶ αὐτὴ ἀντιστοίχως ἐλάσσων, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, δηλ. τῆς μορφῆς τῶν διαφορῶν τῶν θ. 76, 77, 78 ἀντιστοίχως.

Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα σχήματα $A > B$.

108. Ἐὰν A εἶναι ὀρθογώνιον ῥητὸν καὶ B ὀρθογώνιον μέσον, ἡ $\sqrt{A-B}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ ἀποτομὴ (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 73) ἢ ἐλάσσων (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 76).

109. Ἐὰν A ὀρθογώνιον μέσον καὶ B ὀρθογ. ῥητόν, ἡ $\sqrt{A-B}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 74) ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 77).

110. Ἐὰν A ὀρθογώνιον μέσον καὶ B ὀρθογώνιον μέσον, καὶ A, B ἀσύμμετρα, ἡ $\sqrt{A-B}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 75) ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 78).

Πόρισμα. Ἡ μέση καὶ αἱ ἓξ ἄλογοι διαφοραὶ (θ. 73—78) οὐδέποτε μεταξύ των ταὐτίζονται.

112. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, ...ἕκτη δυώνυμος, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομὴ καὶ τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη

ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινομένης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

114. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἄλλο δυώνυμος, ὥστε τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ ὕψος εἶναι ῥητόν.

115. Δοθείσης τῆς (ἀρρήτου) μέσης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν ἄπειροι ἄρρητοι, αἱ ὁποῖαι δὲν ταὐτίζονται.

Σκοπὸς τοῦ X Βιβλίου

Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν τῶν Στοιχείων (ἔκδ. Heiberg, τόμ. V, σ. 414), «Ὁ σκοπὸς τοῦ ι' βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων· .... περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν ...... ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει».

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦ X βιβλίου καὶ τὴν συμβολὴν τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ περιεχομένου του πληροφορούμεθα καὶ ἐκ σχολίου τοῦ Ἄραβος Abou Othman τοῦ ἐκ Δαμασκοῦ (περίπου 1000 μ.Χ.), τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων θεωρεῖται ὡς προερχόμενον ἐκ πραγματείας τοῦ Πάππου (300 μ.Χ.). Τὸ σχόλιον τοῦτο σῳζόμενον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν ἀνευρέθη καὶ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Woepcke κατὰ τὸ 1855 καὶ ἔχει κατὰ τὰ κυριώτερα συναφῆ μέρη ὡς ἑξῆς: «Ὁ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων, τῶν ῥητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν. Ἡ θεωρία αὕτη ἔχει τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου. Ἀνεπτύχθη σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου, ὁ ὁποῖος ἐπέδειξεν εἰς τὸν κλάδον τοῦτον ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν τοιαύτην ὀξύνοιαν, ὥστε δικαίως νὰ προκαλῇ τὸν θαυμασμόν. Ἐξ ἄλλου οὗτος ὑπῆρξεν ἐξόχως πεπροικισμένη διάνοια καὶ ἀφωσιώθη μὲ εὐγενῆ ζῆλον εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας τῆς περιεχομένης εἰς τὰς ἐπιστήμας, ὡς τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τοῦ ὁμωνύμου διαλόγου τοῦ Πλάτωνος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἀκριβεῖς διακρίσεις τῶν ῥηθέντων ἀνωτέρω μεγεθῶν καὶ τὰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τῆς θεωρίας αὐτῆς, πιστεύω, ὅτι αὗται κατὰ κύριον λόγον ὀφείλονται εἰς τὸν μαθηματικὸν τοῦτον. Καὶ βραδύτερον ὁ μέγας Ἀπολλώνιος τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐθαυμάσθη εἰς μέγαν βαθμὸν προσέθεσεν εἰς τὰς ἀνακαλύψεις αὐτὰς θαυμασίας θεωρίας κατόπιν πολλῶν προσπαθειῶν καὶ ἐργασιῶν. Διότι ὁ Θεαίτητος διέκρινε τὰς δυνάμεις εἰς μήκει συμμέτρους καὶ ἀσυμμέτρους καὶ διήρεσε τὰς γνωστὰς ἀρρήτους εὐθείας κατὰ τὰς διαφόρους μεσότητας (ἀναλογίας) ἀποδίδων τὴν μέσην εἰς τὴν γεωμετρικὴν μεσότητα, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἀποτομὴν εἰς τὴν ἁρμονικήν, ὡς γράφεται, ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου τοῦ περιπατητικοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Εὐκλείδην προσέφερεν οὗτος γενικῶς ἀνελέγκτους κανόνας σχετικῶς πρὸς τὴν συμμετρίαν καὶ τὴν ἀσυμμετρίαν. Διετύπωσε μετ' ἀκριβείας τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς διακρίσεις τῶν ῥητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν καὶ τέλος ἀπέδειξε σαφῶς τὴν σπουδαιότητά των.

Τέλος ὁ Ἀπολλώνιος διεχώρισε τὰ εἴδη τῶν διατεταγμένων ἀσυμμετριῶν καὶ ἀνεκάλυψε τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀτάκτων ἀσυμμέτρων μεγεθῶν τῶν ὁποίων ἐδημιούργησε μέγαν ἀριθμὸν δι' ἀκριβῶν μεθόδων [1]».

Τινὲς τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Δανοῦ

---

1. Paul-Henri Michel: De Pythagore à Euclide, σ. 109 καὶ 457, Paris 1950, Ed. Les Belles Lettres. Καὶ Mémoir. prés. à l'Acad. des Sciences de Paris 1856, σ. 691.

μαθηματικοῦ Zeuthen διατυπωθεῖσαν γνώμην ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ καὶ διτετραγώνων.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ὡς σημειοῖ ὁ T. Heath (ὅστις γράφει ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ Zeuthen εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς πρὸς τὴν ἀλήθειαν) τῆς μορφῆς

$$x^2 \pm 2\mu x \rho \pm \nu \rho^2 = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad \chi^4 \pm 2\mu x^2 \rho^2 \pm \nu \rho^4 = 0.$$

ἔνθα ρ ῥητὴ εὐθεῖα καὶ μ,ν συντελεσταί[2].

Βεβαίως αἱ 12 κύριαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 36—41 καὶ 6 διαφοραί, θ. 73—78) εἶναι ῥίζαι διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης αἱ 12 δευτερεύουσαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 48—53 καὶ 6 διαφοραί, θ. 85—90) εἶναι ῥίζαι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀρκετὸν διὰ νὰ πεισθῇ τις ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ὑπὸ τοῦ Πρόκλου σημειούμενον ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο τῇ προαιρέσει Πλατωνικὸς καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος[3] εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναπολήσωμέν τινα ἐξ ὅσων ὁ Πλάτων διαλαμβάνει περὶ τῶν μαθηματικῶν εἰς τοὺς διαλόγους αὐτοῦ, ἵνα δυνηθῶμεν καὶ ἐκ τούτων νὰ μορφώσωμεν γνώμην περὶ τοῦ σκοποῦ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου, ὁ Πλάτων ἦτο ἐν γνώσει εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὸ κοσμολογικὸν πρόβλημα τῆς Ὀρφικῆς καὶ Πυθαγορείου θεωρίας, καθ' ἣν ὁ Κόσμος ἐδημιουργήθη ἐκ τοῦ χάους ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ διὰ τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου.

Κατὰ τὸν Φίληβον ἡ ἀρχὴ καθ' ἣν διαμορφοῦται τὸ σχῆμα εἶναι τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν, τὸ ἄπειρον καὶ τὸ πεπερασμένον. Τὸ ἓν (τὸ μέτρον) καὶ ἡ ἀόριστος δυὰς (τὸ ἀσύμμετρον) εἶναι τὰ στοιχεῖα τῶν ὄντων. Εἰς τὴν τοιαύτην θεώρησιν ἔχει προέλθει, πιθανῶς, ὁ Πλάτων ἔχων ὑπ' ὄψει τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ὡς οὗτος γίνεται διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου[4]. Λίαν προσφυῶς γράφει ἐν προκειμένῳ ὁ Κωνστ. Δ. Γεωργούλης « Συνεπῶς χρησιμοποιῶν ὁ Πλάτων τὴν ἔκφρασιν μέγα καὶ μικρὸν θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι τὸ δεύτερον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον ἀνευρίσκομεν εἰς τὸ Σύμπαν εἶναι τὸ ἄλογον, κάτι τὸ ὁποῖον δὲν ὑποτάσσεται εἰς ἀκριβῆ καθορισμόν, ἀλλὰ ἀφίνει κατόπιν οἱουδήποτε προσδιορισμοῦ ὑπόλοιπον »[5].

Τὸ πρῶτον γεωμετρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ δὴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον. Εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου τούτου κατὰ τὸ X βιβλίον ἀνευρίσκομεν τὰς δύο ἀρχὰς τὰς ὁποίας κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Σύμπαν, τὸ μέτρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Ὅθεν, φρονοῦμεν, σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα ἀλόγων εὐθειῶν. Ὡς πρὸς τὴν ἀναγωγὴν δὲ τῶν ἁπλουστάτων ἀρρήτων (ἀλόγων) εὐθειῶν ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὰς τρεῖς βασικὰς ἀναλογίας, τὴν γεωμετρικήν, τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἁρμονικὴν σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς· ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἄρρητον μέσην, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὰς ἀρρήτους δυωνύμους θεωρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τούτων $A + B$ ὡς τοῦ διπλα-

---

2. T. Heath, A history of Greek mathematics I, σ. 411 καὶ Paul - Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 - 5.

3. Σχόλια εἰς Εὐκλείδην I, σ. 68, G. Friedlein, Teubner.

4. Hans Leisegang : Die Platon Deutung der Gegenwart, S. 122 ff. 1929 καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη : Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, σ. 8, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων 1953, Ἀθῆναι.

5. Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς, σ. 592.

σίου, μεγέθους τινὸς Γ, ὥστε $\Gamma = \frac{A + B}{2}$. Ἡ δὲ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Πράγματι θεωρουμένων τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς ὡς ἄκρων ὅρων ἁρμονικῆς ἀναλογίας τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι $\frac{2\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}$, (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ (θ. 114) θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\varkappa\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} - \lambda\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, (2), ἐὰν καλέσωμεν $\frac{2\rho\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \varkappa$ καὶ $\frac{2\rho\frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \lambda$.

Ἡ παράστασις ὅμως (2) εἶναι ἀποτομὴ ἤτοι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Συνεπῶς πᾶσα ἀποτομὴ ἀντικατοπτρίζει τὴν προέλευσιν αὐτῆς ἐξ ἁρμονικοῦ τινος μέσου.

Ὅθεν λίαν προσφυῶς ὁ Paul - Henri Michel[1], γράφει, « οὕτω εἰς τὴν βάσιν τοῦ οἰκοδομήματος τοῦ X βιβλίου ἀνευρίσκομεν τὰς τρεῖς πρώτας μεσότητας (ἀναλογίας), ὡς ἓν ἐνθύμιον τοῦ ἀρχαίου Πυθαγορισμοῦ καὶ ὡς μίαν μαρτυρίαν τῆς εὐκλειδείου πίστεως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος».

Ἔγγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰανουάριον 1956.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

---

1. De Pythagore à Euclide p. 455, Paris, 1950, éd. Les Belles Lettres.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ι'

"Οροι

α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

δ'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

α'

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ

ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ,

ΒΙΒΛΙΟΝ X

Ὁρισμοί

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον.

2. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι εἶναι ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν μετρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου, ἀσύμμετροι δὲ (δυνάμει), ὅταν διὰ τὰ τετράγωνα αὐτῶν δὲν ὑπάρχῃ χωρίον ὡς κοινὸν μέτρον.

3. Τούτων τεθέντων ἀποδεικνύεται, ὅτι πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. Ἂς καλῆται λοιπὸν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ πρὸς ταύτην σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς ταύτην ἂς καλῶνται ἄλογοι.

4. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς προτεθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητόν, καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο σχήματα ῥητά, τὰ δὲ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν, ἐὰν μὲν τὰ σχήματα εἶναι τετράγωνα ἄλογοι, ἐὰν δὲ ὑπάρχωσιν ἄλλα εὐθύγραμμα αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς ταῦτα τετραγώνων.

1

Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγέθους Γ.

Διότι τὸ Γ πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ κάποτε μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ. Ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεγαλύτερον καὶ ἂς διαιρεθῇ τὸ ΔΕ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ μεγέθη τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ καὶ τοῦτο ἂς γίνηται πάντοτε μέχρις ὅτου αἱ διαιρέσεις τοῦ ΑΒ γίνωσιν ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαιρέσεις τοῦ ΔΕ.

Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ διαιρέσεις ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαιρέ-

ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφήρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφήρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

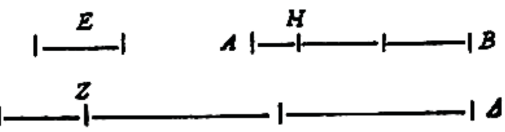
Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

β'

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

γ'

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ σεις ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΕ>ΑΒ, καὶ ἀφηρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΗΔ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΘΑ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΔ>ΘΑ καὶ ἀφηρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΘΑ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΑΚ. Εἶναι δὲ ΔΖ=Γ. Ἄρα καὶ τὸ Γ > ΑΚ. Μικρότερον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ. Ἀπομένει ἄρα ἀπὸ τοῦ μεγέθους ΑΒ τὸ μέγεθος ΑΚ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ὅταν τ' ἀφαιρούμενα εἶναι ἡμίση.

2

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀνθυφαιρεῖται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ἑκάστοτε δὲ ὑπόλοιπον οὐδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἂς εἶναι τὰ μεγέθη ΑΒ < ΓΔ καὶ ἂς ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τὸ ἑκάστοτε ὑπόλοιπον οὐδέποτε νὰ καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρήσῃ καὶ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΖΔ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ < ΑΒ, τὸ δὲ ΓΖ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΒΗ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ < ΓΖ, καὶ ἂς γίνεται τοῦτο πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε. Ἂς γίνῃ, καὶ ἔστω τὸ ὑπόλοιπον ΑΗ < Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΖ, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ ΖΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ μετρεῖ τὸ ΒΗ· καὶ τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὸ ΒΗ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ μέγεθός τι· ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

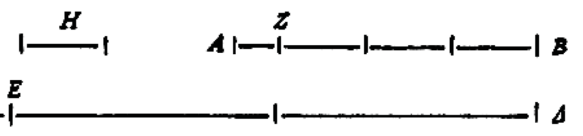
3

Δοθέντων δύο συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ΑΒ < ΓΔ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι, τὸ μέγεθος ΑΒ ἢ μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ μετρῇ, *δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.*

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστιν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

δ´

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ,· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ [μετρεῖ]. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ.

μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι τὸ ΑΒ δὲν μετρεῖται ὑπὸ μεγαλυτέρου τοῦ ΑΒ μεγέθους.

Ἀλλ' ἂς μὴ μετρῇ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. Καὶ ἐὰν ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ὑπόλοιπόν τι θὰ μετρήσῃ κάποτε τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διότι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΕΔ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον ΕΓ $<$ ΑΒ, τὸ δὲ ΕΓ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΖΒ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΖ $<$ ΕΓ, τὸ δὲ ΑΖ ἂς μετρῇ τὸ ΓΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΓΕ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ, ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ἄρα τὸ ΑΖ θὰ μετρήσῃ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΕ· ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· ἄρα μετρεῖ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχῃ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ, τὸ ὁποῖον θὰ μετρῇ τὰ ΑΒ, ΓΔ. Ἔστω τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ, μετρεῖ τὸ ΕΔ, καὶ τὸ Η ἄρα μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα τὸ Η θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ· ἄρα καὶ τὸ Η μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ καὶ θὰ μετρήσῃ καὶ τὴν διαφορὰν ΑΖ, τὸ μεγαλύτερον θὰ μετρήσῃ τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Δοθέντων ἄρα δύο συμμέτρων μεγεθῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ εὑρέθη τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ δύο μεγέθη θὰ μετρῇ καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

4

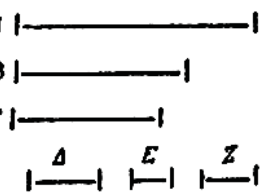
Δοθέντων τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ· πρέπει τῶν Α, Β, Γ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Διότι, ἂς ληφθῇ δύο τῶν Α, Β τὸ μ. κ. μ. καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ Δ ἢ μετρεῖ τὸ Γ ἢ δὲν τὸ μετρεῖ. Πρῶτον ἂς τὸ μετρῇ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὸ Γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Δ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον· διότι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Δ δὲν μετρεῖ τὰ Α, Β.

Ἂς μὴ μετρῇ τώρα τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον, ὅτι τὰ Γ, Δ εἶναι σύμμε-

ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει.



μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον· λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τὸ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν τρα. Διότι, ἐπειδὴ τὰ Α, Β, Γ εἶναι σύμμετρα, θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι, ἐκεῖνο δηλαδή, τὸ ὁποῖον θὰ μετρήσῃ καὶ τὰ Α, Β· ὥστε θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β τὸ Δ (θεώρ. 3 πόρ.). Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος θὰ μετρήσῃ τὰ Γ, Δ· ἄρα τὰ Γ, Δ εἶναι σύμμετρα. Ἄς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν καὶ ἔστω τὸ Ε (θεώρ. 3). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ Δ, ἀλλὰ τὸ Δ μετρεῖ τὰ Α, Β, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὰ Α, Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Ε ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ μέγεθός τι Ζ $>$ Ε. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ζ μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ, ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὰ Α, Β καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β (θεώρ. 3 πόρ.). Τὸ δὲ μ. κ. μ. τῶν Α, Β εἶναι τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸ Δ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὰ Γ, Δ· ἄρα θὰ μετρῇ τὸ Ζ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Γ, Δ. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ Ε, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Ε· τὸ Ε ἄρα εἶναι τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ, ἐὰν δὲν μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, εἶναι αὐτὸ τὸ Δ.

Δοθέντων ἄρα τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν εὑρέθη τὸ μ. κ. μ. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ τρία μεγέθη, θὰ μετρῇ καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ληφθῇ καὶ τὸ μ. κ. μ. ἐπὶ περισσοτέρων μεγεθῶν, καὶ τὸ πόρισμα θὰ ἰσχύῃ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

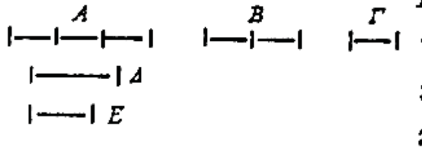
5

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἄς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Γ· καὶ ὅσας φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Δ, ὅσας δὲ φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ τὸ μέγεθος Γ τὸ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· (VII. ὁρ. 21)· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ *ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.*



Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

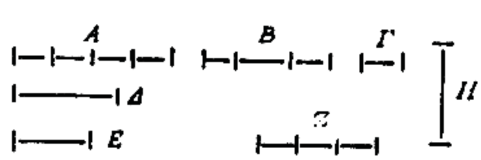
ς΄

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὴν πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Ε καὶ τὸ Γ τὸ Β· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε (VII. ὁρισ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε.

Τὰ σύμμετρα ἄρα μεγέθη τὰ Α, Β ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6

Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἂς ἔχωσι τὰ μεγέθη Α, Β λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ εἰς τόσα ἴσα μέρη ἂς διαιρεθῇ τὸ Α καὶ ἔστω πρὸς ἓν τούτων ἴσον τὸ Γ· ὅσας δὲ μονάδας ἔχει ὁ Ε ἐκ τόσων μεγεθῶν ἴσων πρὸς τὸ Γ ἂς σύγκειται τὸ μέγεθος Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Α, ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ Γ τοῦ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ (VII. ὁρ. 21). Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν ἀριθμὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Ε, τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Ζ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (V. 22). Ἀλλὰ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. Τὸ Α ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν Β, Ζ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα τὸ Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ (V.9). Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλ' ὅμως μετρεῖ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β. Σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π ό ρ ι σ μ α

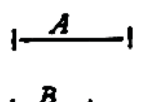
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, εἶναι δυνατὸν νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε, οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.



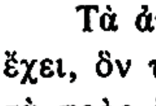
Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἑξῆς.

η'

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.



Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

θ'

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἐὰν δὲ καὶ τῶν εὐθειῶν Α, Ζ ληφθῇ μέση ἀνάλογος, ὡς ἡ Β, θὰ εἶναι $A : Z = A^2 : B^2$, δηλ. ὡς ἡ πρώτη ἀνάλογος πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, (VI. 20. πορ. 2. V. ὁρ. 9). Ἀλλὰ $A : Z = \Delta : E$. Ἔγινεν ἄρα καὶ $\Delta : E = A^2 : B^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν τὸ Α ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ Α θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, (θεώρ. 6). Ἀλλὰ δὲν εἶναι. Δὲν ἔχει ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἀσύμμετρα ἄρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς:

8

Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον, πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, δύο μεγέθη τὰ Α, Β ἂς μὴ ἔχωσι λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. (θεώρ. 5). Ἀλλὰ δὲν ἔχει. Εἶναι ἄρα τὰ μεγέθη Α, Β ἀσύμμετρα.

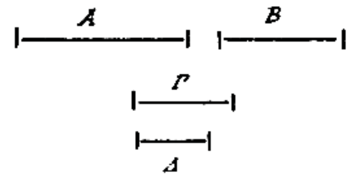
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

9

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους. Τὰ δὲ τετράγωνα ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὰ τετράγωνα τὰ μὴ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν]. ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος, ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Διότι, ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι A, B μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς A πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς B ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ A εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν B, ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B ἔχει λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἄς ἔχῃ τὸν λόγον $A : B = \Gamma : \Delta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, ἀλλὰ $(A : B)^2 = A^2 : B^2$· διότι τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (VI. 20, πόρ.)· καὶ $(\Gamma : \Delta)^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$· διότι μεταξὺ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἔχει λόγον εἰς τὸ τετράγωνον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν (VII. 11)· εἶναι ἄρα $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$ λέγω, ὅτι ἡ A πρὸς τὴν B εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, ἀλλὰ $A^2 : B^2 = (A : B)^2$, καὶ $\Gamma^2 : \Delta^2 = (\Gamma : \Delta)^2$ εἶναι ἄρα $A : B$ ὡς ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ A μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν B.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μήκει ἀσύμμετρος ἡ A πρὸς τὴν B· λέγω, ὅτι $A^2 : B^2$ δὲν ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν $A^2 : B^2 =$ λόγος, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ A θὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν B· ἀλλὰ δὲν εἶναι· δὲν ἔχει ἄρα τὸ $A^2 : B^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν, ἂς μὴ ἔχῃ τὸ $A^2 : B^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἡ A εἶναι πρὸς τὴν B μήκει ἀσύμμετρος.

Εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεί, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δή, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λῆμμα

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐκ ὑπόκεινται. οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν ἡ Α εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β, τὸ $A^2 : B^2$ θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀλλὰ δὲν ἔχει· δὲν εἶναι ἄρα ἡ Α μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ μήκει [ἐκτὸς ἐὰν τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, εἶναι σύμμετρα. Ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι οὐ μόνον μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι εἶναι μήκει σύμμετρα ὅσα τετράγωνα ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ ὅτι εἶναι σύμμετρα τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα δὲν ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μὲν τετράγωνα εἶναι δυνάμει σύμμετρα, οὐχὶ ὅμως καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετρα, τὰ δὲ δυνάμει οὐχὶ πάντως καὶ μήκει, ἐκτὸς ἐὰν ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει, διότι αἱ δυνάμει σύμμετροι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ὥστε αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι, δυνάμει νὰ εἶναι ἢ ἀσύμμετροι ἢ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· διότι ἐὰν εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ δυνάμει· ἐλήφθησαν δὲ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον· αἱ δυνάμει ἄρα ἀσύμμετροι εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι].

Λῆμμα

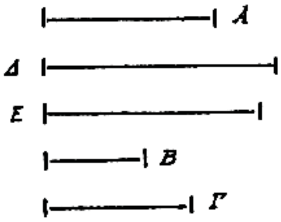
Εἰς τὰ βιβλία τῶν ἀριθμητικῶν ἀπεδείχθη, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. οἱ μὴ ἔχοντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, δὲν ἔχουσι λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐὰν ἔχωσι θὰ εἶναι ὅμοιοι· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Οἱ μὴ ὅμοιοι ἄρα ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ι'

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

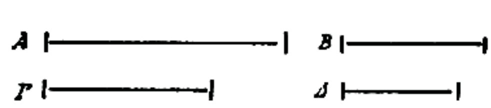


Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ια'

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ

10

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· πρέπει νὰ εὑρεθῶσι πρὸς τὴν Α δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Διότι, ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοί, οἱ Β, Γ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, δηλ. μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ ἂς γίνῃ $Β : Γ = Α^2 : Δ^2$· διότι τοῦτο τὸ ἐμάθομεν· (θεώρ. 6, πόρ.)· σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Δ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Β πρὸς τὸν Γ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ ἄρα $Α^2$ πρὸς $Δ^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι ἡ Α πρὸς τὴν Δ (θεώρ. 9). Ἂς ληφθῇ τῶν Α, Δ ἡ μέση ἀνάλογος ἡ Ε· εἶναι ἄρα $Α : Δ = Α^2 : Ε^2$, (V. ὁρ. 9). Ἡ δὲ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Δ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι καὶ τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Ε^2$· ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι καὶ ἡ Α πρὸς τὴν Ε δυνάμει.

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν Α εὑρέθησαν δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, μήκει δὲ καὶ δυνάμει ἡ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι πρὸς τὸ δεύτερον σύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι σύμμετρον· καὶ ἂν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον, πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ πρὸς τὸ Β ἔστω σύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ σύμμετρον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θεώρ. 5). Καὶ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· τὸ Γ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ Α ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ ἀσύμμετρον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ εἶναι πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

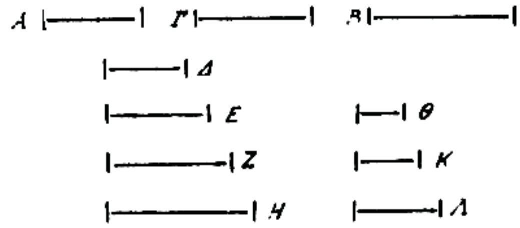
Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιβ'

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β, τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Γ τῷ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.



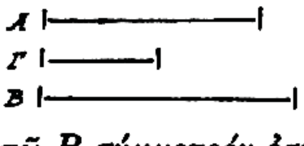
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, [οὕτως] ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμ-

$A : B = \Gamma : \Delta$· οὔτε τὸ Γ ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Δ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

12

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος σύμμετρα εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα.

Διότι ἔστω ἕκαστον τῶν Α, Β σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἂς εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἂς εἶναι $\Gamma : B = Z : H$. Καὶ ἐνῷ ἐδόθησαν ὁσοιδήποτε λόγοι καὶ ὡς ὁ $\Delta : E$ καὶ ὡς ὁ $Z : H$ ἂς ληφθῶσιν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς τοὺς δοθέντας, ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Θ, Κ, Λ, (VIII. 4)· ὥστε νὰ εἶναι $\Delta : E = \Theta : K$ καὶ $Z : H = K : \Lambda$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, ἀλλὰ $\Delta : E = \Theta : K$, εἶναι ἄρα $A : \Gamma = \Theta : K$ (V. 11). Πάλιν, ἐπειδὴ $\Gamma : B = Z : H$, ἀλλὰ $Z : H = K : \Lambda$ εἶναι ἄρα $\Gamma : B = K : \Lambda$. Εἶναι δὲ $A : \Gamma = \Theta : K$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A : B = \Theta : \Lambda$, (V. 22). Τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Θ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Λ· εἶναι ἄρα τὸ Α σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Τὰ σύμμετρα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ ἓν δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι πρὸς μέγεθός τι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ ἀσύμμετρον.

Ἔστω δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν τὸ Α ἔστω πρὸς ἄλλο τι τὸ Γ ἀσύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο τὸ Β εἶναι πρὸς τὸ Γ ἀσύμμετρον.

Διότι, ἐὰν τὸ Β εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Α ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ (θεώρ. 12). Ἀλλ' *μετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.*

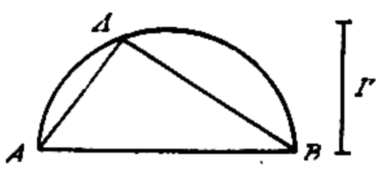
Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. φανερὸν δή, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

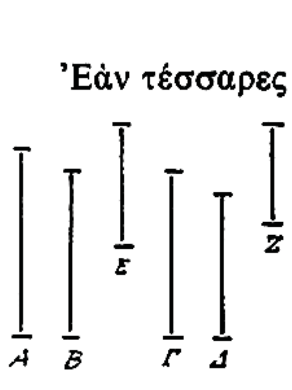


Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει].



Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω, ὅτι, εἴτε ἐλήφθη ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ Β ἄρα δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας.

Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ ΑΒ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ.

Ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς αὐτὸ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν Γ, (IV. 1), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή, (III. 31), καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΔ δηλ. τῆς Γ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ (I. 47).

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται ὅταν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν. Ἂς κατασκευασθῇ ὀρθὴ γωνία μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς ΑΔ, ΔΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ· εἶναι φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ ΑΒ δύναται τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΒ (δηλ. $ΑΒ^2=ΑΔ^2+ΔΒ^2$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην. Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἤτοι $Α : Β = Γ : Δ$ καὶ $Ε^2=Α^2-Β^2$, $Ζ^2=Γ^2-Δ^2$. Λέγω, ὅτι ἐὰν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ *σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.*

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστι ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

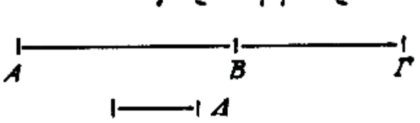
Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιε′

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἔστω σύμμετρον τῷ ΑΒ· λέγω δή, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος· μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ις′

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμ-ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Z, καὶ ἐὰν ἡ A εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν E καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Z.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A:B=\Gamma:\Delta$ εἶναι ἄρα $A^2:B^2=\Gamma^2:\Delta^2$, (VI. 22). Ἀλλὰ $A^2=B^2+E^2$, $\Gamma^2=\Delta^2+Z^2$. Εἶναι ἄρα $(E^2+B^2):B^2=(\Delta^2+Z^2):\Delta^2$. Καὶ συνεπῶς $E^2:B^2=Z^2:\Delta^2$, (V. 17)· εἶναι ἄρα $E:B=Z:\Delta$, (VI. 22)· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $B:E=\Delta:Z$, (V. 7 πόρ.). Εἶναι δὲ καὶ $A:B=\Gamma:\Delta$. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A:E=\Gamma:Z$, (V. 22). Ἐὰν λοιπὸν ἡ A εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν E καὶ ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Z, καὶ ἂν ἡ A εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν E καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Z, (θ. 11).

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

15

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα προστεθῶσι, καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα δύο μεγεθῶν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὰ δύο μεγέθη θὰ εἶναι σύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι τὰ δύο σύμμετρα μεγέθη AB, BΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των τὸ AΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν AB, BΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ AB, BΓ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἄς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ AB, BΓ, θὰ μετρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ AΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ AB, BΓ. Ἄρα τὸ Δ μετρεῖ τὰ AB, BΓ, AΓ. Ἄρα τὸ AΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν AB, BΓ, (ὁρ. 1).

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ AΓ σύμμετρον πρὸς τὸ AB· λέγω, ὅτι καὶ τὰ AB, BΓ εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ AΓ, AB εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἄς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓA, AB, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὸ BΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ AB, BΓ· ἄρα τὰ AB, BΓ εἶναι σύμμετρα.

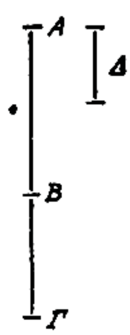
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

16

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα προστεθῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἀ-μετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



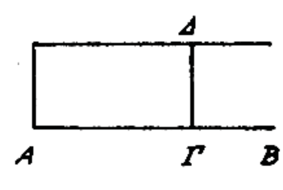
Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω. ἔστω δὴ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.



Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καί ἐστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιζ´

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ σύμμετρον πρὸς ἕκαστον αὐτῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμά των τὸ ΑΓ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Διότι ἐὰν τὰ ΓΑ, ΑΒ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὴν ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Σύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ· ἐλήφθησαν ὅμως ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μέγεθός τι· ἀσύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΓΑ, ΑΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀσύμμετρα. Τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον πρὸς ἓν τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἔστω πρότερον πρὸς τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρα. Διότι ἐὰν θὰ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ. Εἶναι ἄρα σύμμετρα τὰ ΓΑ, ΓΒ· ἐλήφθησαν δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μέγεθός τι· εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς λαμβανόμενα τμήματα τῆς εὐθείας.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα τὸ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ}$.

Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος· διότι, ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι τετράγωνον ἡ $\text{ΔΓ} = \text{ΓΒ}$ καὶ εἶναι τὸ $\text{ΑΔ} = \text{ΑΓ} \times \text{ΓΔ}$ τουτέστι τὸ $\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ}$.

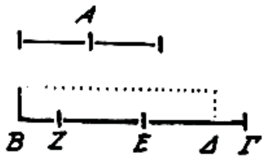
Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

17

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ τὸ παραβληθὲν διαιρῇ αὐτὴν εἰς μήκει σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΓΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῇ ΔΖ. δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστι σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ. καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δύναται δὲ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμ-

τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν)· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν (παραλληλόγραμμον) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς τμήματα μήκει σύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ παραβληθὲν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΔ \times ΔΓ$, ἔστω δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ. λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΕΖ=ΔΕ$. Ἡ λοιπὴ ἄρα $ΔΓ=ΒΖ$. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα τις ἡ ΒΓ ἐτμήθη εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, θὰ εἶναι ἄρα $ΒΔ \times ΔΓ + ΕΔ^2 = ΕΓ^2$, (ΙΙ.5)· καὶ τὰ τετραπλάσια αὐτῶν· ἄρα $4ΒΔ \times ΔΓ + 4ΕΔ^2 = 4ΕΓ^2$. Ἀλλὰ $4ΒΔ \times ΔΓ = Α^2$, $4ΕΔ^2 = ΔΖ^2$· διότι ἡ ΔΖ εἶναι διπλασία τῆς ΔΕ. Τὸ δὲ $4ΕΓ^2 = ΒΓ^2$· διότι ἡ ΒΓ εἶναι πάλιν διπλασία τῆς ΓΕ. Ἄρα $Α^2 + ΔΖ^2 = ΒΓ^2$· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ, τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τὸ $ΔΖ^2$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΓΔ, ΒΖ· διότι $ΓΔ=ΒΖ$. Καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΒΖ, ΓΔ, (θεώρ. 12)· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ· τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι $\sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ (μήκει) σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ $Α^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (παραλ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

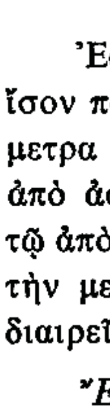
Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος *φοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστι σύμμετρος μήκει.*

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη'

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον καὶ πρὸς τὴν διαφοράν, ΒΓ—ΖΔ=ΒΖ+ΔΓ, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ ΒΖ+ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6). Ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

18

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν παραλληλ.) αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν). Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΒΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχει τοῦ Α^2 κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ΖΔ^2=ΒΓ^2—Α^2. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 16). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα ΒΖ+ΔΓ, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα ΒΖ+ΔΓ, (θεώρ. 13). Ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ, (θεώρ. 16). Καὶ ΖΔ^2=ΒΓ^2—Α^2· ἄρα τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχει τοῦ Α^2 κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἂς ὑπερέχῃ τώρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου *εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.*

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

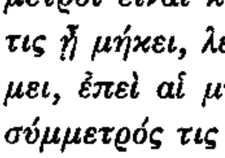
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

ιθ′

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.



Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ). Εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν $(ΒΓ - ΖΔ) = (ΒΖ + ΔΓ)$, (θεώρ. 16)· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΒΖ + ΔΓ$ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 13)· ὥστε καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι (δηλ. καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα) αἱ δὲ εὐθεῖαι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην σύμμετροι, ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶναι μήκει καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις μήκει σύμμετρος, αὕτη λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνά των δηλ. εἶναι σύμμετρα), ἐπειδὴ αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως σύμμετροι καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις σύμμετρος δυνάμει, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος λέγεται τότε ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν μήκει καὶ δυνάμει· ἐὰν δὲ εὐθεῖά τις εἶναι πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν σύμμετρος μὲν δυνάμει, ἀσύμμετρος δὲ μήκει λέγεται καὶ πάλιν ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

19

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ῥητόν.

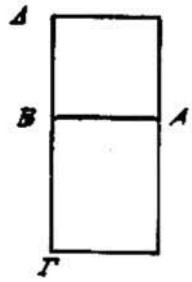
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητὸν (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΓ μήκει σύμμετρος, εἶναι δὲ $ΑΒ = ΒΔ$, ἡ ΒΔ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι $ΒΔ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ$, (VI. 1). Τὸ ΔΑ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ τὸ ΔΑ ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κ´

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.



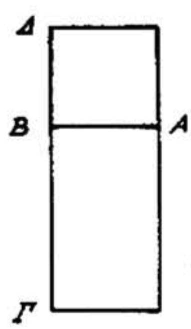
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΛ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητή ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

κα´

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

20

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν ῥητήν, ἡ ὁποία πρὸς τὴν εὐθεῖαν, παρ' ἣν παρεβλήθη, εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι ἂς παραβληθῇ πάλιν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων τὸ ῥητὸν ΑΓ παρὰ τὴν ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΑ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΓ ῥητόν· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ. Καὶ εἶναι ΔΑ : ΑΓ = ΔΒ : ΒΓ, (VI. 1). Ἄρα εἶναι σύμμετρος ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, (θεώρ. 11)· εἶναι δὲ ΔΒ = ΒΑ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΒΓ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

21

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν, δυνάμει μόνον συμμέτρων, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

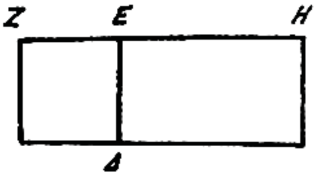
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι ἐξ ὑποθέσεως ἐλήφθησαν ὡς σύμμετροι μόνον δυνάμει· εἶναι δὲ ἡ ΑΒ=ΒΔ, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι ΔΒ : ΒΓ=ΑΔ : ΑΓ· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι πρὸς τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον, (θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι ῥητόν· ἄλογον ἄρα εἶναι τὸ ΑΓ, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου] εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. Λέγω ὅτι ΖΕ : ΕΗ=ΖΕ^2 : ΖΕ × ΕΗ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καί ἐστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

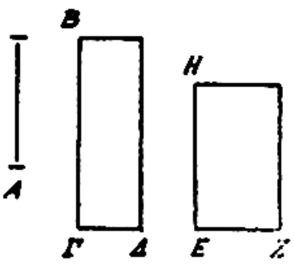


κβ´

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ᾽ ἣν παράκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ· ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κγ´

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΗΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΖΕ : ΕΗ = ΖΔ : ΔΗ, (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν ΖΔ = ZE^2, τὸ δὲ ΔΗ = ΔΕ × ΕΗ δηλ. = ΖΕ × ΕΗ, εἶναι ἄρα ΖΕ : ΕΗ = ZE^2 : ΖΕ × ΕΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ΗΕ × ΕΖ = EZ^2 δηλ. ΗΔ : ΖΔ = ΗΕ : ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22

Τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μέση παραβαλλόμενον ὡς ὀρθογώνιον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρ' ἣν παράκειται.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ καὶ ἂς παραβληθῇ τὸ τετράγωνον τῆς Α παρὰ τὴν ΒΓ, ἀφοῦ τοῦτο μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ ἔχον πλάτος τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος.

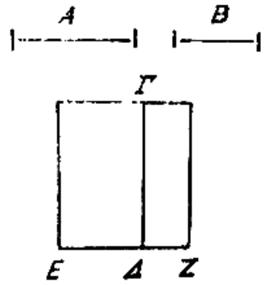
Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι μέση τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταί, δυνάμει μόνον σύμμετροι (θεώρ. 21). Ἔστω τὸ ἰσοδύναμον τοῦτο ὀρθογώνιον τὸ ΗΖ. Ἰσοδύναμον ὅμως εἶναι καὶ τὸ ΒΔ· ἄρα τὸ ΒΔ = ΗΖ. Εἶναι δὲ καὶ πρὸς αὐτὸ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (VI. 14)· εἶναι ἄρα ΒΓ : ΕΗ = ΕΖ : ΓΔ. Εἶναι ἄρα καὶ $B\Gamma^2 : EH^2 = EZ^2 : \Gamma\Delta^2$, (VI. 20). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ ΓB^2 πρὸς τὸ EH^2· ἄρα ἑκάστη αὐτῶν (τῶν ΓΒ, ΕΗ) εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ EZ^2 πρὸς τὸ $\Gamma\Delta^2$, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ EZ^2· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $\Gamma\Delta^2$, (ὅρ. 4)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ΕΗ μήκει ἀσύμμετρος· διότι εἶναι σύμμετροι μόνον δυνάμει καὶ εἶναι ΕΖ : ΕΗ = EZ^2 : ΖΕ × ΕΗ, (λῆμμα τοῦ 21), ἄρα τὸ EZ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΕ × ΕΗ (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ EZ^2 εἶναι σύμμετρον τὸ $\Gamma\Delta^2$· διότι αὗται (αἱ ΕΖ, ΓΔ) εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΖΕ × ΕΗ εἶναι σύμμετρον τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ × ΓΒ· διότι ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶναι ἴσον πρὸς A^2· ἄρα τὸ $\Gamma\Delta^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ × ΓΒ, (θεώρ. 13). Ὡς δὲ $\Gamma\Delta^2$: ΔΓ × ΓΒ = ΔΓ : ΓΒ· (λῆμμα τοῦ 21)· ἄρα ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, (θεώρ. 11). Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω, ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.



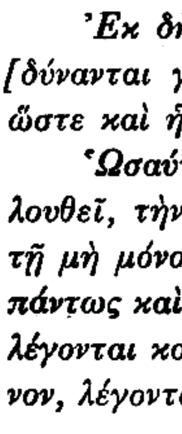
Π ό ρ ι σ μ α

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστὶν [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν].

Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην *καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.*

κδ'

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.



Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω μέση ἡ A, καὶ ἔστω ἡ B σύμμετρος πρὸς τὴν A· λέγω, ὅτι καὶ ἡ B εἶναι μέση.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ A^2 ἔχον πλάτος τὴν ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 22). Πρὸς δὲ τὸ B^2 ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ A εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν B εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ A^2 πρὸς τὸ B^2. Ἀλλὰ τὸ μὲν τὸ $A^2 = ΕΓ$, τὸ δὲ $B^2 = ΓΖ$. Ἄρα τὸ ΕΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ εἶναι $ΕΓ : ΓΖ = ΕΔ : ΔΖ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΔ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΔΖ, (ὁρ. 3) καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. XIII)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΓΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι μέση (θεώρ. 21). Ἡ δυναμένη ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΔ \times ΔΖ$ εἶναι μέση. Καὶ $B^2 = ΓΔ \times ΔΖ$· ἄρα ἡ B εἶναι μέση.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σύμμετρον πρὸς τὸ μέσον χωρίον εἶναι μέσον [διότι τὰ χωρία ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς τετράγωνα αἱ πλευραί, τῶν ὁποίων εἶναι δυνάμει σύμμετροι, ἡ μία τῶν ὁποίων εἶναι μέση· ὥστε καὶ ἡ ἄλλη εἶναι μέση]. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένα, (18 λημ.) ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν μέσων, ὥστε ἡ πρὸς τὴν μέσην μήκει σύμμετρος νὰ λέγεται πρὸς αὐτὴν μέση καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, διότι ἐν γένει, αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν μέσην ὑπάρχῃ εὐθεῖα τις δυνάμει σύμμετρος, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος, λέγονται αἱ εὐθεῖαι καὶ τότε μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, ἐὰν δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

24

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων ὑπὸ εὐθειῶν μέσων μήκει συμμέτρων εἶναι μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων καὶ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι μέσον.

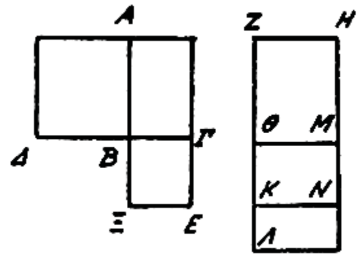
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ $ΑΒ = ΒΔ$, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΑΓ, (θεώρ. 23, πόρ.)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε´

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ, ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΚΛ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει. αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. ἴσον δέ ἐστιν τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ· εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘΝ. τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.



Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κϛ´

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλ-

25

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

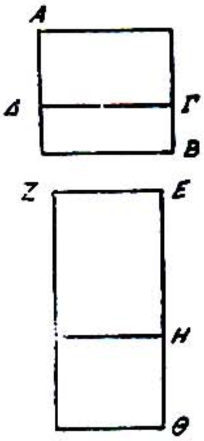
Διότι ἂς ἀναγραφῶσι ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ τὰ τετράγωνα αὐτῶν τὰ ΑΒ, ΒΕ· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΕ εἶναι μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ πρὸς μὲν τὸ ΑΔ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ ἔχον πλάτος τὴν ΖΘ, πρὸς δὲ τὸ ΑΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΘΜ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ ἔχον πλάτος τὴν ΘΚ, καὶ προσέτι πρὸς τὸ ΒΕ ἴσον ἂς παραβληθῇ ὁμοίως πρὸς τὴν ΚΝ τὸ ΝΛ ἔχον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΔ, ΒΕ εἶναι μέσον καὶ τὸ μὲν ΑΔ = ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ = ΝΛ, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΗΘ, ΝΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἕκαστον τούτων παρεβλήθη παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΚΛ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΔ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΒΕ, ἄρα καὶ τὸ ΗΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΝΛ. Καὶ εἶναι ΗΘ : ΝΛ = ΖΘ : ΚΛ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θεώρ. 21). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΘ, ΚΛ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θεώρ. 19). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΒ = ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ = ΒΓ, εἶναι ἄρα ΔΒ : ΒΓ = ΑΒ : ΒΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν ΔΒ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ, (VI. 1)· ὡς δὲ ΑΒ : ΒΞ = ΑΓ : ΓΞ, (VI. 1)· εἶναι ἄρα ΔΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΞ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΑΔ = ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ = ΜΚ τὸ δὲ ΓΞ = ΝΛ· εἶναι ἄρα ΗΘ : ΜΚ = ΜΚ: ΝΛ· ἄρα εἶναι καὶ ΖΘ : ΘΚ = ΘΚ : ΚΛ, (VI.1)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΖΘ \times ΚΛ = ΘΚ^2$, (VI. 17). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΖΘ \times ΚΛ$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΘΚ^2$· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂν μὲν αὕτη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, εἶναι τὸ ΘΝ ῥητόν, (θεώρ. 19)· ἐὰν δὲ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ αἱ ῥηταὶ ΚΘ, ΘΜ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΘΝ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Τὸ ΘΝ ἄρα εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΘΝ πρὸς τὸ ΑΓ· ἄρα τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

26

Μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ὑπερέχῃ τὸ μέσον ΑΒ τοῦ μέσου τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ ῥητὸν ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ὀρληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστιν ἴσον. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ΔΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΚΘ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



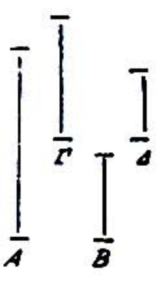
Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ´

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β, μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστίν. Μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.



θογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ, ἔχον πλάτος τὴν ΕΘ, καὶ ἐκ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΑΓ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΘ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΔΒ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέσον, καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ = ΖΘ$, τὸ δὲ $ΑΓ = ΖΗ$, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΖΘ, ΖΗ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΘ, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 20). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· μήκει ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι $ΕΗ : ΗΘ = ΕΗ^2 : ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον τὸ $ΕΗ^2$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΗ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· διότι καὶ τὰ δύο τετράγωνα εἶναι ῥητά· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 6)· διότι εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$ πρὸς τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 13)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2 + 2ΕΗ \times ΗΘ$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΕΘ^2$, (II. 4) εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$, (θεώρ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· ἄρα τὸ $ΕΘ^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁριθ. 4). Ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ ΕΘ, (ὁρ. 4). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι.

Ἂς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Γ, (VI. 13), καὶ ἂς γίνῃ $Α : Β = Γ : Δ$, (VI. 12).

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $Α \times Β$ δηλ. τὸ $Γ^2$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Γ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, αἱ δὲ Α, Β εἶναι μόνον δυνάμει σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Αἱ μέσαι ἄρα Γ, Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς $Α : Γ = Β : Δ$, (V. 16). Ἀλλὰ $Α : Γ = Γ : Β$· ἄρα καὶ $Γ : Β = Β : Δ$, (V. 11)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $Γ \times Δ = Β^2$. Τὸ δὲ $Β^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $Γ \times Δ$ εἶναι ῥητόν.

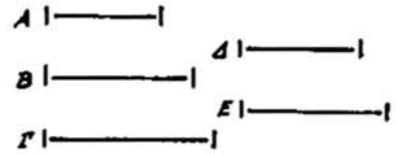
Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη´

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν [τρεῖς] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Δ πρὸς τὴν Α· καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.



Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεί, ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καί ἐστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσιν τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρην-

Εὐρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι.

Ἂς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Δ, (VI. 13) καὶ ἂς γίνῃ $Β : Γ = Δ : Ε$, (VI. 12).

Ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $Α \times Β$, δηλ. τὸ $Δ^2$, (VI. 17) εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Δ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ αἱ Β, Γ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ εἶναι $Β : Γ = Δ : Ε$, ἄρα καὶ αἱ Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ μέση ἡ Δ· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23)· αἱ μέσαι ἄρα Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $(Δ \times Ε)$ εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Β : Γ = Δ : Ε$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $Β : Δ = Γ : Ε$, (V. 16). Ὡς δὲ $Β : Δ = Δ : Α$· καὶ ἄρα $Δ : Α = Γ : Ε$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $Α \times Γ =$ ὀρθογώνιον $Δ \times Ε$, (VI. 16). Εἶναι δὲ τὸ $Α \times Γ$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $Δ \times Ε$.

Εὐρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α (1ον)

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἢ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, ἢ ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ΑΓ εἶναι ἄρτιος, (IX. 24, 26). Ἂς τμηθῇ ὁ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἢ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἢ τετράγωνοι, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΔ^2 = ΒΔ^2$, (II. 6). Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον $ΑΒ \times ΒΓ$ τετράγωνος ἀριθμός, διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι ἀριθμόν τινα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνος, (IX. 1). Εὐρέθησαν ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον $ΑΒ \times ΒΓ$ καὶ ὁ τετράγωνος $ΓΔ^2$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΒΔ^2$.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσιν ἐξ ἄλλου εὑρεθῇ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $ΒΔ^2$ καὶ ὁ $ΓΔ^2$, ὥστε ἡ διαφορά των ἡ $ΑΒ \times ΒΓ$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Ὅταν δὲ οὗτοι δὲν ται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΓ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα τῷ Δ. φανερὸν δή, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστι διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστι διπλασίων, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστι διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ ΒΕ· εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλασίων ὁ ΘΑ. καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσσονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ ἀπὸ ΒΕ. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνός ἐστιν [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσιν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλέον αὐτὴν μηκύνωμεν]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα εἶναι ἐπίπεδοι, ἔχουσιν εὑρεθῆ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $ΒΔ^2$ καὶ ὁ $ΔΓ^2$ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἡ $ΑΒ \times ΒΓ$ δὲν εἶναι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α (2ον)

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ἔστω ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ$, ὡς εἴπομεν (εἰς τὸ προηγούμενον λῆμμα) καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὁ ΓΑ κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΔ^2 = ΒΔ^2$, (λῆμμα 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ (ἐκ τοῦ πρώτου μέλους) ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· τότε ἄρα θὰ εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 < ΒΔ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

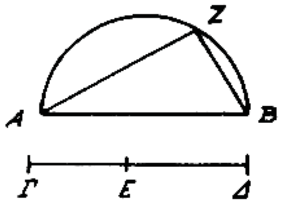
Διότι, ἐὰν θὰ εἶναι τετράγωνος ἢ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $ΒΕ^2$ ἢ μικρότερος τοῦ $ΒΕ^2$, οὐχὶ δὲ καὶ μεγαλύτερος, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ καὶ ἔστω διπλάσιος τῆς μονάδος ὁ ΗΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ εἶναι διπλάσιος, ἐξ ὧν ὁ ΑΗ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΔΕ, ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ ΗΓ εἶναι διπλασία τῆς διαφορᾶς ΕΓ· ἄρα ὁ ΗΓ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Ε. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$, (ΙΙ. 6). Ἀλλὰ καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ ἐξ ὑποθέσεως· ὁ ἀριθμὸς ἄρα $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$. Καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ $ΓΕ^2$ συνάγεται $ΑΒ = ΗΒ$· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν $ΒΕ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ μικρότερος εἶναι τοῦ $ΒΕ^2$. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ἴσος πρὸς τὸν $ΒΖ^2$ καὶ ἔστω ὁ ΘΑ διπλάσιος τοῦ ΔΖ. Καὶ πάλιν θὰ συναχθῇ ὅτι ὁ ΘΓ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ ὁ ΓΘ ἔχει διχοτομηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΖΓ^2 = ΒΖ^2$, (ΙΙ. 6). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΖ^2$. Ὥστε καὶ ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΓΖ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ ἴσος πρὸς τὸν μικρότερον τὸν $ΒΕ^2$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσος εἶναι πρὸς αὐτὸν τὸν $ΒΕ^2$. Δὲν εἶναι ἄρα τετράγωνος ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ [Ἐν ᾧ δὲ εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ καὶ κατὰ περισσοτέρους τρόπους, ὅτι οἱ εἰρημμένοι ἀριθμοὶ δὲν ἀποτελοῦσι τετράγωνον, ἂς ἀρκεσθῶμεν εἰς τοὺς ἐκτεθέντας τρόπους, ἵνα μὴ ἐν ᾧ ἡ πραγματεία εἶναι μακρὰ ἐπιμηκύνωμεν αὐτὴν ἔτι περισσότερον]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

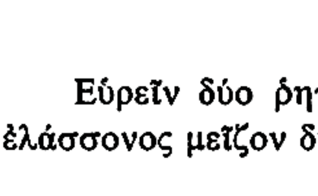
Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί [ἐστιν] ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.



Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ´

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τῷ πρὸς τούτου, ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῇ ῥητή τις ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὁ ΓΕ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἂς γίνῃ $\Delta\Gamma : \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AZ}^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\mathrm{BA}^2 : \mathrm{AZ}^2 = \Delta\Gamma : \Gamma\mathrm{E}$, ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὃν λόγον ἔχει ὁ ἀριθμὸς ΔΓ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΓΕ· ἄρα τὸ BA^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ AZ^2, (θεώρ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ BA^2, (ὁρ. 4)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ AZ^2, (ὁρισ. 4)· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα οὔτε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, (θεώρ. 9)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΑ, ΑΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta\Gamma : \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AZ}^2$, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $\Gamma\Delta : \Delta\mathrm{E} = \mathrm{AB}^2 : \mathrm{BZ}^2$ [δηλ. $\Delta\Gamma : (\Delta\Gamma - \Gamma\mathrm{E}) = \mathrm{BA}^2 : (\mathrm{BA}^2 - \mathrm{AZ}^2)$], (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{ZB}^2$ (III. 31, I. 47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΒ).

Εὑρέθησαν ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῆς ΑΒ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἡ ΒΖ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῇ ἡ ΑΒ ῥητὴ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΓΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἂς γίνῃ $\Delta\Gamma : \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AZ}^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

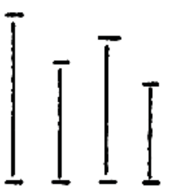
Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται, *μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.*

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα´

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β, ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.



Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\Gamma\Delta : \Delta E = AB^2 : BZ^2$, (V. 19) [δηλ. $\Gamma\Delta : (\Gamma\Delta - \Gamma E) = AB^2 : (AB^2 - AZ^2)$]. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμός πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$, ἐν ᾧ ἡ ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ΖΒ, ἡ ὁποία εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητόν, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἄς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν Α (θεώρ. 29). Καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ ἔστω ἴσον τὸ Γ^2. Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$, (θεώρ. 21)· ἄρα καὶ τὸ Γ^2 εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἡ Γ εἶναι μέση, (θ. 21). Καὶ ἔστω $B^2 = \Gamma \times \Delta$· τὸ δὲ B^2 εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma \times \Delta$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : B = A \times B : B^2$, (θεώρ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ εἶναι ἴσον τὸ Γ^2, πρὸς δὲ τὸ B^2 εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma \times \Delta$, εἶναι ἄρα $A : B = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. Ὡς δὲ $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $A : B = \Gamma : \Delta$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β δυνάμει μόνον σύμμετρος· ἄρα καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος, (θεώρ. 14). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Γ), (θεώρ. 14).

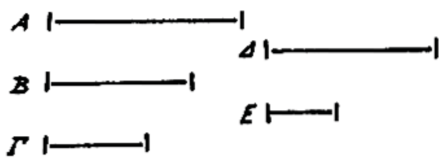
Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ περιέχουσαι ῥητόν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Β μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

λβ'

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ [αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.



Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Α, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ ἀσυμμέτρου πλευρᾶς, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 30).

32

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον σύμμετρον πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Ἄς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 29), καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ ἔστω ἴσον τὸ Δ^2. Ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι μέσον· καὶ ἡ Δ ἄρα εἶναι μέση, (θεώρ. 21). Ἔστω δὲ $B \times \Gamma = \Delta \times E$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A \times B : B \times \Gamma = A : \Gamma$, (θ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ $A \times B = \Delta^2$ καὶ $B \times \Gamma = \Delta \times E$, εἶναι ἄρα $A : \Gamma = \Delta^2 : \Delta \times E$. Ὡς δὲ $\Delta^2 : \Delta \times E = \Delta : E$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $A : \Gamma = \Delta : E$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ σύμμετρος δυνάμει μόνον. Ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι πρὸς τὴν Ε δυνάμει μόνον σύμμετρος (θεώρ. 11). Ἡ δὲ Δ εἶναι μέση· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Δ ἄρα θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Ε κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Δ), (θεώρ. 14). Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $\Delta \times E$ εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ὀρθογ. $B \times \Gamma =$ ὀρθογ. $\Delta \times E$ τὸ δὲ $B \times \Gamma$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21), [διότι αἱ Β, Γ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι], ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $\Delta \times E$.

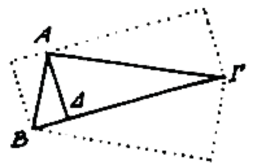
Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Καθ' ὅμοιον πάλιν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α).

Λῆμμα

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$, τὸ ὀρθογ. $B\Gamma \times$

ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.



Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων]. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ´

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ΓΔ = ΓΑ², καὶ τὸ ὀρθ. ΒΔ×ΔΓ = ΑΔ², καὶ ἀκόμη τὸ ὀρθογ. ΒΓ×ΑΔ = ὀρθογ. ΒΑ×ΑΓ.

Καὶ πρῶτον, ὅτι ΓΒ×ΒΔ = ΒΑ².

Διότι, ἐπειδὴ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἤχθη ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΑΔ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ καὶ μεταξύ των, (VI. 8). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἄρα ΓΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΒΔ (VI. 4). Ἄρα ΓΒ×ΒΔ = ΑΒ², (VI 17).

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΒΓ×ΓΔ = ΑΓ².

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀχθεῖσα εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἄρα ΒΔ : ΔΑ = ΑΔ : ΔΓ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ = πρὸς τὸ ΔΑ², (VI. 17).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓ×ΑΔ = ΒΑ×ΑΓ. Διότι, ἐπειδὴ ὡς εἴπομεν, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, (VI 4), εἶναι ἄρα ΒΓ : ΓΑ = ΒΑ : ΑΔ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων]. Ἄρα τὸ ΒΓ×ΑΔ = ΒΑ×ΑΓ, (VI. 16)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζωσι ῥητὸν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

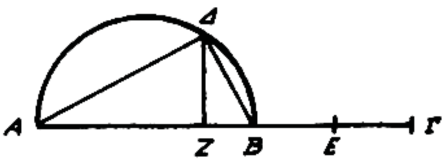
Ἂς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, (θ. 30), καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν ΒΔ, ΔΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28), καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ×ΕΒ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἂς γραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ΑΖΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΖ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ ΑΒ² ὑπερέχει τοῦ ΒΓ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), πρὸς δὲ τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ΒΓ², τουτέστι τοῦ (1/2 ΒΓ)² παρεβλήθη παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ×ΕΒ, ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ εἶναι ἀσύμμετρος (μήκει), (θ. 18)· Καὶ εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΒΑ×ΑΕ : ΑΒ×ΒΕ, εἶναι δὲ τὸ μὲν ΒΑ×ΑΕ = ΑΖ², τὸ δὲ ΑΒ×ΒΕ = ΒΖ², (λῆμμα τοῦ 32). Ἄρα τὸ ΑΖ² εἶναι *τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστιν, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΒΔ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΕ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.*

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ, ΖΒ ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.



Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ZB^2, (θεώρ. 11)· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ῥητή, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ AB^2· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα AZ^2+ZB^2 εἶναι ῥητόν, (Ι. 47). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὸ ὀρθογώνιον $AE \times EB = EZ^2$, ἐλήφθη δὲ $AE \times EB = EZ^2$, εἶναι ἄρα $ZE = B\Delta$· ἄρα $B\Gamma = 2ZE$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$, (θ. 6). Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$, (θ. 21)· μέσον ἄρα εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$, (θ. 23, πόρ.). Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times ZB$· εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZB$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΖ, ΖΒ σχηματίζουσαι ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, μέσον δὲ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἄς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἔχουσαι ῥητὸν τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον, ὥστε τὸ AB^2 νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $B\Gamma^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), (θ. 31) καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ παραλληλόγραμμον τὸ $AZ \times ZB$ ἴσον πρὸς BE^2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου παραλληλογράμμου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, (θ. 18). Καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

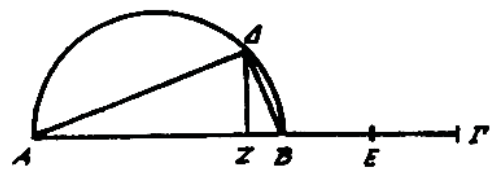
Ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $BA \times AZ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times BZ$, (θ. 11). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ὀρθογώνιον $BA \times AZ = A\Delta^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $AB \times BZ = \Delta B^2$ (θ. 32, λῆμμα)· ἄρα τὸ $A\Delta^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔB^2. Καὶ ἐπειδὴ τὸ AB^2 εἶναι μέσον εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$, (III. 31, I. 47). Καὶ ἐπειδὴ $B\Gamma = 2\Delta Z$, εἶναι ἄρα ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma = 2AB \times Z\Delta$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογ. $AB \times B\Gamma$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογ. $AB \times Z\Delta$ (θ. 6, ὁρ. 4). Τὸ δὲ ὀρθογ. $AB \times Z\Delta =$ ὀρθ. $A\Delta \times \Delta B$, (θ. 32, λῆμμα)· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογ. $A\Delta \times \Delta B$ εἶναι ῥητόν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε′

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΕ, ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

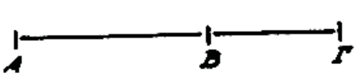
Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ′

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-



35

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, καὶ ἀκόμη τοῦτο νὰ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἂς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ AB^2 νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $B\Gamma^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (θ. 32), (τὴν ΑΒ), καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς κατασκευασθῶσιν ὁμοίως πρὸς τὰ ἐπάνω (προηγ. θεώρημα).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δυνάμει, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ AB^2 εἶναι μέσον, εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ὀρθογώνιον $AZ\times ZB=BE^2=\Delta Z^2$, εἶναι ἄρα $BE=\Delta Z$· ἄρα εἶναι $B\Gamma=2\Delta Z$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma=2\,AB\times Z\Delta$. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times Z\Delta$. Καὶ εἶναι $AB\times Z\Delta=A\Delta\times\Delta B$, (θ. 32, λῆμμα). Ἄρα τὸ ὀρθ. $A\Delta\times\Delta B$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδή, ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΕ μήκει ἀσύμμετρος, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB\times BE$, (θ. 21, λῆμμα, θ. 11). Ἀλλὰ $AB^2=A\Delta^2+\Delta B^2$, (Ι. 47) καὶ $AB\times BE=AB\times Z\Delta=A\Delta\times\Delta B$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A\Delta\times\Delta B$.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τοῦτο εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ δυώνυμος.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

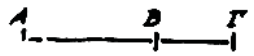
Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι μόνον δυνάμει εἶναι σύμμετροι· καὶ $AB:B\Gamma=AB\times B\Gamma:B\Gamma^2$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $B\Gamma^2$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB\times B\Gamma$, (θ. 6), πρὸς δὲ τὸ $B\Gamma^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $AB^2+B\Gamma^2$· διότι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει *τρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ* δύο ὀνομάτων· *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

λζ'

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ,

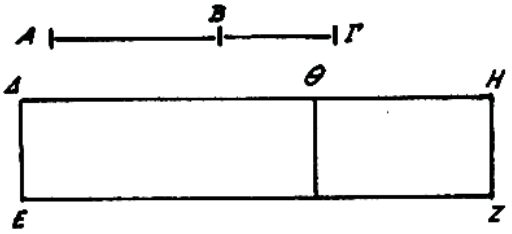


ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

λη'

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ μόνον σύμμετροι, (θ. 15)· ἄρα τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, (θ. 13). Καὶ διὰ προσθέσεως, $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ τουτέστι τὸ $ΑΓ^2$, (ΙΙ. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ τοῦτο ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον ($ΑΒ \times ΒΓ$) εἶναι ῥητόν· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$· καὶ διὰ προσθέσεως τούτων τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \times ΒΓ$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $ΑΓ^2$, (ΙΙ. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$· διότι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐλήφθησαν περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι μέσον, τὸ ἄθροισμά των εἶναι εὐθεῖα ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ περιέχουσαι μέσον· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἃς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς τὸ $ΑΓ^2$, ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΗ, (Ι. 44). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \times ΒΓ$, (ΙΙ. 4), ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΘ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον $ΘΖ = 2ΑΒ \times ΒΓ$. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέση, μέσα ἄρα εἶναι καὶ τὰ $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$. Ἐλήφθη δὲ μέσον καὶ τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$. Καὶ εἶναι $ΕΘ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, ἐν ᾧ $ΖΘ = 2ΑΒ \times ΒΓ$. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΕΘ, ΘΖ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχουσι παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΘ, ΘΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμε-

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον, καὶ ἡ δυναμένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, καὶ τὸ δὶς [ἄρα] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ [ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ τρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 6). Ἄρα τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 13). Ἀλλὰ $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$ καὶ $\Theta Z = 2AB \times B\Gamma$. Ἄρα τὸ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ εἶναι πρὸς τὴν ΘΗ μήκει ἀσύμμετρος, (VI, 1 καὶ θεώρ. 11). Ἄρα, αἱ ῥηταὶ ΔΘ, ΘΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ ΔΗ εἶναι ἄλογος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον· ἄρα τὸ χωρίον ΔΖ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ $A\Gamma^2 = \Delta Z$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ μείζων.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 6, 23 πόρ.). Τὸ δὲ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα τὸ $2AB \times B\Gamma$ πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ τὸ $AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς $A\Gamma^2$ (II. 4) εἶναι πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ ἀσύμμετρον, (θ. 16) [εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$]· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁρ. 4). Ὥστε καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα, (θ. 34)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

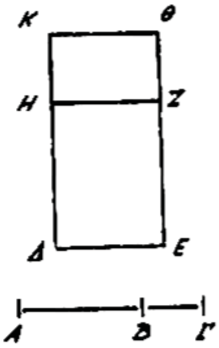
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον *δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

μα´

ʼΕὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

ʼΕκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΖ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΘΔ ἡ ΑΓ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*



Λῆμμα

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

ʼΕκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ᾽ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς

$2AB \times B\Gamma$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$· ὥστε καὶ τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρον, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $2AB \times B\Gamma$· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ προσέτι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ πληροῦσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἃς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι μέσον καὶ $=\Delta Z$, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΔΖ. Καὶ ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστι τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$, εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΚ, (VI. 1, καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΔΗ, ΗΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΚ εἶναι ἄλογος, ἡ ὁποία καλεῖται διώνυμος, (θ. 36). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ $A\Gamma^2 = \Theta\Delta$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

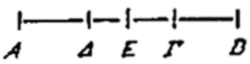
Λῆμμα

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι εὐθεῖαι διαιροῦνται μονοτίμως εἰς τὰς εὐθείας ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὰ ζητούμενα εἴδη, ἀποδεικνύομεν προτάσσοντες τὸ ἑξῆς λημμάτιον.

Ἃς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἃς τμηθῇ εἰς ἄνισα τμήματα πρῶτον κατὰ τὸ σημεῖον Γ καὶ ἔπειτα κατὰ τὸ Δ, ἃς εἶναι δὲ $A\Gamma > \Delta B$· λέγω, ὅτι $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$.

Διότι ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ $A\Gamma > \Delta B$ ἃς ἀφαι-

ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

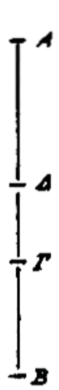


μβ´

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστιν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.



Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μγ´

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἡ ΔΓ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου τῆς ΓΒ. Εἶναι δὲ ΑΕ=ΕΒ· ἄρα ἡ ΔΕ $<$ ΕΓ· ἄρα τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ + ΕΓ^2 = ΕΒ^2$, (ΙΙ. 5), ἀλλ' ὅμως καὶ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2 = ΕΒ^2$, (ΙΙ, 5), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ + ΕΓ^2 = ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2$· ἐκ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι $ΔΕ^2 < ΕΓ^2$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ < ΑΔ \times ΔΒ$. Ὥστε καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ < 2ΑΔ \times ΔΒ$. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον, δηλ. τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > ΑΔ^2 + ΔΒ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42

Ἡ δυώνυμος εὐθεῖα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον εἰς τὰ μονώνυμα.

Ἔστω ἡ δυώνυμος εὐθεῖα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Διοτι ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῆται, καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι. Τότε θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΔ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ θὰ εἶναι $ΑΓ:ΓΒ = ΒΔ:ΔΑ$, καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἔχει διαιρεθῆ κατὰ τὸ Γ εἰς τὰ αὐτὰ τμήματα ὡς καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Οἵα ἄρα διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἡ αὐτὴ διαφορὰ θὰ ὑπάρχῃ καὶ μεταξὺ τοῦ ὀρθογωνίου $2ΑΔ \times ΔΒ$ καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ$, διότι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 + 2ΑΓ \times ΓΒ = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 + 2ΑΔ \times ΔΒ = ΑΒ^2$, (ΙΙ. 4). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ διαφέρει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ διαφέρει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα, (θ. 21)· ὅπερ ἄτοπον· διότι μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητὸν (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ δυώνυμος εὐθεῖα εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

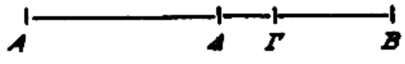
43

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι

ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.



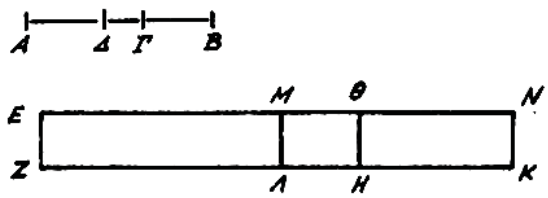
Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δή, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ· δῆλον δή, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ



ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ νὰ περιέχωσιν ὀρθογώνιον ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ τὸ αὐτὸ διαφέρει τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (θ. 41, λῆμμα), διαφέρει δὲ κατὰ ῥητὸν τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ διαφέρει τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἄτοπον, (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατὰ διάφορα σημεῖα εἰς τὰ μονώνυμα· ἄρα καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

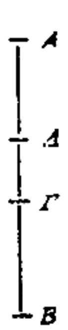
Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον (θ. 38)· εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ Γ δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, διότι αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι μήκει σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὡς ἀπεδείξαμεν προηγουμένως, (θ. 41 λῆμμα) εἶναι μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ $ΑΒ^2$ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, (Ι. 44) ἀπὸ δὲ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον τὸ ΕΗ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΘΚ = 2ΑΓ \times ΓΒ$, (ΙΙ. 4). Πάλιν τώρα πρὸς τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, τὸ ὁποῖον ἐδείχθη μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΕΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΜΚ = 2ΑΔ \times ΔΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσα, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΕΗ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ. Εἶναι δὲ $ΑΓ:ΓΒ = ΑΓ^2:ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21 λῆμμα)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· διότι αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει σύμμετροι. Πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 6). Ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 13). Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΕΗ$ καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ = ΘΚ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

με´

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ. ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μϛ´

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει

ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ (VI. 1 καὶ θ.11). Καὶ εἶναι ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη διώνυμος, (θ. 36)· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΝ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ῥηταὶ ΕΜ, ΜΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ θὰ εἶναι ἡ δυώνυμος ΕΝ διῃρημένη κατὰ δύο διάφορα σημεῖα καὶ τὸ Θ καὶ τὸ Μ καὶ δὲν εἶναι ἡ ΕΘ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ, διότι τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2 > ΑΔ^2+ΔΒ^2$. Ἀλλὰ $ΑΔ^2+ΔΒ^2 > 2ΑΔ \times ΔΒ$. Κατὰ μείζονα λόγον ἄρα τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΜΚ. Ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ > ΜΝ$, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

45

Ἡ μείζων διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω ἡ μείζων ΑΒ διῃρημένη κατὰ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

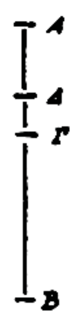
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι διαφέρει τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2+ΔΒ^2$, τόσον διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 41, λῆμμα), ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι ἀμφότερα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητὸν ἐν' ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26)· ἄρα ἡ μείζων δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

46

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ὁποία δύναταί ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ



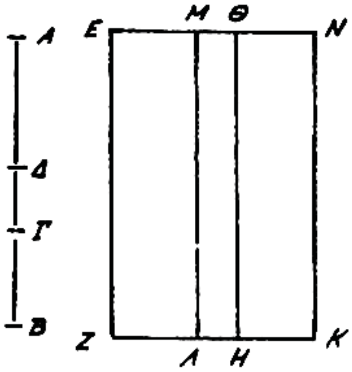
ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μζ'

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,



καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΗΝ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον] διαιρεῖται.

νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2ΑΔ \times ΔΒ$ ῥητόν. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ τοῦ ὀρθογωνίου $2ΑΔ \times ΔΒ$, τόσον διαφέρει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2+ΓΒ^2$, τὸ δὲ $2ΑΓ \times ΓΒ$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$, ἄρα καὶ τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$, ἐν ᾧ ἀμφότερα εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26). Ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα. Ἄρα διαιρεῖται κατὰ ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

47

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη δύο μέσα διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ δυναμένη δύο μέσα καὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$, (θ. 41). Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πληροῦσα τ' ἀνωτέρω δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς διαιρεθῇ κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ π ὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΕΗ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ ἰσοδύναμον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$, (ΙΙ. 4). Πάλιν τώρα ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ΕΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΔ \times ΔΒ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΜΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΘΕ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΝ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ, (VI. 1, θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΝ εἶναι δυώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι διαιρεῖται καὶ κατὰ τὸ Μ. Καὶ ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ἄρα ἡ δυώνυμος διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ δυναμένη δύο μέσα δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ὅροι δεύτεροι.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἡ [ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

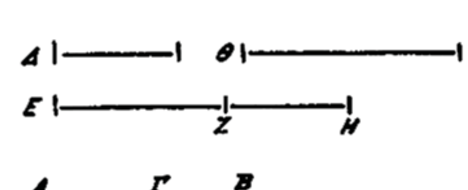
ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

μη'

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. καὶ ἐπεὶ

Ὁρισμοὶ δεύτεροι

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ δυωνύμου διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος εὐθεῖα πρώτη δυώνυμος.

2. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος δευτέρα δυώνυμος.

3. Ἐὰν δὲ οὐδὲν ἐκ τῶν μονωνύμων εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τρίτη δυώνυμος.

4. Ἐὰν πάλιν τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τετάρτη δυώνυμος.

5. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος πέμπτη δυώνυμος.

6. Ἐὰν δὲ οὐδὲν μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος ἕκτη δυώνυμος.

48

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΒ πρὸς μὲν τὸ ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή, (όρ. 3). Καὶ ἂς γίνῃ ΒΑ: $\text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2 : \text{ΖΗ}^2$, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος $\text{ΕΖ}^2 : \text{ΖΗ}^2$ εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν· ὥστε τὸ ΕΖ^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ^2, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΒΑ} : \text{ΑΓ}$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα καὶ $\text{ΕΖ}^2 : \text{ΖΗ}^2$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

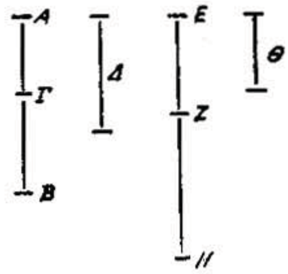
Διότι, ἐπειδὴ $\text{ΒΑ} : \text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2 : \text{ΖΗ}^2$, εἶναι δὲ $\text{ΒΑ} > \text{ΑΓ}$, ἄρα εἶναι καὶ $\text{ΕΖ}^2 > \text{ΖΗ}^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $\text{ΕΖ}^2 = \text{ΖΗ}^2 + \Theta^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{ΒΑ} : \text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2 : \text{ΖΗ}^2$, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $\text{ΑΒ} : \text{ΒΓ} = \text{ΕΖ}^2 : \Theta^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ *ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.*

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μθ'

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΕΖ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δὲ ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸν ΒΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος $ΕΖ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ (θ. 9)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΗ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

49

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα) καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Ἂς γίνῃ τώρα καὶ $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΖΗ^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

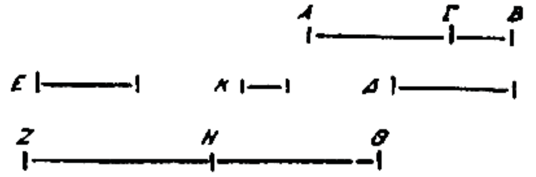
Διότι, ἐπειδὴ ἀνάπαλιν εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΗΖ^2 : ΖΕ^2$, (V. 7, πόρ.) εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$, ἄρα καὶ τὸ $ΗΖ^2 > ΖΕ^2$, (V. 14). Ἔστω $ΗΖ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$ καὶ δι' ἀναστροφῆς, (V. 19 πόρ.) $ΑΒ : ΒΓ = ΖΗ^2 : Θ^2$. Ἀλλὰ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $Θ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Θ κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον τὸ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ληθεῖσαν ῥητὴν Δ μήκει σύμμετρον.

Ἡ ΕΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ν'

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ. καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει

50

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλος τις μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ ὁ ὁποῖος πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Ε καὶ ἂς γίνῃ $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $Ε^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ Ε· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $Δ : ΑΒ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $Ε^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἂς γίνῃ πάλιν $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $ΘΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ (θ. 9). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα ὅτι εἶναι καὶ τρίτη δυώνυμος.

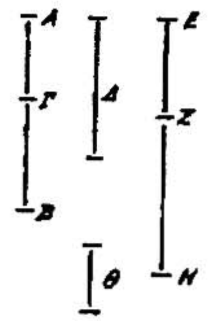
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Δ : ΑΓ = Ε^2 : ΗΘ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε καὶ τὸ $Ε^2$ πρὸς τὸ $ΗΘ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι πρὸς τὴν ΗΘ μήκει ἀσύμμετρος. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα $ΖΗ^2 > ΗΘ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΖΗ^2 = ΗΘ^2 + Κ^2$. Καὶ κατ' ἀναστροφὴν (V. 19, πόρ.) $ΑΒ : ΒΓ = ΖΗ^2 : Κ^2$. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $Κ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΘ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ δυνάμει *μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.*

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

να´

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ [μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ], μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΗΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νβ´

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς μόνον σύμμετροι καὶ οὐδεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

51

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ οὔτε πρὸς τὸν ΒΓ οὔτε πρὸς τὸν ΑΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ εὐθεῖα Δ καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ : ΑΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε $ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη δυώνυμος.

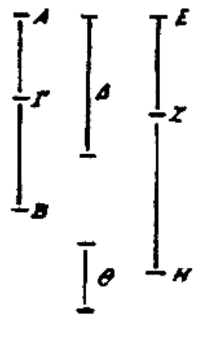
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ [εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$] ἄρα $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$· ἄρα κατ' ἀναστροφὴν εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΕΖ^2 : Θ^2$. Ὁ δὲ λόγος $ΑΒ : ΒΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $ΕΖ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν Δ μήκει σύμμετρος.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

52

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα), καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

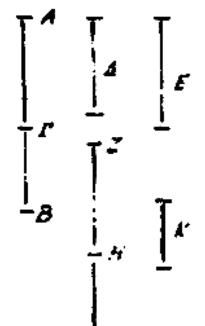
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀνάπαλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΗΖ, ΖΕ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νγ'

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ῥητὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$, ἀνάπαλιν εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : ZE^2$, (V. 7, πόρ.)· ἄρα $HZ^2 > ZE^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν ὅτι $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$· κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $AB : B\Gamma = HZ^2 : \Theta^2$, (V. 19 πόρ.). Ὁ δὲ $AB : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ $ZH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ ZE^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΗΖ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

53

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἄλλος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ ὢν τετράγωνος οὔτε ἔχων λόγον πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Ε, καὶ ἂς γίνῃ $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$ (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ E^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZH^2, (θ. 6). Καὶ ἡ Ε εἶναι ῥητή· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $\Delta : AB$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $E^2 : ZH^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἂς γίνῃ πάλιν $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (θ. 6, πόρ.). Ἄρα τὸ ZH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $H\Theta^2$. Ἄρα τὸ ΘH^2 εἶναι ῥητόν· ἡ ΘΗ ἄρα εἶναι ῥητή· Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $BA : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $ZH^2 : H\Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος.

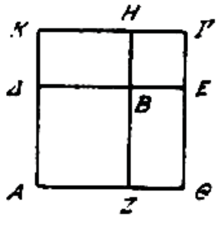
Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ· ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ, ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ ΘΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν [ἐστι] τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ἴση γάρ [ἐστιν] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, εἶναι δὲ καὶ $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$ δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $\Delta : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $E^2 : H\Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Ἐδείχθη δὲ ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΖΗ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$· καὶ κατ' ἀναστροφὴν $AB : B\Gamma = ZH^2 : K^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $AB : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὔτε ὁ λόγος $ZH^2 : K^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· Ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9)· ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ καμμία ἐξ αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Ε.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΖΘ εἶναι ἕκτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἄρα εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι τετράγωνον καὶ ὅτι τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἀκόμη ὅτι τὸ ΔΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι, ἐπειδὴ $\Delta B = BZ$ καὶ $BE = BH$, ἕπεται $\Delta E = ZH$. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΘ, ΚΓ, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ, (Ι. 34)· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ εἶναι ἰσόπλευρον· εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ZB : BH = \Delta B : BE$, ἀλλὰ $ZB : BH = AB : \Delta H$, καὶ $\Delta B : BE = \Delta H : B\Gamma$, ἄρα $AB : \Delta H = \Delta H : B\Gamma$, (VI. 1). Ἄρα τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ.

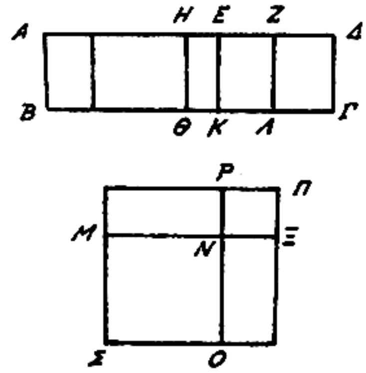
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A\Delta : \Delta K = KH : H\Gamma$· διότι εἶναι ἴση ἑκάστη πρὸς ἑκάστην ἀντιστοίχως· καὶ διὰ συνθέσεως (V. 18) εἶναι $AK : K\Delta = K\Gamma : \Gamma H$, ἀλλὰ πρὸς ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ἃ προέκειτο δεῖξαι.

νδ'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ. καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς ΕΛ, τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ. τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.



Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα

ΑΚ : ΚΔ=ΑΓ : ΓΔ, καὶ ΚΓ : ΓΗ=ΔΓ : ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα ΑΓ : ΔΓ=ΔΓ : ΒΓ. Ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ· τὰ ὁποῖα προέκειτο ν' ἀποδειχθῶσι.

54

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος ἂς διαιρεθῇ αὕτη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{\text{ΑΕ}^2-\text{ΕΔ}^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΒ, (α'. ὁρισ. δευτ. ὁρ.). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΕ^2 ὑπερέχει τοῦ ΕΔ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΕ, $\sqrt{\text{ΑΕ}^2-\text{ΕΔ}^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΑΕ παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας δηλ. τὸ τέταρτον τοῦ ΕΖ^2, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μέρη σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΑΕ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ × ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΖ^2· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ. Καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ ΖΛ· καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τὸ ΝΠ, (ΙΙ. 14) καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΣΠ· ἄρα τὸ ΣΠ εἶναι τετράγωνον (προηγ· λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ ΑΗ × ΗΕ = ΕΖ^2, εἶναι ἄρα ΑΗ : ΕΖ = ΖΕ : ΕΗ (VI. 17)· ἄρα καὶ ΑΘ : ΕΛ=ΕΛ : ΚΗ, (VI. 1)· ἄρα τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ τὸ δὲ ΗΚ = ΝΠ· ἄρα τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Εἶναι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ (προηγ. λῆμμα)· ἄρα ΕΛ = ΜΡ· ὥστε καὶ ΕΛ=ΟΞ (Ι. 43). Εἶναι δὲ καὶ ΑΘ + ΗΚ = ΣΝ + ΝΠ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ=ΣΠ τουτέστι =ΜΞ^2· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΜΞ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετροι *τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καί ἐστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστι σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς ΜΡ, ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.*

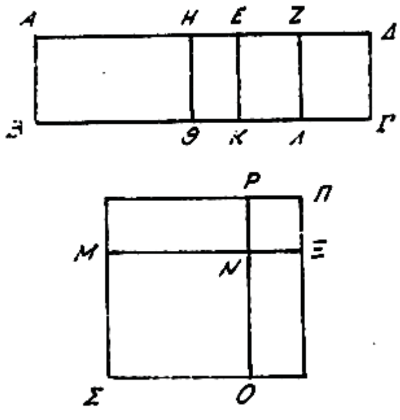
Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νε'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω



ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ, (θ. 19) καὶ εἶναι σύμμετρον τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ τὸ δὲ ΗΚ = ΝΠ· ἄρα καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ, τουτέστι τὰ $ΜΝ^2$, $ΝΞ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ, τὸ δὲ ΕΛ = ΜΡ· ἄρα καὶ τὸ ΣΝ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΡ. Ἀλλὰ ΣΝ : ΜΡ = ΟΝ : ΝΡ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΟΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΡ, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΟΝ = ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ = ΝΞ· ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ. Καὶ τὸ $ΜΝ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ καὶ ἕκαστον εἶναι ῥητόν· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δυώνυμος καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

55

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

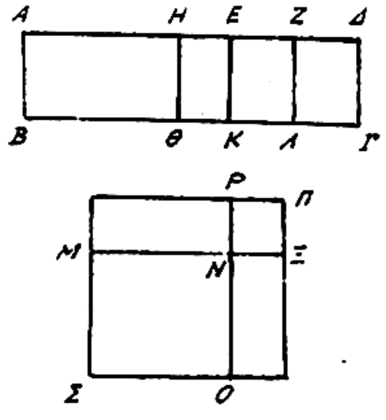
Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι δευτέρα δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΔ^2}$ καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ Ζ καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ ὀρθογ. παραλ. τὸ ΑΗ × ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 17). Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΣΠ· εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων (θεώρ. 53, λῆμμα) ὅτι τὸ μέσον ΜΡ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΣΝ, ΝΠ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΛ, (θ. 54) καὶ ὅτι $ΜΞ^2$=ΑΓ, (θ. 54). Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι *τῇ ΑΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἀσύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ. αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ. ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστίν. καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· τὸ δὲ ΜΡ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.*

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νς'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.



Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός [ἐστι] τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δείξομεν, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, εἶναι δὲ ἡ ΕΔ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον. Ἄρα καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι μέσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ [ὥστε αἱ ΜΝ, ΝΞ, εἶναι δυνάμει σύμμετροι], (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ ὅτι εἶναι καὶ μέσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιόν των ($ΜΝ \times ΝΞ$) εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΔΕ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ. Καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, (θ. 14)· τὸ δὲ $ΜΡ = ΜΝ \times ΝΞ$. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

56

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τρίτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΔ^2}$, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (γ' δευτ. ὁρ.). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἀποδεικνύεται ὅτι $ΜΞ^2 = ΑΓ$

αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ.

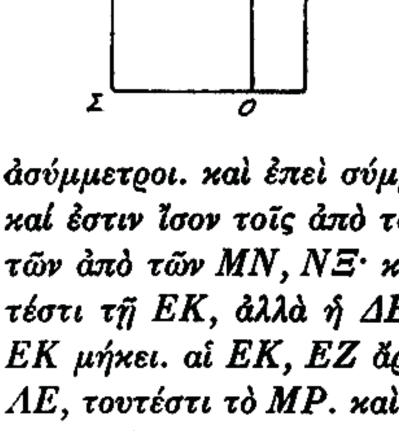
Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νζ'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ· δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν



ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ· καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός [ἐστιν] ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. αἱ ΕΚ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ. καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ῥητὸν τὸ [συγκείμενον] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καί εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συν-

καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ σύγκειται ἐκ δύο μέσων.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, εἶναι δὲ ἡ ΔΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ΖΕ, ΕΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα τὸ ΕΛ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ ΜΝ×ΝΞ εἶναι μέσον.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

57

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐν ᾧ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (δ' ὁρισ. δεύτ.). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ, καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ×ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18). Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ ὡς προηγουμένως κατασκευή, (θ. 55)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ τὸ ΑΘ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19)· καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $ΜΝ^2+ΝΞ^2$· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2+ΝΞ^2$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13), ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΚ, ΕΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΛΕ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον (θ. 21). Καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ ΜΝ×ΝΞ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2+ΝΞ^2$ ῥητόν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχηματίζουσαι τὸ *τεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μείζων.*

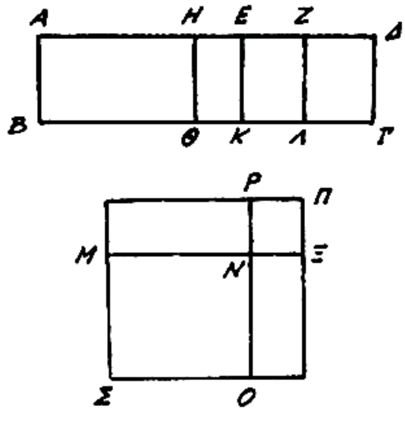
Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νη'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω [δή], ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καί [ἐστιν] ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ, σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστιν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει [αἱ ΒΑ, ΑΕ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι]· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.



Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νθ'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνο-

μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

58

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις (θ. 54)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2 = ΑΓ$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18), ἄρα καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΕ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς τὸ $ΝΞ^2$, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πέμπτη δυώνυμος καὶ τὸ τμῆμα αὐτῆς ΕΔ εἶναι τὸ μικρότερον, ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ε' ὁρ. δεύτ.). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΕ, (θ. 13) [αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι]· ἄρα τὸ ΑΚ τουτέστι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$, εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΚ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $ΜΝ \times ΝΞ$, (θ. 19)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

59

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

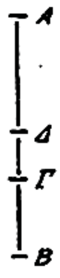
Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς ἕκτης *μάτων ἕκτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.*

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει, αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστί τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστί τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· καί ἐστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

[Λῆμμα

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.



Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ· ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά [ἐστι] τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ξ´

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2 = ΑΓ$, καὶ ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι πρὸς τὴν ΝΞ δυνάμει ἀσύμμετρος, (θ. 58). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρισ. δεύτ. 6), ἄρα αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρ. δεύτ. 6), ἄρα ἡ ΖΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13)· αἱ ΖΕ, ΕΚ, ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $ΜΝ \times ΝΞ$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, εἶναι καὶ τὸ ΑΚ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΑΚ = ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ τὸ δὲ $ΕΛ = ΜΝ \times ΝΞ$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΜΝ \times ΝΞ$. Καὶ εἶναι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μέσον, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀνίσων τμημάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2ΑΓ \times ΓΒ$.

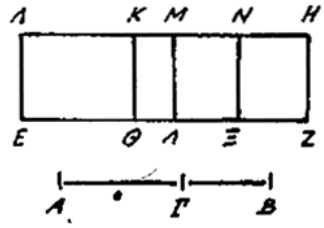
Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει τμηθῇ εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Γ, ἄρα $ΑΓ \times ΓΒ + ΓΔ^2 = ΑΔ^2$, (II. 5)· ὥστε $ΑΓ \times ΓΒ < ΑΔ^2$· ἄρα $2ΑΓ \times ΓΒ < 2ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = 2(ΑΔ^2 + ΔΓ^2)$, (II. 9)· ἄρα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2ΑΓ \times ΓΒ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

60

Τὸ τετράγωνον δυωνύμου εὐθείας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ ἂς παραβληθῇ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ [ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΖ]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ]. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ. καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξα'

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΔΘ πρὸς δὲ τὸ $ΒΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΚΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ = ΜΖ$ (II. 4). Ἂς τμηθῇ ἡ ΜΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν ΜΛ, ΗΖ παράλληλος ἡ ΝΞ. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΜΞ, ΝΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΒ ἔχει διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36)· ἄρα τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ μεταξύ των σύμμετρα, (θ. 15)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν. Καὶ εἶναι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΔΛ$· ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, εἶναι ἄρα μέσον τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΜΖ, (θ. 21). Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 22). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

Ἐπειδὴ τῶν $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 53 λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ ΜΞ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΔΘ, ΚΛ. Εἶναι ἄρα $ΔΘ : ΜΞ = ΜΞ : ΚΛ$, δηλαδὴ $ΔΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΜΚ$, (VI. 1)· ἄρα $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$ (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, εἶναι καὶ τὸ ΔΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2ΑΓ \times ΓΒ$, ἄρα καὶ $ΔΛ > ΜΖ$· ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ > ΜΗ$, (VI. 1, V. 14). Καὶ εἶναι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2 = 1/4\, ΜΗ^2$, καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, πρὸς δὲ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ἰσοδύναμον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν) εἰς σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ σύμμετροι). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ καὶ ἡ ΔΜ οὖσα μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

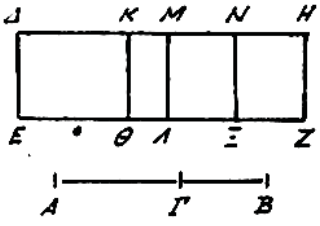
Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πρώτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 1)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

61

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

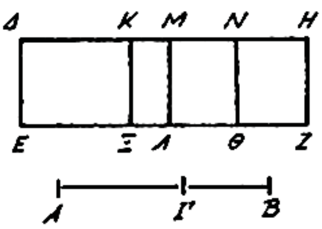
Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῆς ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

ξβ´

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ. καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει·

τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι δευτέρα δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ προηγουμένως, (θ. 60). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, (θ. 37)· ὥστε καὶ τὰ $A\Gamma^2$, ΓB^2 εἶναι μέσα, (θ. 21). Ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, εἶναι καὶ τὸ ΜΖ ῥητόν· καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 20)· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2A\Gamma \times \Gamma B$, (θ. 59, λῆμμα), ἄρα εἶναι καὶ $\Delta\Lambda > MZ$· ὥστε καὶ ἡ $\Delta M > MH$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓB^2, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον $\Delta K \times KM = MN^2$, (θ. 60)· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος (ὅρ. δεύτ. 2)· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

62

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον τμῆμα νὰ εἶναι ἡ ΑΓ, ἔστω δὲ ῥητή τις ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι τρίτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 38)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς ΔΛ· ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα καὶ ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι *ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.*

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τρίτη.

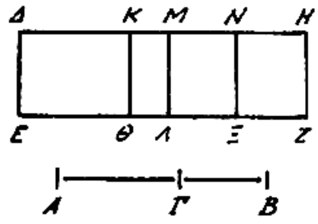
Ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξγ´

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητήν ἐστι τὴν ΜΛ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαι-

τὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, ὡς δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 11). Ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΔΛ πρὸς τὸ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι διώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει νὰ δειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη διώνυμος.

Ὁμοίως ὡς εἰς τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Καὶ εἶναι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θ. 17). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τρίτη διώνυμος (ὅρ. δεύτ. 3)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

63

Τὸ τετράγωνον τῆς μείζονος παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην διώνυμον.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε $ΑΓ > ΓΒ$, ἔστω δὲ ἡ ΔΕ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ διώνυμος ΔΗ εἶναι τετάρτη διώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μείζων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον, (θ. 39). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσον, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ, ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22)· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι καὶ ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι διώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη διώνυμος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, ἄρα καὶ τὸ ΔΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὀρθ. παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας ἀπὸ τοῦ ὁποίου (παραλ.)

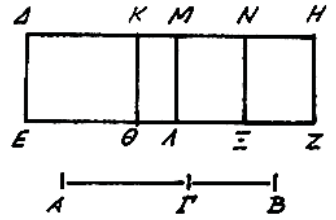
ρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξδ´

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκε μενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, ῥητὴ ἄρα ἡ ΜΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξε´

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν) τὴν μεγαλυτέραν εἰς ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτ.), (θ. 18)· εἶναι ἄρα ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΔΜ, ΜΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τετάρτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 4)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

64

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 · λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· ὥστε ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ ΜΖ, ἄρα ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΔΜ, ΜΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $\Delta K \times KM = MN^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· ἄρα ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ εἶναι αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ μικροτέρα ἡ ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

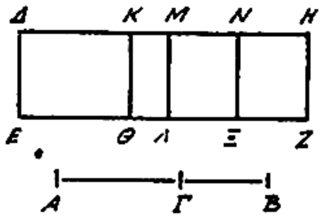
65

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης δύο μέσα παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυναμένη δύο μέσα εὐθεῖα ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ

ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ. ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

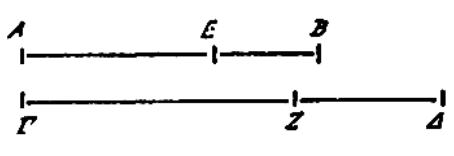
Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξϛ´

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.



Λέγω δή, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ΔΖ, σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι ἕκτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δύο μέσα δυναμένη ΑΒ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $A\Gamma \times \Gamma B$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Gamma \times \Gamma B$, (θ. 41)· ὥστε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἕκαστον τῶν ΔΛ, ΜΖ εἶναι μέσον. Καὶ παράκεινται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2A\Gamma \times \Gamma B$, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11)· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ $\Delta K \times KM = MN^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι ἕκτη δυώνυμος, (ὁρ. δεύτ. 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

66

Ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36). Ἂς γίνῃ $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν $Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$, (VI. 16, V. 19 πόρ.). Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, (θ. 11). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι ῥηταὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ εἶναι $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$ (V. 11). Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, (V. 16). Αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11)· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι τὸ AE^2 ὑπερέχει τοῦ EB^2 ἢ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου *ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καί ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καί ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.*

Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξζ′

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ.

πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1), τουτέστι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ (πρὸς τὴν ΑΒ). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο πάλιν κατὰ τὴν τάξιν θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι δευτέρα δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 2). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 13), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τρίτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 3). Ἐὰν δὲ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ), καὶ τὸ $ΓΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΓΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τετάρτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 4). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, εἶναι πρὸς αὐτὴν σύμμετρος καὶ ἡ ΖΔ, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν πέμπτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 5). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἕκτη δυώνυμος.

Ὥστε ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

67

Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο μέσων εἶναι καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΖΔ εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ$, (V. 19 πόρ. καὶ V. 16). Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ, (θ. 11). Εἶναι δὲ μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι μέσαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ, (θ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ· ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ ῥητόν ἐστιν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καί ἐστιν ἑκατέρα δευτέρα.

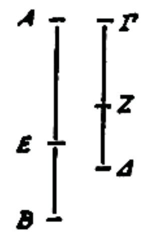
Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξη′

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.



Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $AE:EB=ΓZ:ZΔ$ εἶναι ἄρα καὶ $AE^2:AE\times EB=ΓZ^2:ΓZ\times ZΔ$, (θ. 21, λῆμμα)· ἐναλλὰξ δὲ $AE^2:ΓZ^2=AE\times EB:ΓZ\times ZΔ$, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ AE^2 πρὸς τὸ $ΓZ^2$· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ $AE\times EB$ πρὸς τὸ $ΓZ\times ZΔ$, (θ. 11). Ἐὰν λοιπὸν εἶναι ῥητὸν τὸ $AE\times EB$ θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓZ\times ZΔ$ [καὶ διὰ τοῦτο (ἑκάστη) εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη]. Ἐὰν δὲ εἶναι μέσον, θὰ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρ.) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἑκάστη ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 37 καὶ 38).

Καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ΓΔ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

68

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μείζονα εἶναι καὶ αὐτὴ μείζων.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι μείζων.

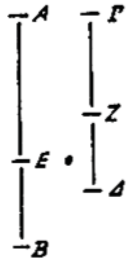
Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, (θ. 39)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς $AB:ΓΔ=AE:ΓZ=EB:ZΔ$ (θ. 67), καὶ ὡς ἄρα $AE:ΓZ=EB:ZΔ$, (V. 11). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ ἀντιστοίχως, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $AE:ΓZ=EB:ZΔ$ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ὡς ἡ $AE:EB=ΓZ:ZΔ$, καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι $AB:BE=ΓΔ:ΔZ$, (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB^2:BE^2=ΓΔ^2:ΔZ^2$, (VI 20). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ $AB^2:AE^2=ΓΔ^2:ΓZ^2$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB^2:AE^2+EB^2=ΓΔ^2:ΓZ^2+ZΔ^2$, (V. 24)· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ $AB^2:ΓΔ^2=AE^2+EB^2:ΓZ^2+ZΔ^2$, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ AB^2 πρὸς τὸ $ΓΔ^2$· ἄρα εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα AE^2+EB^2 σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓZ^2+ZΔ^2$, (θ. 11). Συγχρόνως δὲ εἶναι τὸ AE^2+EB^2 καὶ ῥητόν, ὡς ἐπίσης ῥητὸν καὶ τὸ $ΓZ^2+ZΔ^2$. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $2AE\times EB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $2ΓZ\times ZΔ$. Καὶ εἶναι τὸ $2AE\times EB$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $2ΓZ\times ZΔ$, (θ. 23, πόρ.). Ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13) σχηματίζουσαι ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ἄρα ὅλη ἡ ΓΔ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 39).

Ἡ σύμμετρος ἄρα πρὸς τὴν μείζονα εἶναι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξθ´

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος [καὶ αὐτὴ] ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



Διῃρήσθω ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν.

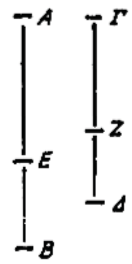
Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο´

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ. καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.



Ἡ ἄρα ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οα´

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυνα-

69

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην εἶναι καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ἡ AB δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, καὶ πρὸς τὴν AB ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· ἄρα αἱ AE, EB εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα AE^2+EB^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $AE \times EB$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$ εἶναι ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

70

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν δύο μέσα δυναμένην εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Ἔστω ἡ AB δυναμένη δύο μέσα καὶ πρὸς τὴν AB ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι δύο μέσα δυναμένη, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· ἄρα αἱ AE, EB εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα AE^2+EB^2 ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AE \times EB$, (θ. 41)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα AE^2+EB^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ τὸ δὲ ὀρθογώνιον $AE \times EB$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι μέσον καὶ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$ εἶναι μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$.

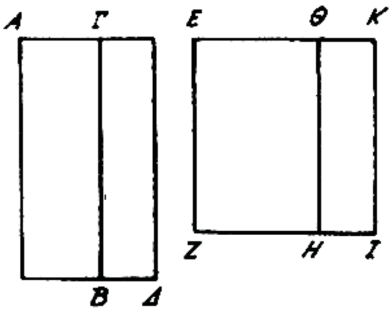
Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

71

Διὰ προσθέσεως ῥητοῦ καὶ μέσου γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ AB, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ *μένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.*

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ [ῥητὴν] τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΙ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

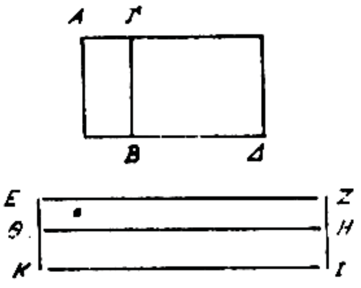


Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ ἢ εἶναι δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ θὰ εἶναι $\gtrless$ τοῦ ΓΔ· ἔστω πρῶτον μεγαλύτερον· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· πρὸς δὲ τὸ ΔΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον τὸ ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΙ, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΘΙ. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ = ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ>ΓΔ, εἶναι δὲ ΑΒ=ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ=ΘΙ, ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ>ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΚ, (V. 14). Ἡ λοιπὸν τὸ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου. Ἂς εἶναι πρῶτον ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΘΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δυώνυμος (θ. 54)· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι δυώνυμος· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι δυώνυμος. Ἀλλὰ ἂς εἶναι τώρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΕΘ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΘΚ^2$, τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 4). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 57). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθ. ΕΙ εἶναι μείζων· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ εἶναι μείζων.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ΑΒ<ΓΔ· ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ<ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ<ΘΚ (VI. 1, V. 14). Τὸ $ΘΚ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΘ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ). Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ μή-

περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ ΘΚ τῆς ΘΕ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



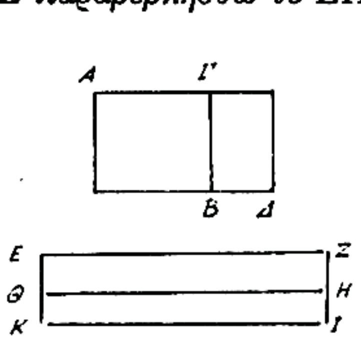
Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οβ´

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἡ] δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον



κει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δευτέρα δυώνυμος· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 55). Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πρὸς τὸ ΕΙ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΔ τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἀλλὰ ἂς ὑπερέχῃ τώρα τὸ $ΘΚ^2$ τοῦ $ΘΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ)· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ ΕΚ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, (θ. 58). Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἐὰν ἄρα προστεθῇ ῥητὸν καὶ μέσον γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι, ἢ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

72

Ἐὰν προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεταξύ των μέσα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ $\gtrless$ ΓΔ. Ἔστω, ὅτι ἔτυχε πρῶτον νὰ εἶναι ΑΒ $>$ ΓΔ· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ τὸ ἰσοδύναμον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ, πρὸς δὲ τὸ ΓΔ τὸ ἰσοδύναμον ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι μέσον, ἄρα εἶναι μέσον καὶ ἕκαστον τῶν ΕΗ, ΘΙ. Καὶ παράκεινται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζοντα πλάτος τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΒ=ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ=ΘΙ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ=ἡ ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Τὸ δὲ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ). Ἂς ὑπερέχῃ πρῶτον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ οὐδεμία τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος (όρισ.

δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἤτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ' εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί. ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

ογ´

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν. καλείσθω δὲ ἀποτομή.

δεύτ. 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56)· ἄρα ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα. Ἀλλὰ τώρα ἔστω, ὅτι τὸ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ εἶναι ἑκάστη τῶν ΕΘ, ΘΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 6). Ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα, (θ. 59)· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα.

[Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἂν $ΑΒ < ΓΔ$, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη].

Ἐὰν ἄρα προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

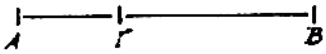
Ἡ δυώνυμος καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε μεταξύ των εἶναι αἱ αὐταί. Διότι τὸ μὲν τετράγωνον τῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυωνύμου παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον, (θ. 60). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον, (θ. 61). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον, (θ. 62). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην δυώνυμον, (θ. 63). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον, (θ. 64). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δύο μέσα δυναμένης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον, (θ. 65). Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου πλάτους ὅτι τοῦτο εἶναι εὐθεῖα ῥητή, μεταξύ των δὲ ὅτι κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των.

73

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή.

᾿Από γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

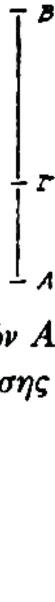
᾿Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



οδ´

᾿Εὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν. καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

᾿Από γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.



᾿Επεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσίν, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

οε´

᾿Εὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν. καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

᾿Από γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος

Διότι ἀπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην (τὴν ΑΒ) δυνάμει μόνον σύμμετρος· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι ΑΒ: ΒΓ$=$ΑΒ^2: ΑΒ$\times$ΒΓ, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ΑΒ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ$\times$ΒΓ, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ^2 εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα ΑΒ$^2+$ΒΓ^2, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ ΑΒ$\times$ΒΓ εἶναι σύμμετρον τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ, (θ. 6). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΒ$^2+$ΒΓ$^2=$2ΑΒ$\times$ΒΓ$+$ΓΑ^2, (II, 7) ἄρα τὸ ΑΒ$^2+$ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιον τὸ ΑΓ^2, (θ. 13 καὶ 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΑΒ$^2+$ΒΓ^2· ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

74

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ τῆς ὅλης δὲ περιέχῃ ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης ΑΒ ἡ ΒΓ ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος, νὰ σχηματίζῃ δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ$\times$ΒΓ, (θ. 27)· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

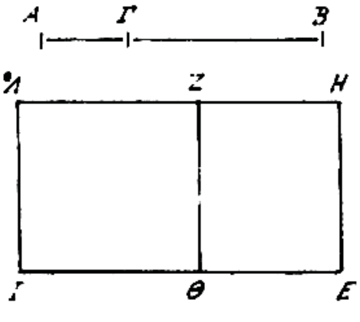
Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέσαι, εἶναι μέσα καὶ τὰ ΑΒ^2, ΒΓ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ· ἄρα τὸ ἄθροισμα ΑΒ$^2+$ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ· ἄρα τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΓ^2, (II. 7), διότι καὶ ἂν τὸ ὅλον εἶναι πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν ἀσύμμετρον καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ· ἄρα τὸ ΑΓ^2 εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, περιέχῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς ΑΒ ἡ ΓΒ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς *οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.*

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ,

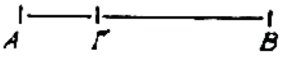


μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓτοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ· τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οϛ´

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾽ αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν. καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῷ τὴν ὅλην τὴν ΑΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ νὰ περιέχῃ ὀρθογώνιον μέσον τὸ ΑΒ×ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔΙ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, πρὸς δὲ τὸ 2ΑΒ×ΒΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ZE=A\Gamma^2$ (II. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$ εἶναι μέσα καὶ σύμμετρα, ἄρα καὶ τὸ ΔΕ εἶναι μέσον, (θ. 15, 23 πόρ. καὶ 74). Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ 2ΑΒ×ΒΓ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρισ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τό ΔΘ· ἄρα καὶ τὸ ΔΘ εἶναι μέσον· καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ×ΒΓ, (θ. 11, θ. 21 λ.). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AB^2 εἶναι σύμετρον τὸ $AB^2+B\Gamma^2$, πρὸς δὲ τὸ ΑΒ× ΒΓ εἶναι σύμμετρον τὸ 2ΑΒ× ΒΓ, (θ. 6)· ἄρα τὸ 2ΑΒ×ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$, (θ. 13). Εἶναι δὲ $AB^2+B\Gamma^2=\Delta E$ καὶ $2AB\times B\Gamma=\Delta\Theta$· ἄρα τὸ ΔΕ εἶναι ἀσύμμμετρον πρὸς τὸ ΔΘ· ὡς δὲ τὸ $\Delta E:\Delta\Theta=$ἡ $H\Delta:\Delta Z$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΗΔ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΗΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΙ· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου εἶναι ἄλογον, (θ. 20) καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ εἶναι $A\Gamma^2=ZE$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

76

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος, σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· Λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον 2ΑΒ×ΒΓ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $AB^2+B\Gamma^2$ καὶ τὸ 2ΑΒ×ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρα·

τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οζ′

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οη′

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ [πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ]. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΕ, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ. καὶ

καὶ δι' ἀναστροφῆς (ΙΙ. 7) τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΓ^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

77

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος, σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἡ προειρημένη ἄλογος.

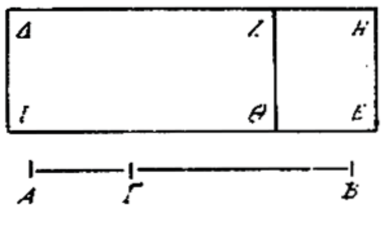
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ $2ΑΒ\times ΒΓ$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΒ\times ΒΓ$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ΙΙ. 7) τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΒ\times ΒΓ$ (θ. 16). Καὶ εἶναι τὸ $2ΑΒ\times ΒΓ$ ῥητόν· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

78

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ πληροῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔΙ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2+ΒΓ^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, πρὸς δὲ τὸ $2ΑΒ\times ΒΓ$ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2$ (ΙΙ. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ *παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ, τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ· ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ· τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν· καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

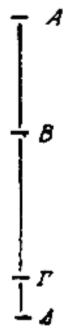


οθ´

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.



Μία ἄρα μόνη τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

π´

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυ-

τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδ. πρὸς τὸ ΔΕ, ἄρα τὸ ΔΕ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2AB\times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΔΘ, ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB\times B\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ ΔΕ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΘ. Εἶναι δὲ $\Delta E : \Delta\Theta = \Delta H : \Delta Z$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΗΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ἀποτομὴ (θ. 73)· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

79

Πρὸς τὴν ἀποτομὴν μία μόνον ῥητὴ εὐθεῖα προσαρμόζει, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος.

Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΓ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ οὐδεμία ἄλλη ῥητὴ προσαρμόζει, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ τοῦ $2A\Delta\times\Delta B$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$· διότι ἕκαστον ὑπερέχει κατὰ τὸ αὐτὸ τὸ AB^2, (II. 7)· ἐναλλὰξ ἄρα ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ τοῦ ἀθροίσματος $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ κατὰ τὸ αὐτὸ ὑπερέχει καὶ τὸ $2A\Delta\times\Delta B$ τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$. Τὸ δὲ $A\Delta^2+\Delta B^2$ ὑπερέχει τοῦ $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2A\Delta\times\Delta B$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 21), μέσον δὲ δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Πρὸς τὴν ΑΒ ἄρα δὲν προσαρμόζει ἄλλη ῥητή, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην.

Μία ἄρα ῥητὴ προσαρμόζει πρὸς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλη δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

80

Πρὸς τὴν πρώτην ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα μένάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

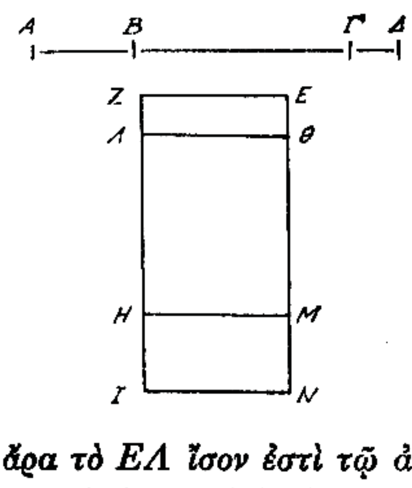
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [τετραγώνων] ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πα´

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν ση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης περιέχει ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἔστω ἡ AB πρώτη ἀποτομὴ μέσης καὶ πρὸς τὴν AB ἃς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ×ΓΒ, (θ. 74)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν AB δὲν προσαρμόζει ἄλλη μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἃς προσαρμόζῃ καὶ ἡ ΔΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ ΑΔ×ΔΒ (θ. 74). Καὶ ἐπειδή, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τοῦ 2ΑΔ×ΔΒ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ τοῦ 2ΑΓ×ΓΒ· διότι πάλιν ὑπερέχουσι κατὰ τὸ αὐτό, τὸ τετράγωνον τῆς AB, (II. 7)· ἐναλλὰξ ἄρα, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2+ΓΒ^2$, κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ 2ΑΔ×ΔΒ τοῦ 2ΑΓ×ΓΒ. Τὸ δὲ 2ΑΔ×ΔΒ ὑπερέχει τοῦ 2ΑΓ×ΓΒ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 24) καὶ μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

Πρὸς τὴν πρώτην ἄρα ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

81

Πρὸς τὴν δευτέραν ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, περιέχει δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

Ἔστω ἡ AB δευτέρα ἀποτομὴ μέσης καὶ ὅτι πρὸς τὴν AB προσαρμόζει ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ ΑΓ×ΓΒ, (θ. 75)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν AB δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

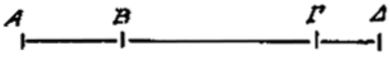
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ μέσαι, ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ ΑΔ×ΔΒ (θ. 75). Καὶ ἃς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ἃς παραβληθῇ ἰσοδύναμον παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· πρὸς δὲ τὸ 2ΑΓ×ΓΒ ἰσοδύναμον ἃς ἀφαιρεθῇ τὸ ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΛ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$, (II. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς AB ἰσοῦται πρὸς τὸ ΕΛ. Πάλιν τώρα, ἃς παρατὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΕΜ, ΜΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πβ´

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς βληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ· εἶναι δὲ καὶ $ΕΛ=ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΘΙ=2ΑΔ\times ΔΒ$, (II. 7). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσαι ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι μέσον· καὶ εἶναι $ΑΓ^2+ΓΒ^2=ΕΗ$· ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι μέσον καὶ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος. Εἶναι δὲ $ΑΓ:ΓΒ=ΑΓ^2:ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 21, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ καὶ $2ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Καὶ εἶναι $ΑΓ^2+ΓΒ^2=ΕΗ$, ἐν ᾧ $2ΑΓ\times ΓΒ=ΗΘ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ $ΕΗ:ΘΗ=$ ἡ $ΕΜ:ΘΜ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ προσαρμόζει εἰς αὐτήν· πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 79).

Πρὸς τὴν δευτέραν ἄρα ἀποτομὴν μέσης μία μόνον εὐθεῖα μέση προσαρμόζει, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

82

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην σχηματίζουσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον, (θ. 76)· λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα δὲν θὰ προσαρμόσῃ πρὸς τὴν ΑΒ σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι πληροῦσαι τὰ προειρημένα, (θ. 76). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο ὑπερέὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

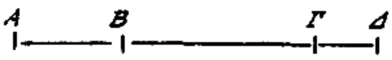
Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾿ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾿ αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πγ´

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾿ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾿ αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀκολούθως τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



πδ´

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾿ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾿ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾿ αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἔχει καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (ΙΙ. 7 καὶ θ. 79) εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι μέσα.

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἄρα προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

83

Πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, σχηματίζει δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 17)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν προσαρμόζει ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

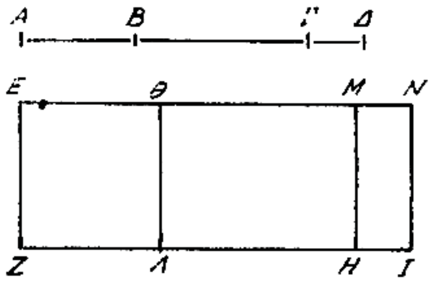
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 77). Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ δὲ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 26). Ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ τῆς ὅλης δὲ νὰ σχηματίζῃ τὰ προειρημένα· ἄρα θὰ προσαρμόσῃ μία μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

84

Εἰς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, προσαὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιοῦσα τὰ προειρημένα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΘΙ· καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστιν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ. τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον συμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.



Τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

αρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προειρημένα, (θ. 78). Λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόση ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ προειρημένα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον καὶ τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ$, (θ. 78)· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ, πρὸς δὲ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = ΕΛ$, (ΙΙ. 7)· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς $ΑΒ = ΕΛ$. Πάλιν, πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΒ^2 = ΕΛ$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ = ΘΙ$, (ΙΙ. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ, ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$, εἶναι καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ΕΘ εἶναι πάλιν ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΝ. Πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, (θ. 79). Δὲν θὰ προσαρμόση ἄρα εἰς τὴν ΑΒ ἄλλη εὐθεῖα.

Εἰς τὴν ΑΒ ἄρα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁρισμοὶ τρίτοι

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πρώτη ἀποτομή.

β´. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ´. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ´. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

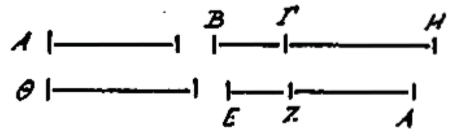
ε´. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ϛ´. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

πε´

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

2. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν δὲ οὐδεμία εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τρίτη ἀποτομή.

4. Πάλιν, ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἐὰν ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν δὲ οὐδεμία, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ ἕκτη ἀποτομή.

85

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ἡ Α ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΖΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1)· ἄρα οὔτε ὁ $ΕΔ : ΔΖ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΕΔ : ΔΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $ΕΔ : ΔΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος $ΒΗ^2 : ΗΓ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ. Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

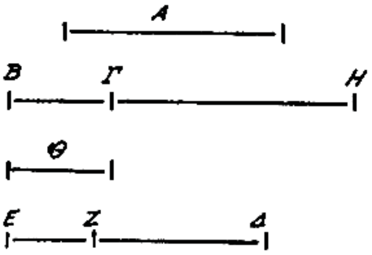
Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΓ^2$ εἶναι τὸ $Θ^2$, (θ. 13, λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΕΔ : ΖΔ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΔΕ : ΕΖ = ΗΒ^2 : Θ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $ΔΕ : ΕΖ$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· διότι ἕκαστος εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ $ΗΒ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ τὸ $ΒΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΓ^2$ κατὰ τὸ $Θ^2$· ἄρα ΒΗ καὶ $\sqrt{ΒΗ^2 - ΗΓ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ὅλη ἡ ΒΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Εὑρέθη ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πς´

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ. ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πζ´

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

86

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α μήκει σύμμετρος ἡ ΗΓ. Ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΔΖ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1). Καὶ ἂς γίνῃ ΖΔ: $ΔΕ = ΓΗ^2 : ΗΒ^2$, (θ. 6, πόρισ.). Ἄρα τὸ $ΓΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$ (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΓΗ^2$. Ἄρα καὶ τὸ $ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΗΓ^2$ πρὸς τὸ $ΗΒ^2$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ ΓΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

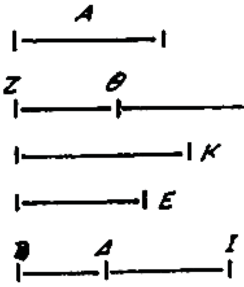
Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΓ^2$ εἶναι τὸ $Θ^2$, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΗ^2 : ΗΓ^2 = ΕΔ : ΔΖ$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΗ^2 : Θ^2 = ΔΕ : ΕΖ$, (V. 19, πόρ.). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· ἄρα τὸ $ΒΗ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (29). Καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΓ^2$ εἶναι τὸ $Θ^2$· ἄρα ἡ ΒΗ καὶ $\sqrt{ΒΗ^2 - ΗΓ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α σύμμετρος. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 2)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

87

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ : ΒΔ ἂς εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς γίνῃ $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$, (θ. 28, λῆμμα 1) καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$, ἄρα τὸ $Α^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$. Ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος $Α^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ.

[τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει, καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πη´

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

9). Πάλιν, ἐπειδὴ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΒΓ : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $ΖΗ^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

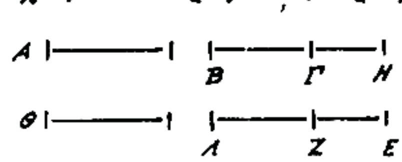
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΘΗ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ = Α^2 : ΘΗ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $Ε : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ λόγος $Α^2 : ΘΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἔστω λοιπὸν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΖΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΘ^2$ ἴση πρὸς $Κ^2$, (θ. 13 λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΒΔ = ΖΗ^2 : Κ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $ΒΓ : ΒΔ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2 : Κ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9), καὶ $ΖΗ, \sqrt{ΖΗ^2 - ΗΘ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι, 3).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

88

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀποτομή.

Ἄς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΕ, νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΔΕ : ΕΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΔΕ : ΕΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.



[Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη].

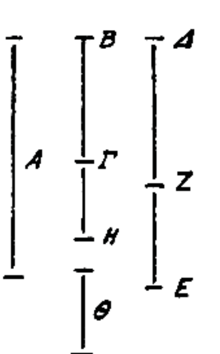
Ὧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πθ΄

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς εἶναι $E\Delta : \Delta Z = HB^2 : \Theta^2$ (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $HB^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$. Εἶναι ἄρα ΒΗ καὶ $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΒΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 4).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

89

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΗ· ἄρα ἡ ΓΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΕ νὰ μὴ ἔχῃ πάλιν λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $ZE : E\Delta = \Gamma H^2 : HB^2$. Ἄρα καὶ τὸ HB^2 εἶναι ῥητόν, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, ὁ δὲ $\Delta E : EZ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $BH^2 : H\Gamma^2 = \Delta E : EZ$ καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ ὑπερέχει τὸ BH^2 τοῦ $H\Gamma^2$

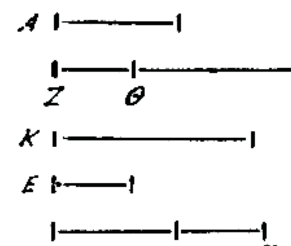
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟ'

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς κατὰ τὸ $Θ^2$· εἶναι ἄρα ΗΒ καὶ $\sqrt{ΗΒ^2—ΗΓ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 5).

Εὑρέθη ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

90

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀκόμη δὲ καὶ ΓΒ : ΒΔ νὰ μὴ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀκόμη δὲ καὶ ΓΒ : ΒΔ νὰ μὴ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $Ε : ΒΓ=Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ=ΖΗ^2 : ΗΘ^2$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Ε : ΒΓ=Α^2 : ΖΗ^2$, ἄρα τὸ $Α^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ Ε : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα $Α^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ (θ. 9). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΓ : ΓΔ=ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ΒΓ : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $ΗΘ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ=Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ=ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ=Α^2 : ΗΘ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Ε : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ $Α^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9)· οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὴν Α. Ἔστω τώρα $ΖΗ^2 — ΗΘ^2 = Κ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2$:

τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

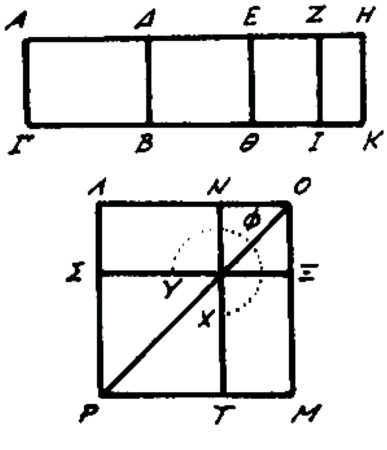
Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟα΄

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.



Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν.

$H\Theta^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\Gamma B : B\Delta = ZH^2 : K^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΒ: ΒΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $ZH^2 : K^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Καὶ ὑπερέχει τὸ ZH^2 τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τὸ K^2. Εἶναι ἄρα ΖΗ καὶ $\sqrt{ZH^2 - H\Theta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Α. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἕκτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 6).

Εὑρέθη ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

91

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΓ καὶ τῆς πρώτης ἀποτομῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒ τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, καὶ τὸ AH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{AH^2 - H\Delta^2}$ μήκει σύμ.), (ὁρισ. τρίτ. 1)· ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ΔH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ πρὸς τὸ EH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZH$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι ῥητή· ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητόν, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· (θ. 13), ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20).

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΛΟΜ τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καί ἐστι τὸ [μὲν] ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΚΖ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ. τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστι τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

ϟβ'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ. αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται

Ἄς ληφθῇ τώρα πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἄς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον ΝΞ ἔχον κοινὴν γωνίαν πρὸς αὐτὸ τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἄς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$, καὶ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΚΖ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΚΖ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΚΖ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΜΝ = ΕΚ$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΕΚ = ΔΘ$, τὸ δὲ $ΜΝ = ΛΞ$, (I. 43)· ἄρα τὸ $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον $ΑΒ = ΣΤ$. Τὸ δὲ $ΣΤ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ $ΛΝ^2 = ΑΒ$. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητὸν καὶ $ΑΙ = ΛΜ$, $ΖΚ = ΝΞ$, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι ἕκαστον τῶν $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι ῥητή. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΘ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι μέσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΛΞ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· εἶναι δὲ $ΛΞ : ΝΞ = ΛΟ : ΟΝ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἀποτομή.

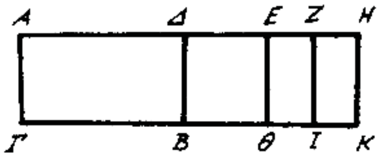
Ἐὰν ἄρα ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὰ ἑξῆς.

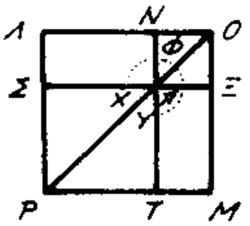
92

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ δευτέρας ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἄς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ δευτέρας ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73) καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τῆς ὅλης δὲ τὸ τετράγωνον τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει [ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ῥητόν ἐστιν.





Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως [ἐστὶ] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΣ. τὸ δὲ ΤΣ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ· τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς ΟΝ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΗΔ), (ὁρισ. τρίτοι 2). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ AH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{AH^2-H\Delta^2}$ μήκει σύμμ.) ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $H\Delta^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθογ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο (τὸ ὀρθογ.) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε· καὶ παρὰ τὴν ΑΗ ἂς παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ EH^2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραί του ΑΖ, ΖΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρς πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΔΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ [ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ]· Ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι ῥητόν.

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ τὴν ΛΟΜ· τὰ τετράγωνα ἄρα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσα καὶ εἶναι $AI=\Lambda O^2$, $ZK=ON^2$, ἄρα καὶ τὰ ΛO^2, ON^2 εἶναι μέσα· ἄρα καὶ αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $AZ\times ZH=EH^2$, εἶναι ἄρα $AZ:EH=EH:ZH$, (VI. 17). Ἀλλὰ $AZ:EH=AI:EK$, (VI. 1)· ὡς δὲ $EH:ZH=EK:ZK$· τὸ ΕΚ ἄρα εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μὲν $AI=\Lambda M$, τὸ δὲ $ZK=N\Xi$· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα$=$ΕΚ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΕΚ$=$τὸ ΔΘ, πρὸς δὲ τὸ ΜΝ$=$τὸ ΛΞ, (Ι. 43)· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ$=$γνώμων $\Upsilon\Phi X+N\Xi$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $AK=\Lambda M+N\Xi$ ἐξ ὧν ΔΚ$=$γνώμων $\Upsilon\Phi X+N\Xi$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $AB=T\Sigma$. Τὸ δὲ $T\Sigma=\Lambda N^2$· ἄρα τὸ $\Lambda N^2=$ ὀρθογώνιον ΑΒ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ $\Lambda O\times ON$. Ἐδείχθη δὲ μέσον τὸ ΝΞ· ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· ὡς δὲ $\Lambda\Xi:N\Xi=\Lambda O:ON$, (VI. 1)· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 11). Αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν· ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 74)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

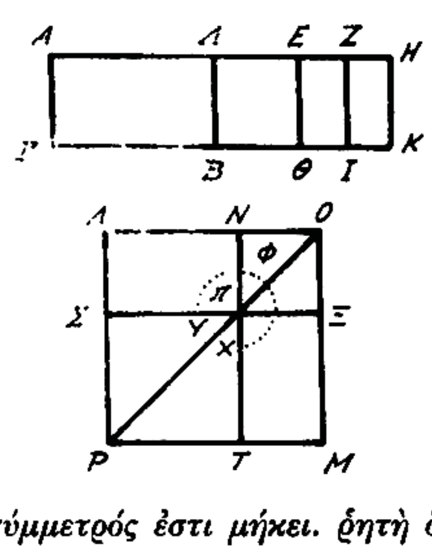
Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟγ'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει. ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΕΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.



Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

93

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τρίτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω ἡ ΔΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΗ, ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΗ), (όρ. τρίτοι 3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ AH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{AH^2 - H\Delta^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ΔH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς σύμμετρα (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ EH^2 ὀρθογώνιον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $AZ \times ZH$. Καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· αἱ ΑΖ, ΖΗ ἄρα εἶναι σύμμετροι· καὶ τὸ ΑΙ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΑΗ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ, (θ. 13). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΗΔ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ· Ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΔΗ πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, (θ. 13). Ὡς δὲ ἡ $AZ : EH =$ τὸ $AI : EK$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΚ, (θ. 11).

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ· ἄρα τὰ ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, *ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ· ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ· ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.*

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟδ´

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

(VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZH = EH^2$, εἶναι ἄρα $AZ : EH = EH : ZH$, (VI. 17). Ἀλλὰ $AZ : EH = AI : EK$, (VI. 1)· ὡς δὲ $EH : ZH = EK : ZK$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $AI : EK =$ τὸ $EK : ZK$· ἄρα τῶν AI, ZK εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ EK. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ, τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα)· καὶ εἶναι τὸ μὲν $AI = \Lambda M$ τὸ δὲ $ZK = N\Xi$· ἄρα καὶ τὸ $EK = MN$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $MN = \Lambda\Xi$, (I. 43), τὸ δὲ $EK = \Delta\Theta$· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΥΦΧ καὶ τὸ ΝΞ. Εἶναι δὲ καὶ $AK = \Lambda M + N\Xi$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $AB = \Sigma T = \Lambda N^2$. ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ AI, ZK ἐδείχθησαν μέσα καὶ ἴσα πρὸς τὰ ΛO^2, ON^2 ἀντιστοίχως, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΛO^2, ON^2 εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι μέση, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ AI εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZK, ἄρα καὶ τὸ ΛO^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ON^2. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ AI ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ EK, ἄρα καὶ τὸ ΛΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΝ, τουτέστι τὸ ΛO^2 πρὸς τὸ $\Lambda O \times ON$· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ· (VI. 1 καὶ θ. 11)· αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ EK ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\Lambda O \times ON$, ἄρα καὶ τὸ $\Lambda O \times ON$ εἶναι μέσον· ὥστε αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (θ. 75)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

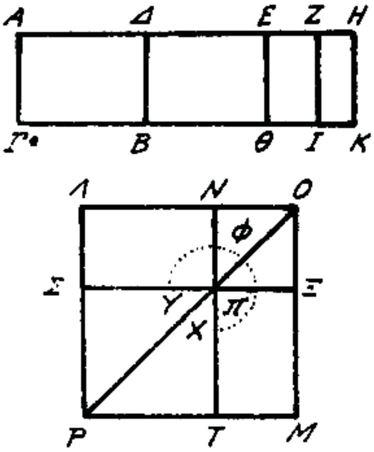
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

94

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τετάρτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει *ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ τὸ ΝΞ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα*



διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ· ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΑΗ) (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2-ΗΔ^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει, ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ ἄρα ὅλον τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι μέσον (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἄρα καὶ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ τούτου ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ ὂν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ. Ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ = ΕΗ^2$, ἄρα εἶναι $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$ καὶ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$ (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, (θ. 53, λῆμμα) καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΖΚ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΕΚ = ΜΝ$. Ἀλλὰ $ΕΚ = ΔΘ$, $ΜΝ = ΛΞ$, (I. 43)· ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλον τὸ ΛΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ $ΛΜ + ΝΞ$, ἐξ ὧν $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ +$ τετράγωνον ΝΞ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΒ = ΣΤ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι μέσον καὶ εἶναι $ΔΚ = 2ΛΟ \times ΟΝ$, ἄρα τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$. Ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ $2ΛΟ \times ΟΝ$ μέσον. Ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

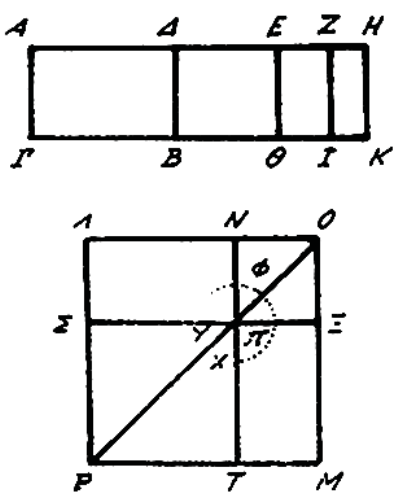
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟε′

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΓΑ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.



Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

95

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πέμπτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2-\text{ΔΗ}^2}$ μήκει ἀσύμ.), (ὁρισ. τρίτοι 5). Ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΔΗ², ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΗ² ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ ΑΖ×ΖΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΑ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς ΛΟ²+ΟΝ², ἄρα τὸ ἄθροισμα ΛΟ²+ΟΝ² εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ 2ΛΟ×ΟΝ, καὶ αὐτὸ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ ΛΟ² εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΟΝ²· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν. Ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον (θ. 77)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

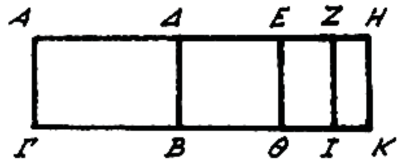
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

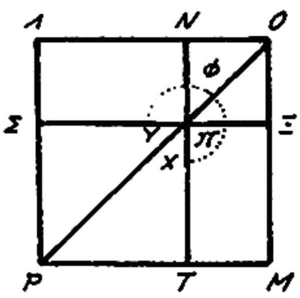
ϟς'

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.





Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ.

96

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἕκτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΔΗ) (ὁρισ. τρίτοι 6). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ AH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{AH^2-H\Delta^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ΔH^2, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ EH^2, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZH$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Εἶναι δὲ $AZ : ZH = AI : ZK$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΗ, ΑΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΔΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι καὶ τὸ ΔΚ μέσον, (θ. 21). Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ. Εἶναι δὲ $AH : H\Delta = AK : K\Delta$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΔ, (θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ πρὸς τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ὁμοίως πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς ΛO^2+ON^2, ἄρα τὸ ἄθροισμα ΛO^2+ON^2 εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2\Lambda O \times ON$, καὶ τὸ $2\Lambda O \times ON$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΚ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΛO^2+ON^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\Lambda O \times ON$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον *αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.*

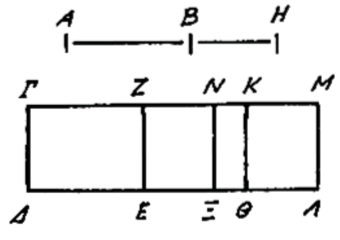
Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟζ´

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω, διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, καί ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, μέσον ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ τῷ ΖΛ· ὡς δὲ τὸ ΔΜ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ·

πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον, (θ. 78)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

97

Τὸ τετράγωνον ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΑΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΒΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ, πρὸς δὲ τὸ $ΒΗ^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΚΛ. Ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$· ἐκ τῶν ὁποίων $ΓΕ = ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$, (ΙΙ. 7). Ἃς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἃς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, καὶ εἶναι $ΔΜ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$, ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ εἶναι $ΑΗ^2 + ΗΒ^2 = ΓΛ$ καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$· ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $ΔΜ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ$, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι $ΑΗ^2 = ΓΘ$, $ΒΗ^2 = ΚΛ$, $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα καὶ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΓΘ, ΚΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλὰ *ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν [ἐστι] καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καί ἐστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.*

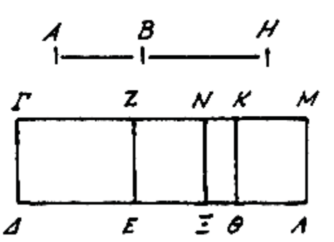
Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟη´

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ,



ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. ῥητὸν δέ [ἐστι] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῥητὸν ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΛ, ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλ-

ΓΘ: ΝΛ = ΓΚ: ΝΜ· καὶ ΝΛ: ΚΛ = ΝΜ: ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΓΚ×ΚΜ = ΝΜ², (VI. 17) = 1/4 ΖΜ². Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΗ² εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΗΒ², εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Εἶναι δὲ ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ τὸ ὀρθογώνιον ΓΚ×ΚΜ = 1/4 ΖΜ², ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὀρθογωνίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ εἶναι σύμμετρος ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ, ἄρα τὸ ΓΜ² ὑπερέχει τοῦ ΜΖ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\text{ΓΜ}^2-\text{ΜΖ}^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

98

Τὸ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν.

Ἔστω πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ² σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἔστω ἡ ΒΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 74). Καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΗ², σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, καὶ ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΗΒ², σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ = ΑΗ² + ΗΒ²· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ΓΛ = ΑΗ² + ΗΒ², ἐξ ὧν ΑΒ² = ΓΕ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ 2ΑΗ × ΗΒ = ΖΛ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΗ × ΗΒ· ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΑΗ² + ΗΒ² τουτέστι τὸ ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ 2ΑΗ × ΗΒ τουτέστι τὸ ΖΛ, εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἂς τμηθῆ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῆ διὰ τοῦ Ν πα-

ληλος ἡ ΝΞ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ΚΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΚ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ [καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΗ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΓΜ]· ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

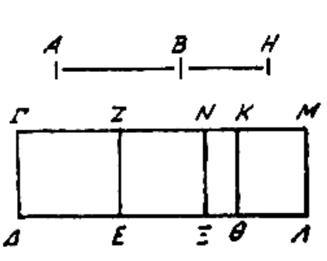
Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϟθ′

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ [καί ἐστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ]· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμ-



ράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τῶν τετραγώνων $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$ τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, τὸ δὲ $ΒΗ^2 = ΚΛ$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλὰ $ΓΘ : ΝΛ = ΓΚ : ΝΜ$ καὶ $ΝΛ : ΚΛ = ΝΜ : ΜΚ$, (VI. 1)· ὡς ἄρα $ΓΚ : ΝΜ = ΝΜ : ΚΜ$· ἄρα τὸ $ΓΚ \times ΚΜ = ΝΜ^2 = 1/4\ ΖΜ^2$ [καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΒΗ^2$, εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστι ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ τὸ $ΓΚ \times ΚΜ = 1/4\ ΜΖ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα τετράγωνον, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. $ΓΜ^2$, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

99

Τὸ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν.

Ἔστω δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, (θ. 75). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ $ΒΗ^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΚΘ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ [καὶ εἶναι μέσον τὸ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$]· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ $ΓΕ = ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΛΖ = 2ΑΗ \times ΗΒ$ (II. 7). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν καὶ πρὸς τὴν ΓΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει *μετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.*

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙ'

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ· ἄρα καὶ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AH \times HB$, (θ. 21, λῆμμα καὶ θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον τὸ AH^2+HB^2, πρὸς δὲ τὸ $AH \times HB$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AH \times HB$· ἄρα τὰ AH^2+HB^2 καὶ $2AH \times HB$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Ἀλλὰ $AH^2+HB^2=\Gamma\Lambda$, καὶ $2AH \times HB = Z\Lambda$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : ZM$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ HB^2, ἄρα καὶ τὸ ΓΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν AH^2, HB^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $AH \times HB$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $AH^2=\Gamma\Theta$, τὸ δὲ $HB^2=K\Lambda$, τὸ δὲ $AH \times HB = N\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Ἀλλὰ $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$, καὶ $N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$, (VI. 1)· ἄρα $\Gamma K : MN = MN : KM$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma K \times KM = MN^2 = 1/4\ ZM^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $1/4\ ZM^2$ ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, τὸ ΓM^2 ἄρα ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμ.). Καὶ οὐδεμία τῶν ΓΜ, ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

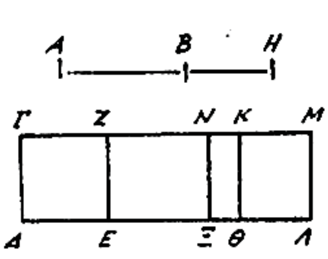
Τὸ τετράγωνον ἄρα δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

100

Τὸ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· ἄρα αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των τὸ AH^2+HB^2 ῥητόν, τὸ δὲ $2AH \times HB$ μέσον, (θ. 76). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ BH^2 ἴσον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2+HB^2$. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα AH^2+HB^2 ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ *ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν*



ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΖΛ, καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ [ἐστι] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ, πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

ρα'

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα καὶ ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ ΓΕ εἶναι $= ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$, (II. 7). Ἂς τμηθῆ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἀχθῆ διὰ τοῦ Ν πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος μήκει πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$. Εἶναι δὲ τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ καὶ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΜΖ$ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΓΘ = ΑΗ^2$ τὸ δὲ $ΚΛ = ΗΒ^2$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ$ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2 = ΚΛ$, τὸ δὲ $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΘ : ΝΛ = ΓΚ : ΝΜ$, καὶ $ΝΛ : ΚΛ = ΝΜ : ΚΜ$, (VI. 1)· ὡς ἄρα ἡ $ΓΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΚΜ$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2 = 1/4\ ΖΜ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ ὀρθογώνιον τὸ $ΓΚ \times ΚΜ$ ἴσον πρὸς τὸ $1/4\ ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ. 18). Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 4).

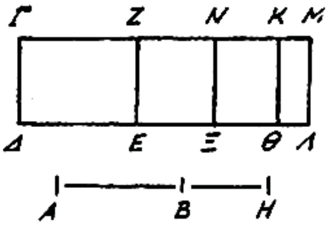
Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

101

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ ΖΛ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει, καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙβ´

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ $ΓΕ = ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητὸν (θ. 77). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΘ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ^2$, καὶ τὸ ΚΛ ἴσον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$. Τὸ δὲ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι καὶ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ $ΓΕ = ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, $ΝΛ = ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΖΛ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΜΖ$· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομὴ (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

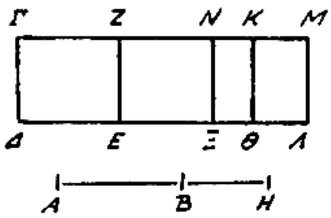
Διότι καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ \times ΚΜ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΝΜ^2$, τουτέστι τὸ $\frac{1}{4}$ $ΖΜ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$, εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2 = ΚΛ$, ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ $ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ. 18). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ἀποτομὴ ἄρα ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

102

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον καὶ ἀσύμμετρον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, κα᾽ ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλα τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ΑΗ, ΗΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $AH \times HB$, καὶ τὸ AH^2+HB^2 ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,AH \times HB$, (θ. 78). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ HB^2 ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ=AH^2+HB^2$· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΓΛ=AH^2+HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $ΓE=AB^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ZΛ=2AH \times HB$, (II. 7). Καὶ εἶναι τὸ $2AH \times HB$ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα AH^2+HB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AH \times HB$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $AH^2+HB^2=ΓΛ$, τὸ δὲ $2AH \times HB=ZΛ$, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $ΓΛ:ZΛ=ΓM:MZ$· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

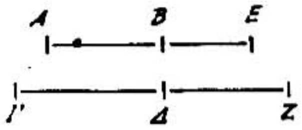
Διότι ἐπειδὴ $ZΛ=2AH \times HB$, ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ HB^2. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $AH^2=ΓΘ$, πρὸς δὲ τὸ $HB^2=KΛ$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $ΓΘ:KΛ=ΓK:KM$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ,(θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν AH^2, HB^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $AH \times HB$, (θ. 53 λῆμμα) καὶ εἶναι $AH^2=ΓΘ$, $HB^2=KΛ$, $AH \times HB=NΛ$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον· εἶναι ἄρα $ΓΘ : NΛ=NΛ : KΛ$. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ $ΓM^2$ ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓM^2-MZ^2}$ μ. ἀσύμ.), (θ. 18). Καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ργ'

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα πρὸς ἕν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ].

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὴ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ [τῆς ΕΒ] μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρδ'

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΒ.

103

Ἡ πρὸς τὴν ἀποτομὴν μήκει σύμμετρος εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΕ· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἂς γίνῃ ΒΕ : ΔΖ = ΑΒ : ΓΔ, (VI. 12)· καὶ ὡς ἄρα εἷς ὅρος πρὸς ἕνα οὕτως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων, (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ : ὅλην τὴν ΓΖ = ΑΒ : ΓΔ. Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13) [ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ].

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ΑΕ : ΓΖ = ΒΕ : ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ, (V. 16). Τώρα, τὸ $ΑΕ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἢ συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ) ἢ ἀσυμμέτρου. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι σύμμετρος καὶ ἡ ΓΖ, (θ. 12), ἐὰν δὲ ἡ ΒΕ (εἶναι σύμ. πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν) θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔΖ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ, (θ. 13). Ἐὰν δὲ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ), καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ, ἐὰν δὲ ἡ ΒΕ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔΖ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

104

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

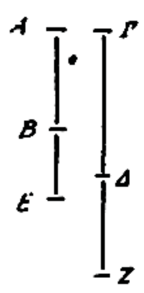
Ἔστω ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομὴ μέσης, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐ-

αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ [γάρ] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ,



ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

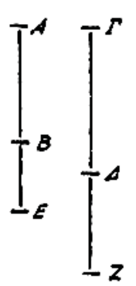
Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρε´

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν



ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὴν ἡ ΕΒ. Ἄρα αἱ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 74-75). Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ $AB : \Gamma\Delta = BE : \Delta Z$, (VI. 12)· ἄρα ἡ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, (VI. 12 καὶ θ. 11). Αἱ δὲ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι μέσαι, (θ. 23) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης, (θ. 74-75).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$ [ἀλλ' ὡς μὲν $AE : EB = AE^2 : AE \times EB$, ὡς δὲ $\Gamma Z : Z\Delta = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$], εἶναι ἄρα καὶ ὡς $AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς $AE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta$]. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ AE^2 πρὸς τὸ ΓZ^2· ἄρα καὶ τὸ $AE \times EB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$, (V. 16 καὶ θ. 11). Ἐὰν λοιπὸν τὸ $AE \times EB$ εἶναι ῥητόν, θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$, καὶ ἐὰν τὸ $AE \times EB$ εἶναι μέσον, εἶναι μέσον καὶ τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$, (θ. 23, πόρ.).

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

105

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος· καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 76), ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, (V. 12 καὶ 16), εἶναι ἄρα καὶ $AE^2 : EB^2 = \Gamma Z^2 : Z\Delta^2$, (VI. 20, πόρ.). Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι $AE^2 + EB^2 : EB^2 = \Gamma Z^2 + Z\Delta^2 : Z\Delta^2$ [καὶ ἐναλλάξ]· εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ BE^2 πρὸς τὸ ΔZ^2· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $AE^2 + EB^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, (V. 16 καὶ θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $AE^2 + EB^2$, (θ. 76)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, (ὅρ. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς $AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$, σύμμετρον δὲ τὸ AE^2 πρὸς τὸ ΓZ^2, ἄρα καὶ τὸ $AE \times EB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $AE \times EB$, (θ. 76)· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$ εἶναι μέσον (θ. 23, πόρ.)· ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων, (θ. 76)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϱϛ´

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

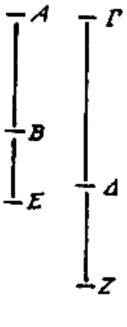
Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϱζ´

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.



Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

106

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα AE^2+EB^2 μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $AE \times EB$ ῥητόν, (θ. 75). Καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἶναι $\Gamma Z : Z\Delta = AE : EB$, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα AE^2+EB^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma Z^2+Z\Delta^2$, πρὸς δὲ τὸ $AE \times EB$ τὸ $\Gamma Z \times Z\Delta$· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $\Gamma Z^2+Z\Delta^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

107

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον εἶναι καὶ αὐτὴ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν, (θ. 78). Καὶ εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη, (θ. 104), αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι πρὸς τὰς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρα· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν.

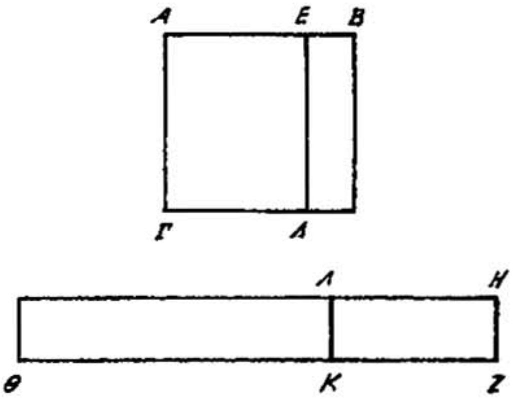
Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 78)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙη´

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει. αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.



Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙθ´

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν

108

Ἐὰν ἀπὸ ῥητοῦ ὀρθογωνίου ἀφαιρεθῇ μέσον ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον χωρίον γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων, ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ΒΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, πρὸς δὲ τὸ ΔΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΗΚ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ $=$ ΛΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΒΓ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΒΔ μέσον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ πρὸς τὸ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ πρὸς τὸ ΗΚ, ἄρα τὸ μὲν ΗΘ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΗΚ μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 20), ἡ δὲ ΖΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΘ, ΖΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΚΖ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου, (θὰ εἶναι δηλ. ΘΖ, $\sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΘΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 1). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς εἶναι ἀποτομή, (θ. 91). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, εἶναι ἀποτομή.

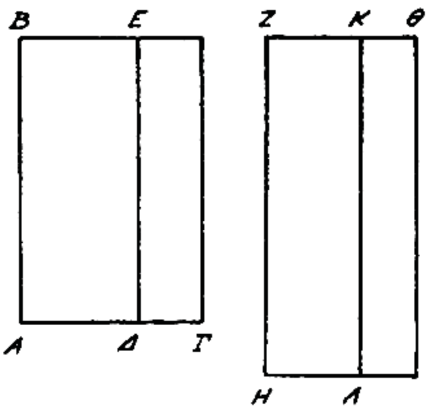
Ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΖΘ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἐλάσσων (θ. 94)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

109

Ἐὰν ἀπὸ μέσου ἀφαιρεθῇ ῥητὸν γίνονται ἄλλαι δύο ἄλογοι ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν τὸ ΒΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται *τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.*

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.



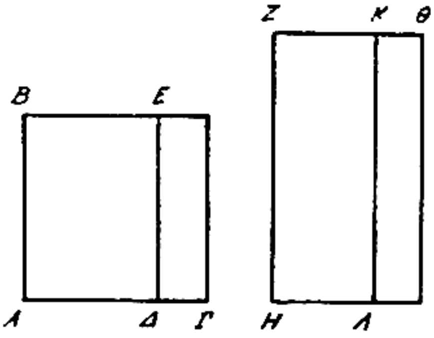
Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρι´

Ἀπὸ μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ].

Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀπο-

μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ ἂς παραβληθῶσι τὰ ὀρθογώνια ὡς κατὰ τὸ προηγούμενον (108) θεώρημα. Συνεπῶς ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ εἰς ταύτην ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ($\Theta Z, \sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 2). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 92).

Ἐὰν δὲ τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι πέμπτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 5)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, (θ. 95)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

110

Ἀπὸ μέσου ἀφαιρουμένου μέσου ἀσυμμέτρου πρὸς τὸ ὅλον γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ὡς εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὅλον. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΓΕ εἶναι μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΒΓ, ΒΔ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΒΔ, θὰ εἶναι συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΖΚ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τομὴ τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

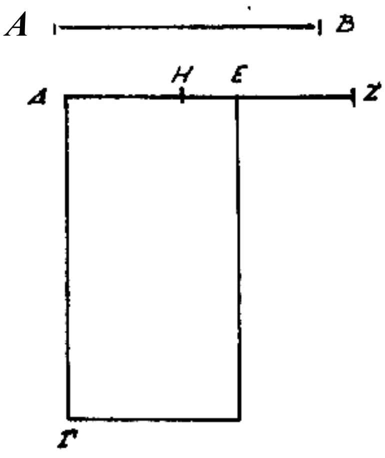
Εἰ δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ἀποτομὴ ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρια'

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ



τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶ ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ μεῖζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ, ῥητὴ ἄρα

ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΗΚ, εἶναι καὶ ἡ ΘΖ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΖΘ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. θὰ εἶναι ΖΘ, $\sqrt{Z\Theta^2 - ZK^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι)].

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $Z\Theta^2$ ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΘ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, (θ. 93)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Ἐὰν δὲ τὸ $Z\Theta^2$ ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΘ) καὶ οὐδεμία τῶν ΘΖ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι ἕκτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 6). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον πλευρῶν, ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 96). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

111

Ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ πρὸς τὸ AB^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομή, ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη ἀποτομή, (θ. 97). Ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΕΖ· ἄρα αἱ ΔΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ΔZ^2 ὑπερέχει τοῦ ZE^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΔΖ, $\sqrt{\Delta Z^2 - ZE^2}$ σύμμετροι), καὶ ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. τρίτοι 1). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 60). Ἂς διαιρεθῇ αὕτη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ· ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΕ, εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ΔH^2 ὑπερέχει τοῦ HE^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΔΗ), καὶ τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. δευτ. 1). Καὶ ἡ ΔΖ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΔΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 12)· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ ΗΖ εἶναι πρὸς τὴν ΔΖ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). [Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν *ἐστὶ καὶ ἡ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ μήκει. αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.*

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Π ό ρ ι σ μ α]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὐτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ,

Μέσην,
Ἐκ δύο ὀνομάτων,
Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
Μείζονα,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,
Δύο μέσα δυναμένην,
Ἀποτομήν,

ΗΖ, (θ. 15), εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΖ, ἄρα καὶ ἡ ΗΖ εἶναι ῥητή. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ], εἶναι δὲ μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ ἀποτομὴ ἄρα δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Π ό ρ ι σ μ α]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε πρὸς ἀλλήλας εἶναι αἱ αὐταί.

Διότι τὸ μὲν τετράγωνον μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ῥητὴν καὶ μήκει ἀσύμμετρον πρὸς τὴν ῥητὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22), τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν, (θ. 97), τὸ δὲ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν, (θ. 98), τὸ δὲ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν, (θ. 99), τὸ δὲ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομὴν (θ. 100), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν, (θ. 101), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν, (θ. 102). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι εἶναι ῥητή, μεταξύ των δέ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταί, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον, (θ. 111), σχηματίζουσι δὲ παραβαλλόμεναι παρὰ ῥητὴν πλάτη αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ, ἀποτομὰς κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, αἱ δὲ μετὰ τὴν δυώνυμον καὶ αὐταὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς δυωνύμους κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, ἄρα ἄλλαι εἶναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἄλλαι αἱ μετὰ τὴν δυώνυμον, ὥστε νὰ εἶναι ὅλαι αἱ ἄλογοι κατὰ τὴν τάξιν δεκατρεῖς, ἤτοι:

Μέση,
Δυώνυμος,
Ἐκ δύο μέσων πρώτη,
Ἐκ δύο μέσων δευτέρα,
Μείζων,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη,
Δύο μέσα δυναμένη,
Ἀποτομή,

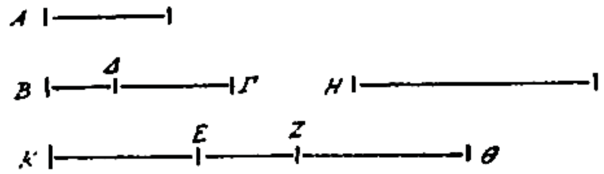
Μέσης ἀποτομὴν πρώτην,
Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν,
Ἐλάσσονα,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

ριβ´

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ·



καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ. ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

Πρώτη ἀποτομὴ μέσης,
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης,
Ἐλάσσων,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

112

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ τὴν δυώνυμον σχηματίζει πλάτος ἀποτομήν, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἀκόμη ἡ γινομένη ἀποτομὴ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, δυώνυμος δὲ ἡ ΒΓ, τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ $Α^2 = ΒΓ \times ΕΖ$· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰς ΓΔ, ΔΒ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΕΖ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι ἔστω πάλιν $Α^2 = ΒΔ \times Η$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΒΓ \times ΕΖ = ΒΔ \times Η$, εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = Η : ΕΖ$, (VI. 16). Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ Η εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ, (VI. 16 καὶ 14)· ἔστω $Η = ΕΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = ΘΕ : ΕΖ$· καὶ διὰ διαιρέσεως τοῦ λόγου, (V. ὁρ. 15) εἶναι $ΓΔ : ΒΔ = ΘΖ : ΖΕ$, (V. 17). Ἄς γίνῃ ὡς ἡ $ΘΖ : ΖΕ = ΖΚ : ΚΕ$· καὶ ὅλη ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΕ$· διότι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V. 12). Ὡς δὲ ἡ $ΖΚ : ΚΕ = ΓΔ : ΔΒ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΓΔ : ΔΒ$. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΒ^2$, (θ. 36)· ἄρα καὶ τὸ $ΘΚ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΚΖ^2$, (VI. 20, πόρ. καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι ὡς τὸ $ΘΚ^2 : ΚΖ^2 =$ ἡ $ΘΚ : ΚΕ$, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ εἶναι ἀνάλογοι (V. ὁρισ. 9). Ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 11)· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 15). Καὶ ἐπειδὴ $Α^2 = ΕΘ \times ΒΔ$, εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΕΘ \times ΒΔ$. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 20)· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΚ εἶναι ῥητή, (ὁρ. 3) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 12). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΓΔ : ΔΒ = ΖΚ : ΚΕ$, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ· ἄρα καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

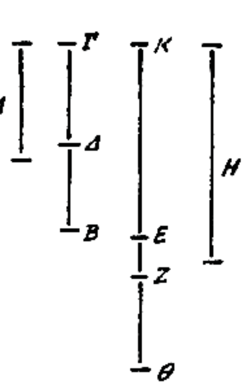
Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριγ'

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστιν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.



Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς Η. μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΕ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν

Τὸ δὲ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ($ΓΔ$, $\sqrt{ΓΔ^2-ΔΒ^2}$ σύμμ. ἢ ἀσύμμ.).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ, (θ. 11 καὶ 12)· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΕ, (θ. 12)· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Ἐὰν δὲ τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΔ), καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἡ ΖΕ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΖΚ, ΚΕ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΔ, ΔΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

113

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ ἀποτομὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δυώνυμον, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἀκόμη δὲ ἡ γινομένη δυώνυμος ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ἀποτομήν.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἰσοδύναμον τὸ $ΒΔ\times ΚΘ$, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ῥητῆς Α παραβαλλόμενον παρὰ τὴν ἀποτομὴν ΒΔ νὰ σχηματίζῃ πλάτος τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ΒΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΚΘ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΔ.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· ἄρα αἱ ΒΓ, ΓΔ εἶναί ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἴσον τὸ $ΒΓ\times Η$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΒΓ\times Η$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΒΓ· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΒΓ\times Η$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΒΔ\times ΚΘ$, ἄρα εἶναι $ΓΒ:ΒΔ=ΚΘ:Η$, (VI. 16). Καὶ εἶναι ἡ ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ ΚΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Η, (V. 16 καὶ 14). Ἂς ληφθῇ $ΚΕ=Η$· ἄρα ἡ ΚΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΓΒ:ΒΔ=ΘΚ:ΚΕ$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ:ΓΔ=ΚΘ:ΘΕ$, (V. 19, πόρ.). Ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΚΘ:ΘΕ=ΘΖ:ΖΕ$· ἄρα καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ $ΚΖ:ΖΘ=ΚΘ:ΘΕ=ΒΓ:ΓΔ$, (V. 19). Αἱ δὲ *[ὡς] ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ· αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΚΖ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ μήκει. αἱ ΒΓ, ΓΔ δὲ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ ΚΘ.*

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριδ´

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι

ΒΓ, ΓΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΚΘ: ΘΕ=ΚΖ:ΖΘ, ἀλλὰ ΚΘ: ΘΕ= ΘΖ:ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ΚΖ:ΖΘ=ΘΖ:ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, (V. ὁρισ. 9)· καὶ ὡς ἄρα ΚΖ:ΖΕ=$ΚΖ^2$:$ΖΘ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΚΖ^2$ σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΘ^2$· διότι αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει σύμμετροι· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΕ, (θ. 11)· ὥστε ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 12). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΒΓ: ΓΔ= ΚΖ:ΖΘ, καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ΒΓ: ΚΖ=ΔΓ:ΖΘ, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 11). Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι ῥηταί, (ὁρ. 3) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΓΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ), καὶ τὸ $ΚΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΘ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, (θ. 12), ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ, (θ. 13).

Ἐὰν δὲ τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΓΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ) καὶ τὸ $ΚΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΘ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, (θ. 12), ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ.

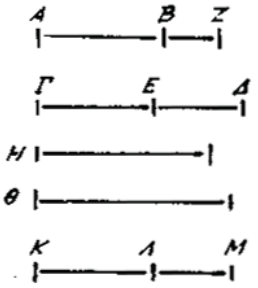
Ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΚΖ, ΖΘ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΒΓ, ΓΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ἡ ΚΘ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

114

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Διότι ἄς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒ × ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς δυωνύμου τῆς ΓΔ, τῆς ὁποίας μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου ΓΔ τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον *τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.*

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΛΜ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.



Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Πόρισμα

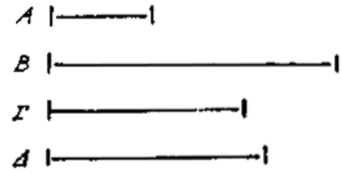
Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριε'

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ· καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].



πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἔστω $H^2 = AB \times \Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ Η εἶναι ῥητή.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ πρὸς τὸ Θ^2 ἴσον ὀρθογώνιον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα ἡ ΚΛ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΕ, ΕΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, (θ. 112). Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι σύμμετροι πρὸς τὰς ΑΖ, ΖΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· εἶναι ἄρα $AZ : ZB = KM : M\Lambda$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $AZ : KM = BZ : \Lambda M$, (V. 16)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΚΛ εἶναι ὡς $AZ : KM$ (V. 19). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 12)· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θ. 11). Καὶ εἶναι $AB : K\Lambda = \Gamma\Delta \times AB : \Gamma\Delta \times K\Lambda$· (VI. 1)· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma\Delta \times K\Lambda$, (θ. 9). Εἶναι δὲ $\Gamma\Delta \times K\Lambda = \Theta^2$· ἄρα τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Θ^2. Πρὸς δὲ τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι ἴσον τὸ H^2· ἄρα τὸ H^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Θ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ Θ^2· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ H^2· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητή. Καὶ $H^2 = \Gamma\Delta \times AB$.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Πόρισμα

Καὶ γίνεται καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν ῥητὸν χωρίον νὰ περιέχηται ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

115

Ἀπὸ μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

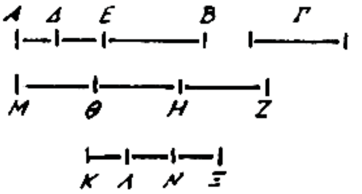
Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Β καὶ ἔστω $B \times A = \Gamma^2$· ἄρα ἡ Γ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4). διότι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον, (θ. 20). Καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων (ἀλόγων) εἶναι ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων σχηματίζει πλάτος μέσην παραβαλλόμενον παρὰ ῥητήν. Πάλιν λοιπὸν ἔστω $B \times \Gamma = \Delta^2$· ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι ἄλογον (θ. 20). Ἄρα ἡ Δ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4)· καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον ὁ τοιοῦτος συλλογισμός, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἀλόγων εἶναι ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1

Ἄλλως τὸ α´ θεώρημα

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ· καὶ ἐπεὶ ἐλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ καὶ διῃρήσθω εἰς [τὰ] ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΕΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΕΔ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως αἱ ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεσιν. γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἕκαστον τῶν ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γινέσθω, ἕως αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.

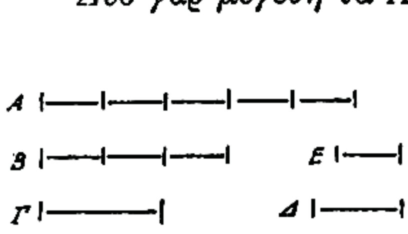


Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ ἔστι τοῦ ΒΑ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἐστιν ἴσον τῷ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. ἴσον δὲ τὸ ΛΑ τῷ ΛΚ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΖΜ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΚΞ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΖ τοῦ ΛΚ. καί ἐστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2

Ἄλλως τὸ ς´

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.



Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμόν, τὸ Ε πρὸς τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ, τὸ Ε πρὸς τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α,

1

Ἄλλως τὸ 1

Ἂς ληφθῶσι δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ· καὶ ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι μικρότερον, λαμβανόμενον πολλὰς φορὰς θὰ γίνῃ κάποτε μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους ΑΒ, (V. ὁρισ. 4). Ἂς γίνῃ ὡς τὸ ΖΜ καὶ ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ καὶ ἔστω ταῦτα τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἂς ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΕΑ ἂς ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΔ καὶ ἂς γίνηται τοῦτο διαρκῶς μέχρις ὅτου αἱ εἰς τὸ ΖΜ διαιρέσεις γίνωσιν ἴσαι πρὸς τὰς διαιρέσεις εἰς τὸ ΑΒ. Ἔστω ὅτι ἔγιναν αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ καὶ ἔστω ΔΑ=ΚΛ=ΛΝ=ΝΞ, καὶ τοῦτο ἂς γίνῃ μέχρις ὅτου τὸ πλῆθος τῶν διαιρέσεων τοῦ ΚΞ γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν διαιρέσεων τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΒΑ, τὸ ΒΕ $>$ ΕΑ· ἄρα εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΔΑ=ΞΝ· ἄρα ΒΕ $>$ ΝΞ. Πάλιν, ἐπειδὴ ΕΔ $>$ 1/2 ΕΑ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ ΔΑ=ΝΛ· ἄρα ΕΔ $>$ ΝΛ. Ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ $>$ ΞΛ. εἶναι δὲ ΔΑ=ΛΚ. Ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ $>$ ΞΚ. Ἀλλὰ ΜΖ $>$ ΒΑ· ἄρα τὸ ΜΖ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπειδὴ ΞΝ=ΝΛ=ΛΚ, εἶναι δὲ καὶ ΜΘ=ΘΗ=ΗΖ, καὶ τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΜΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΞΚ, εἶναι ἄρα ΚΛ:ΖΗ=ΚΞ:ΖΜ, (V. 15). Εἶναι δὲ ΖΜ $>$ ΚΞ· ἄρα ΗΖ $>$ ΛΜ, (V. 14). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΖΗ=Γ, τὸ δὲ ΚΛ=ΑΔ· ἄρα Γ $>$ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2

Ἄλλως τὸ 6

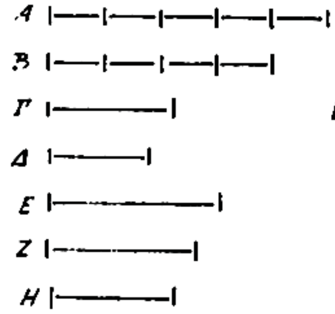
Διότι ἂς ἔχωσι λόγον μεταξύ των δύο μεγέθη τὰ Α, Β ὃν λόγον ἔχει ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Διότι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Γ εἰς τόσα ἴσα μέρη ἂς διαιρεθῇ τὸ μέγεθος Α καὶ πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν ἔστω ἴσον τὸ Ε· εἶναι ἄρα 1:Γ=Ε:Α, (V. 15). Εἶναι δὲ καὶ Γ:Δ=Α:Β· δι' ἴσου ἄρα εἶναι 1:Δ=Ε:Β, (V. 22). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· ἄρα καὶ τὸ Ε μετρεῖ τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπειδὴ καὶ ἡ *ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστιν, καί ἐστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

3

Ἄλλως τὸ θ´

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸςτὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α,Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἔστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀρθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β. αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.

μονὰς μετρεῖ τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β· ἄρα τὰ Α, Β εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ Ε εἶναι κοινὸν μέτρον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3

Ἄλλως τὸ 9

Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἔχει λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θ. 6). Ἂς ἔχῃ ὃν λόγον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω $\Gamma\times\Gamma=$ Ε, $\Gamma\times\Delta=Z$, $\Delta\times\Delta=H$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $\Gamma^2=E$, $\Gamma\times\Delta=Z$, εἶναι ἄρα $\Gamma:\Delta$, τουτέστιν $A:B=E:Z$, (VII. 17). Ἀλλ' ὡς $A:B=A^2:A\times B$· εἶναι ἄρα $A^2:A\times B=E:Z$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\Delta^2=H$ καὶ $\Gamma\times\Delta=Z$, εἶναι ἄρα $\Gamma:\Delta$, τουτέστιν $A:B=Z:H$. Ἀλλ' ὡς $A:B=A\times B:B^2$· εἶναι ἄρα $A\times B:B^2=Z:H$. Ἀλλὰ $A^2:A\times B=E:Z$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A^2:B^2=E:H$, (V. 22). Εἶναι δὲ ἕκαστος τῶν Ε, Η τετράγωνος· διότι ὁ μὲν $E=\Gamma^2$, ὁ δὲ $H=\Delta^2$· ἄρα $A^2:B^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ἂς ἔχῃ τώρα τὸ A^2 πρὸς B^2 λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Διότι ἔστω τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ἔστω $\Gamma\times\Delta=Z$· ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον $\Gamma:\Delta$ (VIII. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν A^2, B^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $A\times B$, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ, εἶναι ἄρα $A^2:A\times B=E:Z$. Ὡς δὲ $A\times B:B^2=Z:H$, ἀλλὰ $A^2:A\times B=A:B$. Αἱ Α, Β, ἄρα εἶναι σύμμετροι· διότι ἔχουσι λόγον ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, (θ. 6), τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· διότι $\Gamma:\Delta=E:Z$· διότι $\Gamma^2=E$ καὶ $\Gamma\times\Delta=Z$, (VII. 17)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ $\Gamma:\Delta=E:Z$.

4

Εἰς τὸ 10

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον τῇ Α, προσεύρηται δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.

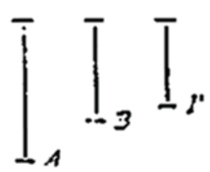
5

Εἰς τὸ 13

Εἰς τὸ ιγ' λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α, καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

6

Εἰς τὸ 18

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροι εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται ῥηταὶ μήκει σύμμετροι ἐπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὗται οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

4

Εἰς τὸ 10

Ἄρα πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ῥητὴν εὐθεῖαν, ἀφ' ἧς εἴπομεν ὅτι λαμβάνονται τὰ μέτρα, ὡς π.χ. πρὸς τὴν Α, εὑρέθη δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε· διότι ἀλόγους καθόλου καλεῖ τὰς μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους πρὸς τὴν ῥητήν.

5

Εἰς τὸ 13

Εἰς τὸ 13 λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη καὶ τὸ μὲν εἶναι σύμμετρον, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ αὐτό, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι ἔστω δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α ἔστω σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, τὸ δὲ Β ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Γ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Διότι ἐὰν τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, εἶναι δὲ καὶ τὸ Γ σύμμετρον πρὸς τὸ Α, ἄρα καὶ τὸ Γ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

6

Εἰς τὸ 18

Διότι ῥητὰς καλεῖ τὰς πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ἢ μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι μήκει μὲν εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, δυνάμει δὲ σύμμετροι μόνον καὶ διὰ τοῦτο λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, δηλ. ἢ μήκει καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι μήκει σύμμετροι λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταί, ἐπακουομένου μήκει σύμμετροι, διότι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι· ἐὰν δὲ εἶναι μόνον δυνάμει σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, λέγονται καὶ αὐταὶ τοιουτοτρόπως, δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ εἶναι σύμμετροι εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ ἑξῆς· διότι, ἐπειδὴ ῥηταὶ εἶναι αἱ σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, τὰ δὲ σύμμετρα πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα, (θ. 12), ἄρα αἱ ῥηταὶ εἶναι σύμμετροι.

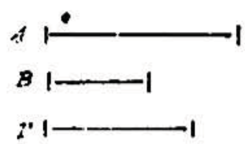
7

Εἰς τὸ 20

Λῆμμα

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον ἄλογός ἐστιν.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ. λέγω, ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.



Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· οὕτως γὰρ [ἐστιν] ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8

Εἰς τὸ 23

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι ἑπομένου τοῦ, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

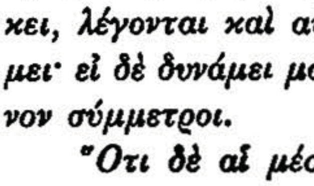
Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον. ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσιν, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

9

Λῆμμα

Εἰς τὸ 27

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῳοῦν καὶ ἄλλου τινὸς δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινά.



Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιονοῦν, ἄλλος δέ τις ὁ ΓΕ. δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ, καὶ τῷ ΔΕ ἴσον παρὰ τὸν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΕ

7

Εἰς τὸ 20

Λῆμμα

Ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἄλογον χωρίον εἶναι ἄλογος.

Διότι ἂς δύναται ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ A^2 ἔστω ἰσοδύναμον πρὸς ἄλογον χωρίον. Λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι ἄλογος.

Διότι ἐὰν θὰ εἶναι ῥητὴ ἡ Α θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ A^2· διότι τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τοὺς ὁρισμοὺς (ὁρ. 4). Ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ Α εἶναι ἄλογος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8

Εἰς τὸ 23, πόρισμα

Ὑπάρχουσι δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι μήκει μὲν εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μέσην, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διότι εἶναι σύμμετροι δυνάμει πρὸς τὴν μέσην καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἢ δηλ. μήκει καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι μήκει σύμμετροι, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ὑπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει εἶναι σύμμετροι· ἐὰν δὲ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, λέγονται καὶ τοιουτοτρόπως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι εἶναι σύμμετροι, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ αἱ μέσαι εἶναι πρὸς μέσην τινὰ σύμμετροι, τὰ δὲ σύμμετρα πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα, ἄρα αἱ μέσαι εἶναι σύμμετροι.

9

Εἰς τὸ 27

Λῆμμα

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εἰς οἱονδήποτε λόγον καὶ ἄλλου τινὸς νὰ γίνῃ ὡς ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως ὁ ἄλλος πρὸς ἄλλον τινά.

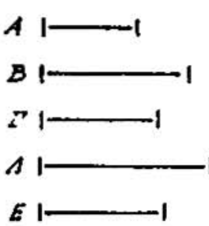
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους οἱονδήποτε, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς ὁ ΓΕ. Πρέπει νὰ γίνῃ τὸ ζητηθέν.

Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον πλευρῶν ΔΓ, ΓΕ, τὸ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ ΔΕ ἰσοδύναμον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΑΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΔΕ=ΒΖ εἶναι δὲ *παραλληλόγραμμον τῷ BZ παραλληλογράμμῳ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΓE πρὸς τὸν AZ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

10

Λῆμμα εἰς τὸ κθ΄

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπ' ἄλλης τινός.



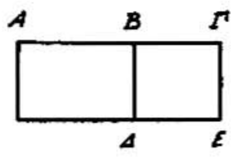
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, εὐθεῖαι δὲ ἡ Γ, καὶ δέον ἐστὶ ποιῆσαι τὸ προκείμενον. πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ, ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E, ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E τετράγωνον.

11

Λῆμμα εἰς τὸ λα΄

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔEΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δή, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ AΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν AΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἴση γὰρ ἡ BΓ τῇ BΔ· τὸ δὲ BE τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



12

Λῆμμα εἰς τὸ λβ΄

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ αἱ AB, BΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓΔ.

ταῦτα καὶ ἰσογώνια, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (VI. 14), ἄρα εἶναι $AB : \Gamma\Delta = \Gamma E : AZ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

Λῆμμα εἰς τὸ 29

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας νὰ γίνῃ ὡς ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας πρὸς τὸ τετράγωνον ἄλλης τινός.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, εὐθεῖα δὲ ἡ Γ, καὶ ζητεῖται νὰ γίνῃ ἡ ἀνωτέρω κατασκευή. Διότι ἂς γίνῃ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ἡ εὐθεῖα Γ πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ, (θ. 6, πόρ.), καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε, (VI. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, ἀλλὰ $\Gamma : \Delta = \Gamma^2 : E^2$ (V. ὁρ. 9), ἄρα $A : B = \Gamma^2 : E^2$.

11

Λῆμμα εἰς τὸ 31

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι εἰς λόγον τινά, θὰ εἶναι ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς δύο πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἰς λόγον τινά· λέγω, ὅτι εἶναι $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$. Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον αὐτῆς τὸ ΒΔΕΓ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ. Εἶναι φανερὸν ὅτι $AB : B\Gamma =$ τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον (VI. 1). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $A\Delta = AB \times B\Gamma$· διότι $B\Gamma = B\Delta$· τὸ δὲ $BE = B\Gamma^2$· ὡς ἄρα $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

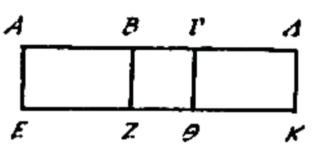
12

Λῆμμα εἰς τὸ 32

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινά, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν πρώτην καὶ τὴν μέσην πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν μέσην καὶ τὴν ἐλαχίστην.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινὰ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι εἶναι $AB : \Gamma\Delta = AB \times B\Gamma : B\Gamma \times \Gamma\Delta$.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΓΘ, ΔΚ.



καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΚ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΚ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Εἰς τὸ λῆμμα τοῦ 32

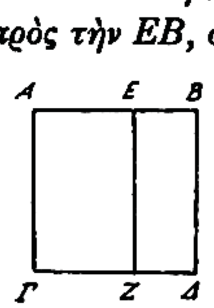
Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ· ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. καί ἐστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

14

Λῆμμα εἰς τὸ 33

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. φανερὸν οὖν, ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· ἴση γὰρ ἡ ΒΔ τῇ ΑΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΕ=ΒΓ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ ἡ ΕΚ, διὰ δὲ τῶν σημείων Β, Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΕ αἱ ΖΒ, ΓΘ, ΔΚ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΑΒ : ΒΓ = ΑΖ : ΒΘ, (VI. 1), ὡς δὲ ΒΓ : ΓΔ= ΒΘ : ΓΚ, (VI. 1), δι' ἴσου ἄρα εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΑΖ : ΓΚ, (V. 22). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΖ = ΑΒ × ΒΓ· διότι ΑΕ = ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ = ΒΓ × ΓΔ· διότι ΒΓ = ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινά, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὀρθ. τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Εἰς τὸ λῆμμα τοῦ 32

Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΓ καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, θὰ εἶναι ἴσον τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΑΖ· διότι ἕκαστον αὐτῶν εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, (I. 41). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΕΓ = ΒΓ × ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ = ΒΑ × ΑΓ. Ἄρα τὸ ΒΓ × ΑΔ = ΒΑ × ΑΓ.

14

Λῆμμα εἰς τὸ 33

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, θὰ εἶναι ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μεγαλυτέρας πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μικροτέρας.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ΑΕ : ΕΒ= ΒΑ × ΑΕ : ΑΒ × ΒΕ.

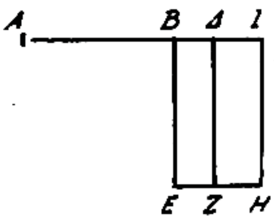
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον αὐτῆς τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ΑΓ, ΒΔ ἡ ΕΖ. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΑΖ : ΖΒ, (VI. 1). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΖ = ΒΑ × ΑΕ· διότι ΑΓ = ΑΒ· τὸ δὲ ΖΒ = ΑΒ × ΒΕ· διότι ΒΔ = ΑΒ. Ὡς ἄρα ΑΕ : ΕΒ= ΒΑ × ΑΕ : ΑΒ × ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

Λῆμμα εἰς τὸ 34

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ· διπλασίων δέ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ· τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16

Εἰς τὸ 36

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων *διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν συγκεῖσθαι κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητόν, καθ' ὃ ῥητόν.*

17

Εἰς τὸ 37

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν.

18

Εἰς τὸ 38

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν διὰ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ μὴ ῥητόν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, δῆλον. εἰ γὰρ ἔσται ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητήν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

15

Λῆμμα εἰς τὸ 34

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι $ΑΒ \times ΒΓ = 2ΑΒ \times ΒΔ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΒΕ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΒΕ = ΒΑ$ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΔΒ : ΔΓ = ΒΖ : ΔΗ$, (VI. 1), διὰ συνθέσεως, (V. 18) ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΔΓ = ΒΗ : ΔΗ$· Εἶναι δὲ $ΒΓ = 2ΔΓ$· ἄρα $ΒΗ = 2ΔΗ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΒΗ = ΑΒ \times ΒΓ$· διότι $ΑΒ = ΒΕ$· τὸ δὲ $ΔΗ = ΑΒ \times ΒΔ$· διότι $ΒΔ = ΔΓ$ καὶ $ΑΒ = ΔΖ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16

Εἰς τὸ 36

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν δυώνυμον, διότι ἀποτελεῖται ἐκ δύο ῥητῶν, καλῶν κύριον ὄνομα (μονώνυμον) τὸ ῥητόν, καθ' ὃ ῥητόν.

17

Εἰς τὸ 37

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην, διότι περιέχει ῥητὸν καὶ προηγεῖται τὸ ῥητόν.

18

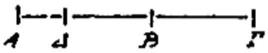
Εἰς τὸ 38

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διότι τὸ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν εἶναι μέσον καὶ οὐχὶ ῥητόν, ἕπεται δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου εἶναι ἄλογον, εἶναι φανερόν. Διότι ἐὰν θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ ἔχῃ παραβληθῇ παρὰ ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτοῦ ῥητὴ (θ. 22). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἄλογος· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἄλογον.

19

Εἰς τὸ 39

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ,ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὕτως δεικτέον.



Φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ· εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΔΑ.

20

Εἰς τὸ 40

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητόν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν πρῶτον ἐκάλεσεν.

21

Εἰς τὸ 41

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

22

Εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ᾽ ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ᾽ ὧν τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μέν, ἐφ᾽ ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δευτέραν δέ, ἐφ᾽ ἧς τὸ ἔλασσον, διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον, τρίτην δέ, ἐφ᾽ ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι

19

Εἰς τὸ 39

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διότι τὸ ῥητὸν ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2AB\times B\Gamma$, καὶ δέον ἡ ὀνομασία νὰ τίθεται ἐκ τῆς τοιαύτης τῶν ῥητῶν. Ὅτι δὲ $AB^2+B\Gamma^2 > 2AB\times B\Gamma$, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ AB, $B\Gamma$ εἶναι ἄνισοι. Διότι ἐὰν ἦσαν ἴσαι θὰ ἦτο $AB^2+B\Gamma^2=2AB\times B\Gamma$, καὶ θὰ ἦτο τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ ῥητόν· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν· ἄρα αἱ AB, $B\Gamma$ εἶναι ἄνισοι. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ AB καὶ ἂς ληφθῇ $B\Delta=B\Gamma$· ἄρα εἶναι $AB^2+B\Delta^2=2AB\times B\Delta+\Delta A^2$, (II. 7). Εἶναι δὲ $\Delta B=B\Gamma$· ἄρα $AB^2+B\Gamma^2=2AB\times B\Gamma+A\Delta^2$· ὥστε τὸ $AB^2+B\Gamma^2$ ὑπερέχει τοῦ $2AB\times B\Gamma$ κατὰ τὸ ΔA^2.

20

Εἰς τὸ 40

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη, διότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο χωρία, τοῦ ἑνὸς μὲν ῥητοῦ, τοῦ ἄλλου δὲ μέσου· καὶ διὰ τὴν προήγησιν τοῦ ῥητοῦ τὸ ἐκάλεσε πρῶτον ῥητόν.

21

Εἰς τὸ 41

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο μέσα χωρία, καὶ πρὸς τὸ $AB^2+B\Gamma^2$ καὶ πρὸς τὸ $2AB\times B\Gamma$.

22

Εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς

Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τοιουτοτρόπως ἓξ εὐθεῖαι, κατατάσσει ὡς πρώτας κατὰ τὴν τάξιν τρεῖς, ἐπὶ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλ.), ὡς δευτέρας δὲ κατὰ τὴν τάξιν τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐπὶ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλ.), διότι προηγεῖται τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ πρὸς τούτοις καλεῖ πρώτην μὲν (δυώνυμον) ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, δευτέραν δὲ (δυώνυμον), ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ μικρότερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, διότι πάλιν τὸ μεγαλύτερον προηγεῖται τοῦ μικροτέρου, καθότι τοῦτο περιέχει τὸ μικρότερον, τρίτην δὲ (δυώνυμον), ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας οὐδὲν ἐκ τῶν δύο *τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.*

23

Εἰς τὸ 90

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ. αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΔ. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

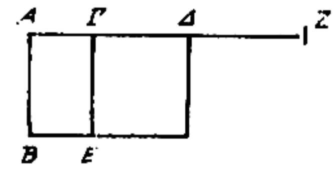
24

Εἰς τὸ 115

Ἄλλως

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίγνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.



Ἀπὸ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστὶν

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος [ἔστω] ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν.

μονωνύμων εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν. Καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὁμοίως, καλῶν τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην (δυώνυμον) καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

23

Εἰς τὸ 90

Δύναται δὲ νὰ δειχθῇ καὶ συντομώτερον ἡ εὕρεσις τῶν εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. Καὶ ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη ἀποτομή. Ἂς ληφθῇ ἡ πρώτη δυώνυμος ἡ ΑΓ, τῆς ὁποίας μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔ = ΒΓ. Ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ $ΑΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΒΓ^2$, τουτέστι τοῦ $ΒΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΒΓ), καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος μήκει πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, (ὁριστ. δεύτ. 1)· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη ἀποτομή. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ εὕρωμεν καὶ τὰς ἄλλας ἀποτομάς, λαμβάνοντες τὰς ἰσαρίθμους δυωνύμους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24

Ἄλλως τὸ 115

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΒΓ· ἄρα τὸ ΒΓ εἶναι ἄλογον, (θ. 20) καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Ἔστω $ΓΔ^2 = ΒΓ$· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἄλογος καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν (ὡς ὀρθογώνιον) σχηματίζει πλάτος μέσην. Πάλιν, ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΕΔ· ἄρα τὸ ΕΔ εἶναι ἄλογον (θ. 20), καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Ἔστω $ΔΖ^2 = ΕΔ$· ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι ἄλογος. Καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ μέσης ἄρα γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

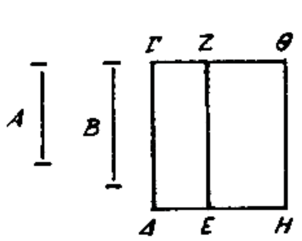
25

Ἄλλως τὸ 105

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα εἶναι ἐλάσσων

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω σύμμετρος ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β εἶναι ἐλάσσων.

Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δέ ἐστι τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΗΖ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



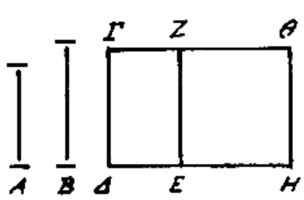
26

Ἄλλως τὸ 106

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



27

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἂς παραβληθῇ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (θ. 100). Πρὸς δὲ τὸ $Β^2$ ἂς παραβληθῇ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ΖΕ τὸ ΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἄρα καὶ τὸ $Α^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $Β^2$. Ἀλλὰ $Α^2 = ΓΕ$, $Β^2 = ΖΗ$· ἄρα τὸ ΓΕ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ. Ὡς δὲ $ΓΕ : ΖΗ = ΓΖ : ΖΘ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΘ, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ ΓΖ τετάρτη ἀποτομή· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (θ. 103)· ἄρα τὸ ΖΗ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ τετάρτης ἀποτομῆς τῆς ΖΘ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἐλάσσων, (θ. 94). Εἶναι δὲ $Β^2 = ΖΗ$· ἄρα ἡ Β εἶναι ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ἡ Α, σύμμετρος δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

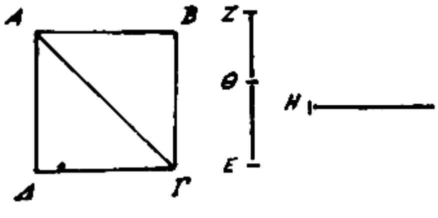
Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ πρὸς μὲν τὸ $Α^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (θ. 101). Πρὸς δὲ τὸ $Β^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΕ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, εἶναι καὶ τὸ $Α^2$ σύμμετρον πρὸς τὸ $Β^2$. Ἀλλὰ $Α^2 = ΓΕ$, $Β^2 = ΖΗ$· ἄρα τὸ ΓΕ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ· ἄρα καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΘ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Εἶναι δὲ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΓΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (θ. 103). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΕ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πέμπτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον. Εἶναι δὲ $Β^2 = ΖΗ$· ἡ Β ἄρα εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὰ τετράγωνα σχήματα ἡ διαγώνιος εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον



ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν, ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν. ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΕΘ. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η· ἀλλὰ καὶ περισσός. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως

[Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ].

Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β. λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετρά-

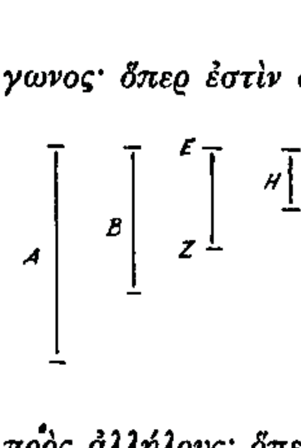
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος· λέγω, ὅτι θὰ συμβῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ εἶναι καὶ ἄρτιος καὶ περιττός. Εἶναι μὲν λοιπὸν φανερόν, ὅτι $A\Gamma^2 = 2AB^2$, (I. 47). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θ. 6). Ἃς ἔχῃ, ὃν ὁ ἀριθμὸς ΕΖ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Η καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, (VII. 33)· ἄρα ὁ ΕΖ δὲν εἶναι μονάς. Διότι ἐὰν ὁ ΕΖ εἶναι μονάς, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ $A\Gamma : AB$ καὶ ἡ $A\Gamma > AB$, ἄρα καὶ ὁ ΕΖ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ Η, (V. 14)· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ὁ ΕΖ δὲν εἶναι μονάς· ἄρα εἶναι ἀριθμὸς (δηλ. πλῆθος μονάδων)· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma A : AB = EZ : H$, εἶναι ἄρα $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$, (VI. 20, πόρ. VIII. 11). Εἶναι δὲ $\Gamma A^2 = 2AB^2$· ἄρα $EZ^2 = 2H^2$· ἄρα ὁ EZ^2 εἶναι ἄρτιος· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος. Διότι ἐὰν ἦτο περιττός, θὰ ἦτο περιττὸς καὶ ὁ EZ^2, διότι, ἐὰν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττὸν καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι περιττὸς (IX. 23)· ἄρα ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος. Ἃς τμηθῇ οὗτος εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ΕΖ, Η εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 21). Καὶ ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος· ἄρα ὁ Η εἶναι περιττός. Διότι ἐὰν ἦτο ἄρτιος θὰ ἐμέτρει τοὺς ΕΖ, Η ὁ δύο· διότι πᾶς ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, (VII. ὁρ. 6)· ἐν ᾧ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Η δὲν εἶναι ἄρτιος· ἄρα εἶναι περιττός. Καὶ ἐπειδὴ $EZ = 2E\Theta$· ἄρα $EZ^2 = 4E\Theta^2$. Εἶναι δὲ $EZ^2 = 2H^2$· ἄρα $H^2 = 2E\Theta^2$· ἄρα ὁ H^2 εἶναι ἄρτιος· ἄρα κατὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η εἶναι ἄρτιος· ἀλλὰ εἶναι καὶ περιττός· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΓΑ δὲν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως

[Δύναται ν' ἀποδειχθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν].

Ἔστω διαγώνιος μὲν ἡ Α, πλευρὰ δὲ ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Β. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος· καὶ ἂς γίνῃ πάλιν $A : B =$ ἀριθμὸς ΕΖ: ἀριθμὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ἄρα οἱ ΕΖ, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η δὲν εἶναι μονάς. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι $H = 1$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : B = EZ : H$, θὰ εἶναι ἄρα $A^2 : B^2 = EZ^2 : H^2$, (VI. 20, πόρ. καὶ VII. 11). Εἶναι δὲ $A^2 = 2AB^2$ (I. 47), ἄρα $EZ^2 = 2H^2$.

γωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί

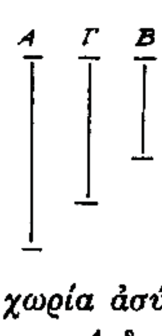


ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28

Σχόλιον

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα



ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὕρηνται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵ τε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ κύλινδροι, εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστι συμμετρία τε καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

Καὶ εἶναι μονὰς ὁ Η· ἄρα ὁ ΕΖ = 2· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὁ Η δὲν εἶναι μονάς· ἄρα εἶναι ἀριθμὸς (πλῆθος μονάδων). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A^2 : B^2 = EZ^2 : H^2$, καὶ ἀνάπαλιν εἶναι $B^2 : A^2 = H^2 : EZ^2$, μετρεῖ δὲ τὸ B^2 τὸ A^2, ἄρα καὶ ὁ H^2 μετρεῖ τὸν EZ^2· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΕΖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τοὺς ΕΖ, Η πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος ἡ Α πρὸς τὴν Β· ἄρα εἶναι ἀσύμμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28

Σχόλιον

Εὑρημένων τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκονται καὶ πλεῖστα ἄλλα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, ἐννοῶ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα μεταξύ των. Διότι ἐὰν λάβωμεν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Α, Β μέσην ἀνάλογον τὴν Γ, θὰ εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (VI. 19, πόρ.) εἴτε τετράγωνα εἶναι τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἄλλα ὅμοια εὐθύγραμμα, εἴτε κύκλοι μὲ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (XII. 2). Εὑρέθησαν ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ὑπάρχουσιν ἐκ δύο διαστάσεων ἀσύμμετρα χωρία ἀποδεικνύομεν τώρα ἐκ τῆς στερεομετρίας, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ στερεὰ σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα μεταξύ των. Διότι ἐὰν ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῶν Α, Β τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων πρὸς αὐτὰ εὐθυγράμμων ὑψώσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, θὰ εἶναι τὰ ὑψωθέντα στερεὰ μεταξύ των, ὡς αἱ βάσεις. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ βάσεις εἶναι σύμμετροι θὰ εἶναι τὰ στερεὰ σύμμετρα, ἐὰν δὲ ἀσύμμετροι θὰ εἶναι ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ὅμως καὶ ἐὰν ὑπάρχωσι δύο κύκλοι οἱ Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἀναγράψωμεν ἰσοϋψεῖς κώνους ἢ κυλίνδρους θὰ εἶναι οὗτοι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ κύκλοι Α, Β. Καὶ ἐὰν μὲν οἱ κύκλοι εἶναι σύμμετροι, θὰ εἶναι σύμμετροι καὶ οἱ κῶνοι μεταξύ των καὶ οἱ κύλινδροι, ἐὰν δὲ οἱ κύκλοι εἶναι ἀσύμμετροι θὰ εἶναι ἀσύμμετροι καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ οὕτως εἶναι εἰς ἡμᾶς φανερόν, ὅτι ὄχι μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ὑπάρχει συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ὁρισμοὶ

3. 1. Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ρ (καλουμένη ῥητή) καὶ δύο ἀριθμοὶ μὴ τετράγωνοι α, β. Τῶν α, β, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\rho\,\frac{\beta}{\alpha}$. Αὕτη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ρ καὶ ῥητή. Τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Συνεπῶς ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἑπομένως ῥηταί.

3. 2. Τῶν ρ, $\rho\,\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Αὕτη εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ρ. Ἐπειδὴ τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα ἔχομεν καὶ ἀπείρους εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρους πρὸς τὴν ρ.

3. 3. Τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, τὰ ρ^2, $\rho^2\,\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὑπάρχουσι δὲ εὐθεῖαι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος, διότι τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι ῥηταί, ἀλλὰ μήκει ἀσύμμετροι, τότε κατ' ἀνάγκην, καθ' ὁρισμόν, αὗται εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι (τὰ τετράγωνα αὐτῶν μόνον). Γενικῶς δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἔνθα α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι ἀριθμοί, (ρ τὸ μέτρον).

3. 4. Τῶν εὐθειῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$ εἶναι ἄλογοι (ἄρρητοι). Διότι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα. Εἶναι δὲ καὶ αὗται ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος, διότι τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Γενικῶς, μία ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι εἶναι ἄλογοι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν δὲν εἶναι σύμμετρα πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας λαμβανομένης ὡς ῥητῆς (μέτρου).

Θεώρ. 1. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας [λεγόμενον τοῦ Εὐδόξου] (V. ὁ. 4) καὶ ἀποτελεῖ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν.

2. Ἔστω τὰ μεγέθη ΑΒ $<$ ΓΔ καὶ ὅτι ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ μ. κ. διαιρέτου δύο ἀριθμῶν τὸ λαμβανόμενον ἑκάστοτε ὑπόλοιπον νὰ μὴ διαιρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. Λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα. Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι ἔστω Ε. Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma\Delta = AB.\rho_1 + \Gamma Z = \Delta Z + \Gamma Z \qquad (1)$$
$$AB = \Gamma Z.\rho_2 + AH = BH + AH \qquad (2)$$

Ἔστω δὲ ὅτι ἡ σχέσις (2) εἶναι ἡ νυοστὴ διαίρεσις καθ' ἣν ΑΗ $<$ Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΑΒ, τὸ δὲ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΖ ($=$ ΑΒ.ρ_1), ἄρα τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΔΖ. Ἄρα τὸ Ε θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΓΔ — ΔΖ $=$ ΓΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ μετρεῖ ἐκ τῆς (2) τὸ ΒΗ ($=$ ΓΖ.ρ_ν). Ἄρα τὸ Ε ἀφοῦ μετρεῖ καὶ τὸ ΑΒ θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ — ΒΗ $=$ ΑΗ, ὅπερ ἄτοπον, διότι Ε $>$ ΑΗ. Ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

3. Ἔστω τὰ σύμμετρα μεγέθη ΑΒ $<$ ΓΔ. Ἐὰν τὸ ΑΒ μετρῇ τὸ ΓΔ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι τὸ μ.κ.μ. τῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἐὰν δὲν τὸ μετρῇ, ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως, (εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν) ἔστω ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma\Delta = AB.\rho_1 + E\Gamma = E\Delta + E\Gamma \qquad (1)$$
$$AB = E\Gamma.\rho_2 + AZ = ZB + AZ \qquad (2)$$
$$E\Gamma = AZ.\rho_3 + O \qquad (3)$$

Τὸ ΑΖ μετρεῖ ἐκ τῆς (3) τὸ ΕΓ, τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς (2) μετρεῖ τὸ ΖΒ ($=$ ΕΓ.ρ_2). Ἄρα τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΖΒ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἄθροισμα ΖΒ $+$ ΑΖ $=$ ΑΒ. Τὸ ΑΒ μετρεῖ ἐκ τῆς (1) τὸ ΕΔ ($=$ ΑΒ.ρ_1). Ἄρα τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ ὅμως καὶ τὸ ΕΓ. Ἄρα μετρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα ΓΔ $=$ ΕΔ $+$ ΕΓ. Εἶναι ἄρα τὸ ΑΖ κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι μ. κ. μ. ἄλλο μέγεθος ἔστω Η $>$ ΑΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΕΔ, ἄρα τὸ Η μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ ὅμως καὶ τὸ ΓΔ καὶ συνεπῶς καὶ τὴν διαφορὰν ΓΔ — ΕΔ $=$ ΕΓ. Ἀλλὰ τὸ ΕΓ μετρεῖ ἐκ τῆς (2) τὸ ΖΒ. Ἄρα τὸ Η μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ. Μετρεῖ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ — ΖΒ $=$ ΑΖ, ὅπερ ἄτοπον. διότι Η $>$ ΑΖ. Ἄρα τὸ ΑΖ εἶναι τὸ μ. κ. μ. τῶν ΑΒ, ΓΔ.

5. Διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι, ἔστω τὸ Γ, καὶ ἔστω $A : \Gamma = \Delta$, (1), $B : \Gamma = E$ (2)

Ἐκ τῆς (1) εἶναι $A : \Gamma = \Delta : 1$ (3)

καὶ ἐκ τῆς (2) $\Gamma : B = 1 : E$ (4)

Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη (V. 22) θὰ ἔχωμεν $A : B = \Delta : E$. Ἀλλὰ Δ, Ε εἶναι ἀριθμοί.

6. Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β καὶ $A : B = \Delta : E$, ἔνθα Δ, Ε ἀριθμοί. Λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα. Διότι ἔστω $A : \Delta = \Gamma$, (1) καὶ $Z = \Gamma \times E$, (2).

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $A : \Gamma = \Delta : 1$ (3)
καὶ ἐκ τῆς (2) $\Gamma : Z = 1 : E$ (4)

Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, (V. 22) θὰ ἔχωμεν $A : Z = \Delta : E$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $A : B = \Delta : E$. Ἄρα $A : Z = A : B$ ἤτοι $B = Z$. Μετρεῖ δὲ ἐκ τῆς (2) τὸ Γ, τὸ Ζ. Μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) μετρεῖ τὸ Γ καὶ τὸ Α. Συνεπῶς μετρεῖ τὸ Γ τὰ Α, Β. Σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Πόρισμα

Δίδεται ἡ εὐθεῖα Α καὶ δύο ἀριθμοὶ (μὴ τετράγωνοι) οἱ Δ, Ε καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ζητουμένης νὰ ἔχῃ λόγον, ὡς ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε. Τῶν ἀριθμῶν Δ, Ε καὶ τῆς Α εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : E = A : Z$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $A : B = B : Z$. Κατὰ τὸν ὁρισμ. 9 τοῦ V ἔχομεν $A : Z = A^2 : B^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1), $\Delta : E = A^2 : B^2$.

9. Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν (V τόμος τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, σ. 450) «τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου».

1. Διότι ἔστωσαν αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι Α, Β. Λέγω, ὅτι $A^2 : B^2$ = τετράγωνος ἀριθμὸς : τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐπειδὴ αἱ Α, Β εἶναι (μήκει) σύμμετροι θὰ εἶναι κατὰ τὸ θ. 5, $A : B = \Gamma : \Delta$, (1), ἔνθα Γ, Δ ἀκέραιοι (μὴ τετράγωνοι). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Ἀλλὰ $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$ καὶ $\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$. Εἶναι ἄρα $\frac{A^2}{B^2} = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$.

2. Ἔστω $\frac{A^2}{B^2} = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$, (1). Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{A^2}{B^2} = \left(\frac{A}{B}\right)^2$ καὶ $\frac{\Gamma^2}{\Delta^2} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Καὶ ἐκ τούτων καὶ τῆς (1), $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Ἐξ ἧς $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει σύμμετροι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

3. Ἔστω Α, Β μήκει ἀσύμμετροι. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$. Διότι ἐὰν ἦτο θὰ εἴχομεν $A : B = \Gamma : \Delta$ ὁπότε αἱ Α, Β θὰ ἦσαν μήκει σύμμετροι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

4. Ἐὰν δὲν εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἀλλὰ εἶναι μήκει σύμμετροι, θὰ εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Πόρισμα

1. Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι. Ἐὰν δηλ. εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, ἔνθα Α, Β εὐθεῖαι καὶ Γ, Δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι, εἶναι καὶ $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

2. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει, εἰ μὴ ὑπὸ περιορισμόν. Ἐὰν δηλ. εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma : \Delta$, (1), τότε, εἶναι καὶ $A : B = \varkappa : \lambda$, ἐὰν $\Gamma = \varkappa^2$, $\Delta = \lambda^2$, ἤτοι οἱ Γ, Δ νὰ εἶναι τετράγωνοι, ὁπότε $A : B =$ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἤτοι αὗται εἶναι καὶ μήκει σύμμετροι. Ἐὰν δὲν εἶναι $\Gamma = \varkappa^2$, $\Delta = \lambda^2$, αἱ Α, Β [ἐκ τῆς (1)] εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

3. Αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Α, Β. Ἐᾶν $A: B = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$ ἔνθα α, β ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι, αἱ Α, Β εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δυνάμει σύμμετροι, διότι $A^2 : B^2 = \alpha : \beta$, ἤτοι εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν. Ἐὰν ὅμως $A : B = \sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta}$, αἱ Α, Β εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, διότι $A^2 : B^2 = \sqrt[3]{\alpha^2} : \sqrt[3]{\beta^2}$, δὲν εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, (α^2, β^2 μὴ κύβοι ἀριθμοί). Αἱ Α, Β εἶναι κύβῳ σύμμετροι, ἐὰν $A^3 : B^3 = \alpha : \beta$.

4. Κατὰ μείζονα λόγον αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι. Διότι, ἐὰν ἦσαν μήκει σύμμετροι, θὰ ἦσαν καὶ δυνάμει σύμμετροι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

10. Δοθείσης εὐθείας ρ (νοουμένης κατὰ τὸν ὁρ. 3 ῥητῆς) νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν. Ἡ μία μήκει μόνον ἀσύμμετρος (καὶ δυνάμει σύμμετρος), ἡ ἄλλη καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετρος.

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α, β μὴ τετράγωνοι (τοὐλάχιστον ὁ εἷς νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος). Τῶν α, β, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\alpha : \beta = \rho : \chi$, (1). Τῶν ρ, χ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\rho : \psi = \psi : \chi$. Ἐκ ταύτης κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $\rho : \chi = \rho^2 : \psi^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\alpha : \beta = \rho^2 : \psi^2$, καὶ συνεπῶς $\rho : \psi = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$. Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ρ, ψ $\left(= \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ρ εἶναι ῥητὴ καὶ τὰ τετράγωνα ρ^2, $\rho^2 \frac{\beta}{\alpha}$ εἶ-

ναι σύμμετρα, αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ὀνομασία αὕτη συνάγεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 3 καὶ τοῦ λήμματος τοῦ θ. 18.

2. Τῶν ρ, ψ λαμβάνομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\rho : \omega = \omega : \psi$, ἐξ ἧς κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $\rho : \psi = \rho^2 : \omega^2$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅμως εἶναι $\rho : \psi = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$. Ἄρα $\rho^2 : \omega^2 = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$, ἤτοι αἱ ρ, ω $\left[= \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι (καὶ κατὰ μείζονα λόγον καὶ μήκει).

Σημ. Εἰς τὸ θεώρημα ὑποδεικνύεται εἷς ἐκ τῶν τρόπων εὑρέσεως ἀσυμμέτρων, κατὰ τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἡ δοθεῖσα ῥητὴ λαμβάνεται ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἄλλου τμήματος, λαμβάνονται δύο ἀριθμοὶ μὴ τετράγωνοι α, β (τοὐλάχιστον ὁ εἷς μὴ τετράγωνος) καὶ τῶν α, β, ρ εὑρίσκεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος, $\rho\frac{\beta}{\alpha}$. Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι). Δεύτερον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τὴν ρ καὶ ἄλλο τὸ ὕψος τοῦ πρώτου τριγώνου τὴν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ νέου τριγώνου, ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ὄχι μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι τὰ τετράγωνα αὐτῶν τὰ ρ^2, $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ἀσύμμετρα. [Δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι ἐπίσης αἱ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$]. Ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίων τριγώνων δύναται κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον (ὡς δηλοῦται ἐκ τοῦ 115 θεωρήματος). Μετὰ ν κατασκευὰς ὀρθογ. τριγώνων, τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2^{\nu-1}}}$ (τὸ πρῶτον τμῆμα λαμβάνεται πάντοτε ρ). Ἐὰν $\alpha > \beta$ τότε τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τείνει πρὸς τὸ ρ, ὅταν $\nu \to \infty$, κατ' αὔξουσαν ἀκολουθίαν τιμῶν. Ἐὰν $\alpha < \beta$ τότε τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τείνει πρὸς τὸ ρ, ὅταν $\nu \to \infty$, κατὰ φθίνουσαν ἀκολουθίαν τιμῶν. Αἱ ὁρικαὶ τιμαὶ τοῦ δευτέρου τμήματος τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ταὐτόσημοι πρὸς τὴν σχέσιν $\alpha = \beta$. ἥτις δηλοῖ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον. Εἰς τοῦτο ὅμως ἐρευνᾶται ἡ σχέσις τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου, πρόβλημα τὸ ὁποῖον εἶχε λυθῇ πολὺ πρὸ τῶν ἐρευνῶν τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων.

12. Ἔστω τὰ μεγέθη Α, Γ σύμμετρα καὶ Β, Γ σύμμετρα. Λέγω, ὅτι Α, Β εἶναι σύμμετρα. Ἐπειδὴ Α, Γ σύμμετρα, θὰ εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, (1) ἔνθα Δ, Ε ἀκέραιοι, (θ. 5). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $\Gamma : B = Z : H$, (2) ἔνθα Ζ, Η ἀκέραιοι. Τῶν λόγων $\frac{\Delta}{E}$, $\frac{Z}{H}$ εὑρίσκομεν ἰδοσυνάμους, ὥστε οὗτοι νὰ εἶναι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ Ζ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου λόγου καὶ διὰ τοῦ Ε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου, ὅτε ἔχομεν $\frac{\Delta \times Z}{E \times Z}$, $\frac{Z \times E}{H \times E}$ (VIII. 4, τὰ κλάσματα $\frac{\Delta}{E}$, $\frac{Z}{H}$ ἀνάγωγα). Ἐκ τῆς

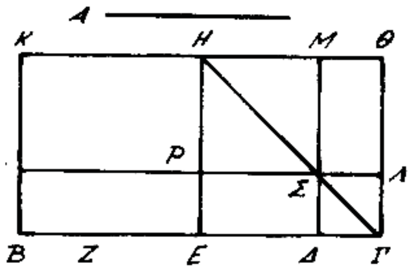
(1) ἔχομεν $A : \Gamma = \Delta \times Z : E \times Z$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2) $\Gamma : B = Z \times E : H \times E$ (4). Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη ἔχομεν $A : B = \Delta \times Z : H \times E$, (V. 22) ἤτοι τὰ A, B εἶναι σύμμετρα, διότι ὁ λόγος των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

13. Λῆμμα. Δίδονται αἱ εὐθεῖαι $AB > A\Delta$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας. Τοῦτο σημαίνει, δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ζητεῖται ἡ ἄλλη κάθετος. Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ λήμματος ἐρευνᾶται ἡ συμμετρία ἢ ἀσυμμετρία τῶν AB, $\sqrt{AB^2 - A\Delta^2}$ [ἡ AB μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου (ἢ ἀσυμ.) ἑαυτῇ μήκει σημαίνει ἡ AB καὶ ἡ $\sqrt{AB^2 - A\Delta^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι (ἢ ἀσύμ.)].

14. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ, ὥστε $A : B = \Gamma : \Delta$, (1), καὶ $\sqrt{A^2 - B^2} = E$, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2} = Z$. Λέγω, ὅτι ἂν A εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς E θὰ εἶναι καὶ Γ μήκει σύμμετρος πρὸς Z. Καὶ ἂν A, E μήκει ἀσύμμετροι θὰ εἶναι καὶ Γ, Z μήκει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, (2). Ἀλλὰ $A^2 = B^2 + E^2$ καὶ $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2), $(B^2 + E^2) : B^2 = (\Delta^2 + Z^2) : \Delta^2$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{B^2 + E^2 - B^2}{B^2} = \frac{\Delta^2 + Z^2 - \Delta^2}{\Delta^2}$ ἢ $E^2 : B^2 = Z^2 : \Delta^2$, (V. 17). Καὶ ἐκ τούτου $B : E = \Delta : Z$. Εἶναι δὲ $A : B = \Gamma : \Delta$, (3) καὶ ἀπεδείχθη $B : E = \Delta : Z$ (4). Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον, (V 22) δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη ἔχομεν, $A : E = \Gamma : Z$. Ἐὰν λοιπὸν A, E σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι εἶναι καὶ Γ, Z σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι ἀντιστοίχως, (θ. 11).

17. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι $B\Gamma > A$ καὶ παρὰ τὴν BΓ ἂς παραβληθῇ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $\frac{A^2}{4}$ ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παραλληλογράμμου αἱ BΔ, ΔΓ μήκει σύμμετροι. Λέγω, ὅτι αἱ BΓ, $\sqrt{B\Gamma^2 - A^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Σύγχρονος διατύπωσις τοῦ θεωρήματος: Ἐὰν αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - B\Gamma\chi + \frac{A^2}{4} = 0$ εἶναι σύμμετροι, τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν, καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν, αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι μήκει σύμμετροι. Ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι θετικαὶ καὶ ἄνισοι προκύπτει ἐκ τῆς σχέ-

σεως ΒΓ $>$ Α. Ἐὰν ΒΓ $=$ Α, τότε τὸ $\frac{Α^2}{4} =$ ΒΕΗΚ τετράγωνον καὶ ἔχει παραβληθῇ τοῦτο παρὰ τὴν ΒΓ, ὄχι πλέον ὡς ὀρθογώνιον, ἀλλ' ὡς τετράγωνον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τὸ τετράγωνον σχῆμα ΕΓΘΗ, διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΘΚ. Ἡ περίπτωσις ὅμως αὐτὴ δὲν ἐνδιαφέρει ἐνταῦθα διότι ὁδηγεῖ εἰς τὴν διπλῆν ῥίζαν ΒΕ $= \frac{ΒΓ^2}{2}$. Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον κατὰ δύο τρόπους. Πρῶτον νὰ θεωρηθῇ ἡ μεγαλυτέρα εὐθεῖα ὡς ὑποτείνουσα καὶ ἡ μικροτέρα ὡς μία κάθετος πλευρά. Δεύτερον νὰ θεωρηθῶσιν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ὡς κάθετοι πλευραί. Ἐν προκειμένῳ (καὶ εἰς παρομοίας ἐκφωνήσεις τοῦ Χ βιβλίου) νοεῖται ὁ πρῶτος τρόπος κατασκευῆς. Ἡ ὕπαρξις τοιαύτης κατασκευῆς ὅμως ἀποδεικνύεται. Ἄς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἄς ληφθῇ ΖΕ $=$ ΕΔ. Εἶναι ἄρα ΔΓ $=$ ΒΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ ἐτμήθη εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ θὰ ἔχωμεν ΒΔ $\times$ ΔΓ $+$ ΕΔ$^2 =$ ΕΓ^2, (ΙΙ. 5).



Εἶναι ἄρα καὶ 4ΒΔ $\times$ ΔΓ $+$ 4ΕΔ$^2 =$ 4ΕΓ^2, (1). Ἀλλὰ ΒΔ $\times$ ΔΓ $= \frac{Α^2}{4}$, 2ΕΔ $=$ ΖΔ, 2ΕΓ $=$ ΒΓ. Εἶναι ἄρα Α^2 $+$ ΖΔ$^2 =$ ΒΓ^2, ἤτοι ἔχομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ μιᾶς καθέτου Α. Διὰ τὴν ἄλλην κάθετον θὰ ἔχωμεν ΖΔ$^2 =$ ΒΓ$^2 -$ Α^2, (2), ΖΔ $= \sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$.

1) Δεικτέον ὅτι ἡ ΖΔ (ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ (ἥτις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν). Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΔ, ΔΓ μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ (ΒΔ $+$ ΔΓ) $=$ ΒΓ καὶ ΔΓ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν ἑαυτόν της, καὶ πρὸς τὴν ΒΖ, διότι ΔΓ $=$ ΒΖ. Ἄρα ΔΓ καὶ 2ΔΓ $=$ ΔΓ $+$ ΒΖ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ΔΓ, ΒΓ μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ 2ΔΓ, ΒΓ μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ΒΓ $=$ (2ΔΓ $+$ ΖΔ). Εἶναι ἄρα ΒΓ, ΖΔ μήκει σύμμετροι, (θ. 15).

2) Ἔστω ΒΓ, $\sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ μήκει σύμμετροι, (ἤτοι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου μήκει σύμμετροι ἢ τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως μήκει σύμμετροι). Καὶ ἄς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΒΓ τὸ $\frac{Α^2}{4}$ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου αἱ ΒΔ, ΔΓ, ἤτοι ἔστωσαν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2 - ΒΓχ + \frac{Α^2}{4} = 0$, αἱ ΒΔ, ΔΓ.

Λέγω, ὅτι αὗται εἶναι μήκει σύμμετροι. Διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω ἀποδείξεως φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν (2), (ἀποδεικνύει δηλ. τὴν ὕπαρξιν τῆς σχέσεως $Z\Delta^2 = B\Gamma^2 - A^2$). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $Z\Delta = \sqrt{B\Gamma^2 - A^2}$ καὶ ΒΓ μήκει σύμμετροι. Ἀλλὰ $B\Gamma = (Z\Delta + 2\Delta\Gamma)$. Εἶναι ἄρα ΒΓ, 2ΔΓ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἀλλὰ 2ΔΓ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἄρα ΒΓ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι. Εἶναι ὅμως $B\Gamma = (B\Delta + \Delta\Gamma)$. Συνεπῶς ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θ. 15).

[Σημ. Ὅτι πράγματι πρόκειται περὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - B\Gamma\chi^2 + \frac{A^2}{4} = 0$ φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς· εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν σχέσιν $A^2 + Z\Delta^2 = B\Gamma^2$, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι $Z\Delta = B\Gamma - 2\Delta\Gamma$, κληθῇ $\Delta\Gamma = \chi$ καὶ γίνῃ ἀντικατάστασις θὰ ἔχωμεν $A^2 + (B\Gamma - 2\chi)^2 = B\Gamma^2$ ἢ $\chi^2 - B\Gamma\chi + \frac{A^2}{4} = 0$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης, τῶν ΒΔ, ΔΓ ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ θ. 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων. (Ἡ παροῦσα ἐξίσωσις εἶναι μερικὴ περίπτωσις. Ἰδὲ καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία-Θεωρία ἀριθμῶν τόμ. II σ. 297 — 301, Ὀργαν. Ἐκδόσ. Σχολ. Βιβλίων, 1953. Ἀθῆναι). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον $EH = E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΒΕΓΘΗΚ καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΗΓ. Ἐπὶ ταύτης ὑπάρχει πάντοτε σημεῖόν τι Σ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΣΤΒΔ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{A^2}{4}$ καὶ $\Sigma\Delta = \Delta\Gamma$, (παρὰ τὴν ΒΓ ἔχομεν παραβάλλει τὸ ὀρθογώνιον $\Sigma TB\Delta = \frac{A^2}{4}$ καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΣΔΓΛ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΛΤΒΓ). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Σ μετασχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $\frac{B\Gamma^2}{4} - \frac{A^2}{4}$ εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $= \frac{1}{2}\sqrt{B\Gamma^2 - A^2}$ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΕ λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην τὸ ΗΡ. Ἐκ τοῦ σημείου Ρ φέρομεν τὴν ΤΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν διαγώνιον ΗΓ εἰς τι σημεῖον Σ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου $HE\Gamma\Theta = \frac{B\Gamma^2}{4}$ ἀφαιρέσωμεν τὸ $HP^2 = HP\Sigma M = \left(\frac{1}{2}\sqrt{B\Gamma^2 - A^2}\right)^2$ θὰ λάβωμεν ὡς διαφορὰν $\frac{B\Gamma^2}{4} - \frac{B\Gamma^2 - A^2}{4} = \frac{A^2}{4} =$ γνώμων ΣΡΕΓΘΜ. Ὁ γνώμων ὅμως οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΣΤΒΔ, διότι $PTBE = PE\Gamma\Lambda$ καὶ $PE\Delta\Sigma = M\Sigma\Lambda\Theta$. Ὥστε $\frac{A^2}{4} = B\Delta \times \Delta\Sigma = B\Delta \times$

ΔΓ, διότι ΔΣ = ΔΓ, ἐπειδὴ ΕΗ = ΕΓ. Ἀλλὰ ΒΔ = ΒΕ + ΕΔ. Εἶναι δὲ ΒΕ $= \frac{ΒΓ}{2}$ καὶ ΕΔ = ΗΜ = ΗΡ $= \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$ Ἄρα ΒΔ $= \frac{ΒΓ}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$. Καὶ εἶναι ΔΓ = ΕΓ — ΕΔ. Εἶναι ἄρα ΔΓ $= \frac{ΒΓ}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$].

18. Ἐὰν ΒΓ ⟩ Α καὶ αἱ (θετικαὶ καὶ ἄνισοι) ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2—ΒΓχ + \frac{Α^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι μήκει ἀσύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα (σχ. θ. 17) ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ ΙΙ, 5 ἡ ὕπαρξις τοῦ $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 — Α^2$. 1) Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως αἱ ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ αἱ (ΒΔ + ΔΓ) = ΒΓ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι (θ. 16). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς 2ΔΓ. Εἶναι ἄρα ΒΓ, 2ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ ΒΓ = ΖΔ + 2ΔΓ, ἕπεται ΖΔ καὶ ΒΓ μήκει ἀσύμμετροι (θ. 16). Καὶ εἶναι ΖΔ $= \sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$. Ἄρα ΒΓ καὶ $\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. 2) Ἔστω ΒΓ, $\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι αἱ ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι αὗται εἶναι ἀσύμμετροι. Πάλιν κατὰ τὸ ΙΙ, 5 ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις ΖΔ $= \sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$ Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι ΒΓ, ΖΔ μήκει ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ ΒΓ = ΖΔ + 2ΔΓ, ἕπεται ΒΓ, 2ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 16). Ἀλλὰ 2ΔΓ, ΔΓ μήκει σύμμετροι. Ὥστε καὶ ΒΓ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι. Ἀλλὰ ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ. Εἶναι ἄρα καὶ ΒΔ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 16).

19. Τὸ ὀρθογώνιον παραλ. λαμβάνεται κατὰ τὸ προηγ. θ. 17 (ἰδὲ σχῆμα τούτου). Ἐκ τῆς σχέσεως ΒΔ : ΔΓ = ΤΔ : ΔΛ καὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι, συνάγεται ὅτι ΤΔ, ΔΛ εἶναι σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ ΔΛ ῥητὸν εἶναι ἄρα καὶ ΤΔ ῥητόν.

20. Σχῆμα προηγ. θεωρ. 17. Παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΣ ἔχομεν παραβάλλει τὸ ῥητὸν ὀρθογώνιον ΒΣ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι ῥητή.

Σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον ΔΛ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΣ εἶναι ῥητή, εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΔΛ ῥητόν. Ἄρα τὰ ΔΛ, ΒΣ ὡς ῥητὰ εἶναι σύμμετρα. Καὶ εἶναι ΔΛ : ΒΣ = ΔΓ : ΒΔ. Εἶναι δὲ ΔΓ = ΔΣ. Εἶναι ἄρα σύμμετρος ἡ ΔΣ πρὸς τὴν ΒΔ. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΣ. Καὶ ἡ ΒΔ ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΔΣ.

21. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α, β μὴ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖά τις ῥητὴ (λαμβανομένη ὡς μέτρον) ρ. Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ καὶ ἄλλο τμῆμα τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν α, β, ρ τὴν $ρ\frac{β}{α}$. Δεύτερον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ καὶ ἄλλο τμῆμα

τὸ ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ τοῦ πρώτου τριγώνου. Αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 10). Τὸ ὀρθογώνιον $\rho \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον καὶ εἶναι ἄλογον (ἄρρητον). Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λέγεται μέση (ὡς μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης) καὶ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος). Τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\rho \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τετράγωνον, τὸ $\left[\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2$ λέγεται καὶ αὐτὸ μέσον καὶ εἶναι ἄλογον. Ἐὰν κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου λάβωμεν ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὴν $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ὡς ἄλλο τὴν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $\left[\text{αἱ } \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι}\right]$, τὸ ὀρθογώνιον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται ἐπίσης μέσον (ἄλογον) καὶ τὸ ὕψος $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$ λέγεται μέση (ἄλογος).

Τὸ ἰσοδύναμον τετράγωνον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τὸ $\left[\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2$ λέγεται καὶ αὐτὸ μέσον καὶ εἶναι ἄλογον. Ὥστε ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον μέσον εἶναι, ὅταν περιέχῃ τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ εὐθεῖα μέση εἶναι, ὅταν περιέχῃ τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

24. Αἱ μέσαι μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\gamma\,\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, ἔνθα γ ἀκέραιος καὶ α, β μὴ τετράγωνοι.

25. Αἱ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\sqrt{\gamma}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ ἔνθα α, β, γ μὴ τετράγωνοι.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πρώτης μέσης ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: λαμβάνομεν εὐθεῖάν τινα ρ ὡς μέτρον (ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους), δύο μὴ τετραγώνους ἀριθμοὺς α, β καὶ τῶν α, β, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ὡς ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ καὶ ἡ ρ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση. Διὰ τὴν δευτέραν μέσην λαμβάνομεν ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ρ καὶ ὡς ἄλλο τὸ $\gamma \cdot \rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ ἔνθα γ μὴ τετράγωνος, καὶ τούτων τὴν μέσην ἀνάλογον $\rho\sqrt{\gamma}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ἐὰν $\sqrt{\gamma} = \delta\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, τότε τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μέσων τὸ $\rho^2\,\delta\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ῥητόν. Ἄλλως εἶναι μέσον, τὸ $\rho^2\left(\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, (δ, ἀκέραιος).

26. Ἔστωσαν τὰ μέσα $\rho^2\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ καὶ $\rho^2\sqrt{\dfrac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα $\dfrac{\beta}{\alpha} > \dfrac{\delta}{\gamma}$ (καὶ α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι). Ἡ διαφορὰ $\rho^2\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\dfrac{\gamma}{\delta}}\right)$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πρώτης μέσης ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ θ. 10. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθ. τριγώνου: λαμβάνομεν ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ ὕψους ῥητὴν ρ. Τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ ὡς τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης. Ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι $\left[\text{αἱ } \rho,\ \rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} \text{ καὶ } \rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right),\ \rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right]$.

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ ρ καὶ ἄλλο τμῆμα τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου τὸ $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Κατασκευὴ τρίτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ἄλλο τμῆμα τὸ ὕψος τοῦ πρώτου τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ τρίτου τριγώνου τὸ $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων τὸ $\rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \rho\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}} = \rho^2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ῥητόν. Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ δευτέρα μέση εὑρίσκεται ἂν τῶν $\rho,\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λάβωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον. τοῦτο ὅμως εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸν προηγούμενον τρόπον κατασκευῆς, εἰς ὃν ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ ὅρου «μέση», καθ' ὃν αὕτη πρέπει νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος δύο μεγεθῶν.

28. Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A = \rho$, $B = \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\Gamma = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φχνερὸν ὅτι αὗται προέρχονται ἐκ τῆς κατασκευῆς δύο ὀρθογωνίων τριγώνων.

Εἰς τὸ πρῶτον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ἡ ρ, ἄλλο τμῆμα ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ὕψος ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Εἰς τὸ δεύτερον τρίγωνον ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης εἶναι πάλιν ρ, ἄλλο τμῆμα ἡ $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ καὶ ὕψος ἡ $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

[Εἶναι εὐνόητον ὅτι ληφθείσης ῥητῆς ρ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὡς ἑξῆς τὰς τρεῖς ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Πρῶτον τρίγωνον : ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}}$.

Δεύτερον τρίγωνον : ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\eta}{\theta}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\varepsilon\varkappa}{\zeta\theta}}$.

Τρίτον τρίγωνον : ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\iota}{\varkappa}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\iota\lambda}{\varkappa\mu}}$, ὁπότε αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι τὰ τρία ὕψη, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. (α, β, γ... ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι)].

Τῶν Α, Β εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Delta = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ (πρώτη μέση), καὶ τῶν Β, Γ, Δ τὴν τετάρτην ἀνάλογον $E = \dfrac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$. Ἡ Ε εἶναι ἡ δευτέρα μέση. Τὸ γινόμενον $\Delta \times E = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ εἶναι μέσον. Ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, οὕτω σκεπτόμεθα καὶ ἐνταῦθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Ε. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μέση, θὰ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος δύο τμημάτων ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Τὸ ἓν τμῆμα θὰ εἶναι $\frac{\rho}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}$ καὶ τὸ ἄλλο ρ $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$.

Λῆμμα 1

1. Ὡς γνωστὸν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ παριστῶντες ἐμβαδὰ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων εἶναι ἀνάλογοι, (VII. ὁρισ. 22). Τὸ δὲ γινόμενον δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος, (IX. 1).

1. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $AB > B\Gamma$ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Οὗτοι δύνανται νὰ εἶναι καὶ τετράγωνοι, διότι καὶ τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρεθῇ ἄρτιος ἢ ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι ἄρτιος, θὰ εἶναι $AB - B\Gamma = A\Gamma$ ἄρτιος. Ἂς διχοτομηθῇ ὁ ΑΓ κατὰ τὸ Δ, ὥστε $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$. Κατὰ τὸ θ. 6 τοῦ II βιβλίου θὰ εἶναι $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$, (1). Καὶ ἐπειδὴ $AB \times B\Gamma$ εἶναι τετράγωνος, εὑρέθησαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος.

2. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2 = AB \times B\Gamma$, (2) ἤτοι τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ἴσην πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

3. Ἐὰν οἱ ΑΒ, ΒΓ δὲν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τὸ γινόμενον αὐτῶν $AB \times B\Gamma$ δὲν εἶναι τετράγωνος καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὡς μὴ τετράγωνον ἀριθμόν. Ἡ σχέσις (1) παρέχει ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς πυθαγορείου ἐξισώσεως $z^2 = \chi^2 + \psi^2$.

Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς $\mu > \nu$ τότε θὰ εἶναι ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, ἂν καλέσωμεν κ, ξ τὰς πλευρὰς τοῦ μ καὶ σ, τ τὰς πλευρὰς τοῦ ν, $(\mu = \varkappa.\ \xi,\ \nu = \sigma.\ \tau)$, (κ, ξ, σ, τ, ἀκέραιοι). Κατὰ τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

1. $\mu \cdot \nu + \left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)^2$, ἔνθα μ.ν τετράγωνος,

1α. ἢ $\varkappa \cdot \xi \cdot \sigma \cdot \tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$, ἔνθα κ.ξ.σ.τ τετράγωνος.

2. $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\,.\,\nu$, ἔνθα $\mu\,.\,\nu$ τετράγωνος,

ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\kappa\,.\,\xi\,.\,\sigma\,.\,\tau$, ἔνθα $\kappa\,.\,\xi\,.\,\sigma\,.\,\tau$ τετράγωνος.

3. Ἐὰν δὲν εἶναι οἱ μ, ν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, ἤτοι δὲν εἶναι $\kappa : \xi = \sigma : \tau$ τότε εἶναι

$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\,.\,\nu$ οὐχὶ τετράγωνος,

ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\kappa\,.\,\xi\,.\,\sigma\,.\,\tau$ οὐχὶ τετράγωνος,

ἢ $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ οὐχὶ τετράγωνος.

Σημ. 1. Ἐὰν οἱ μ, ν εἶναι περιττοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (ἤτοι $\kappa : \xi = \sigma : \tau$ καὶ $\mu = \kappa.\ \xi$, $\nu = \sigma.\ \tau$), ἀλλὰ $\nu = \sigma.\ \tau = 1 \times 1$, ὁ $\mu.\ \nu = \kappa.\ \xi.\ 1$ εἶναι τετράγωνος, ἔστω α^2. Τότε ἡ σχέσις (1α) γίνεται

$$\alpha^2+\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2$$

Αὕτη παρέχει τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἀνωτέρω πυθαγορικῆς ἐξισώσεως διὰ πάσας τὰς περιττὰς τιμὰς τοῦ α, ($\alpha = 3, 5, 7 \ldots$) καὶ ἀποδίδεται προσωπικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν.

Σημ. 2. Ἐὰν οἱ μ, ν εἶναι ἄρτιοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, ἀλλὰ $\nu = \sigma\,.\,\tau = 1 \times 2$, ὁ $\mu.\ \nu = \kappa.\ \xi.\ 2 =$ τετράγωνος, ἔστω β^2. Τότε ἡ σχέσις (1α) γίνεται $\beta^2+\left(\frac{\beta^2}{4}-1\right)^2=\left(\frac{\beta^2}{4}+1\right)^2$. Αὕτη παρέχει τὰς ἀκεραίας λύσεις διὰ πάσας τὰς ἀρτίας τιμὰς τοῦ β, ($\beta = 4, 6, 8 \ldots$) καὶ ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα.

Λ ῆ μ μ α 2

Ἔστωσαν δύο ἄρτιοι ἢ περιττοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ $AB > B\Gamma$, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν ὁ $AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος (σχῆμα λήμματος). Ἡ διαφορὰ $AB - B\Gamma = \Gamma A$ εἶναι ἄρτιος. Λαμβάνομεν πάλιν τὸ ἥμισυ τοῦ ΓA, ὥστε $\Gamma\Delta = \frac{\Gamma A}{2}$. Κατὰ τὸ II. 6 θὰ εἶναι $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$. Ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα (τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ΔE), ὥστε $\Gamma\Delta - 1 = \Gamma E$. Εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2 = (BE + 1)^2$. Λέγω, ὅτι ὁ $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Διότι ἔστω εἶναι τετράγωνος. Καλοῦντες αὐτὸν x^2 θὰ ἔχωμεν

$$x^2 < (BE + 1)^2 \quad \text{ἢ}\ x < BE + 1, \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (1) πρέπει νὰ εἶναι $x \leqslant$ ΒΕ. Ἀποκλείεται νὰ εἶναι $x >$ ΒΕ, διότι τότε διὰ νὰ ἰσχύσῃ ἡ ἀνισότης (1) πρέπει νὰ εἶναι

$$BE + \frac{x}{\lambda} < BE + 1$$

$\left(0 < \frac{x}{\lambda} < 1\right)$, ἤτοι ὁ $x = BE\,\frac{x}{\lambda}$ δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἀπομένει ἄρα $x \leqslant$ ΒΕ. Ἔστω πρότερον $x =$ ΒΕ καὶ συνεπῶς $x^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$ καὶ ἔστω ΗΑ = 2ΔΕ, (2), ἐν ᾧ εἶναι ΑΓ = 2ΓΔ, (3). Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (3) ἔχομεν ΑΓ — ΗΑ = 2ΓΔ — 2ΔΕ ἢ ΗΓ = 2ΕΓ ἤτοι ὁ ΗΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε. Καὶ κατὰ τὸ II. 6 θὰ εἶναι $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$. Ὑπετέθη δὲ $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$. Εἶναι ἄρα καὶ $HB \times B\Gamma = AB \times B\Gamma$ ἤτοι ΗΒ = ΑΒ ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$.

Λέγω, ὅτι ὁ x δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ ΒΕ ἤτοι ὁ $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ BE^2. Ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ὅτι $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$ καὶ ἔστω ΘΑ = 2ΔΖ, (4). Καὶ εἶναι ΑΓ = 2ΓΔ, (5). Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (4) ἀπὸ τῆς (5) ἔχομεν ΑΓ — ΘΑ = 2(ΓΔ — ΔΖ) ἢ ΘΓ = 2ΓΖ ἤτοι ὁ ΘΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ II. 6 θὰ ἔχωμεν $\Theta B \times B\Gamma + Z\Gamma^2 = BZ^2$. Ὑπετέθη δὲ $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$. Ἄρα εἶναι $\Theta B \times B\Gamma + Z\Gamma^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ΑΒ > ΘΒ καὶ ΓΕ > ΖΓ. Ἄρα δὲν εἶναι $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < BE^2$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ἴσος. Ἄρα $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

[Σημ. Ἡ ἀπόδειξις εἰς σύγχρονον διατύπωσιν. Ἔστωσαν οἱ δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοὶ οἱ μ, ν, (ὅμοιοι ἐπίπεδοι σημαίνει : $\mu\nu = \alpha^2$, $\mu = \varkappa.\ \xi$, $\nu = \sigma.\ \tau$, καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι), ὁπότε κατὰ τὸ II. 6 θὰ ἔχωμεν $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$. Ἀπὸ τοῦ $\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)$ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα, ὁπότε ἔχομεν $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$, (1). Λέγω ὅτι ὁ $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ἔστω ὅτι εἶναι τετράγωνος.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1 + 1\right)^2$.

Καλοῦμεν τὸν ὑποτιθέμενον τετράγωνον $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = x^2$ καὶ τὸν $\frac{\mu+\nu}{2} - 1 = \varphi$. Τότε θὰ εἶναι $x^2 < (\varphi + 1)^2$, καὶ $x < \varphi + 1$, (2).

Μεταξὺ τοῦ χ^2 καὶ τοῦ φ^2 πρέπει νὰ ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων $\chi^2 \gtreqless \varphi^2$.
Ἔστω 1ον $\chi^2 > \varphi^2$ ὅτε εἶναι καὶ $\chi > \varphi$, καὶ ἔστω $\chi = \varphi + \theta$.

Κατὰ τὴν ἀνισότητα (2) θὰ εἶναι $\varphi + \theta < \varphi + 1$, ἤτοι $\theta = \frac{\lambda}{\rho}, < 1 (\lambda, < \rho)$ δηλ. ὁ χ δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\chi^2 > \varphi^2$. Ἀπομένει $\chi^2 \leqslant \varphi^2$.

Ἔστω 2ον $\chi^2 = \varphi^2$ ἤτοι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1\right)^2$, (3).

Ἐπειδὴ $\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right) + \nu = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1\right)$, ἕπεται κατὰ τὸ II. 6, [καθ' ὃ $(2\alpha + \beta)\,\beta + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2$], ἐὰν κληθῇ $\alpha = \frac{\mu-\nu}{2} - 1$, $\beta = \nu$, ὅτι εἶναι $\left[2\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right) + \nu\right] . \nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1\right)^2$, (4).

Ἐκ τῶν (4) καὶ (3) ἕπεται $(\mu - 2)\,\nu = \mu\nu$, ἤτοι $\mu - 2 = \mu$, ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα $\chi^2 = \varphi^2$.

Ἔστω 3ον $\chi^2 < \varphi^2$, ἤτοι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1\right)^2$.

Τότε θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ $\left(\frac{\mu+\nu}{2} - 1\right)$ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ χ^2.

Ἔστω ὅτι εἶναι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 2\right)^2$, (5).

Ἐπειδὴ $\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 2\right) + \nu = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 2\right)$, ἕπεται κατὰ τὸ II. 6, ὅτι $\left[2\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 2\right) + \nu\right] . \nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 2\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2} - 2\right)^2$ (καλοῦμεν $\alpha = \frac{\mu-\nu}{2} - 2$ καὶ $\beta = \nu$, (6)).

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) ἕπεται $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = (\mu - 4)\,\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 2\right)^2$ ὅπερ ἄτοπον διότι $\mu\nu > (\mu - 4)\,\nu$, καὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 > \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 2\right)^2$.

Δὲν εἶναι ἄρα $\chi^2 < \varphi^2$. Ἀπεδείχθη δὲ ὅτι οὔτε εἶναι $\chi^2 \geqslant \varphi^2$.

Ἄρα ὁ $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, δὲν εἶναι τετράγωνος].

29. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε ΓΔ — ΔΕ = ΓΕ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΖ καὶ ἂς γίνῃ ΔΓ : ΓΕ = $BA^2 : AZ^2$, (1), (κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θ. 6), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ. Ἐπειδὴ ΔΓ : ΓΕ εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι ἄρα BA^2 καὶ AZ^2 σύμμετρα καὶ ΒΑ, ΑΖ μήκει ἀσύμμετροι, ἐπειδὴ ὁ λόγος ΔΓ : ΓΕ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 9)· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΖ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma-\Gamma E}=\frac{BA^2}{BA^2-AZ^2}$, ἢ $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}=\frac{BA^2}{BZ^2}$. Ἄρα ὁ λόγος $\frac{BA^2}{BZ^2}$ ἰσοῦται πρὸς λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἐπειδὴ οἱ ΔΓ, ΔΕ εἶναι τετράγωνοι. Εἶναι ἄρα αἱ ΒΑ, ΒΖ μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$. Εἶναι ἄρα $ZB = \sqrt{AB^2-AZ^2}$ (2) καὶ ΑΒ μήκει σύμμετροι. Ἤτοι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι μήκει σύμμετροι.

[Οἱ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα τοῦ θ. 28, $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\theta$, ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι, ἀλλὰ δὲν εἶναι κ : ξ = σ : τ, ἤτοι οἱ μ = κ . ξ, ν = σ . τ δὲν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, (ἄρτιοι ἢ περιττοί). Τοῦ λοιποῦ θὰ χρησιμοποιῶμεν πρὸς ἁπλούστευσιν τὴν παράστασιν $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος. Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν ΑΒ = ρ, ΓΔ = φ^2, ΔΕ = ω^2, ΓΕ = θ, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1), $AZ^2 = \frac{\rho^2\theta}{\varphi^2}$ καὶ ἐκ τῆς (2), $ZB = \rho\frac{\omega}{\varphi}$.

Εὑρέθησαν λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα (ρ) καὶ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ $\rho\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ ῥηταί, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\frac{\rho\omega}{\varphi}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

30. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε ΓΕ + ΕΔ = ΓΔ μὴ τετράγωνος. Ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον καὶ ἂς γίνῃ ΔΓ : ΓΕ = $BA^2 : AZ^2$, (1), (θ. 6, πόρισμα) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος ΔΓ : ΓΕ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετρ. ἀριθμόν, εἶναι ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma-\Gamma E}=\frac{BA^2}{BA^2-AZ^2}$ ἢ $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}=\frac{BA^2}{BZ^2}$.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος ΔΓ : ΔΕ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα BA^2, BZ^2 ἁπλῶς σύμμετρα, ἐν ᾧ ΒΑ, ΒΖ μήκει ἀσύμμετροι. Εἶναι ὅμως $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$, ἤτοι $ZB = \sqrt{AB^2-AZ^2}$, (2) καὶ ΑΒ μήκει ἀσύμμετροι. [Οἱ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δὲν εἶναι τετράγωνος εἶναι κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ θ. 28 κξστ +

$\left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἔνθα $\varkappa, \xi, \sigma, \tau$ ἀκέραιοι, $\mu = \varkappa . \xi$, $\nu = \sigma . \tau$ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, ἄρτιοι ἢ περιττοί. Τοῦ λοιποῦ θὰ χρησιμοποιῶμεν πρὸς ἁπλούστευσιν τὴν παράστασιν $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, μὴ τετράγωνος. Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν $AB = \rho$, $\Delta\Gamma = \lambda$, $\Gamma E = \alpha^2$, $E\Delta = \beta^2$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1), $AZ^2 = \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}$ καὶ ἐκ τῆς (2) $ZB = \frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$ Εὑρέθησαν λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα (ρ) καὶ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου ἡ $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

31. 1. Ἔστωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $A > B$, ὥστε A καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ἔστω $A \times B = \Gamma^2$. Ἐπειδὴ αἱ δύο ῥηταὶ A, B εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ $A \times B$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Εἶναι ἄρα καὶ τὸ Γ^2 μέσον· ἄρα καὶ ἡ Γ. Ἔστω ἀκόμη $B^2 = \Gamma \times \Delta$ (τῶν Γ, B εὑρίσκει τὴν τρίτην ἀνάλογον Δ). Ἐπειδὴ ἡ B εἶναι ῥητή, ἄρα B^2 ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{A \times B}{B^2}$ καὶ $A \times B = \Gamma^2$, $B^2 = \Gamma \times \Delta$, εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta}$. Καὶ εἶναι $\frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (1). Εἶναι δὲ αἱ A, B δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα καὶ Γ, Δ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ Γ εἶναι μέση, εἶναι ἄρα καὶ ἡ Δ μέση. Καὶ ἐπειδὴ A, $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει σύμμετροι, ἕπεται ἐκ τῆς (1) ὅτι καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει σύμμετροι. [Αἱ A, B εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 29 αἱ ρ καὶ $\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$. Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω λαμβάνομεν $\Gamma = \frac{\rho\theta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}$, $\Delta = \frac{\rho\theta^{\frac{3}{4}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}}$. Τὸ γινόμενον $\Gamma \times \Delta = \frac{\rho^2\theta}{\varphi^2}$ εἶναι ῥητὸν καὶ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2} = \rho\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)\frac{\theta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}$ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ. ($\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος). Εἶναι φανερὸν ὅτι κατασκευάζονται τρία ὀρθογώνια τρίγωνα. Εἰς τὸ πρῶτον εἶναι ἡ ὑποτείνουσα $\rho = A$, ἡ μία κάθετος $\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi} = B$ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος $\frac{\rho\omega}{\varphi}$, (θ. 29). Εἰς τὸ δεύτερον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ἡ A, τὸ ἄλλο τμῆμα ἡ B καὶ τὸ ὕψος ἡ Γ. Εἰς τὸ τρίτον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ Γ, ὕψος ἡ B καὶ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης ἡ Δ. (Θὰ ἔπρεπε καὶ ἡ Δ ἐπειδὴ εἶναι μέση νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου

τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ὡς τοιαῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ἡ ρ καὶ ἡ $\frac{\rho\theta^{\frac{3}{2}}}{\varphi^3}$. Ὁπωσδήποτε, ἀσχέτως τοῦ πόθεν ἔχει προέλθει ὁ ὅρος μέση, ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης αὐτῆς εἶναι ὅτι περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

[Σημ. Τὸ 31. 1 οὐδαμοῦ χρησιμοποιεῖται. Ὑπάρχει διὰ νὰ ὑποδείξῃ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 31. 2, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ 34].

31. 2. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται......... Ἐὰν δοθῶσιν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β καὶ Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εὑρίσκονται δύο μέσαι αἱ Γ, Δ δυνάμει μόνον σύμμετροι (μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα), ὥστε Γ, $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\Gamma\times\Delta$ ῥητόν. Ἐνταῦθα αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι αἱ τοῦ θ. 30, ἤτοι εἶναι $A=\rho$, $B=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Σχηματίζομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν τὸ $A\times B=\Gamma^2$, ἐξ οὗ $\Gamma=\rho\alpha^{\frac{1}{2}}:\lambda^{\frac{1}{4}}$, καὶ $B^2=\Gamma\times\Delta$, ἐξ οὗ $\Delta=\rho\alpha^{\frac{3}{2}}:\lambda^{\frac{3}{4}}$. Τὰ τετράγωνα Γ^2, Δ^2 εἶναι σύμμετρα, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $=\frac{\lambda}{\alpha^2}$ τὸ $\Gamma\times\Delta=\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ ῥητόν, καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, διότι ὁ λόγος των $=\lambda^{\frac{1}{2}}:\beta$. ($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος).

32. 1. Ἔστωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε Α, $\sqrt{A^2-\Gamma^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ἔστω $A\times B=\Delta^2$, (1). Ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι μέσον καὶ συνεπῶς καὶ ἡ Δ εἶναι μέση. Ἔστω ἀκόμη $B\times\Gamma=\Delta\times E$, (2), (τῶν Δ, Β, Γ λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον Ε). Ἐπειδὴ $\frac{A\times B}{B\times\Gamma}=\frac{A}{\Gamma}$, ἕπεται ἐκ τῶν (1) καὶ (2) $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}$, (3). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως Α, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι ἄρα καὶ Δ, Ε δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι δὲ μέση ἡ Δ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ Ε μέση. Καὶ ἐπειδὴ Α, $\sqrt{A^2-\Gamma^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ μήκει σύμμετροι. Ἐπειδὴ $B\times\Gamma$ εἶναι μέσον, (θ. 21) εἶναι ἐκ τῆς (2) καὶ $\Delta\times E$ μέσον. [Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι $A=\rho$, $B=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma=\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$ (Α, Γ κατὰ τὸ θ. 29, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι). Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν $\Delta=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $E=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$, ὥστε Δ^2, E^2 μόνον σύμμετρα $\Delta\times E=$ μέσον, καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$ μήκει σύμμετροι, ($\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος).

Σημ. Τὸ 32. 1 οὐδαμοῦ χρησιμοποιεῖται· ὑπάρχει διὰ νὰ ὑποδείξῃ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 32. 2, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ 35].

32. 2. Ὁμοίως δειχθήσεται........ Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι $A = \rho$, $B = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ (ἡ Γ ἐκ τοῦ θ. 30, ὥστε Α, $\sqrt{A^2 - \Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι). Ἡ ἀπόδειξις ὡς προηγουμένως. Ἀντικαθιστῶντες θὰ ἔχωμεν $\Delta = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $E = \frac{B \times \Gamma}{\Delta} = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Καὶ εἶναι Δ, Ε μέσαι, μόνον Δ^2, E^2 σύμμετρα, $\Delta \times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ μήκει ἀσύμμετροι ($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος).

33. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ῥητόν, καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι μέσον.

Ἔστωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $AB > B\Gamma$ ὥστε ΑΒ, $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ καὶ ἂς παραβληθῇ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν ΑΒ, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα τὸ $B\Delta^2 = \frac{B\Gamma^2}{4}$ καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τὸ $AE \times EB$, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον καὶ ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΕΖ καὶ αἱ ΑΖ, ΖΒ. (Κατὰ τὸ θ. 18 αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - AB\chi + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$). Ἐπειδὴ ΑΒ καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ εἶναι $\frac{AE}{EB} = \frac{BA \times AE}{AB \times BE}$. Εἶναι δὲ $AZ^2 = BA \times AE$, $ZB^2 = AB \times BE$. Εἶναι ἄρα καὶ AZ^2, ZB^2 ἀσύμμετρα. Δηλ. αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ ῥητὴ ἄρα $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ ῥητόν. Ἐπειδὴ $EZ^2 = AE \times EB = B\Delta^2$, εἶναι ἄρα $ZE = B\Delta$, καὶ συνεπῶς $B\Gamma = 2ZE$. Ὥστε $AB \times B\Gamma = AB \times 2EZ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς $AB \times ZE$, (θ. 6). Εἶναι δὲ $AB \times B\Gamma$ μέσον (διότι ΑΒ, ΒΓ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, θ. 21)· εἶναι ἄρα καὶ $AB \times EZ$ μέσον λόγῳ τῆς συμμετρίας πρὸς $AB \times B\Gamma$. Εἶναι δὲ $AB \times EZ = AZ \times ZB$. Ἄρα $AZ \times ZB$ μέσον. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $AZ^2 + ZB^2$ ῥητόν. [Αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε κλπ. εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 30, αἱ $AB = \rho$, $B\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, ($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος). Αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι (θετικαὶ καὶ ἄνισοι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \rho\chi + \frac{\rho^2\alpha^2}{4\lambda} = 0$.

Αὗται εἶναι $AE = \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $EB = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΖ, ΖΒ θὰ ὑπολογισθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων $AZ^2 = AB \times AE$, $ZB^2 = AB \times EB$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ $AZ = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $ZB = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$. Σημειωτέον, ὅτι αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4 - AB^2\chi^2 + AB^2 \cdot \frac{B\Gamma^2}{4} = 0 \text{ ἢ } \chi^4 - \rho^2\chi^2 + \frac{\rho^4\alpha^2}{4\lambda} = 0.$$

34. Ἄλλη ἐκφώνησις: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης νὰ εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλ. τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι ῥητόν.

Ἔστωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι $AB > B\Gamma$, ὥστε ΑΒ, $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητόν, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ $BE^2 = E\Gamma^2 = B\Gamma^2 : 4$, ὡς ὀρθογώνιον παραλ. τὸ $AZ \times ZB$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΖΔ καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ. Κατὰ τὸ θ. 18 αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα $AB \times AZ$, $AB \times ZB$ εἶναι ἀσύμμετρα. Συνεπῶς καὶ τὰ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ταῦτα τὰ $A\Delta^2$, ΔB^2 ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ AB^2 ἐξ ὑποθέσεως μέσον εἶναι ἄρα καὶ τὸ ἴσον πρὸς τοῦτο $A\Delta^2 + \Delta B^2$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ $B\Gamma = 2\Delta Z$ (διότι $\frac{B\Gamma^2}{4} = AZ \times ZB = Z\Delta^2$), εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma = 2AB \times Z\Delta$. Ῥητὸν δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ $AB \times B\Gamma$. Ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ $AB \times Z\Delta$. Ἀλλὰ $AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$. Ῥητὸν ἄρα τὸ $A\Delta \times \Delta B$. (Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι κλπ. εἶναι αἱ μέσαι τοῦ θ. 31. 2, αἱ $AB = \rho\alpha^{\frac{1}{2}} : \lambda^{\frac{1}{4}}$, $B\Gamma = \rho\alpha^{\frac{3}{2}} : \lambda^{\frac{3}{4}}$, ($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, μὴ τετράγωνος). Αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι κατὰ τὸ θ. 18 αἱ θετικαὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - AB\chi + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0 \text{ ἢ } \chi^2 - \frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\chi + \frac{\rho^2\alpha^3}{4\lambda^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\text{ἤτοι} \quad AZ = \frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\lambda^{\frac{1}{4}}}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad ZB = \frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\lambda^{\frac{1}{4}}}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΔ, ΔΒ θὰ ληφθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων, $A\Delta^2 = AB \times AZ$, $\Delta B^2 = AB \times ZB$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ

$$A\Delta = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4 - \text{ΑΒ}^2\chi^2 + \frac{\text{ΑΒ}^2 \times \text{ΒΓ}^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^4 - \frac{\rho^2\alpha}{\sqrt{\lambda}}\chi^2 + \frac{\rho^4\alpha^4}{4\lambda^2} = 0.$$

35. Ἄλλη ἐκφώνησις: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης νὰ εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἔστωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ $\rangle$ ΒΓ ὥστε ΑΒ $\times$ ΒΓ μέσον καὶ ΑΒ, $\sqrt{\text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΓ}^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ $\frac{\text{ΒΓ}^2}{4} = \text{ΒΕ}^2 = \text{ΕΓ}^2$, ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ $\times$ ΖΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσι αἱ ΑΔ, ΔΒ καὶ τὸ ὕψος ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΔΒ}^2}$ εἶναι ἄρα ΑΔ² ΔΒ² ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ² εἶναι μέσον (διότι ἡ ΑΒ εἶναι μέση) εἶναι μέσον καὶ τὸ ἴσον πρὸς τοῦτο $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$. Ἐπειδὴ $\text{ΑΖ} \times \text{ΖΒ} = \text{ΖΔ}^2 = \text{ΒΕ}^2$, εἶναι ἄρα ΒΕ $=$ ΔΖ. Ἄρα ΒΓ $= 2$ΖΔ. Ὥστε καὶ τὸ $\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} = 2\text{ΑΒ} \times \text{ΖΔ}$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ ΑΒ $\times$ ΒΓ. Ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΑΒ $\times$ ΖΔ καὶ συνεπῶς εἶναι καὶ τὸ ΑΔ $\times$ ΔΒ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ, ΒΓ μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι δὲ ΓΒ, ΒΕ μήκει σύμμετροι (διότι 2ΒΕ, ΒΕ μήκει σύμμετροι) εἶναι ἄρα ΑΒ, ΒΕ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Ὥστε ΑΒ², ΑΒ $\times$ ΒΕ ἀσύμμετρα (διότι $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΑΒ} \times \text{ΒΕ}}$ καὶ θ. 11). Ἀλλὰ $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ καὶ $\text{ΑΒ} \times \text{ΒΕ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΖΔ} = \text{ΑΔ} \times \text{ΔΒ}$. Εἶναι ἄρα τὸ $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΑΔ $\times$ ΔΒ. Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι κλπ. εἶναι αἱ μέσαι τοῦ θεωρ. 32.2, αἱ

$$\text{ΑΒ} = \rho\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{ΒΓ} = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda \ \text{μὴ τετράγωνος}).$$

Αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι κατὰ τὸ θ. 18 αἱ θετικαὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$\chi^2 - \text{ΑΒ}\chi + \frac{\text{ΒΓ}^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2 - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha^2}{4\lambda} = 0,$$

ἤτοι αἱ $\text{ΑΖ} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $\text{ΖΒ} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΔ, ΔΒ θὰ ληφθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων $ΑΔ^2 = ΑΒ \times ΑΖ$, $ΔΒ^2 = ΑΒ \times ΖΒ$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ

$$ΑΔ = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad ΔΒ = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4 - ΑΒ^2\chi^2 + ΑΒ^2 \cdot \frac{ΒΓ^2}{4} = 0 \quad ἢ \quad \chi^4 - \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}\chi^2 + \rho^4\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\alpha^2}{4\lambda} = 0.$$

[$ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ ἀσύμμετρα, διότι ὁ λόγος των $= \dfrac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\sqrt{\lambda}-\beta}$, $ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = \rho^2\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}$, $ΑΔ \times ΔΒ = \dfrac{\rho^2}{2}\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12} \cdot \dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $ΑΔ^2+ΔΒ^2$, διότι ὁ λόγος των $= \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}}$].

Πρόσθεσις μονωνύμων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας.

36. Αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι κατὰ τὸ θ. 10 τῆς μορφῆς, $ΑΒ = \rho$, $ΒΓ = \rho\sqrt{\dfrac{\delta}{\gamma}}$. Τὸ ἄθροισμα $ΑΓ = \rho + \rho\sqrt{\dfrac{\delta}{\gamma}}$ καλεῖται ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) καὶ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος).

37. Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι (τὸ γινόμενόν των ῥητὸν) εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 27, $ΑΒ = \rho\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14}$, $ΒΓ = \rho\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac34}$. Τὸ ἄθροισμα $ΑΓ = \rho\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14} + \rho\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac34}$ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη καὶ εἶναι ἄλογος.

38. Ἔστω $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ$, ἔνθα ΑΒ, ΒΓ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον. Μετασχηματίζομεν τὸ $ΑΓ^2$ εἰς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ῥητὴ ΔΕ καὶ ἄλλη πλευρὰ ἡ ΔΗ καὶ ἔστω $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = ΕΘ$. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ = ΘΖ$. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέση, εἶναι ἄρα τὰ $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ μέσα καὶ ἑπομένως καὶ τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ μέσον. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον· εἶναι ἄρα τὰ ΕΘ ($= ΑΒ^2 + ΒΓ^2$) καὶ ΘΖ ($= 2ΑΒ \times ΒΓ$) μέσα. Καὶ ἕκαστον τούτων ἔχει πλευρὰν τὴν ῥητὴν ΔΕ. Ἄρα ΔΘ, ΘΗ ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, διότι εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΒ^2}{ΑΒ \times ΒΓ}$, εἶναι ἄρα τὰ $ΑΒ^2$, $ΑΒ \times ΒΓ$ ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ

AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα, εἶναι ἄρα AB^2, $(AB^2+B\Gamma^2)$ σύμμετρα· εἶναι δὲ καὶ $AB\times B\Gamma$, $2AB \times B\Gamma$ σύμμετρα. Ἐπειδὴ δὲ AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα, εἶναι ἄρα $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα ἤτοι τὰ $E\Theta$, ΘZ ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{E\Theta}{\Theta Z} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta H}$, εἶναι ἄρα $\Delta\Theta$, ΘH μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ $\Delta\Theta$, ΘH ἐδείχθησαν ῥηταί, καὶ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (ὁρ. 3). Εἶναι ἄρα ἡ $\Delta H = \Delta\Theta + \Theta H$ ἄλογος (θ. 36). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔE· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον (σημ. Δὲν ὑπάρχει προηγούμενον θεώρημα ἐπὶ τούτου· συνάγεται ὅμως ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ἐκ τοῦ ὁρ. 4 καὶ τοῦ θ. 21) καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ $A\Gamma$, ἡ ὁποία συνεπῶς εἶναι ἄλογος καὶ ἂς καλῆται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

(Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι εἶναι αἱ τοῦ θ. 28. Τὸ ἄθροισμά των ἡ $A\Gamma = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$ εἶναι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. Ἡ μείζων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 33 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

40. Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 34 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

41. Ἡ δύο μέσα δυναμένη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 35 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Λῆμμα

Ἔστω ἡ εὐθεῖα AB καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε $A\Gamma > \Gamma B$ καὶ πάλιν εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σημεῖον Δ, ὥστε $\Delta B > A\Delta$ καὶ ἔστω $A\Gamma > \Delta B$, (1). Λέγω, ὅτι

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2.$$

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ μέσον E τῆς AB. Ἀπὸ τῶν μελῶν της (1) ἀφαιροῦμεν τὴν ΔΓ ὅτε θὰ ἔχωμεν $ΑΓ - ΔΓ > ΔΒ - ΔΓ$ ἢ $ΑΔ > ΓΒ$, (2). Ἀπὸ τῆς ἰσότητος $ΑΕ = ΕΒ$ ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἀνισότητα (2), ὅτε θὰ ἔχωμεν $ΑΕ - ΑΔ < ΕΒ - ΓΒ$ ἢ $ΔΕ < ΕΓ$, (3). Τὰ σημεῖα ἄρα Δ, Γ δὲν ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ μέσου Ε. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ \times ΓΒ + ΕΓ^2 = ΕΒ^2$, (II. 5), ἀλλὰ καὶ $ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2 = ΕΒ^2$, (II. 5), εἶναι ἄρα $ΑΓ \times ΓΒ^2 + ΕΓ^2 = ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2$. Ἐκ τῆς (3) ὅμως $ΕΓ^2 > ΔΕ^2$. Εἶναι ἄρα $ΑΓ \times ΓΒ < ΑΔ \times ΔΒ$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 + 2ΑΓ \times ΓΒ = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 + 2ΑΔ \times ΔΒ$. Ἑπομένως εἶναι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > ΑΔ^2 + ΔΒ^2$.

[Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἀνίσων ἀριθμῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν μεγαλύτερον (ἢ μικρότερον) ὅρον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος].

42. Τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου $\rho + \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(ἢ\ \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$ τοῦ θ. 36 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Τὸ προηγούμενον λῆμμα τοῦ θ. 41 ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν τῆς διαφορᾶς $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΔΒ^2 + ΑΔ^2)$. Ὑπετέθη $ΑΓ > ΔΒ$.

Κατὰ τὸ θεώρημα, ἐὰν εἶναι $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ$, ἔνθα $ΑΓ \neq ΑΔ$, $ΓΒ \neq ΔΒ$. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ διαφορὰ μεταξὺ τῶν μονωνύμων, τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορά, τότε ἐκ τῆς σχέσεως $(ΑΓ + ΓΒ)^2 = (ΑΔ + ΔΒ)^2$ ἔχομεν $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΑΔ^2 + ΔΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$. Ἡ διαφορὰ τοῦ α΄ μέλους εἶναι ῥητὴ (διότι τὰ μονώνυμα εἶναι ῥητὰ δυνάμει μόνον σύμμετρα). Ἄρα καὶ τοῦ δευτέρου μέλους ἡ διαφορὰ εἶναι ῥητή, ὅπερ ἄτοπον. Διότι $ΑΔ \times ΔΒ$, $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσα.

43. Εἰς τὴν σχέσιν $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΑΔ^2 + ΔΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$, τὸ δεύτερον μέλος εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ῥητόν. Ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ῥητόν, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου μέλους εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

44. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος χρησιμοποιεῖται ἡ πρότασις $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$, ἂν $\alpha \neq \beta$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ προηγουμένως. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης περιέχεται εἰς τὸ λῆμμα τοῦ θ. 59. Ὅθεν ἡ θέσις τοῦ λήμματος τούτου εἶναι μετὰ τὸ θ. 43.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι

Ληφθείσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου $\Delta = A + B$ (ἔνθα $A > B$ ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα).

I. Ἔστω A, $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πρώτη δυώνυμος.

Ἐὰν 2. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ δευτέρα δυώνυμος.

Ἐὰν 3. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τρίτη δυώνυμος.

II. Ἔστω A, $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τετάρτη δυώνυμος.

Ἐὰν 5. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πέμπτη δυώνυμος.

Ἐὰν 6. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ ἕκτη δυώνυμος.

[Σημ. Αἱ τρεῖς πρῶται περιπτώσεις λαμβάνονται ὅταν ἡ ὑποτείνουσα A εἶναι πρὸς τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν B ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον σύμμετρος. Αἱ τρεῖς δεύτεραι περιπτώσεις λαμβάνονται ὅταν ἡ ὑποτείνουσα A εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὰς δύο καθέτους πλευράς].

48. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $AB = A\Gamma + \Gamma B$, ($\varphi^2 = \theta + \omega^2$, ἔνθα θ μὴ τετράγωνος, 1ον λῆμμα τοῦ 28, τρίτη περίπτωσις) καὶ ῥητὴ ἡ Δ (= ρ). Τῶν ἀκεραίων γ, δ καὶ τῆς ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $EZ = \rho \dfrac{\delta}{\gamma}$. Ἡ EZ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ καὶ ῥητή. Τῶν AB, AΓ, EZ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $AB : A\Gamma = EZ : K$, (1). Τῶν EZ, K τὴν μέσην ἀνάλογον, $EZ : ZH = ZH : K$, ἐξ ἧς κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $EZ : K = EZ^2 : ZH^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1), $AB : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, (2). Ἐπειδὴ $AB : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα EZ, ZH μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ EZ^2, ZH^2 σύμμετρα. Ἐπειδὴ EZ ῥητή, EZ^2 ῥητὸν καὶ συνεπῶς ZH^2 ῥητόν, ἄρα καὶ ZH ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα EZ, ZH εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ $EH = EZ + ZH$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον ὅτι καὶ πρώτη δυώνυμος. Ἐπειδὴ $AB > A\Gamma$ εἶναι ἐκ τῆς (2) καὶ $EZ^2 > ZH^2$. Ἔστω $EZ^2 = ZH^2 + \Theta^2$, (3). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀναστροφῆς $AB : (AB - A\Gamma) = EZ^2 : (EZ^2 - ZH^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = EZ^2 : \Theta^2$, (4).

Ἐπειδὴ AB, ΓB εἶναι τετράγωνοι, εἶναι ἄρα EZ, Θ μήκει σύμμετροι, (θ. 9). Ἐκ τῆς (3), ἡ $\Theta = \sqrt{EZ^2 - ZH^2}$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν EZ, ἡ ὁποία εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ. Ὥστε εὕρομεν 1) EZ, ZH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) ΕΖ$>$ΖΗ, 3) ΕΖ, Θ μήκει σύμμετροι, 4) Τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΗ πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. 1 δευτέρων ὁρισμῶν). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως $ΖΗ = \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$. Ὥστε ἡ πρώτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς $ΕΖ + ΖΗ = \rho \frac{\delta}{\gamma} + \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$.

(Ὡς καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα λαμβάνεται πρὸς συντομίαν $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος ἀντὶ τοῦ $\left(\frac{\kappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \kappa\xi\sigma\tau$, μὴ τετράγωνος ἔνθα $\mu = \kappa\xi$ καὶ $\nu = \sigma\tau$ εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ὄχι ὅμως ὅμοιοι).

49. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ ($\varphi^2 = \theta + \omega^2$, ἔνθα θ μὴ τετράγωνος) ῥητὴ ἡ Δ ($= \rho$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΕΖ ($= \rho \frac{\delta}{\gamma}$, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον). Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Τῶν ΑΓ, ΑΒ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ : Κ$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΕΖ : ΖΗ = ΖΗ : Κ$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $ΕΖ : Κ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1), $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐπειδὴ $ΑΓ : ΑΒ$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ΕΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δυνάμει σύμμετροι ($ΕΖ^2$, $ΖΗ^2$ σύμμετρα). Ἐπειδὴ $ΕΖ^2$ ῥητὸν εἶναι καὶ $ΖΗ^2$ ῥητόν, ἄρα καὶ ΖΗ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, καὶ δευτέρα δυώνυμος. Ἐκ τῆς (2) ἀνάπαλιν εἶναι $ΑΒ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΕΖ^2$, (3). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΒ > ΑΓ$ εἶναι καὶ $ΖΗ^2 > ΕΖ^2$. Ἔστω $ΖΗ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$, (4). Ἐκ τῆς (3) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $ΑΒ : (ΑΒ - ΑΓ) = ΖΗ^2 : (ΖΗ^2 - ΕΖ^2)$ ἢ $ΑΒ : ΓΒ = ΖΗ^2 : Θ^2$, (5). Ἐπειδὴ ΑΒ, ΓΒ τετράγωνοι, ἄρα ΖΗ, Θ μήκει σύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $Θ = \sqrt{ΖΗ^2 - ΕΖ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ΖΗ, ΕΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) ΖΗ $>$ ΕΖ, 3) ΖΗ, Θ μήκει σύμμετροι, 4) Τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΗ δευτέρα δυώνυμος (ὁρ. 2 δευτέρων ὁρισ.). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως $ΖΗ = \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}$. Ὥστε ἡ δευτέρα δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ΖΗ + ΕΖ = \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \rho \frac{\delta}{\gamma}.$$

50. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ ($\varphi^2 = \theta + \omega^2$, ἔνθα θ μὴ τετράγωνος) καὶ ὁ ἀριθμὸς Δ ($= \varepsilon$) μὴ τετράγωνος καὶ ῥητὴ ἡ Ε ($= \rho$). Τῶν Δ, ΑΒ, Ε εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $Δ : ΑΒ = Ε : Ν$, (1). Τῶν Ε,

Ν τὴν μέσην ἀνάλογον, $Ε : ΖΗ = ΖΗ : Ν$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V ἔχομεν $Ε : Ν = Ε^2 : ΖΗ^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐκ τῆς (2) ἕπεται $Ε^2$, $ΖΗ^2$ σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ Ε ῥητή, ἄρα ΖΗ ῥητή. Ἐπειδὴ ὅμως $Δ : ΑΒ$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι Ε, ΖΗ, (α), μήκει ἀσύμμετροι.

Τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΒ : ΑΓ = ΖΗ : Λ$, (3). Τῶν ΖΗ, Λ τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΖΗ : ΗΘ = ΗΘ : Λ$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $ΖΗ : Λ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$.

Καὶ κατὰ τὴν (3), $ΑΒ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, (4). Ἐπειδὴ $ΑΒ : ΑΓ$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι· ἀλλὰ $ΖΗ^2$, $ΗΘ^2$ σύμμετρα. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΖΗ ῥητή. Ἄρα καὶ ΗΘ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $ΖΘ = ΖΗ + ΗΘ$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, καὶ τρίτη δυώνυμος. Τῶν (2) καὶ (4) λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον (δηλ. πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς κατὰ μέλη) ἔχομεν, $Δ : ΑΓ = Ε^2 : ΗΘ^2$, (5). Ἐπειδὴ ὁ λόγος $Δ : ΑΓ$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν (καὶ ὄχι τετραγώνου πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν), αἱ Ε, ΗΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (β), ἀλλὰ $Ε^2$, $ΗΘ^2$ σύμμετρα, (θ. 9). Εἰς τὴν (2) εἶναι $ΑΒ > ΑΓ$ καὶ συνεπῶς $ΖΗ^2 > ΗΘ^2$. Ἔστω $ΖΗ^2 = ΗΘ^2 + Κ^2$, (6). Ἐκ τῆς (4) δι' ἀναστροφῆς λαμβάνομεν, $ΑΒ : (ΑΒ - ΑΓ) = ΖΗ^2 : (ΖΗ^2 - ΗΘ^2)$ ἢ $ΑΒ : ΓΒ = ΖΗ^2 : Κ^2$. Ἐπειδὴ $ΑΒ : ΓΒ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν εἶναι ἄρα αἱ ΖΗ, Κ μήκει σύμμετροι. Καὶ ἐκ τῆς (6) εἶναι $Κ = \sqrt{ΖΗ^2 - ΗΘ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ΖΗ > ΗΘ$, 3) ΖΗ, Κ μήκει σύμμετροι, 4) Οὔτε ΖΗ οὔτε ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Ε [ἐκ τῶν (α) καὶ (β)]. Εἶναι ἄρα ἡ $ΖΘ = ΖΗ + ΗΘ$ τρίτη δυώνυμος (ὁρ. 3 δευτ. ὁρισ.). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $ΖΗ = \frac{ρφ}{\sqrt{ε}}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4), $ΗΘ = \frac{ρ\sqrt{θ}}{\sqrt{ε}}$. Ὥστε ἡ τρίτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ΖΗ + ΗΘ = \frac{ρφ}{\sqrt{ε}} + \frac{ρ\sqrt{θ}}{\sqrt{ε}}.$$

51. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$, ($λ = α^2 + β^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος, 2 λῆμμα τοῦ 28. Λαμβάνεται πρὸς συντομίαν ὡς καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα $λ = α^2 + β^2$ ἀντὶ τοῦ $λ = κξστ + \left(\frac{κξ - στ}{2} - 1\right)^2$, ἔνθα κ,ξ,σ,τ, ἀκέραιοι $μ = κξ$ καὶ $ν = στ$ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοὶ) καὶ ῥητὴ ἡ Δ ($= ρ$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΕΖ ($= ρ\frac{δ}{γ}$, ὡς εἰς προηγούμενα). Ἄρα ΕΖ ῥητή. Τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην

ἀνάλογον, $AB : A\Gamma = EZ : K$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ τὴν μέσην ἀνάλογον, $EZ : ZH = ZH : K$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $EZ : K = EZ^2 : ZH^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) $AB : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, (2). Ἐπειδὴ $AB : A\Gamma$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ἄρα ΕΖ, ΖΗ μήκει ἀσύμμετροι καὶ EZ^2, ZH^2 μόνον σύμμετρα. Ἐπειδὴ ΕΖ ῥητὴ καὶ EZ^2 ῥητὸν καὶ ἐκ τῆς (2) ZH^2 ῥητὸν καὶ συνεπῶς ΖΗ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ $EH = EZ + ZH$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον ὅτι καὶ τετάρτη δυώνυμος. Ἐπειδὴ $AB > A\Gamma$ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2) καὶ $EZ^2 > ZH^2$. Ἔστω $EZ^2 = ZH^2 + \Theta^2$, (3). Ἐκ τῆς (2) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $AB : (AB - A\Gamma) = EZ^2 : (EZ^2 - ZH^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = EZ^2 : \Theta^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ΕΖ, Θ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (3) $\Theta = \sqrt{EZ^2 - ZH^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $EZ > ZH$, 3) ΕΖ, Θ μήκει ἀσύμμετροι, 4) Τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ $EH = EZ + ZH$ τετάρτη δυώνυμος, (4 ὁρ. τῶν δευτ. ὁρισ.). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $ZH = \rho \dfrac{\delta}{\gamma} \cdot \dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Ὥστε ἡ τετάρτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$EZ + ZH = \rho \frac{\delta}{\gamma} + \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

52. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $AB = A\Gamma + \Gamma B$, ($\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος, ὡς προηγουμένως) καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ Δ ($= \rho$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ $EZ\left(= \rho \dfrac{\delta}{\gamma}\right)$. Ἄρα ἡ ΕΖ ῥητή. Τῶν ΑΓ, ΑΒ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $A\Gamma : AB = EZ : K$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ τὴν μέσην ἀνάλογον, $EZ : ZH = ZH : K$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V ἔχομεν $EZ : K = EZ^2 : ZH^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) $A\Gamma : AB = EZ^2 : ZH^2$, (2). Ἐπειδὴ $A\Gamma : AB$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ΕΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ EZ^2, ZH^2 σύμμετρα, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $EH = EZ + ZH$ εἶναι δυώνυμος (θ. 36). Δεικτέον, ὅτι καὶ πέμπτη δυώνυμος. Ἐκ τῆς (2) ἀνάπαλιν εἶναι $AB : A\Gamma = ZH^2 : EZ^2$, (3). Ἐπειδὴ $AB > A\Gamma$, ἄρα $ZH^2 > EZ^2$. Ἔστω $ZH^2 = EZ^2 + \Theta^2$, (4). Ἐκ τῆς (3) κατ' ἀναστροφὴν λαμβάνομεν $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - EZ^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : \Theta^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ΖΗ, Θ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $\Theta = \sqrt{ZH^2 - EZ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ΖΗ, ΕΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. 2) $ZH > EZ$, 3) ΕΖ, Θ μήκει ἀσύμμετροι, 4) Τὸ μικρότερον μονώνυμον, ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ $EH = ZH + EZ$ πέμπτη δυώνυμος (ὁρ. 5 τῶν δευτ. ὁρισ.). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν

$ZH = \rho \frac{\delta}{\gamma} . \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}$. Ὥστε ἡ πέμπτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ZH + EZ = \rho \frac{\delta}{\gamma} . \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \rho \frac{\delta}{\gamma} .$$

53. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $AB = A\Gamma + \Gamma B$ ($\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος) καὶ ὁ μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς Δ ($= \varepsilon$), καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ E ($= \rho$). Τῶν Δ, AB, E εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : AB = E : N$, (1). Τῶν E, N τὴν μέσην ἀνάλογον, $E : ZH = ZH : N$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $E : N = E^2 : ZH^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, (2). Ἐπειδὴ $\Delta : AB$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ἕπεται ἐκ τῆς (2) ὅτι E^2, ZH^2 σύμμετρα καὶ E, ZH μήκει ἀσύμμετροι, (α), καὶ ἐπειδὴ E ῥητή, εἶναι E^2 ῥητόν, συνεπῶς ZH^2 ῥητόν, ἄρα ZH ῥητή. Τῶν AB, $A\Gamma$, ZH εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $AB : A\Gamma = ZH : M$, (3). Τῶν ZH, M τὴν μέσην ἀνάλογον, $ZH : H\Theta = H\Theta : M$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $ZH : M = ZH^2 : H\Theta^2$. Καὶ κατὰ τὴν (3) εἶναι $AB : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (4). Ἐπειδὴ $AB : A\Gamma$ εἶναι λόγος ἁπλῶς ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν εἶναι ἄρα ZH^2, $H\Theta^2$ σύμμετρα καὶ ZH, $H\Theta$ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Ἐπειδὴ δὲ ZH ῥητή, ἄρα ZH^2 ῥητόν, καὶ $H\Theta^2$ ῥητὸν καὶ συνεπῶς $H\Theta$ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ZH, $H\Theta$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, ὅτι καὶ ἕκτη δυώνυμος. Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον τῶν (2) καὶ (4), δηλ. πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς κατὰ μέλη, ἔχομεν $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$. Ἐπειδὴ $\Delta : A\Gamma$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι E, $H\Theta$ μήκει ἀσύμμετροι, (β). Ἐδείχθη δὲ καὶ E, ZH μήκει ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ εἰς τὴν (4) εἶναι $AB > A\Gamma$, εἶναι ἄρα καὶ $ZH^2 > H\Theta^2$. Ἔστω $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. Ἐκ τῆς (4) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - H\Theta^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : K^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ZH, K εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι $K = \sqrt{ZH^2 - H\Theta^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ZH, $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ZH > H\Theta$, 3) ZH, K μήκει ἀσύμμετροι, 4) Οὔτε ZH, οὔτε $H\Theta$ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν E [ἐκ τῶν (α) καὶ (β)]. Εἶναι ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ ἕκτη δυώνυμος, (6 ὁρ. δευτ. ὁρ.).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν $ZH = \rho \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν $H\Theta = \rho \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ὥστε ἡ ἕκτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ZH + H\Theta = \rho \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \rho \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}} .$$

Λῆμμα

Ἐὰν ὑπάρχῃ $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς $(\alpha + \beta)^2$ καὶ 1) $\alpha^2 : \alpha\beta = \alpha\beta : \beta^2$, 2) $(\alpha + \beta)^2 : (\alpha + \beta)\beta = (\alpha + \beta)^2 \beta : \beta^2$.

[Σημ. Ἑκάστη δυώνυμος τῶν προηγουμένων 6 θεωρ. 48-53 εἶναι ἄθροισμα ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθ. τριγώνου (μήκει ἀσύμμετροι). Εἰς τὰ ἑπόμενα 6 θεωρ. (54 - 59) ἑκάστη τῶν δυωνύμων τούτων λαμβάνεται ὡς δεύτερον τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους, ὡς πρώτου τμήματος λαμβανομένης ῥητῆς τινος].

54. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι εὐθεῖα ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα πρώτη δυώνυμος, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος δυώνυμος.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ ΑΒ $=\rho$ καὶ ἡ πρώτη δυώνυμος ΑΔ = ΑΕ + ΕΔ, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 48, ἤτοι

$$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}.$$

Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\mathrm{AE}\chi^2+\frac{\mathrm{E\Delta}^2}{4}=0$ ἢ $\chi^2-\rho\frac{\delta}{\gamma}\chi+\frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2}\cdot\frac{\theta}{\varphi^2}=0$, (κατὰ τὸ θ. 17), αἱ $\mathrm{AH}=\frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$, $\mathrm{HE}=\frac{\rho\delta}{2\gamma}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$.

Ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι:

$$\mathrm{A\Theta}=\rho\mathrm{AH}=\rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right)=\mathrm{MN}^2,\quad \mathrm{MN}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

$$\mathrm{HK}=\rho\mathrm{HE}=\rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right)=\mathrm{MN}^2,\quad \mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

Καὶ $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AB}\,(\mathrm{AE}+\mathrm{E\Delta})=\rho\left(\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)=(\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}$$
$$+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν διπλοῦ ῥιζικοῦ δυωνύμου εἰς ἄθροισμα δύο ἁπλῶν ῥιζικῶν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἡ $\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}$ εἶναι δυώνυμος (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 36), διότι αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον MN^2, $\mathrm{N\Xi}^2$ σύμμετρα.

[γ, δ ἀκέραιοι, ἐτέθη $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος, ἀντὶ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=$ $=\kappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ μ (= κξ), ν (= στ), ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, οὐχὶ ὅμως ὅμοιοι, οὐχὶ δηλ. κ : ξ = σ : τ].

55. Ἄλλη ἐκφώνησις : ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα δευτέρα δυώνυμος τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἐπὶ τοῦ ὅτι αἱ ῥηταὶ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι: αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι μήκει σύμμετροι, ἄρα ῥηταὶ καὶ ἡ ΒΑ ἐξ ὑποθέσεως ῥητή. Ἐδείχθη δὲ ΒΑ, ΑΗ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ΒΑ, ΗΕ μήκει ἀσύμμετροι. Καθ' ὁρισμόν, (ὁρ. 3) αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἐπειδὴ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $AB = \rho$ καὶ ἡ δευτέρα δυώνυμος $A\Delta = AE + E\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 49, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \rho\frac{\delta}{\gamma}$.

Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - AE\chi + \frac{E\Delta^2}{4} = 0$, ἢ $\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2} = 0$, (θ. 17), αἱ

$$AH = \rho\frac{\delta}{2\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}, \qquad HE = \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}.$$

$$A\Theta = \rho AH = \rho\left(\rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}\right) = MN^2, \quad MN = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$$

$$HK = \rho HE = \rho\left(\rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}\right) = N\Xi^2, \quad N\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$$

Καὶ $A\Gamma = AB\,(AE + E\Delta) = \rho\left(\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\right) = (MN + N\Xi)^2$, ὥστε

$$\sqrt{A\Gamma} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + 1\right)} = MN + N\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}.$$

Δεύτερος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{A\Gamma} = MN + N\Xi$ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 37) διότι ἑκάστη τῶν ΜΝ, ΝΞ περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ (τοῦ θ), μόνον MN^2, $N\Xi^2$ σύμμετρα καὶ $MN \times N\Xi = \frac{\rho^2\delta}{2\gamma}$ ῥητόν.

[γ, δ ἀκέραιοι, $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος κλπ. ὡς προηγουμένως].

56. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τρίτη δυώνυμος τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Ἔστω τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $AB = \rho$ καὶ ἡ τρίτη δυώνυμος $A\Delta = AE + E\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 50, ἤτοι $\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι ῥίζαι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι, τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - \mathrm{AE}\chi + \frac{\mathrm{E\Delta}^2}{4} = 0 \text{ ἢ}$$

$$\chi^2 - \frac{\rho\varphi\chi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho^2\theta}{4\varepsilon} = 0, \quad (\theta.\ 17), \text{ αἱ}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad \mathrm{HE} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$\mathrm{A\Theta} = \rho\mathrm{AH} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \mathrm{MN}^2, \quad \mathrm{MN} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\mathrm{HK} = \rho\mathrm{HE} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \mathrm{N\Xi}^2, \quad \mathrm{N\Xi} = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

Καὶ $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB}\ (\mathrm{AE} + \mathrm{E\Delta}) = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\mathrm{MN} + \mathrm{N\Xi})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\mathrm{A\Gamma}} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}} = \mathrm{MN} + \mathrm{N\Xi} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Τρίτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\mathrm{A\Gamma}} = \mathrm{MN} + \mathrm{N\Xi}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα (θ. 38), διότι ἑκάστη τῶν ΜΝ, ΝΞ περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ (τοῦ ε), μόνον MN^2, $\mathrm{N\Xi}^2$ σύμμετρα, καὶ $\mathrm{MN} \times \mathrm{N\Xi} = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon}}$ μέσον. [θ, ε μὴ τετράγωνοι, $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$, ὡς προηγουμένως].

57. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τετάρτη δυώνυμος, τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος μείζων.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\mathrm{AB} = \rho$ καὶ ἡ τετάρτη δυώνυμος $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} + \mathrm{E\Delta}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 51, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \mathrm{AE}\chi + \frac{\mathrm{E\Delta}^2}{4} = 0$, ἢ

$$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\lambda} = 0, \quad (\theta.\ 18). \text{ αἱ}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathrm{HE} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\mathrm{A\Theta} = \rho\mathrm{AH} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = \mathrm{MN}^2, \quad \mathrm{MN} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$\text{HK} = \rho\text{HE} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = \text{N}\Xi^2, \quad \text{N}\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$\text{Καὶ } \text{A}\Gamma = \text{AB}\ (\text{AE} + \text{E}\Delta) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma} + \frac{\rho\delta\alpha}{\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = (\text{MN} + \text{N}\Xi)^2, \text{ ὥστε}$$

$$\sqrt{\text{A}\Gamma} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \text{MN} + \text{N}\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} +$$

$$+ \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}.$$

Τέταρτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Η $\sqrt{\text{A}\Gamma} = \text{MN} + \text{N}\Xi$ εἶναι μείζων (θ. 39), διότι MN^2, $\text{N}\Xi^2$ ἀσύμμετρα, $\text{MN}^2 + \text{N}\Xi^2 = \rho^2\dfrac{\delta}{\gamma}$ ῥητὸν καὶ $\text{MN} + \text{N}\Xi = \dfrac{\rho^2\delta}{2\gamma}\cdot\dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ μέσον. [γ, δ, α ἀκέραιοι, λ μὴ τετράγωνος.

Ἐτέθη $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ ἀντὶ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\dfrac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα μ $(= \varkappa\xi)$, ν $(= \sigma\tau)$ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ἤτοι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$ καὶ μν τετράγωνος. Ἡ αὐτὴ συντομία καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα].

58. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο πέμπτη δυώνυμος τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω τὸ ὀρθ. παραλ. ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\text{AB} = \rho$ καὶ ἡ πέμπτη δυώνυμος $\text{A}\Delta = \text{AE} + \text{E}\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 52, ἤτοι $\rho\dfrac{\delta}{\gamma}.\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \rho\dfrac{\delta}{\gamma}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - \text{AE}\chi + \frac{\text{E}\Delta^2}{4} = 0, \quad \text{ἢ}$$

$$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2} = 0, \quad (\text{θ. } 18), \quad \text{αἱ}$$

$$\text{AH} = \frac{\rho\delta}{2\gamma}.\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}.\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{HE} = \frac{\rho\delta}{2\gamma}.\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}.$$

$$\text{A}\Theta = \rho\text{AH} = \rho\left(\frac{\rho\delta\sqrt{\lambda}}{2\gamma\alpha} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \text{MN}^2, \ \text{MN} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{\alpha}\right)}$$

$$\text{HK} = \rho\text{HE} = \rho\left(\frac{\rho\delta\sqrt{\lambda}}{2\gamma\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \text{N}\Xi^2, \ \text{N}\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \beta}{\alpha}\right)}.$$

$$\text{Καὶ } \text{A}\Gamma = \text{AB}\ (\text{AE} + \text{E}\Delta) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{\gamma}\right) = (\text{MN} + \text{N}\Xi)^2, \text{ ὥστε}$$

$$\sqrt{\text{ΑΓ}} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}.$$

Πέμπτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\text{ΑΓ}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ}$ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη (θ. 40), διότι ΜΝ^2, ΝΞ^2 ἀσύμμετρα, $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2 = \frac{\rho^2\delta\sqrt{\lambda}}{\gamma\alpha}$ μέσον, $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ} = \frac{\rho^2\delta}{2\gamma}$ ῥητόν. [γ, δ, α ἀκέραιοι, λ μὴ τετράγωνος, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$].

59. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο ἕκτη δυώνυμος, τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος, δύο μέσα δυναμένη.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\text{ΑΒ} = \rho$ καὶ ἡ ἕκτη δυώνυμος $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 53, ἤτοι $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \text{ΑΕ}\chi + \frac{\text{ΕΔ}^2}{4} = 0$ ἢ

$\chi^2 - \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\cdot\chi + \frac{\rho^2\alpha^2}{4\varepsilon} = 0$, (θ. 18), αἱ

$$\text{ΑΗ} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{ΗΕ} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$\text{ΑΘ} = \rho\text{ΑΗ} = \rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΜΝ}^2, \quad \text{ΜΝ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\text{ΗΚ} = \rho\text{ΗΕ} = \rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΝΞ}^2, \quad \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Καὶ $\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}\,(\text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}) = \rho\left(\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\text{ΜΝ} + \text{ΝΞ})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\text{ΑΓ}} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Ἕκτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\text{ΑΓ}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη (θ. 41), διότι ΜΝ^2, ΝΞ^2 ἀσύμμετρα, $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2 = \rho^2\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$ μέσον, $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ} = \frac{\rho^2\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\rho^2\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$. [$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος, ε μὴ τετράγωνος. Ὅπως διὰ τὸν λ ἡ πραγματικὴ μορφὴ λαμβάνεται ἐκ τοῦ 2 λήμματος τοῦ θ. 28, οὕτω καὶ διὰ τὸν ε. Ἑπομένως θὰ εἶναι $\pi\rho\psi\upsilon + \left(\frac{\pi\rho-\psi\upsilon}{2}-1\right)^2 = \varepsilon$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα μ ($=\pi\rho$), ν ($=\psi\upsilon$) ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ἤτοι $\pi : \rho = \psi : \upsilon$, $\pi, \rho, \psi, \upsilon$ ἀκέραιοι, μ. ν τετράγωνος].

Τὰ ἑπόμενα 6 θεωρήματα εἶναι ἀντιστοίχως τ' ἀντίστροφα τῶν 54-59.

60. Ἄλλη ἐκφώνησις: Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος δυώνυμος καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 48).

Ἡ δυώνυμος $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 36) $\rho + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

$A\Gamma > \Gamma B$. (Δύναται βεβαίως νὰ εἶναι καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, διότι καὶ τὰ μονώνυμα ταῦτα εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα). Ἀντὶ τῆς ῥητῆς ΔE λαμβάνομεν πάλιν ρ. Κατὰ τὸ θεώρημα θὰ εἶναι

$$A\Gamma^2 = \rho^2 = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \rho$$

$$\Gamma B^2 = \rho^2\frac{\delta}{\gamma} = \Delta E \times KM, \quad KM = \rho\frac{\delta}{\gamma}, \ \Delta K + KM = \Delta M.$$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = 2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} = \Delta E \times MH, \quad MH = 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \rho\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}.$$ Τὰ μονώνυμα ΔM, MH εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔM καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ μήκει σύμμετροι, καὶ ΔM, ρ μήκει σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΔH εἶναι πρώτη δυώνυμος (1 ὁρ. δευτ. ὁρισ.).

61. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων πρώτη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι δευτέρα δυώνυμος, (θ. 49).

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 37), $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$, καὶ ἔστω $\gamma > \delta$, ὅτε τὸ πρῶτον μονώνυμον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου.

$$A\Gamma^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Gamma B^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} = \Delta E \times KM, \quad KM = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \Delta M = \Delta K + KM$$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = 2\rho^2\frac{\delta}{\gamma} = \Delta E \times MH, \quad MH = 2\rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\,\frac{\delta}{\gamma}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2} = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ μήκει σύμμετροι, καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ. Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δευτέρα δυώνυμος.

62. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων δευτέρα καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι τρίτη δυώνυμος, (θ. 50). Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 38)

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}},\quad A\Gamma > \Gamma B.$$

$$A\Gamma^2 = \rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta E \times \Delta K, \qquad \Delta K = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Gamma B^2 = \frac{\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \Delta E \times KM, \qquad KM = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \Delta M = \Delta K + KM.$$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = 2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta E \times MH, \qquad MH = 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταί, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ οὔτε ΔΜ, οὔτε ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ (= ΔΕ).

Ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι τρίτη δυώνυμος.

63. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος μείζων καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι τετάρτη δυώνυμος, (θ. 51).

Ἡ μείζων $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 39)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad A\Gamma > \Gamma B.$$

$$A\Gamma^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \frac{\rho}{2}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\Gamma B^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Delta E \times KM, \quad KM = \frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$\Delta M = \Delta K + KM.$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = \frac{\rho^2\alpha}{\sqrt{\lambda}} = \Delta E \times MH, \quad MH = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \rho + \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2} = \frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ ΔΜ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ (= ΔΕ).

Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος.

64. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πέμπτη δυώνυμος, (θ. 52).

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 40).

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad A\Gamma > \Gamma B.$$

$$A\Gamma^2 = \frac{\rho^2}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \frac{\rho\alpha}{2\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\Gamma B^2 = \frac{\rho^2}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Delta E \times KM, \quad KM = \frac{\rho\alpha}{2\sqrt{\lambda}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$\Delta M = \Delta K + KM.$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda} = \Delta E \times MH, \quad MH = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}.$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Η ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2} = \rho\beta$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ (= ΔΕ). Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος.

65. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος δύο μέσα δυναμένη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἕκτη δυώνυμος, (θ. 53).

Ἡ δύο μέσα δυναμένη ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 41)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\ \mathrm{A\Gamma}>\mathrm{\Gamma B}.$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\Delta\mathrm{E}\times\Delta\mathrm{K},\quad \Delta\mathrm{K}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\mathrm{\Gamma B}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{KM},\quad \mathrm{KM}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$\Delta\mathrm{M}=\Delta\mathrm{K}+\mathrm{KM}.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}=\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{MH},\quad \mathrm{MH}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\Delta\mathrm{H}=\Delta\mathrm{M}+\mathrm{MH}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ. ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΔΜ > ΜΗ. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta\mathrm{M}^2-\mathrm{MH}^2}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ οὔτε ΔΜ, οὔτε ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ (= ΔΕ). Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ἕκτη δυώνυμος.

66. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος, λέγω ὅτι κλπ. Προηγουμένως εὕρομεν $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{Z\Delta}}$ καὶ ΑΕ>ΕΒ. Ἡ ΑΕ θὰ εἶνα. πρὸς τὴν $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{EB}^2}$ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Ἐὰν ΑΕ, $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{EB}^2}$ μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι λόγῳ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας καὶ ΓΖ, $\sqrt{\mathrm{\Gamma Z}^2-\mathrm{Z\Delta}^2}$ μήκει σύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ μήκει σύμ. πρὸς ρ καὶ συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος, ἤτοι τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν ἡ ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ θὰ εἶναι καὶ ΖΔ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ καὶ ἑκάστη συνεπῶς τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι δευτέρα δυώνυμος, ἤτοι τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν οὔτε ΑΕ οὔτε ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, θὰ εἶναι οὔτε ΓΖ οὔτε ΖΔ μήκει σύμμετροι πρὸς ρ. Ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι τρίτη δυώνυμος, ἤτοι τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν ΑΕ, $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{EB}^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι θὰ εἶναι καὶ ΓΖ, $\sqrt{\mathrm{\Gamma Z}^2-\mathrm{Z\Delta}^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ΑΕ ἢ ΕΒ ἢ οὐδεμία τούτων εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως καὶ ΓΖ ἢ ΖΔ ἢ οὐδεμία τούτων μήκει σύμμετρος πρὸς ρ καὶ συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως τετάρτη ἢ πέμπτη ἢ ἕκτη δυώνυμος, δηλ. θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο τῆς αὐτῆς τάξεως.

67. Ἐν ᾧ εἰς τὸ ἄθροισμα δύο μονωνύμων, ῥητῶν δυνάμει συμμέτρων εὐθειῶν, (δυώνυμον) διακρίνομεν ἓξ τάξεις, εἰς τὸ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν Α, Β διακρίνομεν δύο τάξεις, καθ' ἃς Α × Β εἶναι ῥητὸν ἢ μέσον (θ. 37 καὶ

38). Ὅθεν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μέσων εὐθειῶν Γ, Δ εἶναι σύμμετρον πρὸς Α + Β, καὶ Α × Β εἶναι ῥητὸν εἶναι καὶ Γ × Δ ῥητόν· ἐὰν Α × Β μέσον εἶναι καὶ Γ × Δ μέσον.

68. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ = ΑΕ + ΕΒ (δηλ. $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ ῥητὸν καὶ ΑΕ × ΕΒ μέσον) καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ. Ἔστω ΑΕ > ΕΒ. Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΑΕ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ, (1).

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ (2), ἂν καλέσωμεν ΓΔ — ΓΖ = ΖΔ. Ἐκ τῆς συμμετρίας τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἕπεται ἡ συμμετρία τῶν ΑΕ, ΓΖ καὶ ΕΒ, ΖΔ. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$ (3). Ἐπειδὴ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἄρα καὶ $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $\frac{ΑΕ+ΕΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ+ΖΔ}{ΖΔ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$. Συνεπῶς καὶ $\frac{ΑΒ^2}{ΕΒ^2} = \frac{ΓΔ^2}{ΖΔ^2}$, (4). Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν ἐπίσης $\frac{ΑΕ+ΕΒ}{ΑΕ} = \frac{ΓΖ+ΖΔ}{ΓΖ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΓΔ}{ΓΖ}$. Συνεπῶς καὶ $\frac{ΑΒ^2}{ΑΕ^2} = \frac{ΓΔ^2}{ΓΖ^2}$, (5). Δι' ἀντιστροφῆς τῶν ὅρων τῶν (4) καὶ (5) καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ^2+ΕΒ^2}{ΑΒ^2} = \frac{ΓΖ^2+ΖΔ^2}{ΓΔ^2}$. Ἐκ ταύτης $ΑΒ^2 : ΓΔ^2 = (ΑΕ^2 + ΕΒ^2) : (ΓΖ^2 + ΖΔ^2)$, (6). Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἐξ ὑποθέσεως σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ οἱ δεύτεροι. Καὶ $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ ῥητόν· ἄρα καὶ $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ ῥητόν.

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν $\frac{ΑΒ^2}{ΓΔ^2} = \frac{ΑΒ^2 - (ΑΕ^2+ΕΒ^2)}{ΓΔ^2 - (ΓΖ^2+ΖΔ^2)}$ ἢ $\frac{ΑΒ^2}{ΓΔ^2} = \frac{2ΑΕ \times ΕΒ}{2ΓΖ \times ΖΔ}$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν $ΑΒ^2$, $ΓΔ^2$ ἕπεται καὶ ἡ συμμετρία τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους. Καὶ εἶναι ΑΕ × ΕΒ μέσον. Εἶναι ἄρα ΓΖ × ΖΔ μέσον. Ἐδείχθη λοιπόν, $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ ῥητόν, ΓΖ × ΖΔ μέσον. Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι μείζων.

69. Ἔστω ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ΑΒ = ΑΕ + ΕΓ (δηλ. $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ μέσον, ΑΕ × ΕΒ ῥητὸν) καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς ταύτην ΓΔ. Ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, καὶ ἡ συμμετρία τῶν $(ΑΕ^2 + ΕΒ^2)$, $(ΓΖ^2 + ΖΔ^2)$ καὶ 2ΑΕ × ΕΒ, 2ΓΖ × ΖΔ. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ μέσον καὶ ΑΕ × ΕΒ ῥητόν, ἕπεται $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ μέσον καὶ ΓΖ × ΖΔ ῥητόν, ὅτι δηλ. ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

70. Ὁμοία ἀπόδειξις πρὸς τὴν τοῦ θ. 68.

71. Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ μέσον δὲ τὸ ΓΔ. Λέγω ὅτι ἡ $\sqrt{AB+\Gamma\Delta}$ θὰ εἶναι μία τῶν τεσσάρων ἀρρήτων, (θ. 36, 37, 39, 40). Ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΔ μέσον, εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ ἀσύμμετρα. Κατ' ἀνάγκην $AB \gtrless \Gamma\Delta$. Ἡ ἀσυμμετρία ἀποκλείει τὴν ἰσότητα. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36) καὶ $= E\Theta + \Theta K$ καὶ $E\Theta > \Theta K$. Ἐξετάζονται δύο περιπτώσεις.

Πρῶτον $AB > \Gamma\Delta$, ὁπότε $EH > \Theta I$ καὶ $E\Theta > \Theta K$.

1. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι πρώτη δυώνυμος καὶ $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 54).

2. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι τετάρτη δυώνυμος καὶ $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$, εἶναι μείζων (θ. 57).

Δεύτερον $AB < \Gamma\Delta$, ὁπότε $EH < \Theta I$ καὶ $E\Theta < \Theta K$.

3. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι δευτέρα δυώνυμος καὶ $\sqrt{AI}, = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 55).

4. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, (θ. 58).

72. Ἔστωσαν τὰ ἀσύμμετρα εὐθύγραμμα ΑΒ, ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἡ $\sqrt{AB+\Gamma\Delta}$ εἶναι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη. Ἔστω πρῶτον $AB > \Gamma\Delta$ ὁπότε $EH > \Theta I$ καὶ $E\Theta > \Theta K$. Αἱ ΕΘ, ΘΚ ἀποδεικνύονται ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρ. 3 εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα $EK = E\Theta + \Theta K$ εἶναι δυώνυμος, (36).

1. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος συνεπῶς καὶ $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56).

2. ΕΘ καὶ $\sqrt{E\Theta^2-\Theta K^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, (θ. 59).

Ἐὰν $AB < \Gamma\Delta$ εἶναι καὶ $EH < \Theta I$ καὶ $E\Theta < \Theta K$. Τότε εἶναι πάλιν, 1) ΘΚ καὶ $\sqrt{\Theta K^2-A\Theta^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56).

2. ΘΚ καὶ $\sqrt{\Theta K^2-E\Theta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{EI} = \sqrt{A\Delta}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, (θ. 59).

Ἀ π ο τ ο μ α ί

Ἀφαίρεσις μονωνύμων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας.

73. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ταύτης ἡ ῥητὴ ΒΓ, νὰ εἶναι δὲ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Λέγω ὅτι ἡ $A\Gamma = AB - B\Gamma$, (1) εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή. Διότι ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{AB^2}{AB \times B\Gamma}$ εἶναι ἄρα AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα, (2).

Ἐπειδὴ AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα εἶναι ἄρα AB^2, $(AB^2 + B\Gamma^2)$ σύμμετρα (θ. 15). Καὶ εἶναι $AB \times B\Gamma$, $2AB \times B\Gamma$ σύμμετρα.

Εἶναι ἄρα λόγῳ τῆς (2) καὶ $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα (θ. 13). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $A\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma = AB^2 + B\Gamma^2$. Καὶ ἐπειδὴ $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα εἶναι κατὰ τὸ β′ μέρος τοῦ θ. 16 καὶ $A\Gamma^2$, $AB^2 + B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα. Εἶναι δὲ ῥητὰ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$. Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς $AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \times B\Gamma$ τετραγώνου ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4). Ἃς καλῆται δὲ ἀποτομή.

[Αἱ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$, ἐκ τοῦ θ. 10, ἔνθα α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι, καὶ συνεπῶς ἡ ἀποτομὴ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$].

Σημ. 1. Εἰς τὸ 6 θεώρημα τοῦ XIII Βιβλίου τῶν Στοιχείων ἀποδεικνύεται ὅτι ἕκαστον τμῆμα ῥητῆς εὐθείας διαιρεθείσης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δηλ. ἡ ῥητὴ εὐθεῖα A διῃρημένη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ χ, ὥστε $\frac{A}{\chi} = \frac{\chi}{A-\chi}$, τότε ἡ χ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\alpha} - \rho\sqrt{\beta}$ καὶ ἡ $A - \chi$ τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\gamma} - \rho\sqrt{\delta}$, ἔνθα α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι, ρ ῥητή.

2. Εἰς τὸ αὐτὸ XIII Βιβλίον, θ. 17, ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή.

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $AB > B\Gamma$, ὥστε $A\Gamma = AB - B\Gamma$, $AB \times B\Gamma$ ῥητὸν AB^2, $B\Gamma^2$ μόνον σύμμετρα. Ἡ $A\Gamma$ ἡ ὁποία καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\gamma > \delta$. Αἱ μέσαι ἐκ τοῦ θ. 27.

75. Ἐξ ὑποθέσεως AB^2, $B\Gamma^2$ (1) μόνον σύμμετρα. Ἄρα εἶναι AB, $B\Gamma$ ἀσύμμετροι. Εἶναι δὲ $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB^2}{AB \times B\Gamma}$. Εἶναι ἄρα καὶ AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς (1) ἕπεται AB^2, $(AB^2 + B\Gamma^2)$, (2) σύμμετρα, (θ. 15). Εἶναι δὲ $AB \times B\Gamma$, $2AB \times B\Gamma$ σύμμετρα. (3). Καὶ ἐδείχθη AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2) καὶ (3), $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα, κλπ. Αἱ $H\Delta$, ΔZ, ἐδείχθησαν ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα μόνον $H\Delta^2$, ΔZ^2 εἶναι σύμμετρα, (ὁρ. 3).

Αἱ δύο μέσαι AB, $B\Gamma$ ὥστε $AB \times B\Gamma$ μέσον εἶναι αἱ τοῦ θ. 28. Ἡ δευτέρα ἄρα ἀποτομὴ μέσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$.

76. Ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα 75 καὶ 74 ἀποδεικνύομεν ὅτι $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς ἀσυμμετρίας ταύτης καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2$ ἕπεται κατὰ τὸ θ. 16, β' μέρος καὶ $A\Gamma^2$, $(AB^2 + B\Gamma^2)$ ἀσύμμετρα. Ὥστε ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4).

Αἱ δύο εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + B\Gamma^2$ ῥητὸν καὶ $AB \times B\Gamma$ μέσον εἶναι αἱ τοῦ θ. 33. Ἡ ἐλάσσων ἄρα εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,.$$

Σημ. 1. Εἰς τὸ 11 θ. τοῦ XIII Βιβλίου τῶν Στοιχείων ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ῥητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων.

2. Εἰς τὸ αὐτὸ XIII Βιβλίον, θ. 16, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων.

77. Ἐπειδὴ $AB^2 + B\Gamma^2$ μέσον καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητὸν ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $AB^2 + B\Gamma^2$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς σχέσεως ἄρα $A\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma = AB^2 + B\Gamma^2$, ἕπεται $A\Gamma^2$ καὶ $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. (θ. 16). Καὶ εἶναι τὸ $2AB \times B\Gamma$ ῥητόν. Εἶναι ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ ἄλογον καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄλογος, (ὁρ. 4).

Αἱ δύο εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα $AB^2 + B\Gamma^2$ μέσον καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητὸν εἶναι αἱ τοῦ θεωρ. 34.

Εἶναι ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,.$$

78. Ἐπειδὴ ἡ ἀποτομὴ καθ' ὁρισμόν, (θ. 73) εἶναι ἄλογος, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὴ $\times$ ἀποτομὴν ἄλογον.

Αἱ δύο εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + B\Gamma^2$ μέσον, $AB \times B\Gamma$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι αἱ τοῦ θ. 35. Εἶναι ἄρα ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Ὅπως εἰς τὰ θ. 42—47 ἀπεδείχθη ὅτι τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων (τῶν θ. 36—41) εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα, οὕτω καὶ εἰς τὰ θ. 79—84 ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἀφαιρετέοι, ὅταν δοθῶσιν αἱ διαφοραί, εἶναι μονοτίμως ὡρισμένοι (ὑπὸ τὰς ὡρισμένας συνθήκας).

79. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ $AB = A\Gamma - \Gamma B$, (1), ἤτοι AB ἄλογος καὶ $A\Gamma$, ΓB ῥηταὶ καὶ μόνον $A\Gamma^2$, ΓB^2 σύμμετρα. Λέγω, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα

ῥητὴ πλὴν τῆς ΓΒ, ὥστε $AB + ΓB = AΓ$ καὶ ἡ ΓΒ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἡ $AΓ^2$ νὰ εἶναι σύμμετροι. Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἡ ΒΔ, ὁπότε $AB = AΔ - ΔB$, (2), καὶ ἔστω $ΔB > ΓB$. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $(AΔ^2 + ΔB^2) - (AΓ^2 + ΓB^2) = 2AΔ \times ΔB - 2AΓ \times ΓB$, (3). Ἐπειδὴ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ καὶ μόνον $AΓ^2$, $ΓB^2$ σύμμετρα καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ΑΔ, ΔΒ ῥηταὶ καὶ μόνον $AΔ^2$, $ΔB^2$ σύμμετρα εἶναι ἄρα $AΓ^2 + ΓB^2$ ῥητὸν καὶ $AΔ^2 + ΔB^2$ ῥητόν. Συνεπῶς ἐκ τῆς (3) καὶ $2AΔ \times ΔB - 2AΓ \times ΓB$ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι $AΔ \times ΔB$ καὶ $AΓ \times ΓB$ εἶναι μέσα, (θ. 21), καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅταν $ΔB < ΓB$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$(AΓ^2 + ΓB^2) - (AΔ^2 + ΔB^2) = 2AΓ \times ΓB - 2AΔ \times ΔB.$$

80. Ἔστω $AB = AΓ - ΓB$, ἔνθα ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσα καὶ μόνον $AΓ^2$, $ΓB^2$ σύμμετρα, καὶ $AΓ \times ΓB$ ῥητόν. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι $AB = AΔ - ΔB$, ὅπου ΑΔ, ΔΒ μέσαι $AΔ^2$, $ΔB^2$ σύμμετρα καὶ $AΔ \times ΔB$ ῥητόν. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ἔστω $ΔB > ΓB$. Ὅπως προηγουμένως, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν $(AΔ^2 + ΔB^2) - (AΓ^2 + ΓB^2) = 2AΔ \times ΔB - 2AΓ \times ΓB$. Ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ῥητόν, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως οἱ ὅροι ταύτης εἶναι ῥητοί. Ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α′ μέλους εἶναι ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ταῦτα ἐξ ὑποθέσεως εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητὸν (θ. 26). Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἂν $ΔB < ΓB$.

81. Δίδεται ἡ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης $AB = AΓ - ΓB$, ὥστε ΑΓ, ΓΒ μέσαι, μόνον $AΓ^2$, $ΓB^2$ σύμμετρα καὶ $AΓ \times ΓB$ ῥητόν. Λέγει, ὅτι μόνον $AB + ΓB = AΓ$ καὶ ὄχι $AB + ΔB = AΔ$, ὥστε τὰ μονώνυμα ΑΔ, ΔΒ νὰ ἔχωσι τὰς αὐτὰς ἰδιότητας πρὸς τὰ μονώνυμα ΑΓ, ΓΒ.

Πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος. Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ $(AΓ^2 + ΓB^2)$ εἰς τὸ ὀρθογώνιον $EZ \times EM$ καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ τούτου τοῦ εἰς ἄλλο ὀρθογώνιον μετασχηματισθέντος $2AΓ \times ΓB$, τοῦ $EZ \times ΘM$, λαμβάνεται $AB^2 = EZ \times EΘ$ καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ΕΜ, ΘΜ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον EM^2, $ΘM^2$ εἶναι σύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἡ $EΘ = EM - ΘM$ ἀποτομή, (θ. 73).

Δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος. Ἔστω ὅτι εἶναι καὶ $AB = AΔ - ΔB$ καὶ $AΔ > AΓ$. Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ $(AΔ^2 + ΔB^2)$ εἰς τὸ ὀρθογώνιον $EZ \times EN$ καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ τούτου τοῦ ὀρθογωνίου $EZ \times ΘN = 2AΔ \times ΔB$ λαμβάνεται $AB^2 = EZ \times EΘ$, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς συλλογισμῶν, ὅπως εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ ΕΝ, ΘΝ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον EN^2, $ΘN^2$ σύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἡ $EΘ = EN - ΘN$ ἀποτομή· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ἤδη εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς τὴν ἀποτομὴν ΕΘ προσαρμόζει ἡ εὐθεῖα ΘΜ καὶ κατὰ τὸ θ. 79 εἰς τὴν ἀποτομὴν μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα κλπ. Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἂν $ΑΔ < ΑΓ$.

82. Ἔστω ἡ ἐλάσσων $ΑΒ = ΑΓ - ΓΒ$. Δὲν εἶναι καὶ $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ἔστω $ΑΔ > ΑΓ$. Εἰς τὴν σχέσιν $(ΑΔ^2 + ΔΒ^2) - (ΑΓ^2 + ΓΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$, (1) τὰ δύο ἀθροίσματα τοῦ α′ μέλους εἶναι ῥητὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλάσσονος. Ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ῥητή· ὅπερ ἄτοπον· διότι οἱ ὅροι τοῦ β′ μέλους εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Δὲν εἶναι ἄρα $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$.

83. Εἰς τὴν σχέσιν (1) τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἡ διαφορὰ τοῦ β′ τώρα μέλους εἶναι ῥητὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης, (θ. 77). Ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α′ μέλους· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἕκαστον ἄθροισμα τοῦ α′ μέλους εἶναι μέσον ἐξ ὁρισμοῦ, (θ. 77), καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

84. Ἡ ἀπόδειξις ἀκριβῶς ὁμοία ὅπως εἰς τὸ θ. 81.

Ὁρισμοὶ τρίτοι

Ληφθείσης ῥητῆς ρ καὶ ἀποτομῆς $Δ = Α - Β$, (ἔνθα $Α > Β$ ῥηταὶ καὶ μόνον $Α^2$, $Β^2$ σύμμετρα

I. Ἔστω $Α$, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. $Α$, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ πρώτη ἀποτομή.

Ἐὰν 2. $Β$, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ δευτέρα ἀποτομή.

Ἐὰν 3. Οὔτε $Α$ οὔτε $Β$ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ τρίτη ἀποτομή.

II. Ἔστω $Α$, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. $Α$, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ τετάρτη ἀποτομή.

Ἐὰν 5. $Β$, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ πέμπτη ἀποτομή.

Ἐὰν 6. Οὔτε $Α$ οὔτε $Β$ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ $Δ$ ἕκτη ἀποτομή.

(Σημ. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ὡς εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμούς).

85—90. Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀκριβῶς ὅμοιαι ὅπως εἰς τὰ θεωρήματα 48—53. Ἐνταῦθα ἔχομεν ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων, ἐν ᾧ ἐκεῖ πρόσθεσιν. Ὅθεν αἱ ἀποτομαὶ εἶναι τῆς μορφῆς

1. Πρώτη ἀποτομὴ $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ θ. 85.

2. Δευτέρα ἀποτομὴ $\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ θ. 86.

3. Τρίτη ἀποτομὴ $\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ θ. 87.

4. Τετάρτη ἀποτομὴ $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ θ. 88.

5. Πέμπτη ἀποτομὴ $\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ θ. 89.

6. Ἕκτη ἀποτομὴ $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ θ. 90.

[$\varphi^2-\omega^2=\theta$, $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, $\gamma, \delta, \varepsilon, \theta$ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι].

91. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο πρώτη ἀποτομὴ τὸ ὕψος εἶναι ἀποτομή. (Ἀνάλογοι ἐκφωνήσεις καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα θεωρήματα).

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AB = A\Gamma \times A\Delta$ ἔνθα $A\Gamma$ ῥητὴ καὶ $A\Delta$ πρώτη ἀποτομή. Ἐπειδὴ ἡ $A\Delta$ εἶναι ἀποτομὴ πρώτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A\Delta = AH - H\Delta$, ἔνθα AH, $H\Delta$ ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον AH^2, $H\Delta^2$ σύμμετρα, ὁ μειωτέος AH (ἡ ὅλη) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν $A\Gamma$ καὶ AH, $\sqrt{AH^2-H\Delta^2}$ μήκει σύμμετροι, (1). Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - AH\chi + \frac{H\Delta^2}{4}=0$ διαιροῦσι τὴν μεγαλυτέραν AH εἰς μήκει σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ ἡ μικροτέρα ΔH εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ E, ὁπότε $\Delta E^2 = EH^2 = \frac{\Delta H^2}{4} = AZ \times ZH$, ἂν καλέσωμεν AZ, ZH τὰς ῥίζας τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει σύμμετροι, κλπ.

Ἡ πρώτη ἀποτομὴ εἶναι κατὰ τὸ θ. 85 τῆς μορφῆς $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$, (ἔνθα τὸ α′ μονώνυμον εἶναι ἡ AH καὶ τὸ β′ ἡ $H\Delta$). Αἱ AZ, ZH εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - AH\chi + \frac{H\Delta^2}{4}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2-\rho\frac{\delta}{\gamma}\chi+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\frac{\theta}{\varphi^2}=0, \quad \text{αἱ}$$

$$AZ = \frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}, \quad ZH=\frac{\rho\delta}{2\gamma}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}.$$

$$AI = A\Gamma\times AZ = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right)=\Lambda O^2, \quad \Lambda O=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

$$ZK = A\Gamma \times ZH = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right) = ON^2, \quad ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

Καὶ $AB = A\Gamma\,(AH - H\Delta) = \rho\left[\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)\right] = \Lambda N^2 = (\Lambda O - ON)^2$,

$$\sqrt{AB} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)} = \Lambda O - ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\omega}{\varphi}\right)}$$
$$- \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

[γ, δ ἀκέραιοι, ἐτέθη $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος ὡς εἰς τὸ θ. 54. Ἐνταῦθα ἔχομεν τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς].

92. Ἡ δευτέρα ἀποτομὴ $A\Delta = AH - H\Delta$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 86, $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \rho\frac{\delta}{\gamma}$.

Αἱ AZ, ZH εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - AH\chi + \frac{H\Delta^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0, \quad \text{αἱ}$$

$$AZ = \rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}, \qquad ZH = \rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}.$$

$$AI = A\Gamma \times AZ = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}\right) = \Lambda O^2,$$

$$\Lambda O = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi + \omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$$

$$ZK = A\Gamma \times ZH = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\theta}}\right) = ON^2,$$

$$ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi - \omega}{\sqrt{\theta}}\right)}.$$

Καὶ $AB = A\Gamma\,(AH - H\Delta) = \rho\left[\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - 1\right)\right] = \Lambda N^2 = (\Lambda O - ON)^2$,

$$\sqrt{AB} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - 1\right)} = \Lambda O - ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi + \omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$$
$$- \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi - \omega}{\sqrt{\theta}}\right)}.$$

Δεύτερος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

93. Ἡ τρίτη ἀποτομὴ ΑΔ $=$ ΑΗ $-$ ΗΔ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 87,

$$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \mathrm{AH}\chi + \frac{\mathrm{H\Delta}^2}{4} = 0$ ἢ $\chi^2 - \frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\chi + \frac{\rho^2\theta}{4\varepsilon} = 0$, αἱ

$$\mathrm{AZ} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad \mathrm{ZH} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\mathrm{AI} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{AZ} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \Lambda\mathrm{O}^2, \quad \Lambda\mathrm{O} = \rho\sqrt{\frac{\rho+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\mathrm{ZK} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{ZK} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \mathrm{ON}^2, \quad \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

Καὶ $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}\,(\mathrm{AH} - \mathrm{H\Delta}) = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \Lambda\mathrm{N}^2 = (\Lambda\mathrm{O}-\mathrm{ON})^2$,

$$\sqrt{\mathrm{AB}} = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}} = \Lambda\mathrm{O} - \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

Τρίτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

94. Ἡ τετάρτη ἀποτομὴ ΑΔ $=$ ΑΗ $-$ ΗΔ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 88,

$$\frac{\rho\delta}{\gamma} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι, θ. 18) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \mathrm{AH}\chi + \frac{\mathrm{H\Delta}^2}{4} = 0$, ἢ

$$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2}{\lambda} = 0, \text{ αἱ}$$

$$\mathrm{AZ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathrm{ZH} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\mathrm{AI} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{AZ} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Lambda\mathrm{O}^2,$$

$$\Lambda\mathrm{O} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$\mathrm{ZK} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{ZH} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathrm{ON}^2,$$

$$\mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}.$$

Καὶ $AB = A\Gamma(AH - H\Delta) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Lambda N^2 = (\Lambda O - ON)^2$,

$$\sqrt{AB} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \Lambda O - ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} -$$

$$- \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

Τέταρτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

95. Ἡ πέμπτη ἀποτομὴ $A\Delta = AH - H\Delta$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 89,

$$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

Αἱ AZ, ZH εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - AH\chi + \frac{H\Delta^2}{4} = 0$, ἢ

$$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\cdot\chi + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0, \quad \text{αἱ}$$

$$AZ = \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha}, \quad ZH = \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha}$$

$$AI = A\Gamma \times AZ = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \Lambda O^2,$$

$$\Lambda O = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{\alpha}\right)}$$

$$ZK = A\Gamma \times ZH = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = ON^2,$$

$$ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \beta}{\alpha}\right)}$$

Καὶ $AB = A\Gamma(AH - H\Delta) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\right) = \Lambda N^2 = (\Lambda O - ON)^2$,

$$\sqrt{AB} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - 1\right)} = \Lambda O - ON = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{\alpha}\right)} -$$

$$- \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \beta}{\alpha}\right)}$$

Πέμπτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

96. Ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ΑΔ = ΑΗ — ΗΔ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 90,

$$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \text{ΑΗ}\chi + \frac{\text{ΗΔ}^2}{4} = 0$ ἢ

$$\chi^2-\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\cdot\chi+\frac{\rho^2}{4}\cdot\frac{\alpha^2}{\varepsilon}=0,\quad \text{αἱ}$$

$$\text{ΑΖ}=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \text{ΖΗ}=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\text{ΑΙ}=\text{ΑΓ}\times\text{ΑΖ}=\rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\text{ΛΟ}^2,$$

$$\text{ΛΟ}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\text{ΖΚ}=\text{ΑΓ}\times\text{ΖΗ}=\rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\text{ΟΝ}^2,$$

$$\text{ΟΝ}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\text{Καὶ ΑΒ}=\text{ΑΓ}(\text{ΑΗ}-\text{ΗΔ})=\rho\left(\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\text{ΛΝ}^2=(\text{ΛΟ}-\text{ΟΝ})^2,$$

$$\sqrt{\text{ΑΒ}}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}=\text{ΛΟ}-\text{ΟΝ}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

Ἕκτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

Τὰ ἑπόμενα ἓξ θεωρήματα εἶναι ἀντιστοίχως τ' ἀντίστροφα τῶν 91 - 96.

97. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πρώτη ἀποτομή. (Ἀνάλογοι ἐκφωνήσεις εἰς τὰ ἑπόμενα 5 θεωρήματα).

Ἡ ἀποτομὴ ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 73), $\rho-\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Ἀντὶ τῆς ῥητῆς ΓΔ λαμβάνομεν πάλιν ρ. Κατὰ τὸ θεώρημα θὰ εἶναι:

$$\text{ΑΗ}^2=\rho^2=\text{ΓΔ}\times\text{ΓΚ},\quad \text{ΓΚ}=\rho.$$

$$\text{ΗΒ}^2=\rho^2\frac{\delta}{\gamma}=\text{ΓΔ}\times\text{ΚΜ},\quad \text{ΚΜ}=\rho\frac{\delta}{\gamma},\quad \text{ΓΜ}=\text{ΓΚ}+\text{ΚΜ}.$$

$$2\text{ΑΗ}\times\text{ΗΒ}=2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}=\text{ΓΔ}\times\text{ΜΖ}=2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},\quad \text{ΜΖ}=2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},$$

$$\Gamma Z = \Gamma M - MZ = \rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ > ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμετροι, καὶ ΓΜ, ρ μήκει σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ (1 ὁρ. τρίτων ὁρισ.).

98. Ἡ πρώτη ἀποτομὴ μέσης, ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 74), $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$.

$$AH^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \Gamma\Delta \times \Gamma K, \quad \Gamma K = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$HB^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} = \Gamma\Delta \times KM, \quad KM = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \Gamma M = \Gamma K + KM.$$

$$2AH \times HB = 2\rho^2\frac{\delta}{\gamma} = \Gamma\Delta \times MZ, \quad MZ = 2\rho\frac{\delta}{\gamma},$$

$$\Gamma Z = \Gamma M - MZ = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ, εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ ΓΜ > ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ = ΓΔ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ δευτέρα ἀποτομὴ (2 ὁρισ. τρίτ. ὁρισ.).

99. Ἡ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 75),

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$AH^2 = \rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \Gamma\Delta \times \Gamma K, \quad \Gamma K = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$HB^2 = \frac{\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \Gamma\Delta \times KM, \; KM = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Gamma M = \Gamma K + KM,$$

$$2AH \times HB = 2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \Gamma\Delta \times MZ, \quad MZ = 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma Z = \Gamma M - MZ = \rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Οὔτε ΓΜ οὔτε ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ (= ΓΔ). Εἶνα ἄρα ἡ ΓΖ τρίτη ἀποτομή, (3 ορισ. τρίτ. ορισ.).

100. Ἡ ἐλάσσων ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 76)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$AH^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Gamma\Delta \times \Gamma K, \quad \Gamma K = \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$HB^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Gamma\Delta \times KM, KM = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \ \Gamma M = \Gamma K + KM.$$

$$2AH \times HB = \rho^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = \Gamma\Delta \times MZ, \quad MZ = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\Gamma Z = \Gamma M - MZ = \rho - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ ΓΜ, ρ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ τετάρτη ἀποτομὴ (4 ορ. τρίτ. ορισ.).

101. Ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 97)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$AH^2 = \frac{\rho^2}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Gamma\Delta \times \Gamma K, \ \Gamma K = \frac{\rho}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$HB^2 = \frac{\rho^2}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Gamma\Delta \times KM,$$

$$KM = \frac{\rho}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \ \Gamma M = \Gamma K + KM$$

$$2AH \times HB = \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda} = \Gamma\Delta \times MZ, \quad MZ = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$$

$$ΓΖ = ΓΜ - ΜΖ = \rho \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \rho \frac{\alpha^2}{\lambda}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ > ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΜΖ καὶ ρ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ πέμπτη ἀποτομὴ (5 ὁρισ. τρίτ. ὁρισ.).

* 102. Ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 78)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$ΑΗ^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = ΓΔ \times ΓΚ, \quad ΓΚ = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$ΗΒ^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = ΓΔ \times ΚΜ,$$

$$ΚΜ = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad ΓΜ = ΓΚ + ΚΜ.$$

$$2ΑΗ \times ΗΒ = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = ΓΔ \times ΜΖ, \quad ΜΖ = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$

$$ΓΖ = ΓΜ - ΜΖ = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ > ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ οὔτε ΓΜ οὔτε ΜΖ μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ (= ΓΔ). Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ = ΑΕ — ΒΕ καὶ ἡ πρὸς ταύτην σύμμετρος ἡ ΓΔ. Εἶναι ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΕ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΑΕ^2$, $ΒΕ^2$ σύμμετρα, (θ. 73). Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΖΔ} = \frac{ΑΒ+ΒΕ}{ΓΔ+ΔΖ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΓΖ}$, (1), ἂν ληφθῇ ΓΔ + ΔΖ = ΓΖ. Ἐκ τῆς συμμετρίας τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἕπεται ἡ συμμετρία τῶν ΑΕ, ΓΖ καὶ ΒΕ, ΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ΑΕ, ΒΕ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον $ΑΕ^2$, $ΒΕ^2$ σύμμετρα, εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΔΖ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΓΖ^2$, $ΔΖ^2$ σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ ἄρα ΓΖ — ΔΖ = ΓΔ εἶναι ἀποτομή. Λέγω ὅτι εἶναι καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. (Αἱ τάξεις εἶναι ἕξ· πρώτη, δευτέρα.......... ἕκτη ἀποτομή).

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$. Αἱ ΑΕ, $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΒ^2}$ θὰ εἶναι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι. Ἂν αὗται εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ αἱ ΓΖ, $\sqrt{ΓΖ^2 - ΖΔ^2}$ μήκει σύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα ῥητὴ ρ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ ρ, ΓΖ μήκει σύμμετροι (πρώτη ἀποτομή), ἂν ρ, ΒΕ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ρ, ΖΔ μήκει σύμμετροι (δευτέρα ἀποτομή), ἂν δὲ οὔτε ΑΕ, οὔτε ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, οὔτε ΓΖ οὔτε ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, (τρίτη ἀποτομή). Ἂν ΑΕ, $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΒ^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, $\sqrt{ΓΖ^2 - ΖΔ^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἂν ρ, ΑΕ εἶναι μήκει σύ μμετροι εἶναι καὶ ρ, ΓΖ μήκει σύμμετροι (τετάρτη ἀποτομή), ἂν ρ, ΕΒ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ρ, ΖΔ μήκει σύμμετροι (πέμπτη ἀποτομή, καὶ ἂν τέλος οὔτε ΑΕ, οὔτε ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, οὔτε ΓΖ, οὔτε ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ (ἕκτη ἀποτομή).

104. Ἔστω ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ = ΑΕ — ΕΒ, (θὰ εἶναι ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης δηλ. ΑΕ × ΕΒ ῥητὸν ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης δηλ. ΑΕ × ΕΒ μέσον). Καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς ταύτην ΓΔ. Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἔστω $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΒ+ΒΕ}{ΓΔ+ΔΖ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΓΖ}$, (1), ἂν ληφθῇ ΓΔ + ΔΖ = ΓΖ. Ἐπειδὴ ΑΒ, ΓΔ σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ ΑΕ, ΓΖ σύμμετροι καὶ ΒΕ, ΔΖ σύμμετροι. Ἐπειδὴ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ἄρα καὶ ΓΖ, ΔΖ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$, καὶ ἐπειδὴ $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΕ^2}{ΑΕ \times ΕΒ}$ καὶ $\frac{ΓΖ}{ΖΔ} = \frac{ΓΖ^2}{ΓΖ \times ΖΔ}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{ΑΕ^2}{ΑΕ \times ΕΒ} = \frac{ΓΖ^2}{ΓΖ \times ΖΔ}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΑΕ^2}{ΓΖ^2} = \frac{ΑΕ \times ΕΒ}{ΓΖ \times ΖΔ}$. Εἶναι δὲ $ΑΕ^2 = ΓΖ^2$ σύμμετρα (ἐκ τῆς 1). Εἶναι ἄρα ΑΕ × ΕΒ, ΓΖ × ΖΔ σύμμετρα. Ἐὰν ἄρα ΑΕ × ΕΒ ῥητὸν εἶναι καὶ ΓΖ × ΖΔ ῥητόν. Ἐὰν ΑΕ × ΕΒ μέσον, εἶναι καὶ ΓΖ × ΖΔ μέσον.

105. Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ = ΑΕ — ΒΕ καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ. Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΒ+ΒΕ}{ΓΔ+ΔΖ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΓΖ}$, (1), ἂν ληφθῇ ΓΔ + ΔΖ = ΓΖ. Ἐπειδὴ ΑΕ, ΒΕ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι (ὁρισ. ἐλάσσονος, θ. 76) καὶ ἐκ τῆς (1), $\frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓΖ, ΔΖ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ^2}{ΒΕ^2} = \frac{ΓΖ^2}{ΔΖ^2}$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{ΑΕ^2 + ΒΕ^2}{ΒΕ^2} =$

$\frac{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}{\Delta Z^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{BE^2}{\Delta Z^2}=\frac{AE^2+BE^2}{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}$. Εἶναι δὲ BE^2, ΔZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς (1) λόγῳ τῆς συμμετρίας AB, ΓΔ). Εἶναι ἄρα καὶ (AE^2+BE^2), $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι (AE^2+BE^2) ῥητόν, (ὁρισμὸς ἐλάσσονος). Ἄρα καὶ $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{AE}{BE}$ καὶ $\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$ καὶ εἶναι $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$ (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}$. Καὶ ἐπειδὴ AE^2, ΓZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς 1) εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{AE\times BE}{\Gamma Z\times\Delta Z}$ καὶ $AE\times BE$, $\Gamma Z\times\Delta Z$ σύμμετρα.

Εἶναι δὲ $AE\times BE$ μέσον (ὁρισ. ἐλάσσονος). Ἄρα, λόγῳ τῆς συμμετρίας, καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ μέσον. Ἄρα αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι ΓΖ, ΔΖ σχηματίζουσι $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ ῥητὸν καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ μέσον. Ἄρα ἡ διαφορὰ $\Gamma Z-\Delta Z=\Gamma\Delta$ εἶναι ἐλάσσων, (θ. 76).

106. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ $AB=AE-BE$ καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ. Κατὰ τὸ θ. 77 εἶναι AE^2, BE^2 ἀσύμμετρα, (AE^2+BE^2) μέσον καὶ $AE\times BE$ ῥητόν. Τῶν AB, ΓΔ, BE εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}$. Ἐκ ταύτης, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, λαμβάνομεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AE}{\Gamma Z}$ (1). Ἐπειδὴ AE, BE δυνάμει ἀσύμμετροι (ἐξ ὑποθέσεως), καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓΖ, ΔΖ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{BE^2}=\frac{\Gamma Z^2}{\Delta Z^2}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2+BE^2}{BE^2}=\frac{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}{\Delta Z^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{BE^2}{\Delta Z^2}=\frac{AE^2+BE^2}{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}$. Εἶναι δὲ BE^2, ΔZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς (1) λόγῳ τῆς συμμετρίας AB, ΓΔ). Εἶναι ἄρα καὶ (AE^2+BE^2), $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ (AE^2+BE^2) μέσον. Ἄρα καὶ $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{AE}{BE}$ καὶ $\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, καὶ εἶναι $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}$. Καὶ ἐπειδὴ AE^2, ΓZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{AE\times BE}{\Gamma Z\times\Delta Z}$, καὶ $AE\times BE$, $\Gamma Z\times\Delta Z$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $AE\times BE$ ῥητόν. Ἄρα καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ ῥητόν. Ἄρα αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι ΓΖ, ΔΖ σχηματίζουσι $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ μέσον καὶ $\Gamma Z\times$

ΔΖ ῥητόν. Ἡ διαφορὰ ἄρα $ΓΖ - ΔΖ = ΓΔ$ εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, (θ. 77).

107. Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $ΑΒ = ΑΕ - ΒΕ$, ἔνθα $ΑΕ^2$, $ΒΕ^2$ ἀσύμμετρα, $(ΑΕ^2 + ΒΕ^2)$ μέσον, $ΑΕ \times ΒΕ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $(ΑΕ^2 + ΒΕ^2)$. Καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ. Ὡς εἰς τὸ προηγούμενον φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΓΖ}$, (1). Ἐπειδὴ ΑΕ, ΒΕ δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓΖ, ΔΖ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ^2}{ΒΕ^2} = \frac{ΓΖ^2}{ΔΖ^2}$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{ΑΕ^2 + ΒΕ^2}{ΒΕ^2} = \frac{ΓΖ^2 \times ΔΖ^2}{ΔΖ^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΒΕ^2}{ΔΖ^2} = \frac{ΑΕ^2 + ΒΕ^2}{ΓΖ^2 + ΔΖ^2}$.

Εἶναι δὲ $ΒΕ^2$, $ΔΖ^2$ σύμμετρα (λόγῳ τῆς συμμετρίας ἐκ τῆς 1 τῶν ΑΒ, ΓΔ). Εἶναι ἄρα καὶ $(ΑΕ^2 + ΒΕ^2)$, $(ΓΖ^2 + ΔΖ^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $(ΑΕ^2 + ΒΕ^2)$ μέσον. Ἄρα καὶ $(ΓΖ^2 + ΔΖ^2)$ μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{ΑΕ^2}{ΑΕ \times ΒΕ} = \frac{ΑΕ}{ΒΕ}$ καὶ $\frac{ΓΖ^2}{ΓΖ \times ΔΖ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$, καὶ εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}$, (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα καὶ $\frac{ΑΕ^2}{ΑΕ \times ΒΕ} = \frac{ΓΖ^2}{ΓΖ \times ΔΖ}$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΕ^2$, $ΓΖ^2$ σύμμετρα (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{ΑΕ^2}{ΓΖ^2} = \frac{ΑΕ \times ΒΕ}{ΓΖ \times ΔΖ}$, καὶ $ΑΕ \times ΒΕ$, $ΓΖ \times ΔΖ$ σύμμετρα.

Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $ΑΕ \times ΒΕ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $ΑΕ^2 + ΒΕ^2$. Εἶναι ἄρα καὶ $ΓΖ \times ΔΖ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $ΓΖ^2 + ΔΖ^2$. Ἡ διαφορὰ ἄρα $ΓΖ - ΔΖ = ΓΔ$ εἶναι μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, (θ. 78).

111. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι καὶ δυώνυμος. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΓ καὶ ἂς μετασχηματισθῇ τὸ $ΑΒ^2$ εἰς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ΔΓ, ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΔΓ \times ΔΕ$. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ πρώτη ἀποτομή, (θ. 97). Ἔστω ἀφαιρετέος (προσαρμόζουσα) τῆς ἀποτομῆς ἡ ΕΖ, ὁπότε $(ΔΕ + ΕΖ) = ΔΖ$ καὶ ΕΖ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον $ΔΖ^2$, $ΕΖ^2$ σύμμετρα, (θ. 73). Ἐπειδὴ ἡ $ΔΕ = ΔΖ - ΖΕ$ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ εἶναι κατὰ τὸν ὁρ. 1 τῶν τρίτων ὁρισμῶν ΔΖ, $\sqrt{ΔΖ^2 - ΖΕ^2}$ μήκει σύμμετροι, καὶ ΔΖ, τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον, μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι καὶ δυώνυμος ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 60).

Ἔστω $ΔΕ = ΔΗ + ΗΕ$ καὶ $ΔΗ > ΗΕ$. Εἶναι ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΕ ῥηταὶ (α), καὶ μόνον $ΔΗ^2$, $ΗΕ^2$ σύμμετρα, (θ. 36). Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος θὰ εἶναι ΔΗ, $\sqrt{\Delta H^2 - HE^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ΔΓ, ΔΗ, (1) (τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον) μήκει σύμμετροι, (α΄ ὁρισ. δευτ. ὁρισ.). Ἀνωτέρω ἐδείχθησαν καὶ ΔΓ, ΔΖ, (2) μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (1) καὶ (2) ΔΗ, ΔΖ μήκει σύμμετροι, (θ. 12). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ ($= \Delta H + HZ$) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ΔΗ εἶναι ἄρα καὶ ΔΖ, ΗΖ (3) μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΗΖ ὡς μήκει σύμ. πρὸς ταύτην ῥητή. Εἶναι δὲ ΔΖ, ΕΖ, (4) μήκει ἀσύμμετροι, διότι ὡς μονώνυμα ἀποτομῆς εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον ΔZ^2, EZ^2 σύμμετρα. Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἕπεται ΗΖ, ΕΖ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΗΖ, ΕΖ, (ἐπειδὴ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι) εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ διαφορά των συνεπῶς $HZ - EZ = HE$ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) ἤτοι ἄρρητος. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι αὔτη ἀνωτέρω, (α), ἐδείχθη ῥητή. [Ὥστε, ἐὰν εἶναι $AB = \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $AB = \rho\sqrt{\frac{\zeta}{\varepsilon}} - \rho\sqrt{\frac{\theta}{\eta}}$ (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ μὴ τετράγωνοι)].

112. Ἄλλη ἐκφώνησις : ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι ῥητὴ καὶ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τούτου δυώνυμος τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου καὶ ἡ γινομένη ἀποτομὴ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ῥητὴ ἡ Α καὶ δυώνυμος ἡ $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$, ὥστε $\Delta\Gamma > B\Delta$ καὶ ἂς γίνῃ $A^2 = B\Gamma \times EZ$. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομὴ κλπ. Ἂς γίνῃ πάλιν $A^2 = B\Delta \times H$. Εἶναι ἄρα $\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{H}{EZ}$, (1). Ἐπειδὴ $B\Gamma > B\Delta$ εἶναι ἄρα καὶ $H > EZ$. Ἔστω $H = EZ + Z\Theta = E\Theta$, (2). Ἄρα $\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{E\Theta}{EZ}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Delta} = \frac{E\Theta - EZ}{EZ}$ ἢ $\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \frac{Z\Theta}{EZ}$, (3). Ἐπειδὴ $\Delta\Gamma > B\Delta$ εἶναι ἄρα καὶ $Z\Theta > EZ$. Τῆς διαφορᾶς $Z\Theta - EZ$ καὶ τῆς ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἀνάλογον ἔστω ΚΕ, $\frac{Z\Theta - EZ}{EZ} = \frac{EZ}{KE}$, ἐξ ἧς $\frac{Z\Theta - EZ + EZ}{EZ} = \frac{EZ + KE}{KE}$ ἢ $\frac{Z\Theta}{EZ} = \frac{KZ}{KE}$, (4), ἂν καλέσωμεν $EZ + KE = KZ$, (5). Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta + KZ}{EZ + KE} = \frac{KZ}{KE}$ ἢ $\frac{\Theta K}{KZ} = \frac{KZ}{KE}$, (6), ἂν καλέσωμεν $Z\Theta + KZ = \Theta K$, (7). Ἐκ τῶν (3), (4), (6) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \frac{\Theta K}{KZ} = \frac{KZ}{KE}$, (8). Ἐπειδὴ ΔΓ, ΒΔ εἶναι μονώνυμα δυωνύμου, εἶναι ἄρα $\Delta\Gamma^2$, $B\Delta^2$ σύμμετρα, (θ. 36). Ἐκ τῆς (8) ἄρα εἶναι καὶ ΘK^2, KZ^2 σύμμετρα. Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν $\frac{\Theta K}{KE} = \frac{\Theta K^2}{KZ^2}$, (9), (V. ὁρ. 9). Εἶναι ἄρα ΘΚ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (2) εἶναι $Z\Theta = E\Theta - EZ$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ΖΘ εἰς τὴν (7) καὶ εἰς ταύτην ἀντὶ τοῦ ΚΖ τὴν τιμὴν τούτου ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν $\Theta K = E\Theta + KE$. Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ΘΚ, ΚΕ μήκει σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ ΕΘ, ΚΕ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἐπειδὴ $A^2 = B\Delta \times H = B\Delta \times E\Theta$ καὶ εἶναι A^2 ῥητόν, εἶναι ἄρα καὶ $B\Delta \times E\Theta$ ῥητόν. Καὶ εἶναι ἡ ΒΔ ῥητή, ὡς μονώνυμον δυωνύμου. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΘ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΔ, (θ. 20). Ἀλλὰ καὶ ΕΘ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ΚΕ, ΒΔ ῥηταὶ καὶ μήκει σύμμετροι, (θ. 12), (10). Ἐπειδὴ λοιπὸν $\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \frac{KZ}{KE}$, (ἐκ τῆς 8) αἱ δὲ ΔΓ, ΒΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ ΚΖ, ΚΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ ΚΕ ῥητή· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΚΖ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ διαφορά των ἄρα ἡ ἐκ τῆς (5), $KZ - KE = EZ$ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου (ἐκ τῆς 8). Ἐκ τῆς (8) πάλιν εἶναι $\frac{\Delta\Gamma}{KZ} = \frac{B\Delta}{KE}$. Καὶ ἐπειδὴ ΒΔ, ΚΕ εἶναι ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, (ἐκ τῆς 10), εἶναι καὶ ΔΓ, ΚΖ ῥηταὶ καὶ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου ἀντιστοίχως καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Δεικτέον ἀκόμη ὅτι ἡ ἀποτομὴ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἡ $\sqrt{\Gamma\Delta^2 - \Delta B^2}$ θὰ εἶναι πρὸς τὴν ΓΔ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου θὰ εἶναι ἀντιστοίχως καὶ $\sqrt{KZ^2 - KE^2}$ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος πρὸς ΚΖ.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τῆς συμμετρίας θὰ ἔχωμεν πρώτην, δευτέραν, τρίτην δυώνυμον ἂν 1) ΔΓ, Α μήκει σύμμετροι, 2) ΒΔ, Α μήκει σύμμετροι, 3) οὔτε ΔΓ οὔτε ΒΔ μήκει σύμμετροι πρὸς Α, καὶ συνεπῶς, πρώτην, δευτέραν, τρίτην ἀποτομήν, διότι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ΚΖ, Α μήκει σύμμετροι, ΚΕ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΚΖ οὔτε ΚΕ μήκει σύμμετροι πρὸς Α.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀσυμμετρίας θὰ ἔχωμεν τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην δυώνυμον ἂν ΓΔ, Α μήκει σύμμετροι, ΔΒ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΓΔ οὔτε ΔΒ μήκει σύμμετροι πρὸς Α καὶ συνεπῶς τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην ἀποτομήν, διότι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ΚΖ, Α μήκει σύμμετροι, ΚΕ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΚΖ οὔτε ΚΕ μήκει σύμμετροι πρὸς Α.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τούτου εἶναι ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι δυώνυμος τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυ-

μα τῆς ἀποτομῆς καὶ ἡ δυώνυμος εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν ἀποτομήν.

Ἔστω ῥητὴ ἡ Α καὶ ἀποτομὴ ἡ $\mathrm{B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta}$, ὥστε ΒΓ, ΓΔ ῥηταὶ καὶ μόνον $\mathrm{B\Gamma^2, \Gamma\Delta^2}$ σύμμετρα. Ἔστω $\mathrm{A^2 = B\Delta \times K\Theta}$, (1) καὶ $\mathrm{A^2 = B\Gamma \times H}$, (2). Ἐπειδὴ $\mathrm{A^2}$ ῥητὸν καὶ ΒΓ ῥητὴ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀποτομῆς, (θ. 73) εἶναι ἄρα καὶ Η ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ, (θ. 20). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $\mathrm{\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{K\Theta}{H}}$. Ἐπειδὴ $\mathrm{B\Gamma > B\Delta}$ εἶναι ἄρα καὶ $\mathrm{K\Theta > H}$. Ἔστω $\mathrm{H = KE}$, ὥστε καὶ ΚΕ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ καὶ ἔστω $\mathrm{K\Theta - KE = E\Theta}$, (3). Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{K\Theta}{KE}}$ εἶναι καὶ $\mathrm{\frac{B\Gamma}{B\Gamma - B\Delta} = \frac{K\Theta}{K\Theta - KE}}$ ἢ $\mathrm{\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Theta}{E\Theta}}$, (4). Τοῦ ἀθροίσματος $\mathrm{K\Theta + E\Theta}$ καὶ τῆς ΕΘ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἀνάλογον ἔστω ΖΕ, ἤτοι $\mathrm{\frac{K\Theta + E\Theta}{E\Theta} = \frac{E\Theta}{ZE}}$, ἐξ ἧς εἶναι $\mathrm{\frac{K\Theta + E\Theta - E\Theta}{E\Theta} = \frac{E\Theta - ZE}{ZE}}$ ἢ $\mathrm{\frac{K\Theta}{E\Theta} = \frac{\Theta Z}{ZE}}$, (5), ἂν καλέσωμεν $\mathrm{E\Theta - ZE = \Theta Z}$, (6). Ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $\mathrm{\frac{K\Theta}{E\Theta} = \frac{K\Theta - \Theta Z}{E\Theta - ZE}}$ ἢ $\mathrm{\frac{K\Theta}{E\Theta} = \frac{KZ}{\Theta Z}}$, (7), ἂν καλέσωμεν $\mathrm{K\Theta - \Theta Z = KZ}$, (8). Ἐκ τῆς (4) καὶ (7) ἔχομεν $\mathrm{\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{KZ}{\Theta Z}}$, (9). Ἐπειδὴ εἶναι $\mathrm{B\Gamma^2, \Gamma\Delta^2}$ μόνον σύμμετρα, εἶναι ἄρα καὶ $\mathrm{KZ^2, \Theta Z^2}$ μόνον σύμμετρα. Ἐκ τῆς (5) καὶ (7) εἶναι $\mathrm{\frac{KZ}{\Theta Z} = \frac{\Theta Z}{ZE}}$, καὶ ἐκ ταύτης $\mathrm{\frac{KZ}{ZE} = \frac{KZ^2}{\Theta Z^2}}$, (V. ὁρισ. 9). Ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{KZ^2, \Theta Z^2}$ σύμμετρα εἶναι ἄρα καὶ ΚΖ, ΖΕ μήκει σύμμετροι. Ἐκ τῆς (3) καὶ (6) εἶναι $\mathrm{K\Theta - E\Theta = KE}$ καὶ $\mathrm{E\Theta - \Theta Z = ZE}$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $\mathrm{K\Theta - \Theta Z = KE + ZE}$. Καὶ ἐκ τῆς (8), $\mathrm{KZ = KE + ZE}$. Ἐπειδὴ ΚΖ, ΖΕ ἐδείχθησαν μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ ΚΕ, ΖΕ μήκει σύμμετροι, (θ. 15), καὶ συνεπῶς ΚΖ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Εἶναι δὲ ἡ ΚΕ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΖ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ. Ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν $\mathrm{\frac{B\Gamma}{KZ} = \frac{\Gamma\Delta}{\Theta Z}}$, (10). Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΚΖ, ΒΓ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα αἱ ΓΔ, ΘΖ μήκει σύμμετροι. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΘΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ἐκ τῆς (8) ἄρα $\mathrm{K\Theta = KZ + \Theta Z}$ εἶναι δυώνυμος, διότι τὰ μονώνυμα αὐτῆς ἐδείχθησαν ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε τό ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι δυώνυμος τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως καὶ εἰς αὐτὸν τὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς (ἐκ τῆς 10). Δεικτέον κλπ. ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν πρώτην, δευτέραν, τρίτην ἀποτομὴν καὶ συνεπῶς πρώτην, δευτέραν, τρίτην, δυώνυμον, καὶ εἰς τὴν β′

περίπτωσιν τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην ἀποτομὴνκαὶ συνεπῶς τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην δυώνυμον.

114. Τὸ γινόμενον δυωνύμου ἐπὶ ἀποτομήν, ὅταν τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἀντιστοίχως εἶναι ῥητή. Ἔστω $\mathrm{AB} \times \Gamma\Delta =$ ὀρθογώνιον $\mathrm{K} = \mathrm{H}^2$, ἔνθα AB ἀποτομὴ $= \mathrm{AZ} - \mathrm{ZB}$ καὶ $\Gamma\Delta$ δυώνυμος $= \Gamma\mathrm{E} + \mathrm{E}\Delta$ $(\Gamma\mathrm{E} > \mathrm{E}\Delta)$, AZ, $\Gamma\mathrm{E}$ σύμμετρα, ZB, $\mathrm{E}\Delta$ σύμμετρα καὶ $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{E}\Delta}{\mathrm{ZB}}$, (1). Λέγω, ὅτι ἡ H εἶναι ῥητή. Ἔστω ῥητὴ ἡ Θ καὶ ἂς γίνῃ $\Theta^2 = \mathrm{K}\Lambda \times \Gamma\Delta$. Ἡ $\mathrm{K}\Lambda$ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 112). Ἔστω $\mathrm{K}\Lambda = \mathrm{KM} - \mathrm{M}\Lambda$, ὁπότε KM, $\mathrm{M}\Lambda$ ῥηταὶ καὶ μόνον KM^2, $\mathrm{M}\Lambda^2$ σύμμετρα, καὶ $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{KM}} = \frac{\mathrm{E}\Delta}{\mathrm{M}\Lambda}$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZB}} = \frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{M}\Lambda}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{KM}} = \frac{\mathrm{ZB}}{\mathrm{M}\Delta}$, ἐξ ἧς $\frac{\mathrm{AZ}-\mathrm{ZB}}{\mathrm{KM} - \mathrm{M}\Lambda} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{KM}}$ ἢ $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{K}\Lambda} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{KM}}$, (3).

Εἰς τὰς (1) καὶ (2) εἶναι $\Gamma\mathrm{E}$, AZ σύμμετρα καὶ $\Gamma\mathrm{E}$, KM σύμμετρα. Εἶναι ἄρα AZ, KM σύμμετρα· ἄρα εἰς τὴν (3) καὶ AB, $\mathrm{K}\Lambda$ σύμμετρα. Καὶ εἶναι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{K}\Lambda} = \frac{\mathrm{AB}\times\Gamma\Delta}{\mathrm{K}\Lambda\times\Gamma\Delta}$. Τὰ ὀρθογώνια ἄρα $\mathrm{AB}\times \Gamma\Delta$, $\mathrm{K}\Lambda\times \Gamma\Delta$ εἶναι σύμμετρα. Ἄρα καὶ τὰ ἴσα πρὸς ταῦτα ἀντιστοίχως τὰ H^2, Θ^2 εἶναι σύμμετρα. Ἐπειδὴ ἡ Θ ἐλήφθη ῥητὴ εἶναι ἄρα καὶ Θ^2 ῥητόν, καὶ συνεπῶς καὶ H^2 ῥητὸν καὶ ἄρα ἡ H ῥητή.

[Ἡ δυώνυμος $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} + \mathrm{E}\Delta$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἡ δὲ ἀποτομὴ $\mathrm{AB} = \mathrm{AZ} - \mathrm{ZB}$ τῆς μορφῆς $\varphi\,\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \varphi\,\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ὁπότε $\mathrm{H}^2 = \rho^2\varphi\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$ καὶ $\varphi = \frac{\mathrm{H}^2}{\rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma}\right)}$, $\left(\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}\right.$, α, β, γ, δ, ἀκέραιοι$\left.\right)$.

Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει εἰς τὴν πραγματικότητα ὅτι ἂν κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}}$, ὁ παρονομαστὴς γίνεται ῥητὸς ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}$].

115. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρ καὶ τὸ ἄλλο $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τὸ ὕψος $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λαμβάνεται πρὸς

κατασκευὴν ἄλλου ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρ. Ἐὰν γίνῃ τοιαύτη κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης πάντοτε τὸ ρ καὶ ἄλλο, τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, τὰ ὕψη θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{16}}$ κλπ. Ταῦτα εἶναι ἄπειρα κατὰ τὸ πλῆθος ἄρρητα, καὶ δὲν ταὐτίζονται.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Θεώρ. 10 καὶ λῆμμα τοῦ 18.

Δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι γραμμικῶς θεωρούμεναι ἀσύμμετροι, καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho,\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \rho\frac{\beta}{\alpha},\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},\ \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ρ τὸ μέτρον καὶ α,β,γ,δ, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι).

21. Μέσον ὀρθογώνιον λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. (Καὶ τὸ ἰσοδύναμον τετράγωνον εἶναι μέσον). Μέση, λέγεται, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογ. τοῦτο τετραγώνου ἢ μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

27. Δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι (μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, τὸ γινόμενον αὐτῶν ῥητὸν) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}},\quad \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}},\quad (\gamma,\ \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

28. Δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι (μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, τὸ γινόμενον αὐτῶν μέσον) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}},\quad \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}},\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

Λῆμα 1.

Τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός.

$$\varkappa.\ \xi.\ \sigma.\ \tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$$

ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, καὶ μ $(= \varkappa\xi)$, ν $(= \sigma\tau)$ ἄρτιοι ἢ περιττοί. (ὁ $\varkappa\xi\sigma\tau$ εἶναι τετράγωνος IX, 1).

Ἐὰν δὲν εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, τότε ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν δὲν εἶναι τετράγωνος

$$\text{ἤτοι } \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \varkappa\xi\sigma\tau \text{ μὴ τετράγωνος.}$$

(Πρὸς ἁπλούστευσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀντὶ τούτου τὸν τύπον $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος).

Λῆμμα 2.

Τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος.

$$\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda, \quad (\varkappa : \xi = \sigma : \tau \text{ καὶ } \mu\ (= \varkappa\xi),\ \nu\ (= \sigma\tau)$$

ἄρτιοι ἢ περιττοί).

(Πρὸς ἁπλούστευσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀντὶ τούτου τὸν τύπον $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$).

29. Δύο ῥηταὶ $AB > AZ$ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ AB, $\sqrt{AB^2 - AZ^2}$ μήκει σύμμετροι, εἶναι τῆς μορφῆς $AB^2 = \rho$, $AZ = \dfrac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$, ($\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος).

30. Δύο ῥηταὶ $AB > AZ$ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ AB, $\sqrt{AB^2 - AZ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι τῆς μορφῆς $AB = \rho$, $AZ = \dfrac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, ($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος).

31. 1. Δύο μέσαι $\Gamma > \Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Gamma \times \Delta$ ῥητὸν καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Gamma = \frac{\rho\theta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}, \quad \Delta = \frac{\rho\theta^{\frac{3}{4}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}}, \quad (\varphi^2 - \omega^2 = \theta \text{ μὴ τετράγωνος}).$$

31. 2. Δύο μέσαι $\Gamma > \Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Gamma \times \Delta$ ῥητὸν καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Gamma = \frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}, \quad \Delta = \frac{\rho\alpha^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda \text{ μὴ τετράγωνος}).$$

32. 1. Δύο μέσαι $\Delta > E$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Delta \times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Delta = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad E = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}, \quad (\varphi^2 - \omega^2 = \theta,\ \gamma,\ \delta,\ \text{μὴ τετράγωνοι}).$$

32. 2. Δύο μέσαι $\Delta > E$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Delta \times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Delta = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad E = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda,\ \gamma,\ \delta,\ \text{μὴ τετράγωνοι}).$$

33. Δύο εὐθεῖαι AZ, ZB δυνάμει ἀσύμμετροι (AZ^2, ZB^2 ἀσύμμετρα), ὥστε $AZ^2 + ZB^2$ ῥητὸν καὶ $AZ \times ZB$ μέσον εἶναι τῆς μορφῆς

$$AZ = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad ZB = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda\ \text{μὴ τετράγωνος}).$$

34. Δύο εὐθεῖαι $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσύμμετροι, ὥστε $A\Delta^2 + \Delta B^2$ μέσον καὶ $A\Delta \times \Delta B$ ῥητὸν εἶναι τῆς μορφῆς

$$A\Delta = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$$

μὴ τετράγωνος).

35. Δύο εὐθεῖαι $A\Delta$, ΔB δυνάμει ἀσύμμετροι, ὥστε $A\Delta^2 + \Delta B^2$ μέσον $A\Delta \times \Delta B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A\Delta^2 + \Delta B^2$ εἶναι τῆς μορφῆς.

$$A\Delta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad B\Delta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 =$$

λ, γ, δ μὴ τετράγωνοι).

Αἱ 12 (κύριαι) ἄλογοι (ἐκτὸς τῆς μέσης). Τὰ ἀθροίσματα $A + B$ εἶναι τῶν θ. 36-41 καὶ αἱ διαφοραὶ $A - B$ τῶν θ. 73-78. Καλοῦμεν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον A καὶ τὸ μικρότερον B.

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), 36
   Ἀποτομή, 73 $\quad \rho \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}, \quad \left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right).$

A, B ῥητὰ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, α, β, γ, δ, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ τοῦ θ. 10 καὶ λήμματος τοῦ 18.

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη, 37
   Πρώτη ἀποτομὴ μέσης, 74 $\quad \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}.$

Α, Β μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $A \times B$ ῥητόν, $\gamma > \delta$ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα, 38
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, 75
$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Α; Β μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $A \times B$ μέσον, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}$, α, β, γ, δ, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4. Μείζων, 39
Ἐλάσσων, 76
$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\ (\alpha^2+\beta^2 = \text{μὴ τετράγ.}).$$

A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητόν, $A \times B$ μέσον. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33 καὶ τοῦτο ἐκ τοῦ θ. 30.

5. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, 40
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 77
$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγ.), A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ ῥητόν. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34 καὶ τοῦτο ἐκ 31.2.

6. Δύο μέσα δυναμένη, 41
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 79
$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$.
$(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, μὴ τετράγ.). Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35 καὶ τοῦτο ἐκ 32.2.

Σημείωσις: Αἱ ἀνωτέρω ἄλογοι εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῶν κάτωθι διτετραγώνων ἐξισώσεων ἀντιστοίχως,

1. 36. 73. $$\chi^4 - 2\rho^2\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi^2 + \rho^4\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0.$$

2. 37. 74. $$\chi^4 - 2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi^2 + \rho^4\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0.$$

3. $\begin{matrix}38\\75.\end{matrix}$ $$\chi^4-2\rho^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\chi^2+\rho^4\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2=0.$$

4. $\begin{matrix}39\\76.\end{matrix}$ $$\chi^4-2\rho^2\chi^2+\rho^4\frac{\beta^2}{\lambda}=0.$$

5. $\begin{matrix}40\\77.\end{matrix}$ $$\chi^4-2\rho^2\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\chi^2+\frac{\rho^4\alpha^2\beta^2}{\lambda^2}=0.$$

6. $\begin{matrix}41\\78.\end{matrix}$ $$\chi^4-2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\chi^2+\rho^4\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\beta^2}{\lambda}=0.$$

[Σημ.: Εἰς τὰς 4, 5, 6 ἡ ἐπαλήθευσις διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ, (θ. 57, 94),

$$\rho\sqrt{1\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

$(\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος)].

Ἡ γενικὴ ἰδιότης τῆς δυωνύμου (ἀθροίσματος) καὶ τῆς ἀποτομῆς (διαφορᾶς) εἶναι, ἂν παραστήσωμεν ταύτας $A\pm B$, (θ. 36 καὶ 73), ὅτι Α, Β ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα.

Διακρίνονται 6 εἴδη δυωνύμων καὶ 6 εἴδη ἀποτομῶν (δευτερεύουσαι ἄλογοι), (ληφθείσης ῥητῆς τινος ρ).

I. Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι.

1. Πρώτη δυώνυμος, 48
Πρώτη ἀποτομή, 85 $\rho\dfrac{\delta}{\gamma}\pm\rho\dfrac{\delta}{\gamma}\dfrac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$.
Α, ρ μήκει σύμμετροι, (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
$(\varphi^2-\omega^2=\theta,\gamma,\delta,$ μὴ τετράγωνοι).

2. Δευτέρα δυώνυμος, 49
Δευτέρα ἀποτομή, 86 $\rho\dfrac{\delta}{\gamma}\dfrac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\pm\rho\dfrac{\delta}{\gamma}$
Β, ρ μήκει σύμμετροι, (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
$(\varphi^2-\omega^2=\theta,\gamma,\delta,$ μὴ τετράγωνοι).

3. Τρίτη δυώνυμος, 50
Τρίτη ἀποτομή, 87 $\rho\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\dfrac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$

Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
($\varphi^2 - \omega^2 = \theta$, ε μὴ τετράγωνοι).

II. Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

4. Τετάρτη δυώνυμος, 51 / Τετάρτη ἀποτομή, 88 $\quad \rho\,\dfrac{\delta}{\gamma} \pm \dfrac{\delta}{\gamma}\,\dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$.

Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

5. Πέμπτη δυώνυμος, 52 / Πέμπτη ἀποτομή, 89 $\quad \rho\,\dfrac{\delta}{\gamma}\,\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \dfrac{\delta}{\gamma}$.

Β, ρ μήκει σύμμετροι (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

6. Ἕκτη δυώνυμος, 53 / Ἕκτη ἀποτομή, 90 $\quad \rho\sqrt{\dfrac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \rho\,\dfrac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, ε μὴ τετράγωνοι).

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω ἓξ ζεύγη δυωνύμων καὶ ἀποτομῶν εἶναι ῥίζαι ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Κατὰ τοὺς δευτέρους καὶ τρίτους ὁρισμοὺς τὸ μὲν μεγαλύτερον μονώνυμον ἑκάστης δυωνύμου καὶ ἀποτομῆς (τῶν προηγουμένων 1-6) παριστᾷ ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ δὲ μικρότερον μίαν κάθετον πλευρὰν τούτου.

1. $$\chi^2 - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\cdot\frac{\omega^2}{\varphi^2} = 0, \qquad (\varphi^2 - \omega^2 = \theta)$$ 48 / 85

2. $$\chi^2 - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\cdot\frac{\omega^2}{\theta} = 0. \qquad »$$ 49 / 86

3. $$\chi^2 - \frac{2\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\chi + \frac{\rho^2\omega^2}{\varepsilon} = 0, \qquad »$$ 50 / 87

4. $$\chi^2 - 2\rho\,\frac{\delta}{\gamma}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\frac{\beta^2}{\lambda} = 0, \qquad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda)$$ 51 / 88

5. $$\chi^2 - 2\rho\,\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0, \qquad »$$ 52 / 89

6. $$\chi^2 - 2\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\cdot\chi + \frac{\rho^2\beta^2}{\varepsilon} = 0, \qquad »$$ 53 / 90

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ῬΙΖΙΚΩΝ

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους			Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι τῆς μορφῆς	
	α' τμ.	β' τμῆμα	ἑπομένως τὸ ὕψος		
1	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος, 48 πρώτη ἀποτομή, 85	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1\pm\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}\pm\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)},$ ἡ 54 εἶναι δυώνυμος, 36 ἡ 91 εἶναι ἀποτομή, 73	54 91
2	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα δυώνυμος, 49 δευτέρα ἀποτομή, 86	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\pm 1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}\pm\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)},$ ἡ 55 εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, 37 ἡ 92 πρώτη ἀποτομὴ μέσης, 74	55 92
3	ρ	$\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος, 50 τρίτη ἀποτομή, 87	$\rho\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\varphi\pm\sqrt{\theta}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\varphi+\omega)}\pm\rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\varphi-\omega)},$ ἡ 56 εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, 38 ἡ 93 εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, 75	56 98
4	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος, 51 τετάρτη ἀποτομή, 88	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}\pm\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)},$ ἡ 57 εἶναι μείζων, 39 ἡ 94 εἶναι ἐλάσσων, 76	57 94
5	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος, 52 πέμπτη ἀποτομή, 89	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm 1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}\pm\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)},$ ἡ 58 εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, 40 ἡ 95 εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 77	58 95
6	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\pm\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος, 53 ἕκτη ἀποτομή, 90	$\rho\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{\lambda}\pm\alpha\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\lambda}+\beta)}\pm\rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\lambda}-\beta)},$ ἡ 59 εἶναι δύο μέσα δυναμένη, 41 ἡ 96 εἶναι ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 78	59 96

[Σημ. $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, $\varepsilon, \gamma, \delta$, μὴ τετράγωνοι. Οἱ θ καὶ λ ἐκ τῶν λημμάτων 1 καὶ 2 τοῦ θ. 28 ἀντιστοίχως. Ἴδε ἐπεξηγήσεις].

[Ἀντίστροφα προηγουμένων]

	Δίδονται — Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Ἐν τμῆμα ὑποτεινούσης	Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι τῆς μορφῆς	
1	$\rho\left[1 \pm \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right]$ ἐκ θεωρ. 36, 73.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) \pm 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἡ 60 τῆς μορφῆς τοῦ 48, δηλ. πρώτη δυώνυμος. ἡ 97 τῆς μορφῆς τοῦ 85, δηλ. πρώτη ἀποτομή.	60 97
2	$\rho\left[\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14} \pm \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac34}\right]$ ἐκ θεωρ. 37, 74.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}\left[1+\frac{\delta}{\gamma}\right] \pm 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ ἡ 61 τῆς μ. τοῦ 49, δηλ. δευτέρα δυώνυμος. ἡ 98 τῆς μ. τοῦ 86, δηλ. δευτέρα ἀποτομή.	61 98
3	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac14} \pm \frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac14}}\right]$ ἐκ θεωρ. 38, 75.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac12} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac12}}\right] \pm 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}$ ἡ 62 τῆς μ. τοῦ 50, δηλ. τρίτη δυώνυμος. ἡ 99 τῆς μ. τοῦ 87, δηλ. τρίτη ἀποτομή.	62 99
4	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 39, 76.	ρ	$\rho \pm \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ἡ 63 τῆς μ. τοῦ 51, δηλ. τετάρτη δυώνυμος. ἡ 100 τῆς μ. τοῦ 88, δηλ. τετάρτη ἀποτομή.	63 100
5	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac12}}{\lambda^{\frac14}}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 40, 77.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} \pm \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ ἡ 64 τῆς μ. τοῦ 52, δηλ. πέμπτη δυώνυμος. ἡ 101 τῆς μ. τοῦ 89, δηλ. πέμπτη ἀποτομή.	64 101
6	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac14}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 41, 78.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12} \pm \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac12}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ἡ 65 τῆς μ. τοῦ 53, δηλ. ἕκτη δυώνυμος. ἡ 102 τῆς μ. τοῦ 90, δηλ. ἕκτη ἀποτομή.	65 102

(Σημ. Εἰς τὰς 1, 2, 3, εἶναι α, β, γ, δ, μὴ τετράγωνοι. Εἰς τὰς 4, 5, 6 εἶναι γ, δ, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνοι. Ὁ λ ἐκ τοῦ 2ου λήμ. τοῦ θ. 28).

Τὰ 12 θεωρήματα τῶν μετασχηματισμῶν ῥιζικῶν καὶ τὰ προηγούμενα 12, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίστροφα τούτων τὰ παριστῶμεν ἐπὶ τὸ ἐποπτικώτερον καὶ ὡς ἑξῆς·

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους			Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
	α' τμῆμα, ῥητή	β' τμῆμα ἄλογος			
54	ρ	πρώτη δυώνυμος	τοῦ θ. 48	τῆς δυωνύμου	τοῦ θ. 36
55	ρ	δευτέρα δυώνυμος	» 49	» ἐκ δύο μέσων πρώτης	» 37
56	ρ	τρίτη δυώνυμος	» 50	» ἐκ δύο μέσων δευτέρας	» 38
57	ρ	τετάρτη δυώνυμος	» 51	» μείζονος	» 39
58	ρ	πέμπτη δυώνυμος	» 52	» ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης	» 40
59	ρ	ἕκτη δυώνυμος	» 53	» δύο μέσα δυναμένης	» 41

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

	Δίδονται			Ἀποδεικνύεται	
	Ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομ. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	Τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἄλογος		Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
60	ρ	δυώνυμος	τοῦ θ. 36	τῆς πρώτης δυωνύμου	τοῦ θ. 48
61	ρ	ἐκ δύο μέσων πρώτη	» 37	» δευτέρας δυωνύμου	» 49
62	ρ	ἐκ δύο μέσων δευτέρα	» 38	» τρίτης δυωνύμου	» 50
63	ρ	μείζων	» 39	» τετάρτης δυωνύμου	» 51
64	ρ	ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη	» 40	» πέμπτης δυωνύμου	» 52
65	ρ	δύο μέσα δυναμένη	» 41	» ἕκτης δυωνύμου	» 53

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους				Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς		
	α΄ τμῆμα ῥητή	β΄ τμῆμα, ἄλογος					
91	ρ	πρώτη ἀποτομὴ	τοῦ θ.	85	τῆς ἀποτομῆς	τοῦ θ.	73
92	ρ	δευτέρα ἀποτομὴ	»	86	» πρώτης ἀποτομῆς μέσης	»	74
93	ρ	τρίτη ἀποτομὴ	»	87	» δευτέρας ἀποτομῆς μέσης	»	75
94	ρ	τετάρτη ἀποτομὴ	»	88	» ἐλάσσονος	»	76
95	ρ	πέμπτη ἀποτομὴ	»	89	» μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	»	77
96	ρ	ἕκτη ἀποτομὴ	»	90	» μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	»	78

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

	Δίδονται				Ἀποδεικνύεται		
	Ἓν τμῆμα ὑποτειν. ὀρθογ. τριγ. τεμνομ. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	Τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἄλογος			Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς		
97	ρ	ἀποτομὴ	τοῦ θ.	73	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	τοῦ θ.	85
98	ρ	πρώτη ἀποτομὴ μέσης	»	74	» δευτέρας ἀποτομῆς	»	86
99	ρ	δευτέρα ἀποτομὴ μέσης	»	75	» τρίτης ἀποτομῆς	»	87
100	ρ	ἐλάσσων	»	76	» τετάρτης ἀποτομῆς	»	88
101	ρ	μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα	»	77	» πέμπτης ἀποτομῆς	»	89
102	ρ	μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα	»	78	» ἕκτης ἀποτομῆς	»	90

'Επὶ τῶν θεωρημάτων 71, 72 καὶ 108, 109, 110.

Δίδονται τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

71. 1. $\alpha \times \beta$ ῥητὸν καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.
'Η $\sqrt{\alpha \times \beta + \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$, ἔνθα
ἢ 1) A, B ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, (τοῦ θ. 36), δυώνυμος,
ἢ 2) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν, (37), ἐκ δύο μέσων πρώτη.
ἢ 3) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον, (38), μείζων,
ἢ 4) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν, (40), ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

72. 2. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.
'Η $\sqrt{\alpha \times \beta + \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$, ἔνθα
ἢ 5) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $A \times B$ μέσον, (38), ἐκ δύο μέσων δευτέρα.
ἢ 6) A^2, B^2, ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$, (41), δύο μέσα δυναμένη.

108. 1. $\alpha \times \beta$ ῥητὸν καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.
'Η $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα
ἢ 1) A, B ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, (τοῦ θ. 73), ἀποτομή,
ἢ 2) $A^2 + B^2$ ῥητόν, $A \times B$ μέσον, (76), ἐλάσσων.

109. 2. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ ῥητόν.
'Η $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα
ἢ 3) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα $A \times B$ ῥητόν, (τοῦ θ. 74), πρώτη ἀποτομὴ μέσης.
ἢ 4) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν, (77), μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

110. 3. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.
'Η $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα
ἢ 5) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα $A \times B$ μέσον, (75), δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.
ἢ 6) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$, (78), μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Σημ. 1. Ὁ Woepke, ὅστις ἀνεῦρε τὸ σχόλιον εἰς τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ Ἄραβος Aboû Othman ἐγεννήθη τὸ 1826 ἐν Dessau τῆς Γερμανίας καὶ ἐσπούδασεν ἐν Βερολίνῳ. Ἔζησε κατὰ τὸ πλεῖστον ἐν Παρισίοις ἀποθανὼν αὐτόθι τῷ 1864. Τὰς βιογραφικὰς πληροφορίας ἔλαβον παρὰ τοῦ φίλου καθηγητοῦ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου κ. Kurt Vogel.

Σημ. 2. Ἐπὶ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957.

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ Βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν, ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφημ. Κυβερν. 1946, Α' 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1976 (II) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 10.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2456/26.4.74

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΕΠΤΑΛΟΦΟΣ ΕΠΕ, Ζαλοκώστα 5 — Τηλ. 631675

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ XI. XII. XIII.

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ IV

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1957

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ XI. XII. XIII.

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ IV

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1957

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ τετάρτου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ περιλαμβάνοντος τὰ βιβλία XI, XII, XIII, ἤτοι τὰ στοιχεῖα τῆς στερεομετρίας, ὁλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ μελετητὴς τοῦ τόμου τούτου θὰ διαπιστώσῃ ἐκ τῶν σχημάτων πολλῶν θεωρημάτων, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον προβολικὴν καὶ παραστατικὴν γεωμετρίαν.

Ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου, εἰς σφαῖραν. Ὁ σπουδάζων τὰ Στοιχεῖα ἐν γένει καὶ πρὸ παντὸς ἐκ τούτων τὰ συναφῆ πρὸς τὰ κανονικὰ πολύεδρα θεωρήματα μένει ἔκπληκτος πρὸ τοῦ μεγαλείου, τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ ἀνυπερβλήτου κάλλους τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ὅπως εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων (βιβλία I—X), οὕτω καὶ εἰς τὴν στερεομετρίαν ὁ Εὐκλείδης οὐδένα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν ἐπιχειρεῖ. Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὁ Εὐκλείδης τὸ θεωρεῖ ὡς μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, ἥτις ὁδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν ἐγγύτερον πρὸς τὴν θεώρησιν τοῦ Θείου.

Εἰς τοὺς νεωτέρους μαθηματικοὺς γεννᾶται τὸ εὔλογον ἐρώτημα, ἂν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τὸ θεώρημα : Τ ὸ π λ ῆ θ ο ς τ ῶ ν κ ο ρ υ φ ῶ ν κ α ὶ τ ῶ ν ἑ δ ρ ῶ ν ἑ ν ὸ ς κ α ν ο ν ι κ ο ῦ κ υ ρ τ ο ῦ π ο λ υ έ δ ρ ο υ ἰ σ ο ῦ τ α ι μ ὲ τ ὸ π λ ῆ θ ο ς τ ῶ ν ἀ κ μ ῶ ν τ ο ύ τ ο υ σ ὺ ν δ ύ ο. Ἂν λάβῃ τις ὑπ' ὄψιν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀνεκάλυψαν τοὺς δυσκολωτάτους καὶ ὑπερόχους νόμους τῆς κατασκευῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς σφαῖραν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἄγεται κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ *συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἦτο γνωστὸν εἰς αὐτούς. Ἱστορικὴν ὅμως μαρτυρίαν περὶ τούτου δὲν ἔχομεν. Ἐνδείξεις τινὰς καὶ συναφεῖς πληροφορίας σημειοῦμεν εἰς τὸ τέλος τῶν ἐπεξηγήσεων.*

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1957.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ — ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ὅροι.

α'. Σ τ ε ρ ε ό ν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

γ'. Ε ὐ θ ε ῖ α π ρ ὸ ς ἐ π ί π ε δ ο ν ὀ ρ θ ή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Ἐ π ί π ε δ ο ν π ρ ὸ ς ἐ π ί π ε δ ο ν ὀ ρ θ ό ν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

ε'. Ε ὐ θ ε ί α ς π ρ ὸ ς ἐ π ί π ε δ ο ν κ λ ί σ ι ς ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ς'. Ἐ π ι π έ δ ο υ π ρ ὸ ς ἐ π ί π ε δ ο ν κ λ ί σ ι ς ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁ μ ο ί ω ς κ ε κ λ ί σ θ α ι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

η'. Π α ρ ά λ λ η λ α ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ'. Ὅ μ ο ι α σ τ ε ρ ε ὰ σ χ ή μ α τ ά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι'. Ἴ σ α δ ὲ κ α ὶ ὅ μ ο ι α σ τ ε ρ ε ὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια'. Σ τ ε ρ ε ὰ γ ω ν ί α ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ'. Π υ ρ α μ ί ς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ'. Π ρ ί σ μ α ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ'. Σ φ α ῖ ρ ά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περι-

Βιβλίον XI.

῾Ορισμοί.

1. Στερεὸν εἶναι τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος.

2. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

3. Εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐν τῷ (θεωρουμένῳ) ἐπιπέδῳ καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.

4. ᾿Επίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων αἱ κείμεναι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἄλλο.

5. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον εἶναι, ὅταν ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου εὑρισκομένου πέρατος τῆς εὐθείας ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος, καὶ ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ἀχθείσης.

6. Κλίσις ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἀγομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

7. ᾿Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ὁμοίως κεκλιμένον καὶ ἄλλο πρὸς ἄλλο, ὅταν αἱ γωνίαι κλίσεως εἶναι ἴσαι.

8. Παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι τὰ ἀσύμπτωτα.

9. Ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων, ἴσων τὸ πλῆθος, περιεχόμενα.

10. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος καὶ τὸ μέγεθος.

11. Στερεὰ γωνία εἶναι ἡ κλίσις πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς περισσοτέρων τῶν δύο εὐθειῶν γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἄλλως· στερεὰ γωνία εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐχουσῶν κοινὴν κορυφήν.

12. Πυραμὶς εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων ἀρχομένων ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ καταληγόντων εἰς ἓν σημεῖον.

13. Πρίσμα εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων δύο ἀπέναντι κείμενα εἶναι ἴσα, ὅμοια καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

14. Σφαῖρα εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ἡμικύκλιον στραφὲν περὶ

ενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ιϛ΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη΄. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ΄. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα΄. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ΄. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ΄. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

κε΄. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κϛ΄. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κζ΄. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη΄. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

τὴν διάμετρον αὐτοῦ μένουσαν ἀκίνητον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

15. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

16. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

17. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη κατὰ τὰ δύο μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

18. Κῶνος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν μένουσαν ἀκίνητον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον. Καὶ ἂν μὲν ἡ μένουσα ἀκίνητος κάθετος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, τὴν ἐκτελοῦσαν τὴν περιστροφήν, ὁ κῶνος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος, ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μεγαλυτέρα, ὀξυγώνιος.

19. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ τρίγωνον.

20. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς περιστρεφομένης εὐθείας.

21. Κύλινδρος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον περιστραφὲν περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, μένουσαν ἀκίνητον, ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

22. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

23. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ γραφόμενοι ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι κειμένων καὶ περιστρεφομένων πλευρῶν.

24. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων καὶ οἱ ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι ἀνάλογοι.

25. Κύβος εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

26. Ὀκτάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

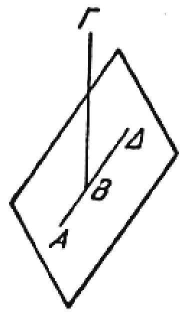
27. Εἰκοσάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

28. Δωδεκάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων.

α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ.



Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ Β καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

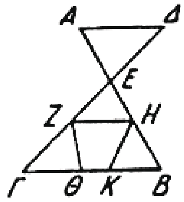
Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ. αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

1.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω, ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Τῆς ΑΒ θὰ ὑπάρχῃ συνεχὴς εὐθεῖα κειμένη ἐπ' εὐθείας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι κοινὸν τμῆμα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδή, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράψωμεν κύκλον, θὰ ἀντιστοιχῶσιν εἰς τὰς διαμέτρους ἄνισα τόξα.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εἶναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

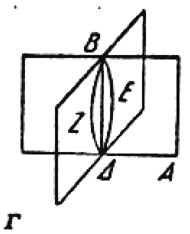
Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΒ, ΖΗ καὶ αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διότι ἐὰν τοῦ τριγώνου ΕΓΒ εἶναι μέρος ἢ τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου, θὰ εἶναι καὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι ἐπὶ ἄλλου. Ἐὰν δὲ τοῦ τριγώνου ΕΓΒ τὸ μέρος ΖΓΒΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου, θὰ εἶναι καὶ τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, μέρος δέ τι εἰς ἄλλο· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (θ. 1). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὸ ἐπίπεδον δέ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ τρίγωνον ΕΓΒ, εἰς τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἑκάστη τῶν ΕΓ, ΕΒ, καὶ εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον εὑρίσκονται καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ, (θ. 1). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ γραμμὴ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΒ εἶναι εὐθεῖα.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.



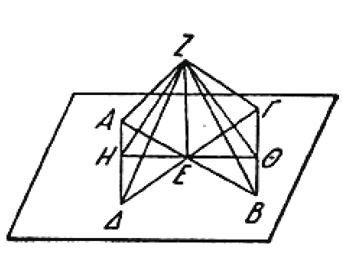
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς



Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ εἰς τὸ Β εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΔΕΒ (I αἴτ. 1), εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ εὐθεῖα ΔΖΒ. Θὰ ὑπάρχωσι τότε τῶν εὐθειῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ θὰ περιέχωσιν αὗται ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἄτοπον (I αἴτ. 9). Δὲν εἶναι ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Β πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

Διότι ἂς ὑψωθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὰς τεμνομένας κατὰ τὸ σημεῖον Ε εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ε τυχοῦσα ἡ ΗΕΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἀκόμη ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΔ καὶ ΓΕ = ΕΒ καὶ γωνία ΑΕΔ ἴση πρὸς γωνίαν ΓΕΒ, καὶ ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΔ = πρὸς τρίγωνον ΓΕΒ (I. 4). Ὥστε καὶ ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΕΘ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας βαίνουσιν αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· θὰ ἔχωσιν ἄρα ἴσας καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως (I. 26). Ἄρα ΗΕ = ΕΘ καὶ ΑΗ = ΒΘ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΒ καὶ ἡ ΖΕ εἶναι κοινὴ (τῶν τριγώνων ΑΕΖ, ΒΕΖ) καὶ κάθετος, ἡ βάσις ἄρα ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΔ = ΓΒ, εἶναι δὲ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο εὐθεῖαι ΖΑ, ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἐδείχθη ἡ βάσις ΖΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΑΔ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΒΓ (I. 8). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΑΗ = ΒΘ, ἀλλὰ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο, τὰς ΖΒ, ΒΘ. Καὶ ἐδείχθη γωνία ΖΑΗ = ΖΒΘ· ἡ βάσις ἄρα ΖΗ = πρὸς βάσιν ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΗΕ = ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΗΕ, ΕΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ· ἡ γωνία ἄρα ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕΖ. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΕΖ, ΘΕΖ εἶναι ὀρθή. Ἡ ΖΕ

ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

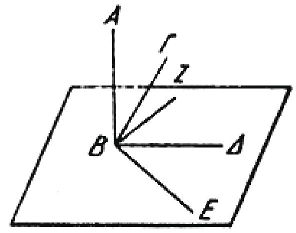
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΒΖ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἁφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἄρα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διὰ τοῦ Ε τυχόντως ἀχθεῖσαν ΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Εὐθεῖα δὲ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν σχηματίζῃ ὀρθὰς γωνίας πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Β· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖνται, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἡ δὲ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ ἂς προεκβληθῇ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὁριζόμενον ἐπίπεδον· εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦτο θὰ σχηματίσῃ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κοινὴν τομήν, εὐθεῖαν γραμμὴν (θ. 3). Ἂς σχηματίσῃ τὴν ΒΖ. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΑΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ὥστε ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Καθ' ὑπόθεσιν δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή· ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εὑρίσκεται ἄρα ἡ ΒΓ ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

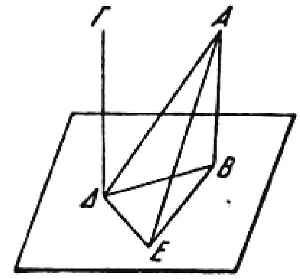
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ· πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

6.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν τὰ σημεῖα ἀφῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τὰ Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἡ ΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, θὰ εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ εὑρισκομένη ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΓΔΒ, ΓΔΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΑΔ = ΒΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ (Ι. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς αὐτῶν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 5). Εἰς ὃ δὲ ἐπίπεδον κεῖνται αἱ ΔΒ, ΔΑ κεῖται καὶ ἡ ΑΒ· διότι πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (θ. 2). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

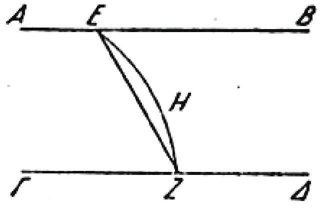
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ Ε, Ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μὲ τὰς παραλλήλους.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.



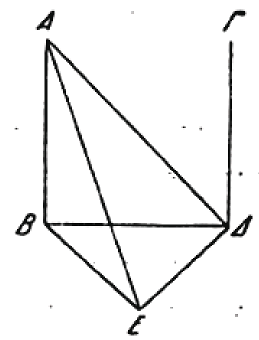
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας



Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖται, καὶ ὅτι κεῖται ἐκτὸς τούτου ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τῶν (ΑΒ, ΓΔ) κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν (θ. 3). Ἔστω τὴν ΕΖ· αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι ΕΗΖ, ΕΖ θὰ περιέχωσιν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ δὲν θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου· θὰ κεῖται ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

8.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΑΒ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ἄλλη ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 7). Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ, αἱ γωνίαι ἄρα ΑΒΔ, ΓΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (Ι. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΔ· καὶ ἡ ΓΔΒ ἄρα εἶναι ὀρθή· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΒ· διότι ἑκατέρα εἶναι ὀρθή· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ (τοῦ τριγώνου ΑΒΔ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (τριγ. ΒΔΕ). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΒΕ = ΑΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ. Καὶ ἡ βάσις αὐτῶν ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΒ · ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΔΑ (θ. 4). Ἡ ΕΔ ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΑ. Εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΑ κεῖται ἡ ΔΓ, ἐπειδὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ. ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς. ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

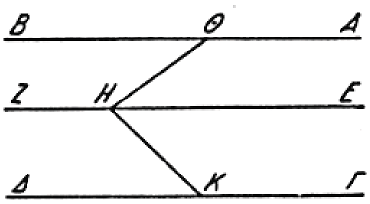
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.

ΒΔΑ κεῖνται αἱ ΑΒ, ΒΔ, εἰς τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΑΒ, ΒΔ κεῖται καὶ ἡ ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τομῆς δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕ, ΔΒ· ὥστε ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

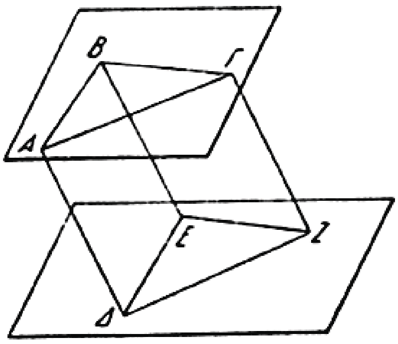
Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΗΘ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΕΖ, ΑΒ, ἡ δὲ ΗΚ ἂς ἀχθῇ πάλιν κάθετος (ἐπὶ τὴν ΕΖ) κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕ, ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ, ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ (θ. 4). Καὶ εἶναι ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ (θ. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι (θ. 6). Ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας.

Διότι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἂς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἂς μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση.



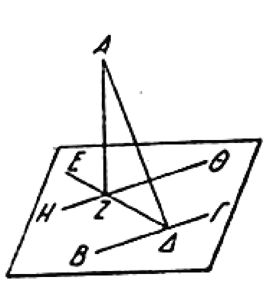
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν·

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΒΑ = ΒΓ = ΕΔ = ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ (Ι. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Αἱ δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μὲ τὴν εὐθεῖαν εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (θ. 9)· ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου σημεῖον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ἡ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ (Ι. 12). Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΔΕ (Ι. 11), κειμένη εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (Ι. 31).

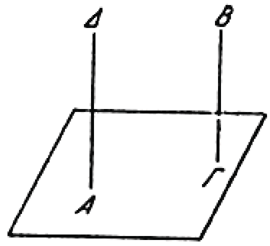
Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΔΑ, ΔΕ, ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔΑ (θ. 4). Καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδόν τι, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (θ. 8)· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἄρα εἶναι κάθετος ἡ ΗΘ καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ· ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΗ· εἶναι δὲ ἡ ΑΖ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἡ ΑΖ *ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.*

'Απὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

῎Εστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.



Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

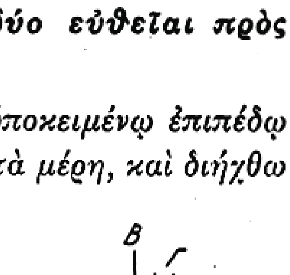
'Επεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

'Απὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ. 'Εὰν δὲ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (θ. 4)· ἡ ΖΑ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΗΘ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΕΔ, ΗΘ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

'Από δοθέντος ἄρα σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἤχθη εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἐκ σημείου κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον τὸ Α· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α νὰ ὑψωθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἂς θεωρηθῇ σημεῖόν τι Β ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ΑΔ.

'Επειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

'Επὶ τὸ δοθὲν ἄρα ἐπίπεδον ὑψώθη κάθετος ἐκ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ σημείου τοῦ Α, ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

'Από τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α ἂς ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΑΓ· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Α (θ. 3). Ἔστω τὴν ΔΑΕ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ὀρθή· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον.

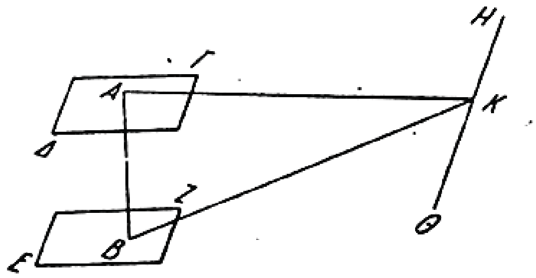
Δὲν θὰ ὑψωθῶσιν ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ



τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

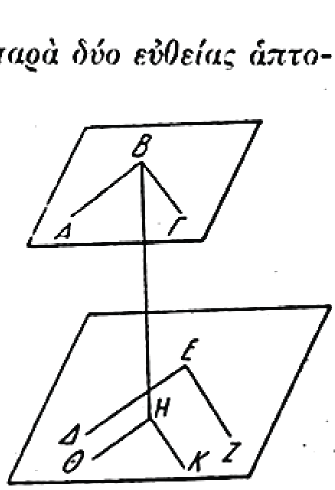
Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐ-



θείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός

14.

Τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστω εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ κάθετος ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι,προεκτεινόμενα θὰ συναντηθῶσιν. Ἂς συναντηθῶσιν· ἡ κοινὴ τομή των βεβαίως θὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (θ. 3)· ἔστω ἡ ΗΘ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΒΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖ, ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΚ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ, τὸ ὁποῖον προεξετάθη· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΚ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΒΑΚ εἶναι ὀρθή. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι ΑΒΚ, ΒΑΚ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα προεκτεινόμενα τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΓΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλα.

Τὰ ἐπίπεδα ἄρα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας τὰς ΔΕ, ΕΖ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΔΕ , ΔΖ προεκτεινόμενα δὲν θὰ συναντηθῶσι.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΗ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ, ΕΖ καὶ ἂς τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ διὰ τοῦ Η πρὸς μὲν τὴν ΕΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΘ, πρὸς δὲ τὴν ΕΖ ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, ΕΖ, (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΒΗΘ, ΒΗΚ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ, αἱ γωνίαι ἄρα ΗΒΑ, ΒΗΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (Ι. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΗΘ· εἶναι ἄρα ὀρθὴ καὶ ἡ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα *ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΗΒ καὶ τῇ ΒΓ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΒ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΗΒ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.*

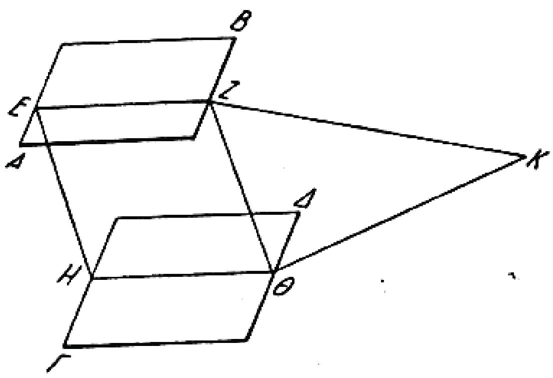
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΗΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΗΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας τὰς ΒΑ, ΒΓ, ἡ ΗΒ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΒΓ. [Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ κάθετος ἡ ΗΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΒΓ]. Τὰ δὲ ἐπίπεδα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα (θ. 14)· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, αἱ ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η. Ἂς προεκβληθῶσιν πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ καὶ ἂς συναντηθῶσι πρῶτον κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖΚ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, καὶ πάντα ἄρα τὰ σημεῖα τῆς ΕΖΚ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, (θ. 1). Ἓν δὲ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΕΖΚ εἶναι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ Κ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμενα θὰ συναντηθῶσι. Δὲν συναντῶνται ὅμως, διότι ὑπετέθησαν παράλληλα· δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η δὲν θὰ συναντηθῶσιν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ προεκβαλλόμεναι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ μὴ συναντώμεναι εἶναι παράλληλοι. Ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

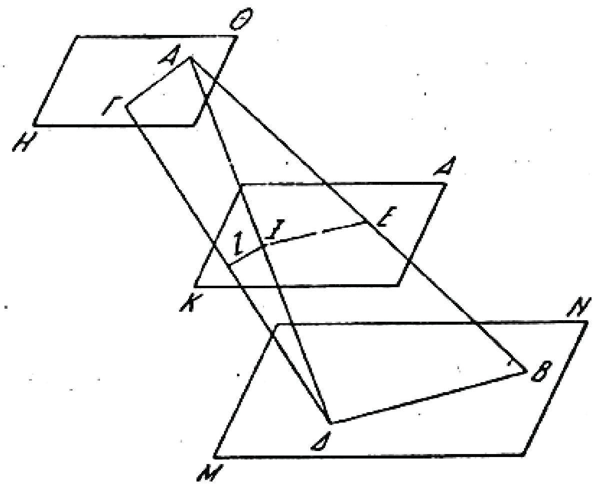
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

'Εὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

'Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ,



ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ.

'Εὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

'Εὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

'Εκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα

17.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ καὶ ἂς συναντᾷ ἡ ΑΔ τὸ ἐπίπεδον ΚΛ κατὰ τὸ σημεῖον Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΞ, ΞΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΚΛ, ΜΝ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΗΘ, ΚΛ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ εἶναι παράλληλοι. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΕΞ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΑΞ : ΞΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἡ ΞΖ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, εἶναι ΑΞ : ΞΔ = ΓΖ : ΖΔ (VI. 2). Ἐδείχθη δὲ ΑΞ : ΞΔ = ΑΕ : ΕΒ· ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

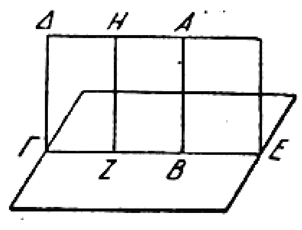
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἂς διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ καὶ τοῦ δοθέντος ἡ ΓΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΖΗ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.



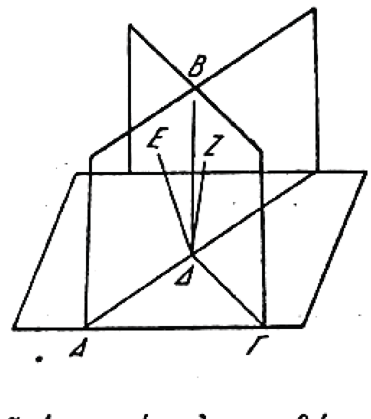
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.



Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 3)· ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΕ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ ὀρθή· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ (Ι. 28). Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (θ. 8). Καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι κείμεναι εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο (ὁρ. 4). Καὶ ἐδείχθη ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων τὴν ΓΕ, κειμένη εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον τὸ ΔΕ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα ΔΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ ΕΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν, καὶ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς τῆς ΑΔ ἤχθη κάθετος ἡ ΔΕ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ εἶναι ὑψωμέναι δύο κάθετοι κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 13). Οὐδεμία ἄρα ἄλλη κάθετος δύναται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

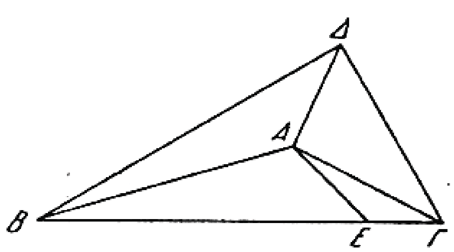
Ἐὰν ἄρα δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ



τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΔ, ΔΓ τῆς ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ

20.

Ἐὰν στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι δύο τυχοῦσαι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης. Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴσαι, ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ μὲ πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΑΒ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΕ = ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἀχθεῖσα ἡ ΒΕΓ ἂς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ ΔΑ = ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ (τριγώνου) ἴσαι πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ· ἡ βάσις ἄρα ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΒΔ + ΔΓ > ΒΓ (I. 20), ἐξ ὧν ἡ ΔΒ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ τῆς λοιπῆς τῆς ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα. Καὶ ἐπειδὴ ΔΑ = ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ΔΓ > βάσεως ΕΓ, ἡ γωνία ἄρα ΔΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΑΓ (I. 25). Ἐδείχθη δὲ καὶ ΔΑΒ = ΒΑΕ· ἄρα ΔΑΒ + ΔΑΓ > ΒΑΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων τυχουσῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

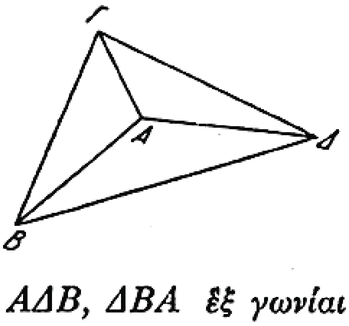
21.

Πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΒΑΓ + ΓΑΔ + ΔΑΒ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Β στερεὰ

Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

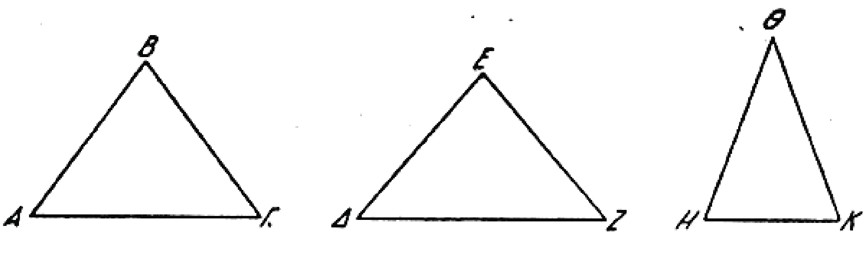


Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο τυχοῦσαι ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς (θ. 20)· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΑ $+$ ΑΒΔ $>$ ΓΒΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ μὲν ΒΓΑ $+$ ΑΓΔ $>$ ΒΓΔ, αἱ δὲ ΓΔΑ $+$ ΑΔΒ $>$ ΓΔΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι ΓΒΑ $+$ ΑΒΔ $+$ ΒΓΑ $+$ ΑΓΔ $+$ΓΔΑ $+$ ΑΔΒ $>$ τῶν τριῶν ΓΒΔ $+$ ΒΓΔ $+$ ΓΔΒ. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς ΓΒΔ $+$ ΒΔΓ $+$ ΒΓΔ $=$ 2 ὀρθαὶ (Ι. 32)· αἱ ἓξ ἄρα ΓΒΑ $+$ ΑΒΔ $+$ ΒΓΑ $+$ ΑΓΔ $+$ ΓΔΑ $+$ ΑΔΒ $>$ 2 ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἐννέα ἄρα γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ ΓΒΑ $+$ ΑΓΒ $+$ ΒΑΓ $+$ ΑΓΔ $+$ ΓΔΑ $+$ ΓΑΔ $+$ ΑΔΒ $+$ ΔΒΑ $+$ ΒΑΔ $=$ 6 ὀρθάς, ἐξ ὧν αἱ ΑΒΓ $+$ ΒΓΑ $+$ ΑΓΔ $+$ ΓΔΑ $+$ ΑΔΒ $+$ ΔΒΑ $>$ 2 ὀρθῶν· αἱ λοιπαὶ ἄρα τρεῖς αἱ ΒΑΓ $+$ ΓΑΔ $+$ ΔΑΒ αἱ περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

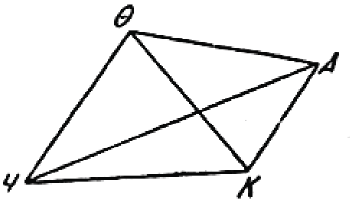
Πᾶσα ἄρα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰς ἴσας εὐθείας, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, αἱ μὲν ΑΒΓ $+$ ΔΕΖ $>$ ΗΘΚ, αἱ δὲ ΔΕΖ $+$ ΗΘΚ $>$ ΑΒΓ, καὶ ἀκόμη αἱ ΗΘΚ $+$ ΑΒΓ $>$ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ $=$ ΒΓ $=$ ΔΕ $=$ ΕΖ $=$ ΗΘ $=$ ΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τουτέστιν ὅτι δύο ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ οἱαιδήποτε εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀφοῦ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ γίνονται ἴσαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΚ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον αὐτῆς Θ ἂς κατασκευασθῇ ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσιν. πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

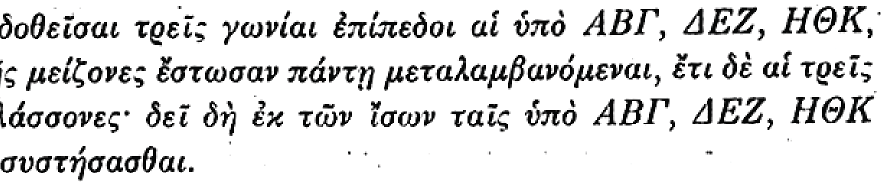


κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω



τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΝΛ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΞΛ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστιν ἴση·

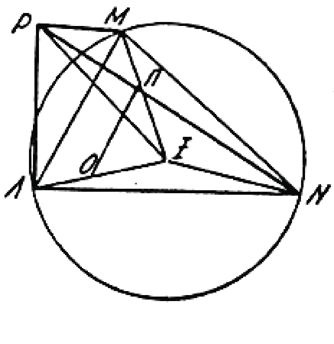
γωνία ΚΘΛ = ΑΒΓ· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΛ ἴση πρὸς μίαν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΗΛ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΚΘ, ΘΛ καὶ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία = ΚΘΛ, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒΓ + ΗΘΚ > ΔΕΖ, εἶναι δὲ ΑΒΓ = ΚΘΛ, ἄρα ΗΘΛ > ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ γωνία ΗΘΛ > ΔΕΖ, ἡ βάσις ἄρα ΗΛ > τῆς βάσεως ΔΖ (I. 24). Ἀλλὰ ΗΚ + ΚΛ > ΗΛ (I. 20). Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΗΚ + ΚΛ > ΔΖ. Εἶναι δὲ ΚΛ = ΑΓ· ἄρα ΑΓ + ΗΚ > ΔΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν ΑΓ + ΔΖ > ΗΚ, καὶ ἀκόμη αἱ ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ. Εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία· πρέπει ὅμως αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, καὶ ἀκόμη αἱ τρεῖς νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· πρέπει ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία.

Ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον (θ. 22). Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἡ μὲν ΑΓ = ΛΜ, ἡ δὲ ΔΖ = ΜΝ, καὶ ἀκόμη ἡ ΗΚ = ΝΛ, καὶ ἂς γραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΛΜΝ κύκλος ὁ ΛΜΝ (IV. 5), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ > τῆς ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ΑΒ ≦ ΛΞ. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ = ΒΓ, ἡ δὲ ΞΛ = ΞΜ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΛΞ, ΞΜ· καὶ ἡ βάσις ΑΓ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΛΜ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΛΞΜ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ = ΜΞΝ, καὶ ἀκόμη ἡ ΗΘΚ = ΝΞΛ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς τὰς ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς. Ἐλήφθησαν δὲ μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ ΑΒ ἄρα δὲν διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς ΟΠ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι



καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΡΞ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, βάσις ἄρα ἡ ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΛ, ΡΜ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΡ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μικροτέρα· καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΞΟ, ΒΓ = ΞΠ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΒΓ, εἶναι καὶ ΞΟ = ΞΠ· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΛΟ = ΠΜ. Ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΠ (VI. 2) καὶ τὸ τρίγ. ΛΜΞ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΟΠΞ (I. 29)· εἶναι ἄρα ΞΛ : ΛΜ = ΞΟ : ΟΠ (VI. 4)· ἐναλλὰξ ΛΞ : ΞΟ = ΛΜ : ΟΠ (VI. 16). Εἶναι δὲ ΛΞ > ΞΟ· ἄρα καὶ ΛΜ > ΟΠ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι ΛΜ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΑΓ > ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΠ καὶ ἡ βάσις ΑΓ > βάσεως ΟΠ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ > τῆς γωνίας ΟΞΠ (I. 25). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΞΝ, ἡ δὲ ΗΘΚ τῆς ΝΞΛ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν τριῶν ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ. Ἀλλὰ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ ἐλήφθησαν μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἴσαι· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ΑΒ < ΛΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ἴση· εἶναι ἄρα ΑΒ > ΛΞ. Ἂς ὑψωθῇ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ σημείου Ξ ἡ ΞΡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ (θ. 12) καὶ ἔστω $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΡΞ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ, εἶναι ἄρα ἡ ΡΞ κάθετος καὶ πρὸς ἑκάστην τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ΛΞ = ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΞΡ, ἡ βάσις ἄρα ΡΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΡΜ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΡΛ, ΡΜ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 = ΛΞ^2 + ΞΡ^2$. Εἶναι δὲ $ΛΞ^2 + ΞΡ^2 = ΛΡ^2$ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΛΞΡ εἶναι ὀρθή· ἄρα $ΑΒ^2 = ΡΛ^2$· ἄρα ΑΒ = ΡΛ. Ἀλλὰ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἑκατέρα δὲ τῶν ΡΜ, ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΛ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐλήφθη ἡ βάσις ΛΜ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, ἡ γωνία ἄρα ΛΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΜΡΝ = ΔΕΖ, ἡ δὲ ΛΡΝ = ΗΘΚ.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα.

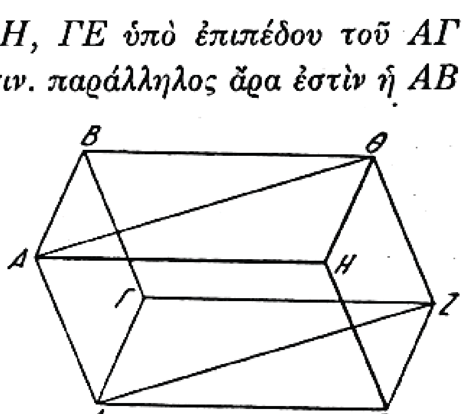
Ὃν δὲ τρόπον, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΓΒ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ· ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

κδ'.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

Ἐκ τριῶν ἄρα ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δοθείσας τρεῖς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, κατεσκευάσθη ἡ μὲ κορυφὴν τὸ Ρ στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λ ῆ μ μ α.

Πῶς δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ $AB^2 - \Lambda\Xi^2 = \Xi P^2$ ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς· ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $AB > \Lambda\Xi$ καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἂς ἐναρμοσθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΑΒ (IV. 1), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ, ἡ ΑΓΒ ἄρα εἶναι ὀρθὴ (III. 31). Ἄρα $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ (I. 47). Ὥστε $AB^2 - A\Gamma^2 = \Gamma B^2$. Εἶναι δὲ $A\Gamma = \Lambda\Xi$. Ἄρα $AB^2 - \Lambda\Xi^2 = \Gamma B^2$. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν $\Xi P = \Gamma B$, θὰ εἶναι $AB^2 - \Lambda\Xi^2 = \Xi P^2$· ὅπερ προέκειτο νὰ ποιηθῇ.

24.

Ἐὰν στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ στερεὸν ΓΔΘΗ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΒΗ, ΓΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). Ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι. Ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων οὐχὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· θὰ περιέχωσιν ἄρα ἴσας γωνίας (θ. 15)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο

ΔΓΖ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

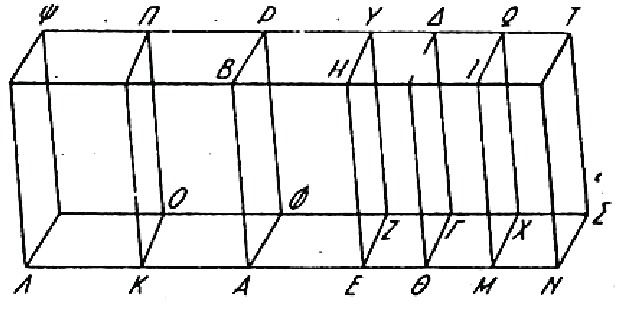
Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ,



ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων τὰς ΔΓ, ΓΖ (Ι. 34), καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (Ι. 4). Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΗ, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΑΕ = ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕΖΦ πρὸς τὴν βάσιν ΕΘΓΖ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒΖΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΗΓΔ.

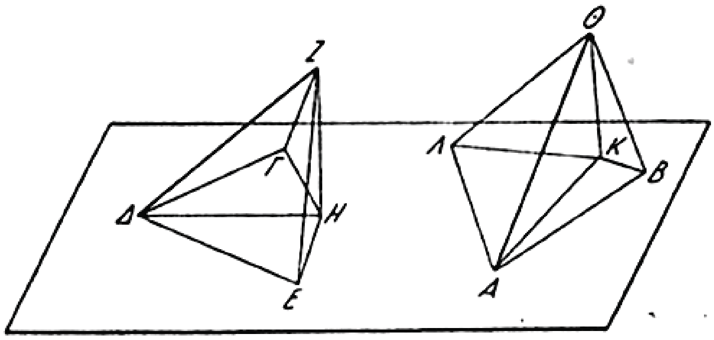
Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΘ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, καὶ ἂς ληφθῶσι πρὸς μὲν τὴν ΑΕ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΑΚ, ΚΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΘ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΘΜ, ΜΝ καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ καὶ τὰ στερεὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ ἀκόμη τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἐπίσης, καὶ ἀκόμη τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν στερεῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι ἴσα πρὸς τρία ἐπίπεδα (ἀντιστοίχως). Ἀλλὰ τὰ τρία εἶναι ἴσα πρὸς τὰς τρεῖς ἀπέναντι βάσεις (θ. 24)· τὰ τρία ἄρα στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (ὁρ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ὅσας ἄρα φορὰς ἡ βάσις ΛΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΑΖ, τόσας φορὰς καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ εἶναι τοῦ στερεοῦ ΑΥ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὅσας φορὰς ἡ βάσις ΝΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΘ, τόσας εἶναι καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ τοῦ στερεοῦ ΘΥ. Καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΛΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΖ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΝΖ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Διότι, ἐνῷ ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν βάσεις αἱ ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεὰ τὰ ΑΥ, ΥΘ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βάσεως ΑΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΑΥ καὶ ἡ βάσις ΛΖ καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ, τῆς δὲ βάσεως ΘΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΘΥ καὶ ἡ μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ ἥ τε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ ἥ τε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΖΝ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΗΕ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ βάσις ΝΖ καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΖΝ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴση, ἴσον, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΛΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΛΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΥΘ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ σημείου ἐπ' αὐτῆς ὡς κορυφῆς νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Δ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ· πρέπει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου ὡς κορυφῆς τοῦ Α νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ ἂς τέμνῃ αὐτὴ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΕΔΓ ἴση ἡ ΒΑΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΔΗ ἴση ἡ ΒΑΚ (I. 23), καὶ ἂς ληφθῇ ΑΚ = ΔΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΛ (θ. 12), καὶ ἂς ληφθῇ ΚΘ = ΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία Α ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Δ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ.

Διότι ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3)· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΖΗΔ, ΖΗΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΘΚΑ, ΘΚΒ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΚΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΕ ἀντιστοίχως, καὶ περιέχουσι γωνίας ἴσας, ἡ βάσις ἄρα ΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΕ (I. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΘΒ = ΖΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο

δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση [ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσιν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ εἰσιν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

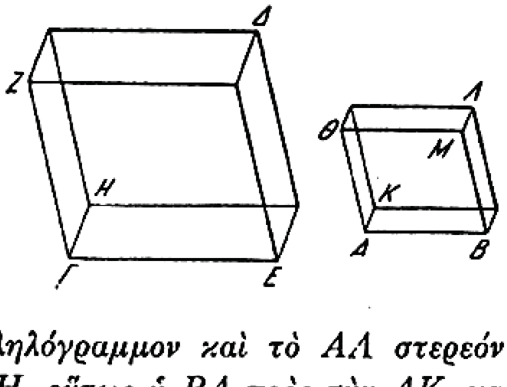
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κζ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ· καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΒ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα πλευραὶ αἱ ΑΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΗ, ΗΖ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΔ (I. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΑΒ = ΔΕ· δύο λοιπὸν αἱ ΘΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΔΕ. Καὶ ἡ βάσις ἄρα ΘΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἡ γωνία ἄρα ΒΑΘ = ΕΔΖ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΘΑΛ = ΖΔΓ [διότι ἐὰν ληφθῇ ΑΛ = ΔΓ καὶ ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΒΑΛ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΕΔΓ, ἐξ ὧν ἐλήφθη ΒΑΚ = ΕΔΗ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΓ. Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· δύο λοιπὸν αἱ ΛΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΗ, ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἡ βάσις ἄρα ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΓ καὶ ἡ βάσις ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΛ = ΖΓΔ]· Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΑΛ = ΕΔΓ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α κατεσκευάσθη στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

27.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· πρέπει ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΔ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Γ, ὥστε ἡ μὲν ΒΑΘ = ΕΓΖ, ἡ δὲ ΒΑΚ = ΕΓΗ, ἡ δὲ ΚΑΘ = ΗΓΖ (θ. 26)· καὶ ἂς γίνῃ ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ καὶ ΗΓ : ΓΖ = ΚΑ : ΑΘ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) ΕΓ : ΓΖ = ΒΑ : ΑΘ (V. 22). Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒ καὶ τὸ στερεὸν ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ, καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΗΕ *ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.*

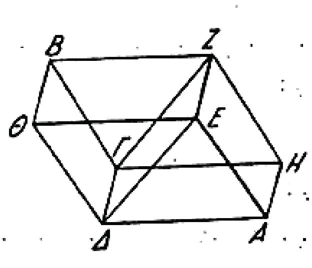
Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κη'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον· ἀπεναντίον γάρ· τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ καὶ ἀκόμη τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΛ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΑΛ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἀνεγράφη στερεὸν τὸ ΑΛ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

28.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων, θὰ τμηθῇ τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου δίχα.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ.

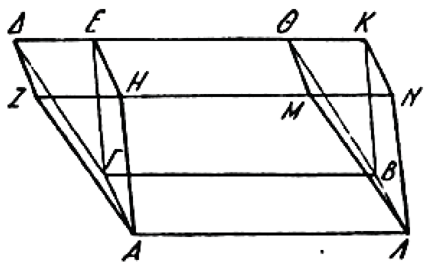
Διότι ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΓΗΖ = τρ. ΓΖΒ, τὸ δὲ ΑΔΕ = ΔΕΘ (Ι. 34), εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΑ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒ· διότι κεῖται ἀπέναντι· τὸ δὲ ΗΕ = ΓΘ (θ. 24), καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων καὶ κατὰ τὸ πλῆθος καὶ κατὰ τὸ μέγεθος (ὁρ. 10). Ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν ΑΒ ἐτμήθη δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἔστω ὅτι καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΓΒ ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΓΕ τρίγωνον τῷ ΘΒΚ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΜΛΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ πραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ· ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲ τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.



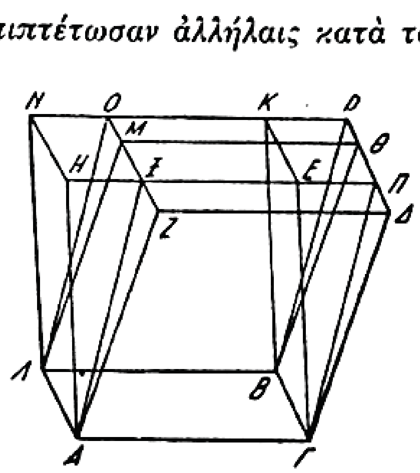
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον,



εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΔΘ, ΕΚ (Ι. 34)· ὥστε καὶ ΔΘ = ΕΚ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΕΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΘΚ. Ὥστε καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΒΚ (Ι. 4), τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΔΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΝ (Ι. 36). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΛΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΜΛΝ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΓΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ, τὸ δὲ ΓΗ = ΒΝ· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24)· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τὸ κοινὸν στερεόν, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ νὰ μὴ ἀπολήγωσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀκόμη ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. Τὸ στερεὸν λοιπὸν ΓΜ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΖΔΘΜ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ· διότι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΟ, ΔΡ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΗΕΚΝ· διότι καὶ πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ *ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ. ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.*

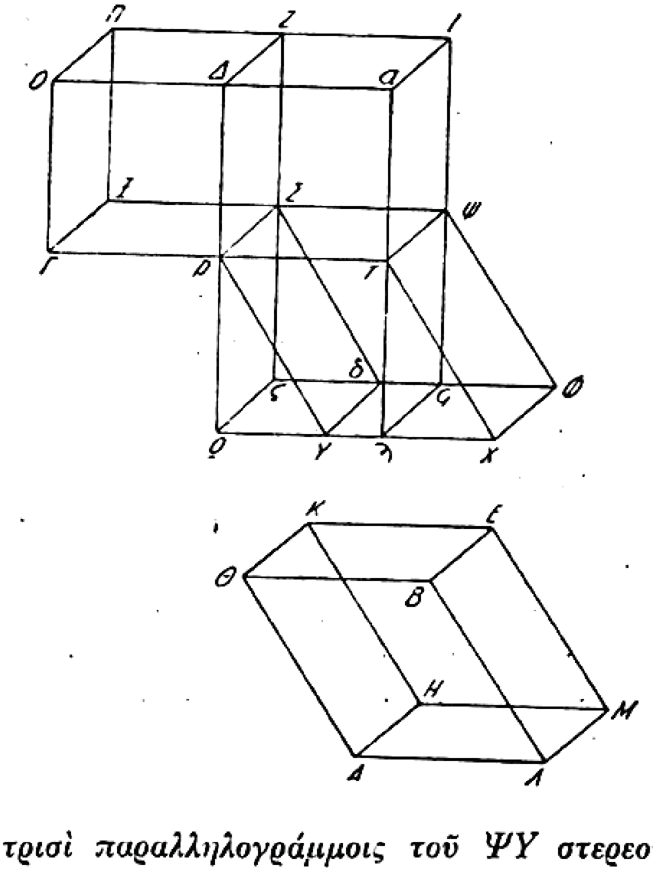
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἡ ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔΡ,



καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΗΠ, ΝΡ (θ. 29). Ὥστε καὶ τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

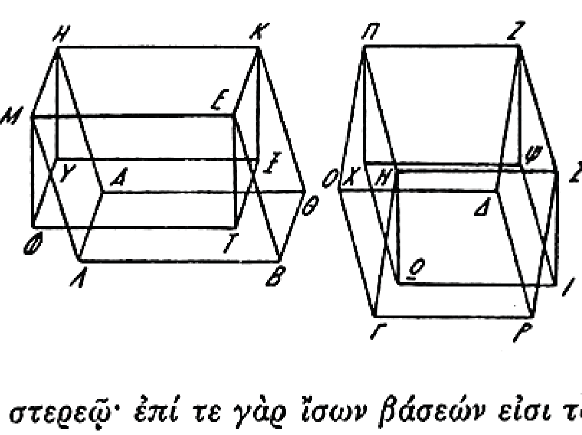
Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

Ἔστωσαν πρῶτον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ ἀκμαὶ αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΡΤ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς εὐθείας ΓΡ καὶ μὲ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ρ ὡς κορυφὴν ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΤΡΥ = ΑΛΒ (Ι. 23), καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, πρὸς δὲ τὴν ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ καὶ ἡ βάσις ΡΧ καὶ τὸ στερεὸν ΨΥ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΛ, ΛΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΧ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΛ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ΑΛ = ΡΤ καὶ ΛΜ = ΡΣ καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ΛΕ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΣΥ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΕ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΨΥ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία ἐπίσης πρὸς ἄλλα τρία ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΨΥ (ὁρ. 10). Ἂς προεκταθῶσιν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΩ παράλληλος ἡ ͵αΤϡ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ͵α, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΩΨ, ΡΙ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΨΩ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΩG, ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΨΥ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΥΦ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σς, Σσ̄, Ψς, ΨΦ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΩΧ, ςΦ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΨΥ = στερεὸν ΑΕ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ στερεὸν ΨΩ = στερεὸν ΑΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΡΥΧΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΩΤ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς

ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ ,αΤ϶, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ,α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά. ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΩG, τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τ϶, ΤΧ, Σς, Σō, ΨG, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, ς Φ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ, καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΤΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστιν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ.



ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΡΤ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΡΤ, ΩΧ (I. 35)· ἀλλὰ ΡΥΧΤ = ΓΔ, ἐπειδὴ ΡΥΧΔ = ΑΒ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΩΤ = ΓΔ. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ : ΔΤ (V. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΖ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, ὡς τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΡΙ (θ. 25). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΩΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΨ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι βάσις ΩΤ : βάσιν ΤΔ = στερεὸν ΩΨ : στερεὸν ΡΙ. Ἀλλα ΓΔ : ΔΤ = ΩΤ : ΔΤ· καὶ συνεπῶς ΓΖ : ΡΙ = ΩΨ : ΡΙ. Ἑκάτερον ἄρα τῶν στερεῶν ΓΖ, ΩΨ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΡΙ· ἴσον ἄρα εἶναι τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΩΨ (V. 9). Ἀλλ' ἐδείχθη ΩΨ = ΑΕ· ἄρα ΑΕ = ΓΖ.

Ἔστω δεύτερον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ, ΓΔ· λέγω πάλιν, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ. Διότι ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ ἃς τέμνωσι τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΚΦ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΠΙ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Ἀλλὰ τὸ μὲν στερεὸν ΚΦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΕ, τὸ δὲ ΠΙ πρὸς τὸ ΓΖ· διότι εἶναι ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας (θ. 30). Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

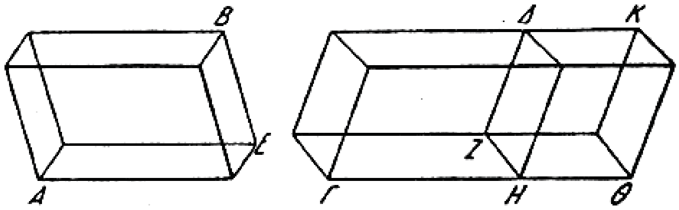
Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ· ἐπί τε γαρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν



ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΘ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

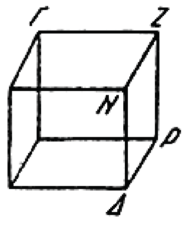
Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΚΟ στερεόν.



Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ

32.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτω τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΕ (Ι. 45), καὶ ἀπὸ τῆς βάσεως μὲν τῆς ΖΘ ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΓΔ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΗΚ. Ὅθεν εἶναι ἴσον τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΚ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 31). Καὶ ἐπειδὴ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΔΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΓΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΔΘ (θ. 25). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΕ, τὸ δὲ στερεὸν ΗΚ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτως τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

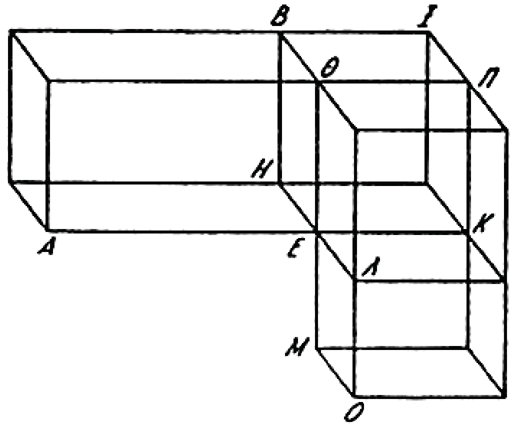
33.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ὁ λόγος τοῦ στερεοῦ ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $ΑΕ^3 : ΓΖ^3$.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ ἂς ληφθῇ ΕΚ = ΓΖ, ΕΛ = ΖΝ, ΕΜ = ΖΡ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛ καὶ τὸ στερεὸν ΚΟ.

Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΝ, ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΚΕΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΝ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΕΗ = ΓΖΝ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΚΛ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ *αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΖ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ' ὡς ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς*



τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

'Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλε-

τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΜ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ [παραλληλόγραμμον] ΓΡ καὶ ἀκόμη τὸ ΕΟ = ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΚΟ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντί των (θ. 24)· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΚΟ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΓΔ. Ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΚ, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν παραλληλογράμμων ΗΚ, ΚΛ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΑΒ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΕΞ, ΛΠ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ΑΕ : ΓΖ = ΕΗ : ΖΝ = ΕΘ : ΖΡ (ὁρ. 9, VI ὁρ. 1), εἶναι δὲ καὶ ΓΖ = ΕΚ, ΖΝ = ΕΛ, ΖΡ = ΕΜ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΚ = ΗΕ : ΕΛ = ΘΕ : ΕΜ. Ἀλλὰ ΑΕ : ΕΚ = παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ, καὶ ΗΕ : ΕΛ = ΗΚ : ΚΛ, καὶ ΘΕ : ΕΜ = ΠΕ : ΚΜ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ = ΗΚ : ΚΛ = ΠΕ : ΚΜ. Ἀλλὰ ΑΗ : ΗΚ = στερεὸν ΑΒ : στερεὸν ΕΞ, καὶ ΗΚ : ΚΛ = στερεὸν ΞΕ : στερεὸν ΠΛ, καὶ ΠΕ : ΚΜ = στερεὸν ΠΛ : στερεὸν ΚΟ (θ. 32)· καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τέταρτον ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον (V. ὁρ. 10)· ἄρα $ΑΒ : ΚΟ = ΑΒ^3 : ΕΞ^3$. Ἀλλὰ ΑΒ : ΕΞ = παραλληλόγρ. ΑΗ : παραλληλόγρ. ΗΚ = εὐθεῖα ΑΕ : εὐθεῖα ΕΚ· ὥστε $ΑΒ : ΚΟ = ΑΕ^3 : ΕΚ^3$. Εἶναι δὲ τὸ μὲν στερεὸν ΚΟ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΚ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς ὁμολόγου αὐτοῦ πλευρᾶς ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΓΖ.

Τὰ ὅμοια ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ στερεὸν παραλληλε-

πίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

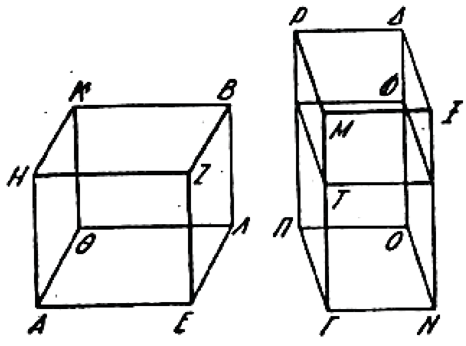
λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις [εἰ γὰρ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ [εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν· ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΤΠ βάσιν καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ πίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν πρώτην πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν δευτέραν, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν τετάρτην ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν.

34.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ.

(1). Διότι ἔστωσαν πρῶτον αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ βάσις ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ΓΜ = ΑΗ. Διότι τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (θ. 32); [διότι ἐὰν αἱ βάσεις ΕΘ, ΝΠ εἶναι ἴσαι, τὰ ὕψη ὅμως ΑΗ, ΓΜ ἄνισα, οὐδὲ τὸ στερεὸν ΑΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἐλήφθη δὲ ἴσον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισον τὸ ὕψος ΓΜ πρὸς τὸ ὕψος ΑΗ· ἴσον ἄρα]. Καὶ θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς ΑΗ, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(2). Τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴση ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ἄρα ΓΜ $>$ ΑΗ [διότι ἐὰν δὲν εἶναι, οὔτε τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἴσα· ἐλήφθησαν δὲ ἴσα]. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ΓΤ = ΑΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΑΒ = στερεὸν ΓΔ, ἔξω δὲ εἶναι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον (V. 7), εἶναι ἄρα ὡς τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις ΜΠ πρὸς τὴν βάσιν ΤΠ (θ. 25) καὶ ἡ ΓΜ

ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ [βάσις] πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἥ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, ς, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστὶν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλλη-

πρὸς τὴν ΓΤ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Εἶναι δὲ ΓΤ = ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

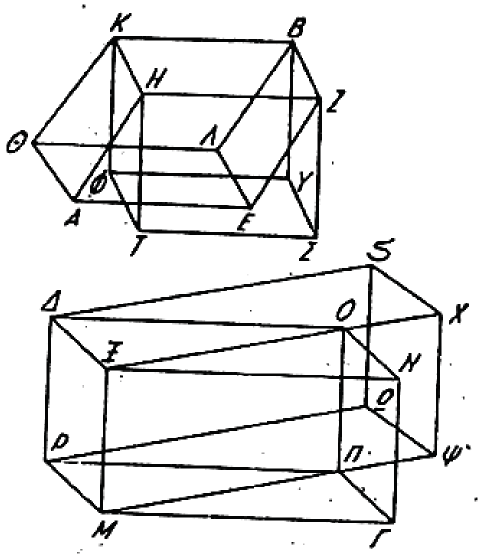
(3). Πάλιν τώρα ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν πάλιν αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Καὶ ἂν μὲν ΕΘ = ΝΠ, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι ἄρα ἴσον καὶ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

(4). Ἂς μὴ εἶναι τώρα ἡ βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ· καὶ τὸ ὕψος ἄρα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τοῦ στερεοῦ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Ἂς ληφθῇ πάλιν ΓΤ = ΑΗ καὶ ἂς συμπληρωθῇ ὁμοίως τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, εἶναι δὲ ΑΗ = ΓΤ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ ΓΜ : ΓΤ οὕτως καὶ ἡ βάσις ΜΠ πρὸς τὴν βάσιν ΠΤ (VI. 1) καὶ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 25). Καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἔχει πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα στερεὸν ΑΒ = στερεὸν ΓΔ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

(5). Ἂς μὴ εἶναι τώρα αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΕΘ, ΝΠ κάθετοι καὶ ἂς τέμνωσιν αὗται τὰ ἐπίπεδα κατὰ τὰ σημεῖα Σ, Τ, Υ, Φ καὶ Χ, Ψ, Ω, Σ ἀντιστοίχως, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΖΦ, ΞΩ· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ.

Ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ = ΒΤ (θ. 29 — 30)· διότι εἶναι καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ στερεὸν ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΨ· διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν ἀπολήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ *λεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*



Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΒΑ ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς [εἰσι] τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν [ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν

εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη]. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ (2ον μέρος τοῦ θεωρήματος). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΚ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΘ, ἡ δὲ βάσις ΞΡ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τὰ δὲ ὕψη τῶν στερεῶν ΔΨ, ΒΤ καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ εἶναι τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(6). Πάλιν ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτω τὸς ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι, ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΚ, ἡ δὲ ΝΠ πρὸς τὴν ΞΡ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Εἶναι δὲ τὰ ὕψη τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΒΤ, ΔΨ τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΒΤ, ΔΨ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν [τὰ δὲ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα· τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Τὸ δὲ στερεὸν ΔΨ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΓ [διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

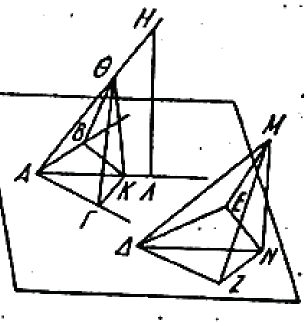
35.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀπὸ τῶν κορυφῶν δὲ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων τῶν γωνιῶν σχηματί-

ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Ν, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΛ παράλληλος ἡ ΘΚ. ἡ δὲ ΗΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓΑ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν



ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΘΑ τῇ ΜΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἐστιν ἴση [οὕτως· ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γάρ· καὶ ἔστιν ἡ

ζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, ληφθῶσι δὲ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τούτων ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐπιπέδων ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τῶν κορυφῶν τῶν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αὗται μετὰ τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν θὰ σχηματίζωσι γωνίας ἴσας.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Α, Δ ἂς ἀχθῶσιν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων αἱ ΑΗ, ΔΜ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΜΔΕ = ΗΑΒ, τὴν δὲ ΜΔΖ = ΗΑΓ, καὶ ἂς ληφθῶσι ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Η, Μ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΑΓ, ΕΔΖ κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΗΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἂς ληφθῇ ΑΘ = ΔΜ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΛ. Ἡ δὲ ΗΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ (θ. 8). Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. Ἐπειδὴ $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΑ^2$ (Ι. 47), καὶ $ΚΑ^2 = ΚΓ^2 + ΓΑ^2$, θὰ εἶναι ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΓ^2 + ΓΑ^2$. Εἶναι δὲ $ΘΚ^2 + ΚΓ^2 = ΘΓ^2$· ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΓ^2 + ΓΑ^2$. Ἡ γωνία ἄρα ΘΓΑ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΖΜ εἶναι ὀρθή. Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΜ. Εἶναι δὲ καὶ ΘΑΓ = ΜΔΖ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΘΑ = ΜΔ· θὰ ἔχωσι ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως (Ι. 26). Ἄρα ΑΓ = ΔΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ΑΒ = ΔΕ [ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΜΕ. Καὶ ἐπειδὴ $ΛΘ^2 = ΑΚ^2 + ΚΘ^2$, καὶ $ΑΚ^2 = ΑΒ^2 + ΒΚ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΑΘ^2$. Ἀλλὰ $ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΒΘ^2$· διότι ἡ γωνία ΘΚΒ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ ἡ ΘΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἄρα $ΑΘ^2 = ΑΒ^2 + ΒΘ^2$· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΘ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΕΜ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΒΑΘ = ΕΔΜ· ἐξ ὑποθέσεως· καὶ εἶναι ἡ ΑΘ = ΔΜ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ = ΔΕ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΓ = ΔΖ καὶ ΑΒ = ΔΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΓΑ, ΑΒ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΓΑΒ = ΖΔΕ· ἡ βάσις ἄρα ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ καὶ τὸ τρίγωνον (ΑΒΓ) ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον (ΔΕΖ) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (Ι. 4)· Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ = ΔΖΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΓΚ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΔΖΝ· καὶ

ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστιν ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ; ΝΜ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΜΝ ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συν-

ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΕΖΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $ΓΒΚ = ΖΕΝ$. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν $ΒΓ = ΕΖ$· θὰ ἔχωσιν ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Εἶναι ἄρα ἡ $ΓΚ = ΖΝ$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΑΓ = ΔΖ$· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΓ, ΓΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΖΝ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας. Ἡ βάσις ἄρα $ΑΚ =$ βάσιν ΔΝ. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΘ = ΔΜ$ εἶναι καὶ $ΑΘ^2 = ΔΜ^2$. Ἀλλὰ $ΑΘ^2 = ΑΚ^2 + ΚΘ^2$· διότι ἡ γωνία ΑΚΘ εἶναι ὀρθή· καὶ $ΔΜ^2 = ΔΝ^2 + ΝΜ^2$· διότι ἡ ΔΝΜ εἶναι ὀρθή· ἄρα $ΑΚ^2 + ΚΘ^2 = ΔΝ^2 + ΝΜ^2$, ἐξ ὧν $ΑΚ^2 = ΔΝ^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΚΘ^2 = ΝΜ^2$· ἄρα $ΘΚ = ΜΝ$. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΘΑ, ΑΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΔ, ΔΝ ἀντιστοίχως, καὶ ἐδείχθη βάσις $ΘΚ =$ βάσιν ΜΝ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προτάσεως· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

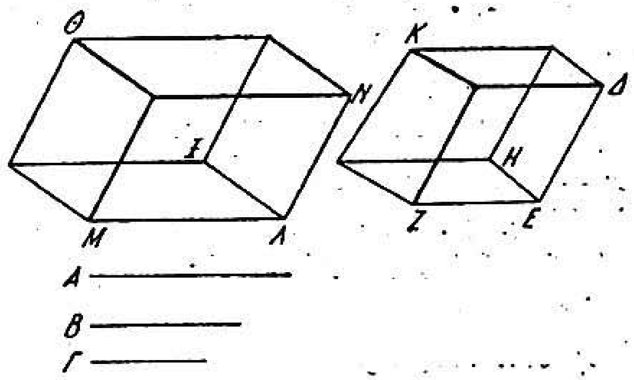
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀχθῶσι δὲ πρὸς τὰς κορυφάς των πλάγιαι ἴσαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων περιέχουσαι δὲ γωνίας ἴσας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ ἤτοι $Α : Β = Β : Γ$· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν $Α \times Β \times Γ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $Β^3$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἂς ληφθῇ στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἑκάστη μὲν τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ ἴση πρὸς τὴν Β καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΚ, πρὸς δὲ τὴν Α ἴση ἡ ΛΜ, εστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΛΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΝΛΜ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΛΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας



περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν ΛΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Λ ἴση στερεὰ γωνία πρὸς τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ε, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΛΞ = Β$ καὶ $ΛΝ = Γ$. Καὶ ἐπειδὴ $Α : Β = Β : Γ$, εἶναι δὲ $Α = ΛΜ$ καὶ $Β = ΛΞ = ΕΔ$, ἡ δὲ $Γ = ΛΝ$, εἶναι ἄρα $ΛΜ : ΕΖ = ΔΕ : ΛΝ$. Ὅθεν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι αἱ ΔΕΖ, ΝΛΜ εἶναι ἴσαι καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναχωροῦσιν ἀκμαὶ ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων των αἱ ΛΞ, ΕΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ κάθετοι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ξ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι (θ. 35, πόρ.)· ὥστε τὰ στερεὰ ΛΘ, ΕΚ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΘΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΚ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν στερεὸν $ΛΘ =$ στερεὸν $Α \times Β \times Γ$, τὸ δὲ $ΕΚ =$ στερεὸν $Β^3$· τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον $Α \times Β \times Γ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἰσόπλευρον μὲν $Β^3$, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προηγούμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

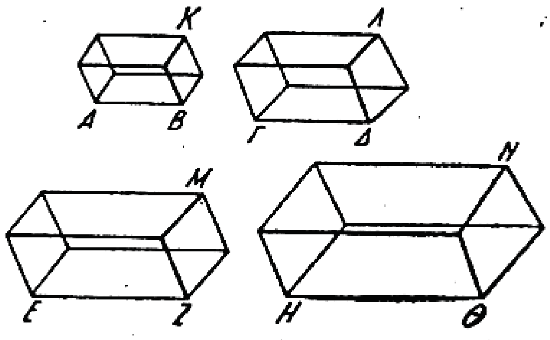
37.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι $ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ$, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι $ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ$.

Διότι ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΚΑ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΛΓ, ἄρα $ΚΑ : ΛΓ = (ΑΒ : ΓΔ)^3$ (θ. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ $ΜΕ : ΝΗ = (ΕΖ : ΗΘ)^3$. Καὶ εἶναι $ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ$. Καὶ ὡς ἄρα $ΑΚ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ$.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεόν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.



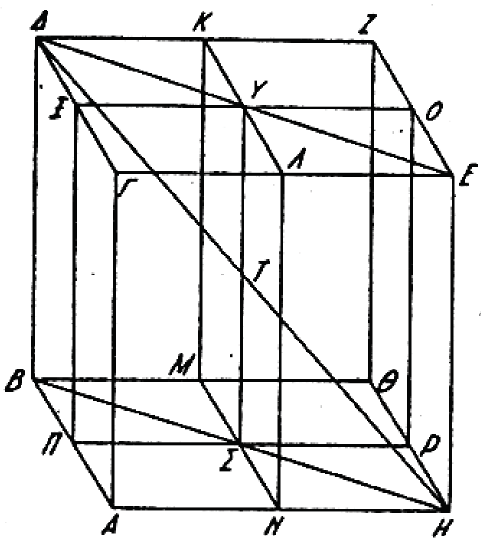
Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.



Ἐπεζεύχθωσιν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΛΓ = στερεὸν ΜΕ : στερεὸν ΝΗ· λέγω, ὅτι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

Διότι, ἐπειδὴ πάλιν τὸ ΚΑ : ΛΓ = (ΑΒ : ΓΔ)^3 (θ. 33), εἶναι δὲ καὶ ΜΕ : ΝΗ = (ΕΖ : ΗΘ)^3, καὶ εἶναι ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Διότι ἂς τέμνωνται τοῦ κύβου ΑΖ αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τῶν ΓΖ, ΑΘ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἂς διέρχωνται τὰ ἐπίπεδα ΚΝ, ΞΡ, ἔστω δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΥΣ, διαγώνιος δὲ τοῦ κύβου ΑΖ ἡ ΔΗ. Λέγω, ὅτι ΥΤ = ΤΣ καὶ ΔΤ = ΤΗ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΞ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΔΞΥ, ΥΟΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (I. 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΞ = ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ = ΥΟ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΔΥ = ΥΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΞΥ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΥΕ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (I. 4)· ἡ γωνία ἄρα ΞΥΔ = ΟΥΕ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον βεβαίως ἡ ΔΥΕ εἶναι εὐθεῖα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΣΗ εἶναι εὐθεῖα, καὶ ἡ ΒΣ = ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ (θ. 9). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ (I. 33). Ἡ μὲν ἄρα γωνία ΕΔΤ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΤ· διότι εἶναι ἐναλλάξ· ἡ δὲ ΔΤΥ = ΗΤΣ (I. 15). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ, ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, *εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ· ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.*

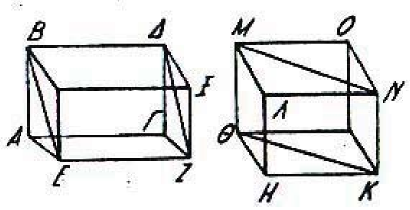
Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.



Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὴν ΔΥ = ΗΣ· διότι αὗται εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν ΔΕ, ΒΗ· ὅθεν θὰ ἔχωσι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Ἄρα ἡ μὲν ΔΤ = ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ = ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἂς ἔχῃ βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ, τὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΗΘΚ, ἔστω δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜΝ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΑΞ, ΗΟ. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (0. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΗΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν στερεοῦ ΑΞ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ δὲ στερεοῦ ΗΟ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ· τὸ πρίσμα ἄρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ.

Ἐὰν ἄρα δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

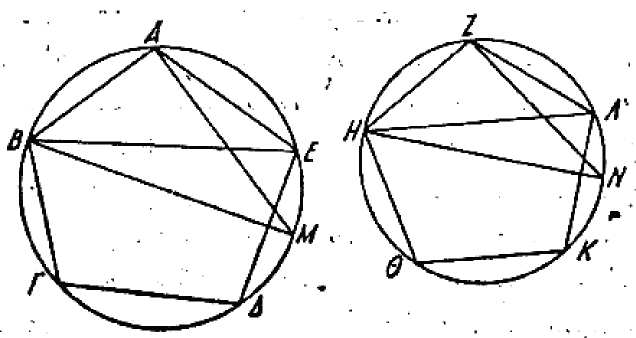
ιβ'.

α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΖΗΘ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ



γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστιν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Βιβλίον XII

1.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΖΗΘ καὶ τὰ εἰς αὐτοὺς ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι $BM^2 : HN^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ = ΗΖΛ, καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΕ = ΗΖ : ΖΛ (VI. ὁρ. 1). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΕ = ΗΖΛ, τὰς δὲ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ (VI. 6). Ἡ γωνία ἄρα ΑΕΒ = ΖΛΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΒ = ΑΜΒ· διότι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (III. 27)· ἡ δὲ ΖΛΗ = ΖΝΗ· ἄρα καὶ ἡ ΑΜΒ = ΖΝΗ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΑΜ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΗΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπήν. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΜ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΝ. Εἶναι ἄρα ΒΜ : ΗΝ = ΒΑ : ΗΖ (VI. 4). Ἀλλὰ $(BM : HN)^2 = BM^2 : HN^2$, καὶ $(BA : HZ)^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ (VI. 20)· καὶ ὡς ἄρα $BM^2 : HN^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

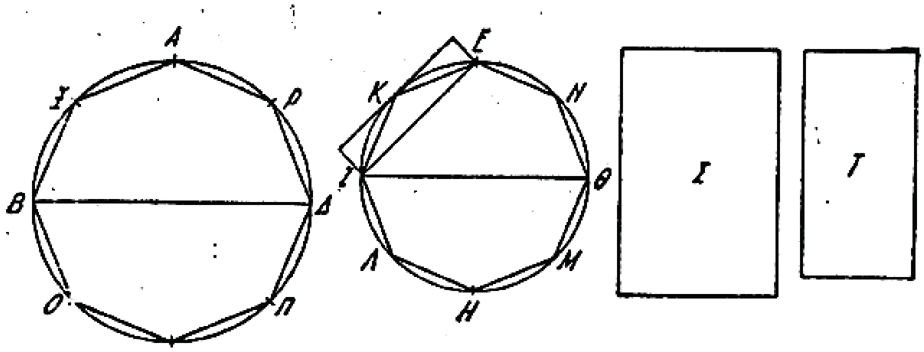
Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν



ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἧ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ κατα-

2.

Οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ $=$ ΒΔ^2 : ΖΘ^2.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ $=$ ΒΔ^2 : ΖΘ^2, θὰ εἶναι ὡς τὸ ΒΔ^2 πρὸς τὸ ΖΘ^2, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς μικρότερον ἢ πρὸς μεγαλύτερον χωρίον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Σ. Καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἐγγεγραμμένον ὅμως τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ὁ κύκλος εἶναι μικρότερος· ὥστε τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτό, ἐπειδή, ἐὰν διὰ τῶν σημείων Κ, Λ, Μ, Ν φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερον τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος τμήματος τοῦ κύκλου. Τέμνοντες λοιπὸν τὰ ὑπολειπόμενα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ πράττοντες τοῦτο ἐπ' ἄπειρον, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Διότι ἐδείχθη εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι ἂν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ἀπομένοντος ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος, καὶ τοῦτο γίνηται ἐπ' ἄπειρον, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους. Ἂς ὑπολειφθῶσι λοιπὸν καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Τὸ ἀπομένον ἄρα πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χωρίου Σ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· εἶναι ἄρα ΒΔ^2 : ΖΘ^2 $=$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (θ. 1). Ἀλλὰ καὶ ΒΔ^2 :

λειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύ-

$ΖΘ^2$ = κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Σ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος πρὸς τὸ χωρίον Σ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν πολύγωνον, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κύκλος ΑΒΓΔ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· καὶ τὸ χωρίον ἄρα Σ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς $ΒΔ^2$ πρὸς $ΖΘ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ $ΖΘ^2$ πρὸς $ΒΔ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ εἶναι ὡς τὸ $ΒΔ^2$ πρὸς $ΖΘ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Σ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς τὸ $ΖΘ^2$ πρὸς τὸ $ΔΒ^2$, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ (V. 7, πόρ.). Ἀλλ' ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (κατωτ. λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΖΘ^2$ πρὸς τὸ $ΒΔ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΒΔ^2$ πρὸς τὸ $ΖΘ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΒΔ^2$ πρὸς τὸ $ΖΘ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ.

Οἱ κύκλοι ἄρα εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω τώρα, ὅτι τοῦ χωρίου Σ ὄντος μεγαλυτέρου τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Διότι ἂς γίνῃ ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Τ εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ, ἐναλλὰξ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύ-

κλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐχούσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΔΘ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση. δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ [ἐστιν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ.

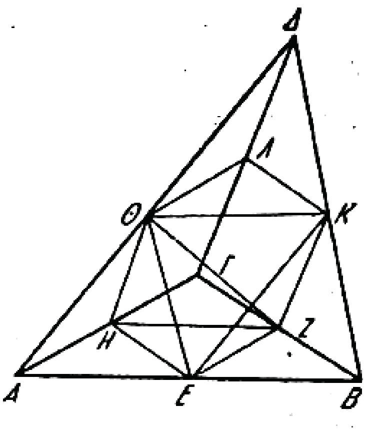
κλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ χωρίον Τ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ χωρίον Σ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· καὶ ὁ κύκλος ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χωρίου Τ (V. 14). Ὥστε εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην ἐχούσας τριγώνους βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσας πρὸς ἀλλήλας πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο ἴσα πρίσματα· καὶ ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Διότι ἂς τμηθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ = ΔΘ, ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ (VI. 2). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ ΘΕΒΚ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΘΚ = ΕΒ (I. 34). Ἀλλὰ ΕΒ = ΕΑ· ἄρα καὶ ΑΕ = ΘΚ. Εἶναι δὲ καὶ ΑΘ = ΘΔ· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΑ, ΑΘ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΚΘ, ΘΔ· καὶ εἶναι ἡ γωνία ΕΑΘ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΔ, (I. 29)· ἡ βάσις ἄρα ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΔ (I. 4). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΕΘ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΛΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων καὶ μὴ εὑρισκομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσιν γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἡ γωνία ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας τὰς ΚΔ, ΔΛ, καὶ ἡ γωνία ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ, ἡ βάσις ἄρα ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΔΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ εἶναι ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. ὁρ. 10). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἡ ΘΚ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ *καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. — Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα,*



καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα, ἐπειδήπερ [καὶ] ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα.

(I. 29) καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΔΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ (VI. όρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΚΛ, τὸ δὲ ΑΔΓ πρὸς τὸ ΔΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, αἱ ὁποῖαι δὲν εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΛ. Καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΓ = ΚΘ : ΘΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ (VI. 6). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. όρ. 9). Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ [ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ]. Ἑκατέρα ἄρα τῶν πυραμίδων ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ εἶναι ὁμοία πρὸς ὅλην τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΒΖ = ΖΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΖΓ (I. 41). Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ (τριγωνικά), καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ (XI. 39). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων ἀφ' ἑνὸς ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, ἀφ' ἑτέρου ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, εἶναι μεγαλύτερον ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ, ἐπειδὴ καὶ ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΚ, τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων. Ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις

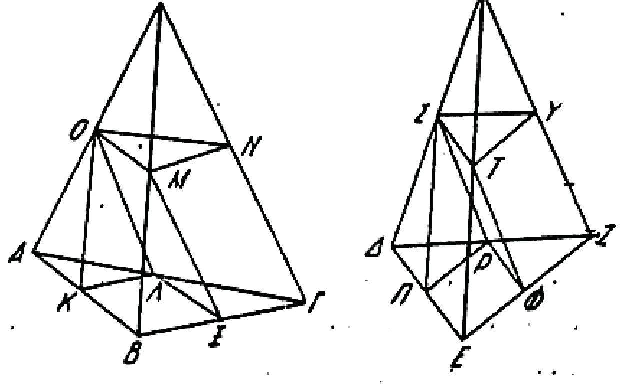
Ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ.'

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΑΒ καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως



κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ [τρίγωνον], μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Τὰ εἰρημένα ἄρα δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ.

Ἡ ὅλη ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, διῃρέθη καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας [καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἄλλης πυραμίδος, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΞ = ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ = ΛΓ (θ. 3), ἡ ΛΞ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, εἶναι ἄρα ΒΓ : ΓΞ = ΕΖ : ΖΦ. Καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΓΞ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (VI. 22)· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (V. 16). Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ (κατωτέρω λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, *οὕτως τὸ ΛΞΓ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.*

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ, ΡΦΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΟΜ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ (XI. 39, V. 7 καὶ θ. 3). Καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ ΟΜ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν αἱ πυραμίδες ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ διαιρεθῶσι καὶ εἰς δύο πρίσματα καὶ εἰς δύο πυραμίδας, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΟΜΝΗ πρὸς τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΣΤΥΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ· διότι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΞΓ, ΡΦΖ ἀντιστοίχως. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα, Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διαιρέσωμεν καὶ εἰς δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

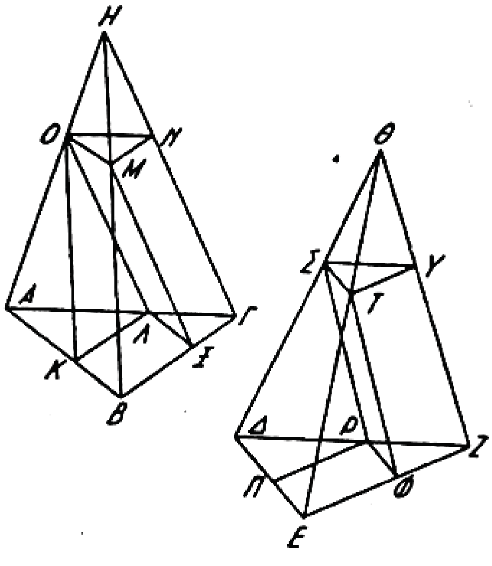
Διότι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ἂς νοηθῶσιν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πυραμίδες ἐλήφθησαν ἰσοϋψεῖς. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ, θὰ τμηθῶσιν εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους (XI. 17). Καὶ ἔχει τμηθῆ ἡ ΗΓ δίχα κατὰ τὸ Ν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ τμηθῇ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ δίχα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΤΥ. Καὶ εἶναι ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ· εἶναι ἄρα ἴσαι καὶ αἱ ἀπὸ τῶν τριγώνων ΟΜΝ, *τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς ἄλληλά [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι



ΣΤΥ κάθετοι ἐπὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ. Τὰ πρίσματα ἄρα, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ τρίγωνα ΛΞΓ, ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἰσοϋψῆ. Ὥστε καὶ τὰ ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΛΞΓ πρὸς τὴν βάσιν ΡΦΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

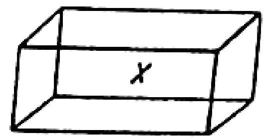
Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ἢ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ στερεὸν ἢ πρὸς μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Χ καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· ὅθεν τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος (θ. 3). Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτουσαι πυραμίδες ἂς διαιρεθῶσιν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἂς γίνεται πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῶσι πυραμίδες τινὲς ἀπὸ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ τοῦ στερεοῦ Χ (Χ. 1). Ἂς ὑπολειφθῶσι καὶ ἔστωσαν π.χ. αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· τὰ ὑπόλοιπα ἄρα πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ στερεοῦ Χ. Ἂς διαιρεθῇ καὶ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (θ. 4). Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ· καὶ ὡς ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα αὐτῆς, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ τῶν πρισμάτων της· εἶναι ἄρα μεγαλύτερον καὶ τὸ στερεὸν Χ τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕ-

πρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

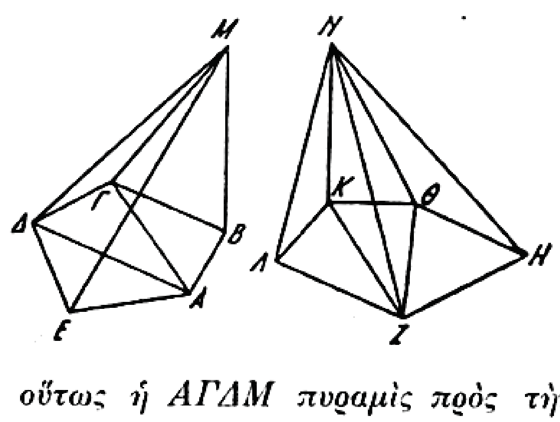


ϛ'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ· ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς



ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, τως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (λῆμμα 2 θεωρήμ.) καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι πολυγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Μ, Ν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ.

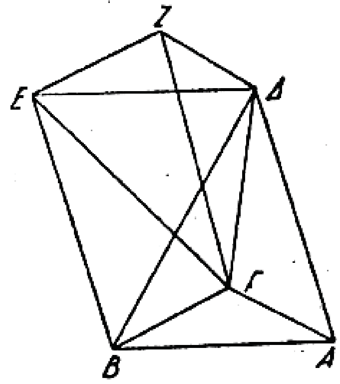
Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (θ. 5)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Δι' ἴσου ἄρα (V. 22) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως πάλιν (V. 18) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘΚΛ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΚΛΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Καὶ ἐπειδὴ *οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΗΘ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΗΘΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις



μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ, οὕτως ἦτο ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔΕΜ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ (V. 22). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἦτο καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Πᾶν πρῖσμα ἔχον βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Ἔστω πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Διότι ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΔ (I. 34)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ. Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΖΓΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΒΕ. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ *ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.*

Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

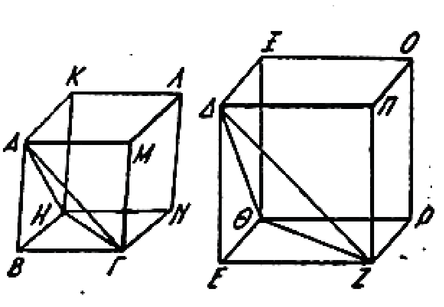
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα



ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τὸ σημεῖον Γ· διῃρέθη ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, ἐδείχθη ὅτι εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτὴν [ἐπειδὴ καὶ ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχῃ ἄλλο εὐθύγραμμον σχῆμα (ἐκτὸς δηλ. τοῦ τριγώνου), τοιοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπέναντι τῆς βάσεως, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπέναντι τούτων ἐπίπεδα, τρίγωνα, καὶ εἶναι ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, ἡ δὲ ΗΒΓ πρὸς τὴν ΘΕΖ, ἡ δὲ ΑΒΗ πρὸς τὴν ΔΕΘ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν ΒΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΡ, τὸ δὲ ΒΚ πρὸς τὸ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι πρὸς τὰ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι (XI. 24). Τὰ στερεα ἄρα ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων κατὰ *τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν. τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

θ΄.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ τὸ πλῆθος. Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (XI. 33). Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ ὃν λόγον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ στερεοῦ, διότι καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

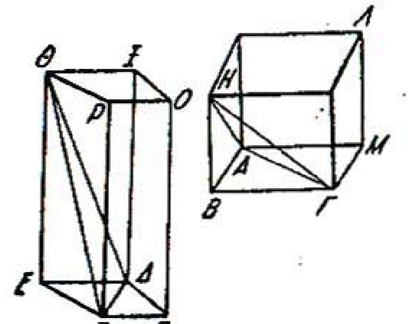
Ὅθεν εἶναι ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διότι ἐὰν διαιρεθῶσιν αὗται εἰς πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους, ἐπειδὴ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων διαιροῦνται εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, θὰ εἶναι ὡς μία μερικὴ πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον (τῆς πρώτης πυραμίδος) πρὸς ἄλλην μερικὴν πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τρίγωνον (τῆς ἄλλης πυραμίδος), οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς μιᾶς) τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς ἄλλης), τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. Ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς εἶναι πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8)· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα εἶναι πρὸς τὴν ἔχουσαν ὁμοίαν βάσιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸν κύβον.

9.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι.

Διότι ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω ὅτι τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, καὶ εἶναι *πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*



'Αλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλὰ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμίς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τῆς μὲν πυραμίδος ΑΒΓΗ ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ, τῆς δὲ πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, εἶναι ἄρα τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν (ΧΙ. 34)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (Ι. 34). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Τῶν πυραμίδων ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλ' ἂς εἶναι τώρα αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ἀλλ' ὡς εἶναι ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ. Τὰ στερεὰ δὲ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα (ΧΙ. 34). Τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον ΒΗΜΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΘΠΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ, τοῦ δὲ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

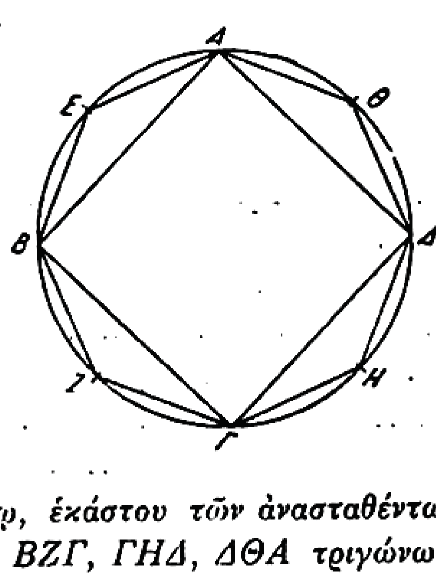
Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν



στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τρι-

10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου. Ἔστω πρότερον μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅθεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (XII. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Ὅθεν τὸ ἀνυψούμενον πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδὴ καὶ ἂν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ εἶναι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψούμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄρα ἀνυψωθὲν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ εἶναι ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· τὸ πρίσμα ἄρα τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ὡς ἐδείξαμεν προηγουμένως (XII. 2). Ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψώσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον, ἑκάστου τῶν ἀνυψωθέντων εἶναι τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα, τὰ ἡμίση· καὶ εἶναι τὰ τμήματα τοῦ κυλίνδρου μικρότερα τῶν ἀνυψωθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικῶν τμημάτων. Τέμνοντες τώρα τὰ ὑπόλοιπα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ πράττοντες γώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον κυλινδρικὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου (X. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον (θ. 7. πόρ.)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ κώνου, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ κυλίνδρου. Ἂς ἀναγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· τὸ τετράγωνον ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (θ. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδή, ὡς ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἐὰν περὶ τὸν κύκλον περιγράψωμεν τετράγωνον, θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ τὸ ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀνυψώσωμεν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, τὰ ὁποῖα καὶ καλοῦνται πρίσματα, θὰ εἶναι τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἥμισυ τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς αἱ βάσεις (XI. 32). Ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνυψωθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καὶ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου ἡ πυραμὶς ἡ ἀνυψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι ἐμπεριέχει αὐτόν. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ *καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.*

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς πυραμίδες ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα ἔχουσαν τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου (Χ. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον· τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου· ὁ κύλινδρος ἄρα εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

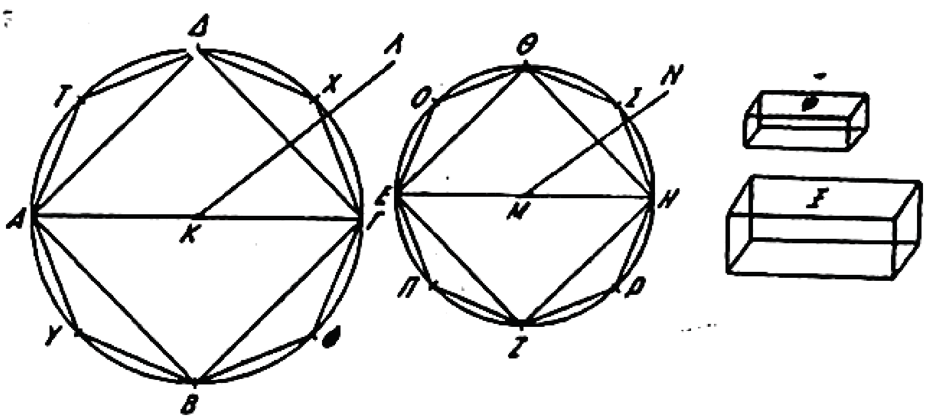
11.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι ἢ μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ ἢ μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ καθ' ὃ εἶναι μικρότερον τὸ στερεὸν Ξ τοῦ κώνου ΕΝ πρὸς ἐκεῖνο ἔστω ἴσον τὸ στερεὸν Ψ· ὁ κῶνος ἄρα ΕΝ εἶναι ἴσος πρὸς τὰ στερεὰ Ξ σὺν Ψ. Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ τετράγωνον ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου (Θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀνυψώ-

ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης. πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠ ΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγ-



γεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ σώμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς περιγραφείσης· διότι εἶναι αὗται πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (θ. 6)· εἶναι δὲ ὁ κῶνος μικρότερος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. Ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος (θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος κώνου. Ὅθεν τέμνοντες τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ Ψ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνυψωθῇ ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ΑΓ² πρὸς τὸ ΕΗ², οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὡς δὲ τὸ ΑΓ² πρὸς τὸ ΕΗ², οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Ὡς δὲ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, ὡς δὲ τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦ ΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν. Καὶ ὡς ἄρα ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδα. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κῶνος ΑΛ τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν εἶναι οὐδὲ ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ.

πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

'Αλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γάρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς [τοῖς κώνοις] κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἀλλ' ὡς τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ἑκάτερος κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος ἑκατέρου κώνου ἀντιστοίχως (0. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς πρὸς τοὺς κώνους κύλινδροι.

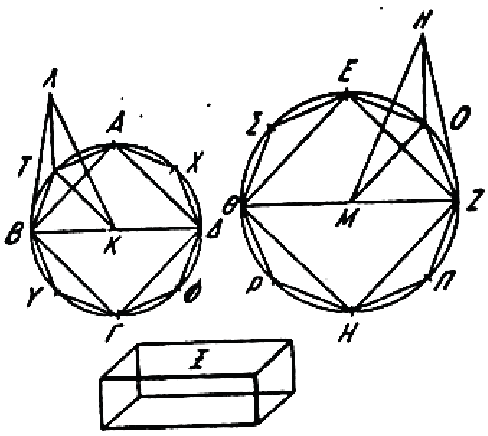
Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ, θὰ εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὡς οἱ κύβοι (τῶν διαμέτρων). Ἂς εἶναι πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ (IV. 6)· τὸ τετράγωνον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν



μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ· ὀρθαὶ γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν·

ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τώρα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. Καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον ἀποτμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ πολυγώνου ΑΤΒΥΓΦΔΧ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα (τριγώνων), τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΤΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΤ, ΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ἄξων ΚΛ πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ (XI. ὁρισ. 24). Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΒΚΛ, ΖΜΝ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΝ (VI. 16). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ αὗται εἶναι πλευραὶ ἴσων γωνιῶν τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Κ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι ἡ γωνία ΒΚΤ, τὸ αὐτὸ μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Μ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι καὶ ἡ γωνία ΖΜΟ· ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΟ. Πάλιν ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ, πρὸς τὴν ΜΝ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ πρὸς τὴν ΟΜ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ΤΚΛ, ΟΜΝ· διότι αὗται εἶναι ὀρθαί· αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΛΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΝΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΚΤ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΤΚΒ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. τῶν ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥ ΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν] τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος οὗ βάσις [μὲν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ [στερεὸν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις

ΖΜΟ εἶναι ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ (V. 22). Πάλιν ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότηταντῶν τριγώνων ΛΓΚ, ΝΟΜ, εἶναι ὡς ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΓΚΒ, ΟΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. 'Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΓΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. Τῶν τριγώνων ἄρα ΛΓΒ, ΝΟΖ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΛΓΒ, ΝΟΖ εἶναι ἰσογώνια (VI. 5)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοια (VI. ορισ. 1). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΚΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΖΜΟ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· διότι περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἴσων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων (XI. ὁρισμ. 9). Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι βάσεις τριγώνους εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8.). 'Η πυραμὶς ἄρα ΒΚΓΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ εἶναι ὡς ὁ κύβος, τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον φέροντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τοὺς κώνους ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν (ἀντιστοίχων) πυραμίδων, πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΒΚ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΖΜ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ πυραμὶς ΒΚΓΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. 'Υπετέθη δὲ καὶ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἔχων λόγον πρὸς τὸ στερεὸν Ξ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· διότι τὴν ἐμπεριέχει. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ *μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΠΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.*

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ. Ἀνάπαλιν ἄρα, (V. 7. πόρ.), τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ (θ. 2 λῆμ.). Καὶ ὁ κῶνος ἄρα ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Ὁ κῶνος ἄρα ΑΒΓΔΛ ἔχει πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ εἶναι ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ὁ κύλινδρος ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως πρὸς τὸν κῶνον καὶ ἰσοϋψὴς πρὸς αὐτὸν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου. Καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

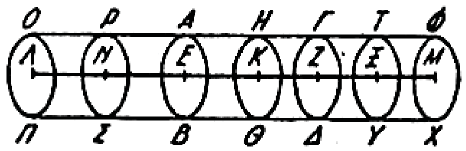
Οἱ ὅμοιοι ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὴ εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Διότι ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΑΔ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΗΘ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Κ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ὁ ἄξων ΕΖ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν μέχρι τῶν σημείων Λ, Μ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ἴσοι ἄξονες πρὸς τὸν ἄξονα ΕΚ οἱ ΕΝ, ΝΛ, πρὸς δὲ τὸν ΖΚ ὁσοιδήποτε ἴσοι οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ ἂς νοηθῇ ὁ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΛΜ κύλινδρος ὁ ΟΧ, τοῦ ὁποίου βάσεις εἶναι οἱ κύκλοι ΟΠ, ΦΧ. Καὶ παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

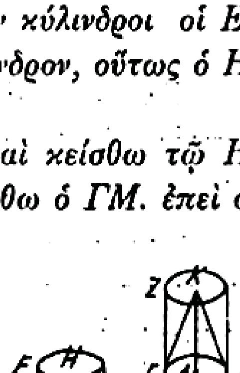


ιδʹ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλιν-



διὰ τῶν σημείων Ν, Ξ ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου ΟΧ καὶ ἔστωσαν τομαὶ τούτων οἱ περὶ τὰ κέντρα Ν, Ξ κύκλοι. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι· καὶ οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ κύλινδροι ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος, ὅσας φορὰς ἄρα εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΕΚ, τόσας φορὰς θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅσας φορὰς εἶναι ὁ ἄξων ΜΚ τοῦ ἄξονος ΚΖ, τόσας φορὰς εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΧΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ ἄξων ΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄξονα ΚΜ, θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΧ, ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλύτερος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, θὰ εἶναι μικρότερος. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ἄξονος ΕΚ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΒΗ, καὶ ὁ ἄξων ΛΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ, τοῦ δὲ ἄξονος ΚΖ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ καὶ ὁ ἄξων ΚΜ καὶ ὁ κύλινδρος ΗΧ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΚΜ, ὑπερέχει καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΧ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσος, εἶναι ἴσος, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, εἶναι μικρότερος. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη.

Διότι ἔστωσαν οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν κύκλων ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ.

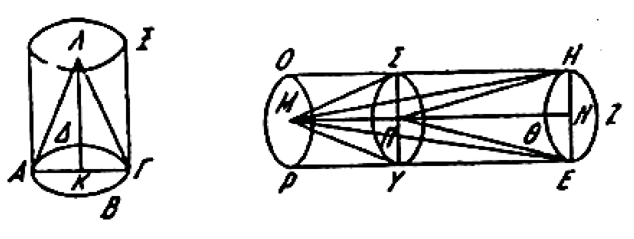
Διότι ἂς ἐκβληθῇ ὁ ἄξων ΚΛ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ ἂς νοηθῇ περὶ τὸν ἄξονα ΛΝ ὁ κύλινδρος ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· εἶναι ἄρα ἴσοι καὶ οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΖΜ ἔχει τμηθῇ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ (θ. 13). Εἶναι δὲ ἴσος ὁ μὲν κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΒ, ὁ δὲ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ. Ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ *δρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ιε'.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΝ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος



πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος· ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΠΝ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ (θ. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἱ ὁποῖοι εἶναι καὶ ὕψη τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ ἂς συμπληρωθῶσιν οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΟ. Λέγω, ὅτι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ.

Διότι τὸ ὕψος ΛΚ ἢ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ΜΝ ἢ ὄχι. Ἔστω πρότερον ἴσον. Εἶναι δὲ καὶ ὁ κύλινδρος ΑΞ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11)· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ. Ὥστε εἶναι καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος, ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι τὸ ὕψος ΛΚ ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ, ἀλλ' ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΜΝ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὕψους ΜΝ τὸ ΠΝ ἴσον πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Π ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΕΟ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΤΥΣ παραλλήλου πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων ΕΖΗΘ, ΡΟ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ ἂς νοηθῇ κύλινδρος ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΑΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλυνδρον ΕΣ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· διότι οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΣ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτω τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ· διότι ὁ κύλινδρος ΕΟ ἐτμήθη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα (θ. 13). Εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΠΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Τῶν κυλίνδρων ἄρα ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΛΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

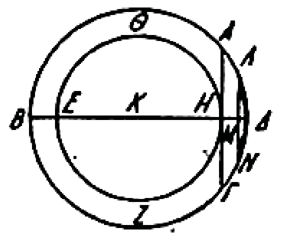
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΠΝ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως ὁ ΛΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ [ὕψος], οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΛΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ. ἴσος ἄρα ὁ ΛΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ιζ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείτὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· λέγω, ὅτι ὁ κύλινδρος ΛΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ· διότι εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ (θ. 13)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ. Ἴσος ἄρα ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ὑπαρχόντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

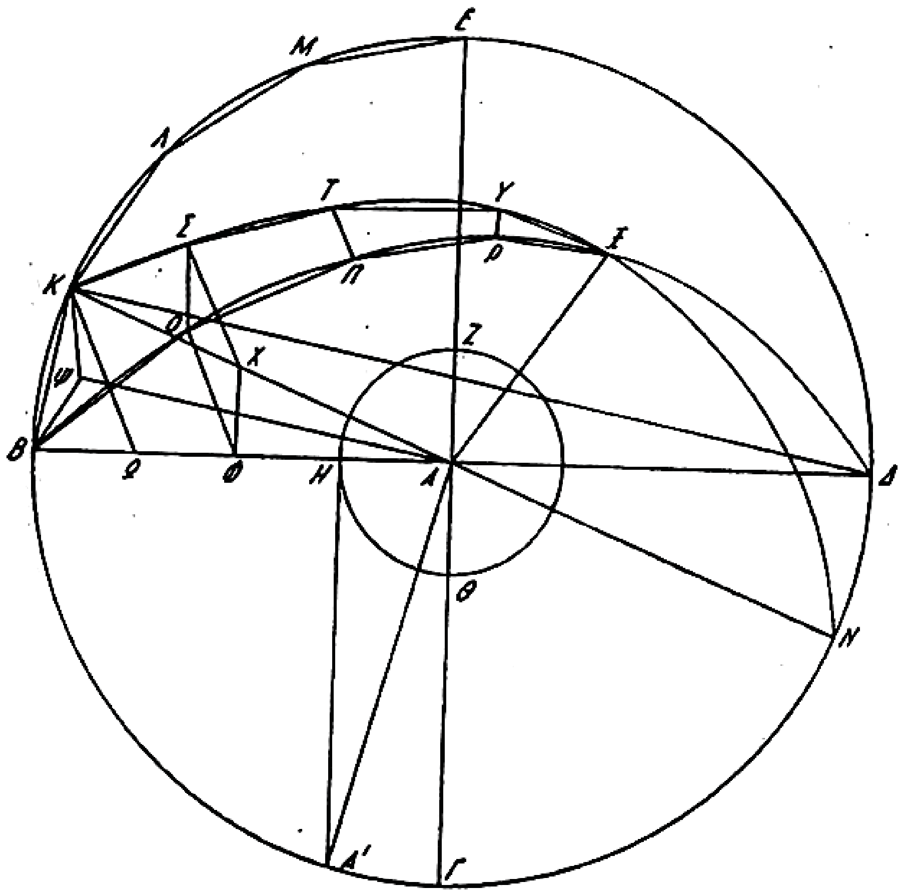
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου Κ ἡ εὐθεῖα ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Η ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ ἡ ΗΑ καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Τέμνοντες τώρα τὸ τόξον ΒΑΔ δίχα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ ἀφήσωμεν κατά τινα στιγμὴν τόξον μικρότερον τοῦ ΑΔ (Χ. 1). Ἂς ἀφήσωμεν καὶ ἔστω τὸ ΛΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΛΜ καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΔ, ΔΝ· τὸ τόξον ΛΔ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΝ (ΙΙΙ. 3, Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΛΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἡ ΛΝ ἄρα δὲν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον οἱ ΛΔ, ΔΝ δὲν ἐφάπτονται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐὰν τώρα ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ εὐθείας ἴσας πρὸς τὴν ΛΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ταύτην, θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς νοηθῶσιν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ ζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύ-



κλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς τμηθῶσιν αἱ σφαῖραι δι' ἐπιπέδου τινος διὰ τοῦ κέντρου· αἱ τομαὶ θὰ εἶναι κύκλοι, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ σφαῖρα προέρχεται ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου, τῆς διαμέτρου μενούσης ἀκινήτου· ὥστε καὶ εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον θὰ σχηματίσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου, δηλ. καὶ τοῦ κύκλου διάμετρος, εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν ἀγομένων εὐθειῶν. Ἔστω λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, εἰς δὲ τὴν μικροτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΖΗΘ,καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο διάμετροι αὐτῶν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ ἀφοῦ ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι κύκλοι οἱ ΒΓΔΕ, ΖΗΘ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΖΗΘ, τοῦ ὁποίου πλευραὶ ἔστωσαν εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΑ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ ἡ ΑΞ καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἂς διέρχωνται ἐπίπεδα· ἕνεκα τῶν προηγουμένως λεχθέντων θὰ σχηματίσωσι ταῦτα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ἂς σχηματίσωσι, τῶν ὁποίων ἡμικύκλια ἔστωσαν τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπὶ τῶν διαμέτρων ΒΔ, ΚΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΞΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΞΑ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ (XI. 18)· ὥστε καὶ τὰ ἡμικύκλια ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἡμικύκλια ΒΕΔ, ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ (III. ὁρ. 1)· εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ τὰ τεταρτημόρια ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ. Ὅσαι ἄρα πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ, τόσαι εἶναι καὶ εἰς τὰ τεταρτημόρια ΒΞ, ΚΞ ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. Ἂς ἐγγραφῶσι καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ· αὗται θὰ πέσωσι ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Ἂς πέσωσι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΧΦ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα ἡμικύκλια τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐλήφθησαν ἴσαι χορδαὶ αἱ ΒΟ, ΚΣ (III. 28), καὶ εἶναι κάθετοι αἱ ΟΦ, ΣΧ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν ΟΦ πρὸς τὴν ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ πρὸς τὴν ΚΧ (III. 27, I. 26). Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΚΑ. Καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΦΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΧΑ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· ἡ ΧΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (VI. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν *τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ, ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ· ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.*

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύ-

ΟΦ, ΣΧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἡ ΟΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΧ (XI. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· ἄρα καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (I. 30). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΚΒΟΣ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν ληφθῶσι τυχόντα σημεῖα, ἡ τὰ σημεῖα συνδέουσα εὐθεῖα εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους (XI. 7). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάτερον τῶν τετραπλεύρων ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐπίπεδον. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ εἰς ἓν ἐπίπεδον. Ἐὰν τώρα νοήσωμεν ἀπὸ τῶν σημείων Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ἠγμένας εὐθείας ἐπὶ τὸ Α θὰ σχηματισθῇ μεταξὺ τῶν τόξων ΒΞ, ΚΞ στερεόν τι σχῆμα πολύεδρον συγκείμενον ἐκ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τετράπλευρα ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ κατασκευάσωμεν τὰ αὐτὰ ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ΒΚ καὶ ἐπίσης ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, θὰ σχηματισθῇ σχῆμά τι πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν περιεχόμενον ὑπὸ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ καὶ τὰ ὁμοταγῆ πρὸς αὐτὰ (ὁμοίως διατεταγμένα), κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι ὁ κύκλος ΖΗΘ.

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ καὶ ἂς συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Ψ, καὶ ἂς *χθωσαν αἱ ΨΒ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.*

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρον ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ΒΩ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ, ΩΒ ἔλαττόν ἐστι ἢ διπλάσιον. καί ἐστι τῆς ΚΔ ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ***ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.***

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ἀχθῶσιν αἱ ΨΒ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΨ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου (XI. ὁρισ. 3). Ἡ ΑΨ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ εἶναι καὶ τὸ $ΑΒ^2$ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΚ^2$. Καὶ εἶναι $ΑΒ^2 = ΑΨ^2 + ΨΒ^2$ διότι ἡ γωνία Ψ εἶναι ὀρθὴ (Ι. 47)· καὶ $ΑΚ^2 = ΑΨ^2 + ΨΚ^2$. Ἄρα $ΑΨ^2 + ΨΒ^2 = ΑΨ^2 + ΨΚ^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $ΑΨ^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΨ^2$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ $ΨΚ^2$· ἡ ΒΨ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΨΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ψ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΨΒ, ΨΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΧΦ, εἶναι δὲ ἴση ἡ ΧΦ πρὸς τὴν ΣΟ, ἡ ΚΒ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΚΒ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ εἶναι ἴσαι καὶ μικροτέρα ἡ ΟΣ καὶ ἡ ΒΨ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸ $ΚΒ^2$ ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2\ ΒΨ^2$. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΚΩ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΒΔ < 2\ ΔΩ$, καὶ εἶναι $ΒΔ : ΔΩ = ΔΒ \times ΒΩ : ΔΩ \times ΩΒ$, ἀφοῦ ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΩ τετράγωνον καὶ συμπληρωθῇ τὸ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ἄρα $ΔΒ \times ΒΩ < 2\ ΔΩ \times ΩΒ$. Καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΔ, εἶναι τὸ μὲν $ΔΒ \times ΒΩ = ΒΚ^2$, τὸ δὲ $ΔΩ \times ΩΒ = ΚΩ^2$ (ΙΙΙ. 31, VI. 8 πόρ.)· εἶναι ἄρα $ΚΒ^2 < 2\ ΚΩ^2$. Ἀλλὰ $ΚΒ^2 > 2\ ΒΨ^2$· εἶναι ἄρα $ΚΩ^2 > ΒΨ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΑ, εἶναι $ΒΑ^2 = ΑΚ^2$. Καὶ εἶναι $ΒΑ^2 = ΒΨ^2 + ΨΑ^2$, καὶ $ΚΑ^2 = ΚΩ^2 + ΩΑ^2$ (Ι. 47)· ἄρα $ΒΨ^2 + ΨΑ^2 = ΚΩ^2 + ΩΑ^2$, ἐξ ὧν τὸ $ΚΩ^2 > ΒΨ^2$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΩΑ^2$ εἶναι μικρότερον τοῦ $ΨΑ^2$. Εἶναι ἄρα ἡ $ΑΨ > ΑΩ$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ $ΑΨ > ΑΗ$. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν βάσιν τοῦ πολυέδρου, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μικροτέρας σφαίρας· ὥστε τὸ πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐν ᾧ ἄρα ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι, ἐνεγράφη εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἄλλην σφαῖραν ἐγγραφῇ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς

ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρᾳ] στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιηʹ.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ [ἄρα] ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πο-

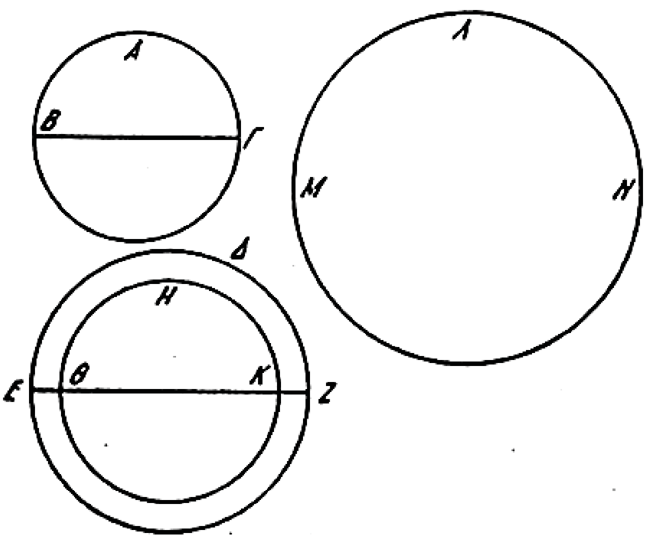
τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΒΓΔΕ, τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῶσι τὰ στερεὰ εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς (ὁμοίας κατὰ τὴν τάξιν) πυραμίδας, αἱ πυραμίδες θὰ εἶναι ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8. πόρ.)· ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς ΛΒ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς ἐκ τῶν πυραμίδων τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ σφαίρας πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΛΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ σφαίρας πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας, τουτέστιν ἡ διάμετρος ΒΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἂς νοηθῶσι σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἂς ἔχῃ πρότερον πρὸς μικροτέραν τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς νοηθῇ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ ὁμόκεντρος πρὸς τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (θ. 17), ἂς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ· τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 17, πόρ.). Ἔχει δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ, οὕτως τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ σφαῖρα λύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.



Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΘΚ πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ πολυέδρου (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ ἔχει λόγον πρὸς μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλυτέραν τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα (V. 7, πόρ.) ἡ σφαῖρα ΛΜΝ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΕΖ πρὸς τὴν διάμετρον ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ σφαῖρα ΛΜΝ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ, οὕτως ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕΖ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ. 2, λῆμμα). Καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικροτέραν. Ἡ σφαῖρα ἄρα ΑΒΓ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

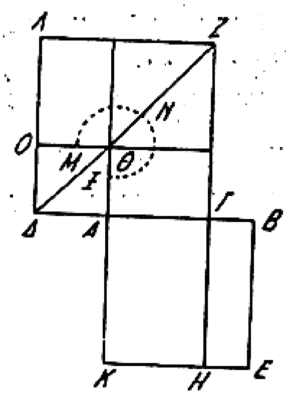
ιγ'.

α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλασιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-

ΒΙΒΛΙΟΝ XIII.

1.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι $(ΑΓ + ΑΔ)^2 = 5\ ΔΑ^2$.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΔΖ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΖΓ μέχρι τοῦ Η. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ \times ΒΓ$ τὸ ὀρθογώνιον ΓΕ, τὸ δὲ $ΑΓ^2 = ΖΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΕ = ΖΘ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΒΑ = ΚΑ$, ἡ δὲ $ΑΔ = ΑΘ$, εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΚΑ = 2ΑΘ$. Ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ (VI. 1)· εἶναι ἄρα $ΓΚ = 2ΓΘ$. Εἶναι δὲ καὶ $ΛΘ + ΘΓ = 2ΓΘ$ (I. 43). Εἶναι ἄρα $ΚΓ = ΛΘ + ΘΓ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΓΕ = ΘΖ$· ὅλον ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι $ΒΑ^2 = 4ΑΔ^2$, τουτέστι τὸ $ΑΕ = 4ΔΘ$. Εἶναι δὲ τὸ ΑΕ ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ· καὶ ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι $= 4ΑΟ$· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ εἶναι $= 5ΑΟ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΔΖ = ΔΓ^2$, τὸ δὲ $ΑΟ = ΔΑ^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\ ΔΑ^2$.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

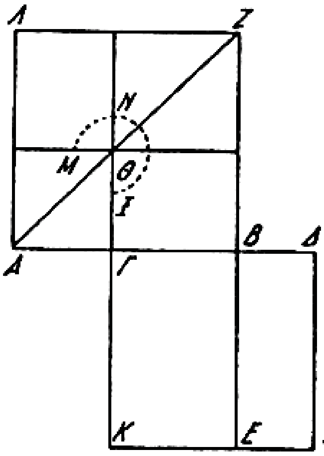
2.

Ἐὰν τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος

μνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ. τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ· ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ· τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ· πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Διότι ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ εἶναι πενταπλάσιον τετραγώνου τμήματος αὐτῆς τοῦ ΑΓ, ἔστω δὲ ἡ $ΓΔ = 2ΑΓ$· λέγω, ὅτι ὅταν ἡ ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ^2 = 5\ ΑΓ^2$, τὸ $ΑΖ = 5\ ΑΘ$. Ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΔΓ = 2\ ΓΑ$, εἶναι ἄρα $ΔΓ^2 = 4\ ΓΑ^2$, τουτέστι τὸ $ΓΗ = 4\ ΑΘ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ γνώμων ΜΝΞ τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· εἶναι ἄρα ὁ γνώμων $ΜΝΞ = ΓΗ$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΔΓ = 2\ ΓΑ$, εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΔΓ = ΓΚ$, ἡ δὲ $ΑΓ = ΓΘ$ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῆς ΓΘ], εἶναι ἄρα διπλάσιον καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ (VI. 1). Εἶναι δὲ καὶ $ΛΘ + ΘΒ = 2\ ΘΒ$ (I. 43)· εἶναι ἄρα τὸ $ΚΒ = ΛΘ + ΘΒ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ γνώμων ΜΝΞ ἴσος πρὸς τὸ ΓΗ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΘΖ = ΒΗ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΒΗ = ΓΔ \times ΔΒ$· διότι ἡ $ΓΔ = ΔΗ$· τὸ δὲ $ΘΖ = ΓΒ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓΔ \times ΔΒ = ΓΒ^2$. Εἶναι ἄρα ὡς $ΔΓ : ΓΒ = ΓΒ : ΒΔ$ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ $ΔΓ > ΓΒ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΓΒ > ΒΔ$ (V. 14). Ὅταν ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ $2ΑΓ > ΒΓ$, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, $ΒΓ = 2ΑΓ$. Εἶναι ἄρα $ΒΓ^2 = 4\ ΑΓ^2$· ἄρα $ΒΓ^2 + ΓΑ^2 = 5\ ΓΑ^2$. Ἐλήφθη δὲ καὶ τὸ $ΒΑ^2 = 5\ ΓΑ^2$· εἶναι ἄρα $ΒΑ^2 = ΒΓ^2 + ΓΑ^2$· ὅπερ ἀδύνατον (II. 4). Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία τῆς ΑΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἡ μικροτέρα τῆς ΓΒ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑ· διότι κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἦτο τοῦτο ἄτοπον.

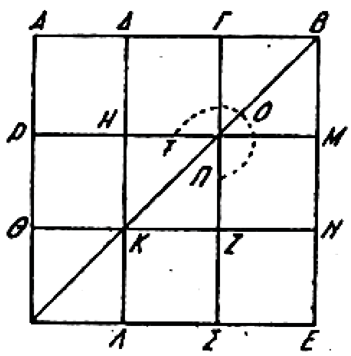
Ἡ διπλασία ἄρα τῆς ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ. ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον· ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ·



ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου. ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλὰ ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ

3.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μικροτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ διπλοῦν σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ $=$ 2 ΔΓ, εἶναι ἄρα ΑΓ $^2 =$ 4 ΔΓ ^{2}, τουτέστι τὸ ΡΣ $=$ 4 ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΑΓ ^{2} (VI. ὁρ. 3, VI. 17), καὶ εἶναι τὸ ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΓΕ, τὸ ΓΕ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΣ. Εἶναι δὲ τὸ ΡΣ $=$ 4ΖΗ· ἄρα τὸ ΓΕ $=$ 4 ΖΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ $=$ ΔΓ, εἶναι καὶ ἡ ΘΚ $=$ ΚΖ. Ὥστε καὶ τὸ ΗΖ $^2 =$ ΘΛ ^{2}. Εἶναι ἄρα ἡ ΗΚ $=$ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ $=$ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ $=$ ΖΕ. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ $=$ ΓΗ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΓΗ $=$ ΖΕ. Ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΝ· ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ $=$ ΓΕ. Ἀλλ' ἐδείχθη τὸ ΓΕ $=$ 4 ΗΖ· καὶ ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ $=$ 4 ΖΗ. Ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι πενταπλάσια τοῦ ΖΗ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι τὸ ΔΝ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΝ $=$ ΔΒ ^{2}, τὸ δὲ ΗΖ $=$ ΔΓ ^{2}. Εἶναι ἄρα τὸ ΔΒ $^2 =$ 5 ΔΓ ^{2}· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

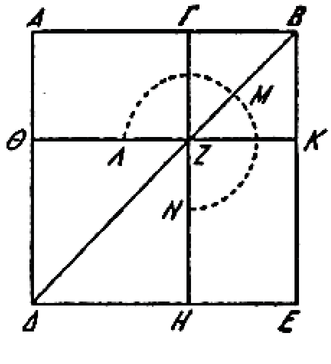
4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ΑΒ $^2 +$ ΒΓ $^2 =$ 3 ΓΑ ^{2}.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΑΓ ^{2} (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΒ $\times$ ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ΑΓ ^{2}

ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ, ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ· ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ [τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ] τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

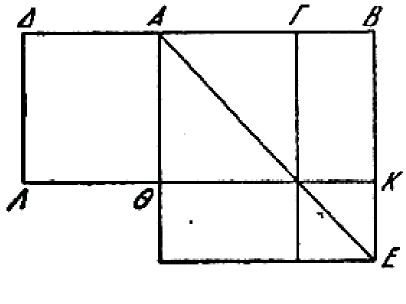


ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γραμμὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση [κείσθω] ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΕ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ. [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ]. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ· ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ· τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.



Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸ ΘΗ· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΚ = ΘΗ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΛΖ = ΖΕ$ (I. 43), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΛΚ εἶναι ἴσον μὲ ὅλον τὸ ΓΕ· εἶναι ἄρα $ΛΚ + ΓΕ = 2ΛΚ$. Ἀλλὰ τὰ $ΛΚ + ΓΕ$ εἶναι ὁ γνώμων $ΛΜΝ + ΓΚ^2$· ὁ γνώμων ἄρα $ΛΜΝ + ΓΚ^2 = 2\ ΑΚ$. Ἀλλ' ὅμως ἐδείχθη καὶ $ΑΚ = ΘΗ$· ὁ γνώμων ἄρα ΛΜΝ καὶ τὸ $ΓΚ^2 = 2\,ΘΗ$· ὥστε ὁ γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $ΓΚ + ΘΗ$ ἰσοῦνται πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΘΗ. Καὶ εἶναι ὁ μὲν γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $ΓΚ + ΘΗ = ΑΕ + ΓΚ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, τὸ δὲ $ΗΘ = ΑΓ^2$. Ἄρα τὰ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3\ ΑΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ προστεθῇ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἴση πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ πρὸς τὴν ΑΓ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ \times ΒΓ = ΓΕ$, τὸ δὲ $ΑΓ^2 = ΓΘ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓΕ = ΘΓ$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΓΕ εἶναι ἴσον τὸ ΘΕ (I. 43), πρὸς δὲ τὸ ΘΓ εἶναι ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΕ· [ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΘΒ]. Ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΕ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΚ τὸ $ΒΔ \times ΔΑ$· διότι ἡ $ΑΔ = ΔΛ$· τὸ δὲ $ΑΕ = ΑΒ^2$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΒΔ \times ΔΑ = ΑΒ^2$. Εἶναι ἄρα $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ$ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ $ΔΒ > ΒΑ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΒΑ > ΑΔ$ (V. 14).

Ἡ ΔΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ· ῥητὴ γάρ [ἐστιν] ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ

6.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΔ = ΒΑ : 2. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ ἔχει προστεθῇ ἡ ΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\ ΔΑ^2$ (θ. 1). Ἄρα τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· εἶναι ἄρα σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ (Χ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΔΑ^2$· διότι ἡ ΔΑ εἶναι ῥητή, οὖσα ἥμισυ τῆς ῥητῆς ΑΒ· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΔ^2$ (Χ. ὁρ. 9)· ῥητὴ ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΑ (Χ. 9)· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἀποτομὴ (Χ. 73). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτομή, ἐὰν παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΑΒ, θὰ σχηματίσῃ πλάτος τὴν ΒΓ. Τὸ τετράγωνον δὲ ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει ἀποτομὴν πρώτην (Χ. 97)· εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ πρώτη ἀποτομή. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

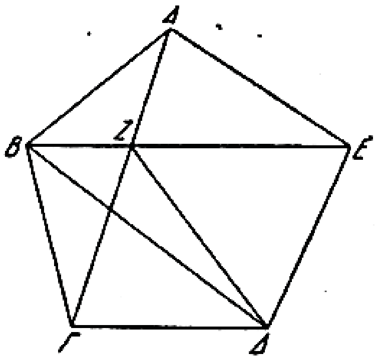
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἢ αἱ συνεχεῖς ἢ αἱ μὴ συνεχεῖς εἶναι ἴσαι, τὸ πεντάγωνον εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἔστω πρότερον ὅτι αἱ τρεῖς συνεχεῖς γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ Α, Β, Γ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΕ, καὶ ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἡ μὲν ΒΓΑ πρὸς τὴν τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον

ΒΕΛ, ἡ δὲ ΑΒΕ πρὸς τὴν ΓΑΒ (I. 4)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΖ (I. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΒΕ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν ΖΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΖΓ, ΓΔ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΖΔ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΔ (I. 8). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓΑ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΕΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β· καὶ ἡ ΑΕΔ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β, Γ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴσαι αἱ συνεχεῖς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ ἔχουσαι κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ· λέγω, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

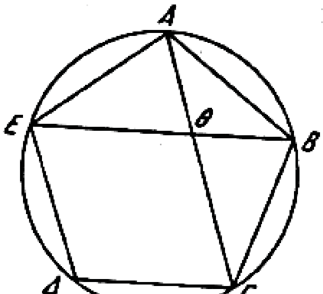
Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I. 4) · εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΕ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ (I. 6). Καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΔΕ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς Α, Γ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ, Δ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀπέναντι δύο συνεχῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ὑπάρχωσι πλευραί, αὗται τέμνονται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὰ μεγαλύτερα τμήματα εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς εἶναι ἀπέναντι τῶν δύο συνεχῶν γωνιῶν Α, Β τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΕ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Θ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν τέμνεται κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὰ μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, καὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ. ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I. 4.). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΕ· εἶναι ἄρα ΑΘΕ = 2 ΒΑΘ (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΑΓ = 2ΒΑΓ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὸ τόξον ΕΔΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΓΒ (III. 28, VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΘΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, τουτέστι τὴν ΑΒ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ (I. 5). Ἀλλὰ ἡ ΑΒΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ· καὶ ἡ ΒΕΑ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ. Καὶ ἡ ΑΒΕ εἶναι κοινὴ γωνία τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία ἡ ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΑΘΒ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΘ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΕΒ : ΒΑ = ΑΒ : ΒΘ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΒΑ = ΕΘ· ἄρα εἶναι ΒΕ : ΕΘ = ΕΘ : ΘΒ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μεγαλυτέρα ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. Ἡ ΒΕ ἄρα ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΘΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῆ κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς ἡ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

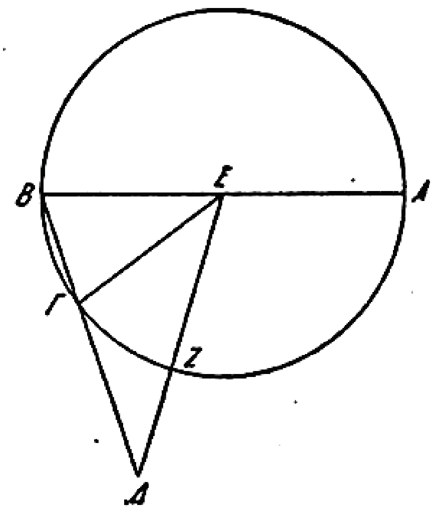
9.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου προστεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἐγγραφομένων σχημάτων, ἔστω ἡ μὲν ΒΓ πλευρὰ δεκαγώνου, ἡ δὲ ΓΔ ἑξαγώνου, καὶ ἔστωσαν κείμεναι ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῆ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ε (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ ἂς προεκταθῆ ἡ ΒΕ μέχρι τοῦ Α. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου δεκαγώνου, ἄρα τὸ τόξον ΑΓΒ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τόξου ΒΓ· τὸ τόξον ἄρα ΑΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΓΒ. Ὡς δὲ τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως εἶναι ἡ γωνία ΑΕΓ πρὸς τὴν ΓΕΒ (VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΓΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ (I. 32). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου

[ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ. τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ. ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ Γ], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

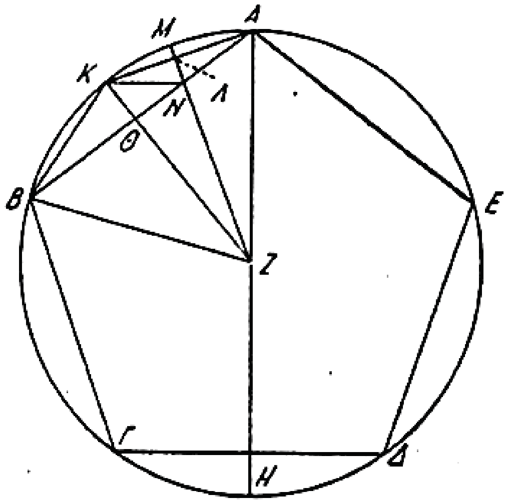


ι'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ,



τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ (IV. 15, πόρ.)· εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΕΔ πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΕΓΒ = 2 ΕΔΓ (I. 32). Ἀλλ' ἐδείχθη ἡ ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΕΔΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΕΓ = 4 ΒΕΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΔΓ = ΒΕΓ. Ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΒΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΔΒ : ΒΕ = ΕΒ : ΒΓ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΕΒ = ΓΔ. Εἶναι ἄρα ΒΔ : ΔΓ = ΔΓ : ΓΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΔ 〉 ΔΓ· ἄρα καὶ ἡ ΔΓ 〉 ΓΒ (V. 14). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΖ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ ἡ ΖΛ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Μ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΝ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΕΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ τόξον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΓΔ πλευρὰ πενταγώνου· ἡ ΓΗ ἄρα εἶναι δεκαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΑ = ΖΒ, καὶ ἡ ΖΘ εἶναι κάθετος, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΖΚ = ΚΖΒ (I. 5, I. 26). Ὥστε καὶ τὸ τόξον ΑΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΚΒ (III. 26). Εἶναι ἄρα τὸ τόξον ΑΒ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΚ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΚ = 2 ΚΜ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι διπλάσιον καὶ κάθετος ἡ ΖΘ ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστι διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ [ἐστι] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΝ, βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΑΝ ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΝ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΛΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ ἡ πρὸς τῷ Α. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [ΑΒΓΔΕ] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν τοῦ τόξου ΒΚ, εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΒ, εἶναι ἄρα καὶ τὸ τόξον ΓΔ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ. Εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ καὶ τοῦ τόξου ΓΗ διπλάσιον· τὸ τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΒΚ. Ἀλλὰ τὸ ΒΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ, ἐπειδὴ εἶναι διπλάσιον καὶ τὸ ΚΑ· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ. Ἀλλ' ὅμως καὶ τὸ τόξον ΓΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· διότι τὸ τόξον ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ. Καὶ ὅλον ἄρα τὸ τόξον ΗΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΜ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΗΖΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΖΜ (VI. 33). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ διπλασία τῆς ΖΑΒ· διότι ἡ ΖΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΖ. Καὶ ἡ ΒΖΝ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΒ. Ἡ δὲ γωνία ΑΒΖ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΒΝΖ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΖ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΖΝ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $AB : BZ = ZB : BN$ (VI. 4)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $AB \times BN = BZ^2$ (VI. 17). Πάλιν ἐπειδὴ $ΑΛ = ΛΚ$, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΛΝ, ἡ βάσις ἄρα ΚΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΝ· καὶ ἡ γωνία ἄρα $ΛΚΝ = ΛΑΝ$ (I. 4). Ἀλλὰ ἡ $ΛΑΝ = ΚΒΝ$ (III. 29, I. 5)· ἄρα καὶ ἡ $ΛΚΝ = ΚΒΝ$. Καὶ ἡ παρὰ τὸ Α γωνία εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ. Ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΚΝΑ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΚΒΑ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΝΑ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $BA : AK = KA : AN$ (VI. 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $BA \times AN = AK^2$ (VI. 17). Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $AB + BN = BZ^2$· εἶναι ἄρα $AB \times BN + BA \times AN$, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς $BA^2 = BZ^2 + AK^2$ (II. 2). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ πλευρὰ πενταγώνου, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

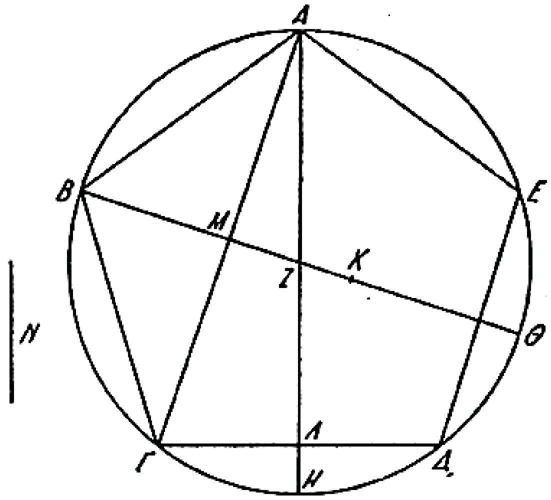
Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ ἔχοντα ῥητὴν τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (X. 76).

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ (III. 1), καὶ ἂς *αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ὑπὸ ΛΑΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς ΖΑ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. ὡς δὲ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ*



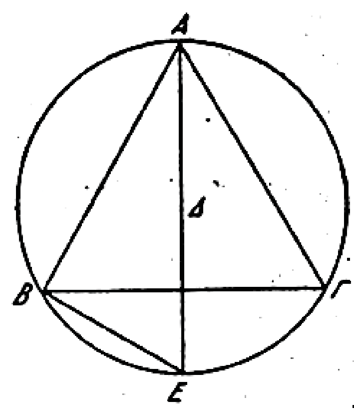
τέταρτον τῆς ΖΑ. καί ἐστι τῆς μὲν ΛΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης καί ἐστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἂς προεκταθῶσι μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΖΚ = \frac{1}{4}$ ΑΖ. Ἔστω δὲ ῥητὴ ἡ ΑΖ· εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ ΑΒΓ = ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΔ, αἱ γωνίαι παρὰ τὸ Λ εἶναι ὀρθαί, καὶ ΓΔ = 2 ΓΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὸ Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ ΑΓ = 2 ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΛΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ΛΑΓ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΜΖΑ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΛ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΜΖ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : ΖΑ (VI. 4)· καὶ τῶν ἡγουμένων ὅρων τὰ διπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς 2 ΛΓ : ΓΑ = 2 ΜΖ : ΖΑ. Ὡς δὲ 2ΜΖ : ΖΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ 2 ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ. Καὶ τῶν ἑπομένων ὅρων τὰ ἡμίση· εἶναι ἄρα ἡ 2 ΛΓ : $\frac{1}{2}$ ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{4}$ ΖΑ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΔΓ = 2 ΛΓ, ἡ δὲ ΓΜ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΚ = $\frac{1}{4}$ ΖΑ· εἶναι ἄρα ὡς ΔΓ : ΓΜ = ΜΖ : ΖΚ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ΔΓ + ΓΜ : ΓΜ = ΜΚ : ΚΖ (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $(ΔΓ + ΓΜ)^2 : ΓΜ^2 = ΜΚ^2 : ΚΖ^2$. Καὶ ἐπειδή, ὅταν τμηθῇ ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, π.χ. ἡ ΑΓ, εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, τουτέστι τὴν ΔΓ (θ. 8), τὸ δὲ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τῆς ὅλης, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου, τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ εἶναι ἡ ΓΜ ἡμίσεια τῆς ὅλης ΑΓ, εἶναι ἄρα $(ΔΓ + ΓΜ)^2 = 5ΓΜ^2$. Ὡς δὲ τὸ $(ΔΓ + ΓΜ)^2$ πρὸς τὸ $ΓΜ^2$, οὕτως ἐδείχθη τὸ $ΜΚ^2$ πρὸς τὸ $ΚΖ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΜΚ^2 = 5ΚΖ^2$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΚΖ^2$· διότι ἡ διάμετρος εἶναι ῥητή· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ $ΜΚ^2$ (X.6, ὁρ. 4)· ἡ ΜΚ ἄρα εἶναι ῥητὴ (X. ὁρ. 3). [Σημ. Τὸ « δυνάμει μόνον » οὐδὲν νόημα ἔχει·εἶναι παρεμβολή]. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΖ =4ΖΚ, εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ =5ΚΖ· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΚ^2 = 25ΚΖ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΜΚ^2 = 5ΚΖ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΚ^2 = 5ΚΜ^2$· τὸ $ΒΚ^2$ ἄρα πρὸς τὸ $ΚΜ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (X. 9). Καὶ ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ῥητή. Αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (X. ὁρ. 3). Ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητὴ οὖσα δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, ἡ λοιπὴ εἶναι ἄλογος (καλουμένη) ἀποτομὴ (X. 73)· ἡ ΜΒ ἄρα εἶναι ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΜΚ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή. Ἔστω ὅτι $ΒΚ^2 - ΚΜ^2 = Ν^2$· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΜΚ. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῇ Ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΖΒ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ πρὸς ἕν. ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\varepsilon}$ πρὸς $\bar{\delta}$, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσσυμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ ἡ ΑΒ διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ.

τῆς ΚΜ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς Ν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα, ἡ $ΚΖ + ΖΒ = ΚΒ$ σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ (X. 15). Ἀλλὰ ἡ ΒΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΚ σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ (X. 12). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΒΚ^2 = 5ΚΜ^2$, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΜ, ὃν ἔχει $5:1$. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΚ^2 : Ν^2 = 5 : 4$ (V. 19, πόρ.), ἤτοι οὐχὶ λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν Ν ἀσύμμετρος (μήκει) (X. 9)· τὸ $ΒΚ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $ΚΜ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου (μήκει) πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς (μήκει) ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ), καὶ ὅλη ἡ ΒΚ εἶναι σύμμετρος (μήκει) πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΒΘ, εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ τετάρτη ἀποτομὴ (X. ὁρισμοὶ τρίτοι, 4). Τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον (ἄρρητον), καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τοῦτο τετραγώνου εἶναι ἄλογος (ἄρρητος), καλεῖται δὲ ἐλάσσων (X. 94). Εἶναι δὲ $ΘΒ \times ΒΜ = ΑΒ^2$, διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΘ, τὸ τρίγωνον ΑΒΘ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ καὶ εἶναι $ΘΒ : ΒΑ = ΑΒ : ΒΜ$.

Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πενταγώνου ΑΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (IV.2)· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.1) τὸ Δ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ τόξον ἄρα ΒΕΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἄρα τὸ τόξον ΒΕ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τὴν ΔΕ (IV. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΕ = 2ΔΕ$, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΕ^2 = 4ΕΔ^2$, τουτέστι $= 4ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$ (III. 31, I. 47)· εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = 4ΒΕ^2$. Καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι τὸ $ΑΒ^2 = 3ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ ἡ $ΒΕ = ΔΕ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 3ΔΕ^2$.

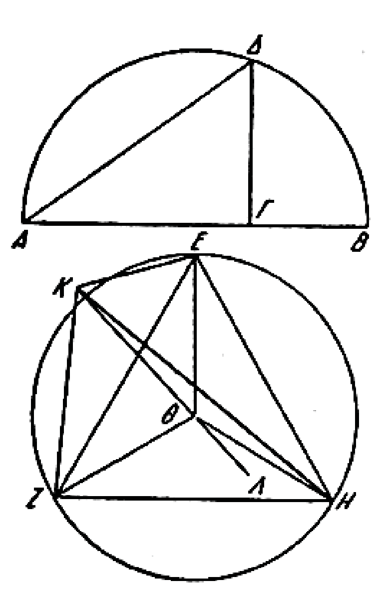
διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστη τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.



Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Νὰ κατασκευασθῇ πυραμὶς καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἔστω ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ (VI.10)· καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΑ· καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΕΖΗ (IV. 2)· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἂς ὑψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΘΚ (ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΘΚ) εὐθεῖα ἡ ΘΚ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου ΕΖΗ (XI. ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ πρὸς τὴν ΘΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΕ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ τριπλασία τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ^2 : ΔΓ^2$, ὡς θὰ δειχθῇ ἐν συνεχείᾳ. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΔ^2 = 3ΔΓ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΖΕ^2 = 3ΕΘ^2$ (θ. 12), καὶ εἶναι ἡ $ΔΓ = ΕΘ$· εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἐδείχθη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· τὰ τέσσαρα ἄρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ εἶναι ἰσόπλευρα. Κατεσκευάσθη ἄρα πυραμὶς ἐκ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΖΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ.

Πρέπει τώρα αὕτη νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρίτα δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων]. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

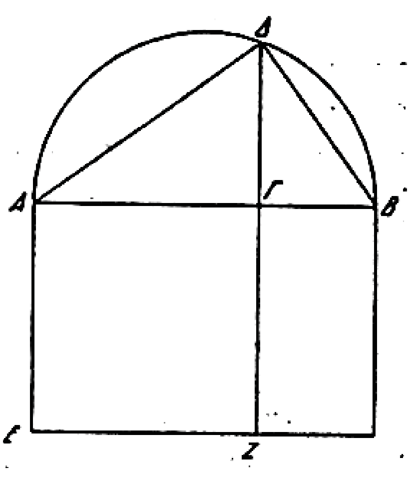
Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔΒ ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καί ἐστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΘ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΘΛ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $\Theta\Lambda = \Gamma B$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $A\Gamma : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma B$ (VI. 8 πόρ.), εἶναι δὲ ἡ μὲν $A\Gamma = K\Theta$, ἡ δὲ $\Gamma\Delta = \Theta E$, ἡ δὲ $\Gamma B = \Theta\Lambda$, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $K\Theta : \Theta E = E\Theta : \Theta\Lambda$· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $K\Theta \times \Theta\Lambda = E\Theta^2$ (VI. 17). Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΚΘΕ, ΕΘΛ· τὸ ἐπὶ τῆς ΚΛ ἄρα γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. [Ἐπειδὴ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΛ, ἡ γωνία ΛΕΚ γίνεται ὀρθή, διότι τὸ τρίγωνον ΕΛΚ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΕΛΘ, ΕΘΚ]. Ἐὰν λοιπὸν διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς ΚΛ τὸ ἡμικύκλιον ἀφοῦ περιστραφῇ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΖΛ, ΛΗ καὶ γίνωσιν ὁμοίως ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ζ, Η γωνίαι· καὶ θὰ εἶναι ἡ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν. Διότι ἡ διάμετρος ΚΛ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας, ἐπειδὴ πρὸς μὲν τὴν ΑΓ εἶναι ἴση ἡ ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω τώρα, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ $A\Gamma = 2\Gamma B$, εἶναι ἄρα ἡ $AB = 3B\Gamma$· καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ $BA = \frac{3}{2} A\Gamma$, (διὰ διαιρέσεως δηλ. τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη). Ὡς δὲ ἡ $BA : A\Gamma = BA^2 : A\Delta^2$ [ἐπειδὴ βεβαίως ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΒ εἶναι ὡς ἡ $BA : A\Delta = \Delta A : A\Gamma$ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΑΓ καὶ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (δηλ. $BA : A\Gamma = BA^2 : A\Delta^2$ (V. ὁρ. 9)]. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ $BA^2 = \frac{3}{2} A\Delta^2$. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας, ἡ δὲ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Δέον νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ὡς ἡ $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$.

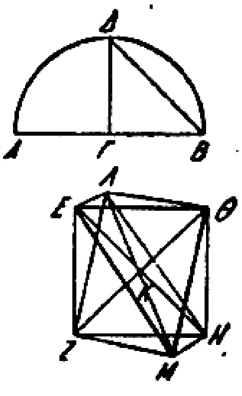
Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ προηγουμένως καταγραφὲν ἡμικύκλιον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν διότι τὸ τρίγωνον ΔΑΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὡς ἡ $BA : A\Delta = \Delta A : A\Gamma$ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$ (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $AB : B\Gamma =$ τὸ $EB :$ τὸ BZ (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν $EB = BA \times A\Gamma$· διότι $EA = A\Gamma$· τὸ δὲ $BZ = A\Gamma \times \Gamma B$, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $AB : B\Gamma = BA \times A\Gamma : A\Gamma \times \Gamma B$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$, τὸ δὲ $A\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma^2$· διότι ἡ κάθετος ΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῶν ΑΓ, ΓΒ (VI. 8, πόρ.), διότι ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή. Ὡς ἄρα ἡ $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιον ἐστι τοῦ ἀπὸ ΕΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσι αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.



Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ

14.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀκτάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ προηγουμένως, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἡ ΚΛ καὶ ἂς προεκταθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ πρὸς μίαν τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση, ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΚΕ = ΚΘ$, καὶ ἡ γωνία ΕΚΘ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$ (I. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΛΚ = ΚΕ$, καὶ ἡ γωνία ΛΚΕ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΕΛ^2 = 2ΕΚ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΕ^2 = ΕΘ^2$· ἄρα ἡ $ΛΕ = ΕΘ$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ $ΛΘ = ΘΕ$· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΕΘ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Λ, Μ, εἶναι ἰσόπλευρον· κατεσκευάσθη ἄρα ὀκτάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

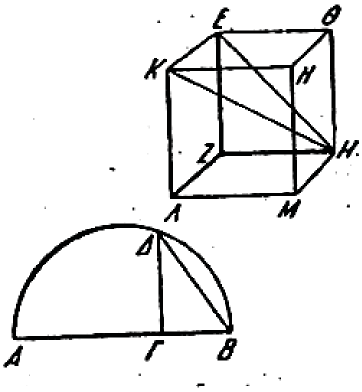
Διότι, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ γραφόμενον ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐάν, ἀφοῦ μείνῃ σταθερὰ ἡ ΛΜ, περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η, Θ, καὶ θὰ περιλαμβάνεται τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ *δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.*

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΗΖ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΖ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΗ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΛΚ = ΚΜ, εἶναι δὲ κοινὴ ἡ ΚΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΜ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΛΕΜ εἶναι ὀρθή· διότι βαίνει ἐπὶ ἡμικυκλίου (III. 31)· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$ (I. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = ΓΒ εἶναι ἡ ΑΒ = 2ΒΓ. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. όρ .9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 2ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$. Καὶ εἶναι τὸ $ΔΒ^2 = ΛΕ^2$· διότι ἐλήφθη ἡ ΕΘ = ΔΒ. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΑΒ^2 = ΛΜ^2$· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = ΛΜ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Περιελήφθη ἄρα τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας. Καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὅπως καὶ ἡ πυραμίς, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἄς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ καὶ ἄς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = 2ΓΒ (VI. 10), καὶ ἄς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἄς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον τὴν πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ ἄς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἄς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ πρὸς μίαν τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κατεσκευάσθη ἄρα κύβος ὁ ΖΝ περιεχόμενος ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων. Πρέπει τώρα αὐτὸς νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Διότι ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΚΗ, ΕΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΚΕΗ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΗ δηλαδὴ καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΗ (XI. όρ. 3), τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΚΗ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΗΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΗΖ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΚ (XI. 4)· ὥστε καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ζ. Ὁμοίως θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ κύβου. Ἐὰν λοιπόν, παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΚΗ, ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴ *ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.*

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

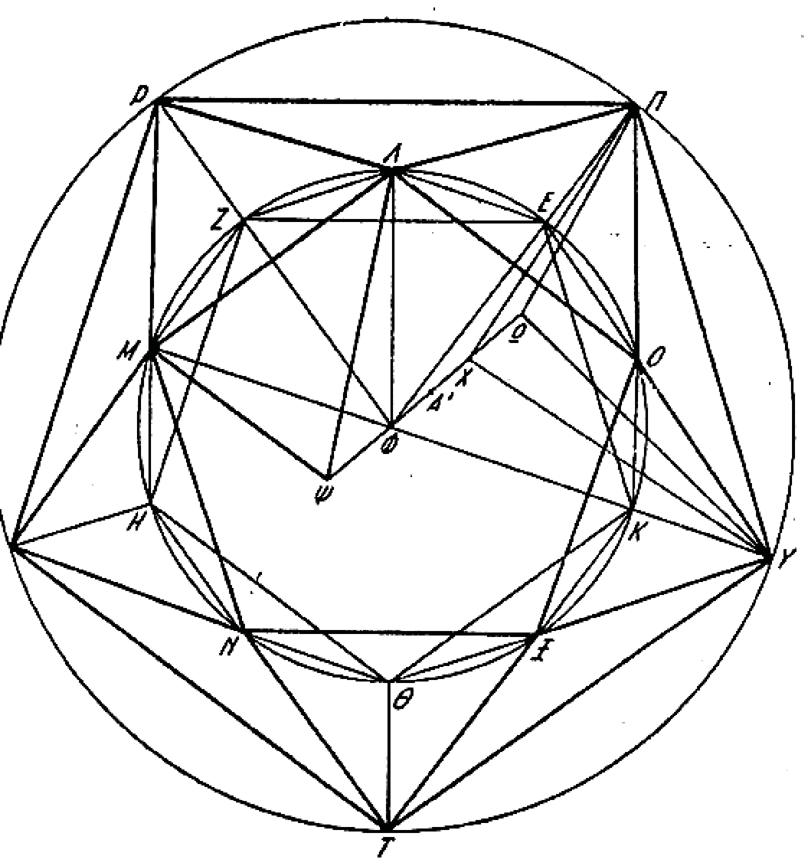
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, ὁ κύβος θὰ ἔχῃ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΗΖ = ΖΕ, καὶ ἡ παρὰ τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΕΗ^2 = 2ΕΖ^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ = ΕΚ· εἶναι ἄρα τὸ $ΕΗ^2 = 2ΕΚ^2$· ὥστε τὰ $ΗΕ^2 + ΕΚ^2$, τουτέστι τὸ $ΗΚ^2 = 3ΕΚ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ = 3ΒΓ, εἶναι δὲ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 3ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΗΚ^2 = 3ΚΕ^2$. Καὶ ἐλήφθη ἡ ΚΕ = ΔΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΗ = ΑΒ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Ὁ κύβος ἄρα περιελήφθη ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Νὰ κατασκευασθῇ εἰκοσάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = 4ΓΒ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἔστω ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ (IV. 11), καὶ ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον καὶ τὸ πεντάγωνον ΛΜΝΞΟ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΟ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, Κ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ, αἵτινες νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα ἡ ΕΠ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΥ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· αἱ ἑνοῦσαι δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΚ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΚ πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου· καὶ ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ ἐγγραφομένου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου πενταγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΠΡΣΤΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ,



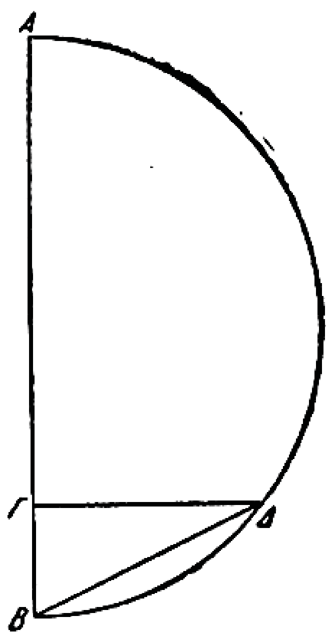
ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία; πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ

ΕΟ δεκαγώνου, καὶ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία ΠΕΟ, ἡ ΠΟ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου· διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΟΥ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΟΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ ἐδείχθη πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον τὸ τρίγωνον ΠΛΟ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ τὸ σημεῖον Φ (III. 1)· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ ἂς ἀνυψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ἡ ΦΩ, καὶ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ, ὥστε νὰ εἶναι ἑξαγώνου μὲν πλευρὰ ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΠΕ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Εἶναι δὲ ἡ ΕΦ πλευρὰ ἑξαγώνου· καὶ ἡ ΠΧ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΧ εἶναι ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΠΧΩ εἶναι ὀρθὴ (XI. ὁρ. 3, I. 29), εἶναι ἄρα ἡ ΠΩ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, θὰ εἶναι ἀπέναντι καὶ ἴσαι, καὶ ἡ ΦΚ ὡς ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΧΥ πλευρὰ ἑξαγώνου. Ἡ δὲ ΧΩ εἶναι δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΥΧΩ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΥΩ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ω, εἶναι ἰσόπλευρον. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΦΛ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΦΨ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΛΦΨ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα ἡ ΛΨ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΦ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΜΨ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΜΨ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ψ, εἶναι ἰσόπλευρον. Κατεσκευάσθη ἄρα εἰκοσάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων.

αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ



αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α'. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ' πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς Α'Χ. καί ἐστι τῆς μὲν ΩΑ' διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α'Χ διπλῆ ἡ ΦΧ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΦΧ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, ἡ ΦΩ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΦΧ (θ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΦΧ πρὸς τὴν ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ πρὸς τὴν ΦΨ· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΕ = ΕΦ : ΦΨ. Καὶ εἶναι αἱ γωνίαι ΩΦΕ, ΕΦΨ ὀρθαί· ἐὰν ἄρα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΩ, ἡ γωνία ΨΕΩ εἶναι ὀρθὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΨΕΩ, ΦΕΩ (VI. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ, καὶ εἶναι ἴση ἡ μὲν ΩΦ πρὸς τὴν ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΠ, εἶναι ἄρα ὡς ΨΧ : ΧΠ = ΠΧ : ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΠΨ, ἡ γωνία παρὰ τὸ Π θὰ εἶναι ὀρθὴ (VI. 8)· τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΨΩ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π (I. 31). Καὶ ἐὰν παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΨΩ ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ θὰ ἔχῃ περιληφθῇ τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α'. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΦΩ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΩΧ, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΩΧ σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος τὸ ΧΑ', εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος (θ. 3)· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΩΑ' πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς Α'Χ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν $Ω Ψ = 2\ ΩΑ'$, ἡ δὲ $ΦΧ = 2Α'Χ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΩΨ^2 = 5 \times Φ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = 4\ ΓΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 5ΒΓ$. Ὡς δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 5ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΩΨ^2 = 5ΦΧ^2$. Καὶ εἶναι ἡ $ΔΒ = ΦΧ$· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ = ΨΩ$. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας. Περιελήφθη ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου, αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστι. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (X. 76). Διότι, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητή, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι ῥητή. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (Ο. 11). Ἡ πλευρὰ δὲ τοῦ πενταγώνου ΕΖΗΘΚ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Πόρισμα.

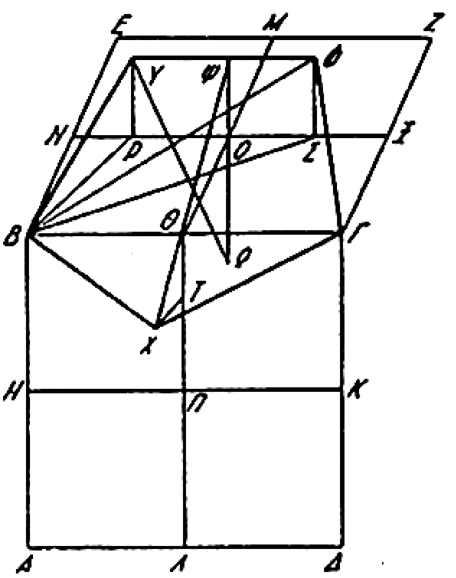
Ὅθεν ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀναγραφῇ τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Νὰ κατασκευασθῇ δωδεκάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῶσι τοῦ προειρημένου κύβου (Ο. 15) δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ σημεῖα Ρ, Σ, Τ, καὶ ἔστω μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ρ, Σ, Τ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τοῦ κύβου ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἴσαι πρὸς τὰς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. Λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΥΒΧΓΦ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ εἰς ἓν ἐπίπεδον καὶ ἀκόμη ὅτι εἶναι ἰσογώνιον. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΝΟ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΡΟ, εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα $ΟΝ^2 + ΝΡ^2 = 3ΡΟ^2$ (Ο. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΟΝ = ΝΒ$, ἡ δὲ $ΟΡ = ΡΥ$· ἄρα $ΒΝ^2 + ΝΡ^2 = 3ΡΥ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΒΝ^2 + ΝΡ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΒΡ^2$ (Ι. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΡ^2 = 3ΡΥ^2$· ὥστε τὰ $ΒΡ^2 + ΡΥ^2 = 4ΡΥ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΒΡ^2 + ΡΥ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΒΥ^2$

ΒΡ, ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣΡ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ, ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρα τῶν ΒΥ, ΥΦ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ, ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ [ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ, ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ], ἴση δὲ ἡ ΟΡ τῇ ΟΣ [ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ], ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία), τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΦ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΒΦ βάσει τῇ ΒΓ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον·

(I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{BY}^2 = 4\mathrm{YP}^2$· ἄρα εἶναι $\mathrm{BY} = 2\mathrm{PY}$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $\Phi\mathrm{Y} = 2\mathrm{YP}$, ἐπειδὴ βεβαίως εἶναι καὶ ἡ $\Sigma\mathrm{P} = 2\mathrm{OP}$, τουτέστι $2\mathrm{PY}$· εἶναι ἄρα ἡ $\mathrm{BY} = \mathrm{Y}\Phi$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΥ, ΥΦ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα ΒΥΦΓΧ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς ἑκατέραν τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου κειμένη ἡ ΟΨ· καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εἶναι εὐθεῖα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΠ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΠΤ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta\Pi : \Pi\mathrm{T} = \Pi\mathrm{T} : \mathrm{T}\Theta$. Εἶναι δὲ ἡ μὲν $\Theta\Pi = \Theta\mathrm{O}$, ἡ δὲ $\Pi\mathrm{T} = \mathrm{TX} = \mathrm{O}\Psi$· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta\mathrm{O} : \mathrm{O}\Psi = \mathrm{XT} : \mathrm{T}\Theta$. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ πρὸς τὴν ΤΧ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΔ (XI. 6)· ἡ δὲ ΤΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΨ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΖ. Ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς δύο πλευράς, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (VI. 32)· εἶναι ἄρα ἐπ' εὐθείας ἡ ΨΘ καὶ ἡ ΘΧ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου (XI. 1)· εἰς ἓν ἄρα ἐπίπεδον κεῖται τὸ πεντάγωνον ΥΒΧΓΦ.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Διότι ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΟ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ρ καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΟΡ [εἶναι ἄρα ὡς $\mathrm{NO} + \mathrm{OP} : \mathrm{ON} = \mathrm{NO} : \mathrm{OP}$], εἶναι δὲ ἡ $\mathrm{OP} = \mathrm{O}\Sigma$ [εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Sigma\mathrm{N} : \mathrm{NO} = \mathrm{NO} : \mathrm{O}\Sigma$], ἡ ΝΣ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΝΟ (θ. 5)· εἶναι ἄρα τὰ $\mathrm{N}\Sigma^2 + \Sigma\mathrm{O}^2 = 3\mathrm{NO}^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΝΟ πρὸς τὴν ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΦ· ἄρα τὰ $\mathrm{N}\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3\mathrm{NB}^2$· ὥστε τὰ $\Phi\Sigma^2 + \Sigma\mathrm{N}^2 + \mathrm{NB}^2 = 4\mathrm{NB}^2$. Πρὸς δὲ τὰ $\Sigma\mathrm{N}^2 + \mathrm{NB}^2$ εἶναι ἴσον τὸ $\Sigma\mathrm{B}^2$ (I. 47)· εἶναι ἄρα τὰ $\mathrm{B}\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2$, τουτέστι τὸ $\mathrm{B}\Phi^2$ (διότι ἡ γωνία ΦΣΒ εἶναι ὀρθὴ) τετραπλάσιον τοῦ NB^2 (XI. ὁρ. 3)· εἶναι ἄρα ἡ $\Phi\mathrm{B} = 2\mathrm{BN}$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $\mathrm{B}\Gamma = 2\mathrm{BN}$, εἶναι ἄρα ἡ $\mathrm{B}\Phi = \mathrm{B}\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ πρὸς δύο τὰς ΒΧ, ΧΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ βάσις ΒΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ (I. 8), ἡ γωνία ἄρα ΒΥΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΧΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΥΦΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΧΓ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἐὰν δὲ ἰσοπλεύρου πενταγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ πεντάγωνον θὰ εἶναι ἰσογώνιον (θ. 7)· εἶναι ἄρα τὸ πεντάγωνον ΒΥΦΓΧ ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΒΥΦΓΧ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, καὶ εἶναι ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ κύβου ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καί ἐστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καί ἐστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καί ἐστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῆς ΒΓ. Ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν δώδεκα πλευρῶν τοῦ κύβου κατασκευάσωμεν τὰ αὐτά, θὰ συσταθῇ στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων πενταγώνων, τὸ ὁποῖον καλεῖται δωδεκάεδρον.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω κατὰ τὴν ΨΩ· συναντᾷ ἄρα ἡ ΟΩ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ προτελευταῖον θεώρημα τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου (XI. 38). Ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα εἶναι κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΣ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΝΟ, εἶναι ἄρα τὰ $ΝΣ^2 + ΣΟ^2 = 3\ ΝΟ^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΝΣ = ΨΩ$, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ ἡ μὲν $ΝΟ = ΟΩ$, ἡ δὲ $ΨΟ = ΟΣ$. Ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ $ΟΣ = ΨΥ$, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΡΟ· εἶναι ἄρα τὰ $ΩΨ^2 + ΨΥ^2 = 3\ ΝΟ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΩΨ^2 + ΨΥ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΥΩ^2$ (I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $ΥΩ^2 = 3\ ΝΟ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· διότι προαπεδείχθη, νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Ἐὰν δὲ ὅλον (τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου εἶναι τριπλάσιον) τοῦ ὅλου (τετραγώνου τῆς πλευρᾶς), εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος· καὶ εἶναι ἡ ΝΟ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ἡ ΥΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ σημεῖον ἄρα Υ εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· περιελήφθη ἄρα τὸ δωδεκάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομὴ (X. 73).

Διότι ἐπειδὴ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς ΝΟ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, εἶναι ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΟΣ, εἶναι ἄρα ὅλης τῆς ΝΞ τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΡΣ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὡς ἡ $ΝΟ : ΟΡ = ΟΡ : ΡΝ$, ἰσχύει τοῦτο καὶ διὰ τὰ διπλάσια· διότι τὰ μέρη ἔχουσι πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸν αὐτὸν λόγον (V. 15)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΝΞ : ΡΣ = ΡΣ : ΝΡ + ΣΞ$ (V. 14). Εἶναι δὲ ἡ $ΝΞ > ΡΣ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΡΣ > ΝΡ + ΣΞ$· τέμνεται ἄρα ἡ ΝΞ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καί ἐστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

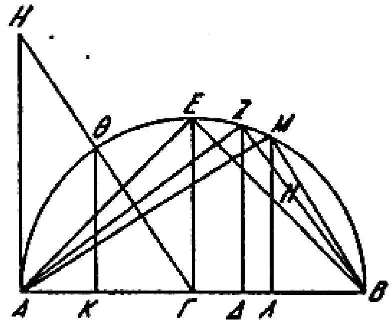
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.



Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυ-καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΡΣ. Εἶναι δὲ ἡ ΡΣ = ΥΦ· τῆς ΝΞ ἄρα τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, εἶναι ἄρα ῥητὴ ἡ ΝΞ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου. Ἐὰν δὲ ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἄρρητος (ἡ καλουμένη) ἀποτομὴ (θ. 6).

Ἡ ΥΦ ἄρα, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου, εἶναι ἄρρητος ἀποτομή.

Πόρισμα.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου ὅτι, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Νὰ ἐκτεθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν πέντε σχημάτων καὶ νὰ συγκριθῶσι πρὸς ἀλλήλας.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΓ = ΓΒ$, κατὰ δὲ τὸ Δ, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΔ = 2ΔΒ$, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 3ΔΒ$. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ $ΒΑ = \frac{3}{2} ΑΔ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΒΑ : ΑΔ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$· διότι τὸ τρίγωνον ΑΖΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ (VI. 8) (καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων εἶναι $ΒΑ : ΑΖ = ΑΖ : ΑΔ$ καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΑ^2 = \frac{3}{2} ΑΖ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος (θ. 13). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 3ΒΔ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΔ = ΑΒ^2 : ΒΖ^2$ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΖ, ΒΖΔ, καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως $ΑΒ : ΒΖ = ΒΖ : ΒΔ$, καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 3ΒΖ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΖ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΓ = ΓΒ$, εἶναι ἄρα ἡ $ΑΒ = 2ΒΓ$. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΕ^2$ (VI. 8, V. ὁρ. 9, ὡς ἀνωτέρω)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 2ΒΕ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας διπλάσιον τοῦ τετρανάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δυθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΓΒ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστι διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστι διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καί ἐστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ· ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου (θ. 14). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΕ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΑΗ = ΑΒ$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΗΑ = 2ΑΓ$· διότι ἡ $ΗΑ = ΑΒ$· εἶναι δὲ $ΗΑ : ΑΓ = ΘΚ : ΚΓ$ (VI. 4), εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΘΚ = 2ΚΓ$. Ἄρα εἶναι τὸ $ΘΚ^2 = 4ΚΓ^2$· εἶναι ἄρα τὰ $ΘΚ^2 + ΓΚ^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $ΘΓ^2 = 5ΚΓ^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ $ΘΓ = ΓΒ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΒ = 2ΓΒ$, ἐξ ὧν ἡ $ΑΔ = 2ΔΒ$, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι διπλασία τῆς λοιπῆς τῆς ΔΓ. Εἶναι ἄρα ἡ $ΒΓ = 3ΓΔ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΒΓ^2 = 9\ ΓΔ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓΚ^2 > $ τοῦ $ΓΔ^2$. Εἶναι ἄρα ἡ $ΓΚ > ΓΔ$. Ἂς ληφθῇ ἡ $ΓΛ = ΓΚ$, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΛΜ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$, καὶ εἶναι τῆς μὲν ΒΓ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλασία ἡ ΚΛ, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 5ΚΛ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον (θ. 16 πόρ.). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου ἐγγραφομένου εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (4. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (θ. 16 πόρ.), καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΚΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, καὶ ἡ $ΑΚ = ΛΒ$, εἶναι ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΛΒ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΛΒ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΘΚ· διότι ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ εἶναι ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασία τῆς ΚΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ πενταγώνου (θεώρ. Χ καὶ I. 47). Ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου (θ. 16)· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ εἰκοσαέδρου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι πλευρὰ κύβου, ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα εἶναι πλευρὰ δωδεκαέδρου (θ. 17. πόρ.).

Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΖ τῆς πυραμίδος, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΒΕ τοῦ ὀκταέδρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΖΒ τοῦ κύβου, ἐὰν εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἴσον μὲ ἓξ τετράγωνα, τὸ τετράγωνον μὲν τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρα τοιαῦτα τετράγωνα, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου ἴσον μὲ τρία τοιαῦτα τετράγωνα, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου ἴσον μὲ δύο τοιαῦτα τετράγωνα. Εἶναι ἄρα τὸ μὲν τε-

λήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΛΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ [τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ]. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον· ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ τράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος τὰ τέσσαρα τρίτα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Αἱ μὲν λοιπὸν εἰρημέναι πλευραὶ τῶν τριῶν σχημάτων, ἐννοῶ δηλαδὴ τῆς πυραμίδος, καὶ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τοῦ κύβου, εἶναι πρὸς ἀλλήλας εἰς ῥητοὺς λόγους. Αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ἐννοῶ δηλαδὴ καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὴν τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἶναι εἰς λόγους ῥητούς· διότι εἶναι ἄρρητοι, ἡ μὲν ὡς ἐλάσσων (θ. 16), ἡ δὲ ὡς ἀποτομὴ (θ. 17).

Ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου ἡ ΜΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΖΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΑΒ, (VI. 8), ἰσχύει ἡ ἀναλογία $\Delta B : BZ = BZ : BA$ (VI. 4). Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Delta B : BA = \Delta B^2 : BZ^2$· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ $AB : B\Delta = ZB^2 : B\Delta^2$. Εἶναι δὲ ἡ $AB = 3\ B\Delta$· εἶναι ἄρα τὸ $ZB^2 = 3\ B\Delta^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $A\Delta^2 = 4\ \Delta B^2$· διότι ἡ $A\Delta = 2\Delta B$· εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta^2 > $ τοῦ ZB^2· εἶναι ἄρα $A\Delta > ZB$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι ἡ $A\Lambda > ZB$. Καὶ ὅταν μὲν ἡ ΑΛ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΚΛ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΚ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΚΑ πλευρὰ δεκαγώνου (θ. 9)· ὅταν δὲ ἡ ΖΒ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΝΒ· εἶναι ἄρα ἡ $K\Lambda > NB$. Εἶναι δὲ ἡ $K\Lambda = \Lambda M$· εἶναι ἄρα ἡ $\Lambda M > NB$ [τῆς δὲ ΛΜ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΜΒ]. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ ΜΒ οὖσα πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΝΒ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω τώρα, ὅτι ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων οὐδὲν ἄλλο σχῆμα κατασκευάζεται περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων ἴσων πρὸς ἄλληλα.

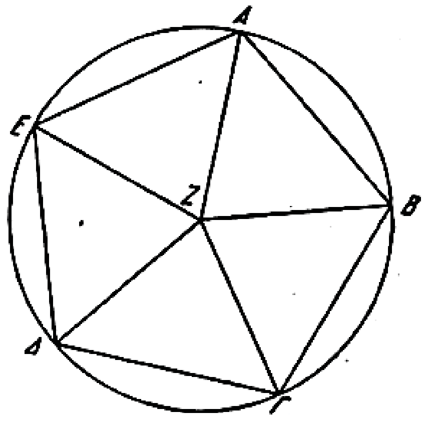
Διότι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων ἢ ἐν γένει ἐπιπέδων δὲν κατασκευάζεται (τρίεδρος) στερεὰ γωνία (XI. ὁρισ. 11). Ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων κατασκευάζεται ἡ στερεὰ γωνία τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων συνερχομένων πρὸς ἓν σημεῖον δὲν ὑπάρχει στερεὰ γωνία· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι δύο τρίτα ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ ἓξ ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον· διότι πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ μικροτέρων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν (XI. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους οὐδὲ ὑπὸ περισσοτέρων τῶν ἓξ ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ *πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.*

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καί εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ



ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γωνία. Ὑπὸ τριῶν δὲ τετραγώνων περιέχεται ἡ γωνία τοῦ κύβου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· διότι θὰ εἶναι πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν περιέχεται ἡ γωνία τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων εἶναι ἀδύνατον νὰ περιέχεται· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ τέσσαρες γωνίαι μεγαλύτεραι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὅμως οὐδὲ ὑπὸ ἑτέρων πολυγώνων σχημάτων εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Δὲν κατασκευάζεται ἄρα ἄλλο στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων σχημάτων ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διότι ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14), καὶ ἂς ληφθῇ αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. Ἄρα τέμνουσιν αὗται τὰς παρὰ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε γωνίας τοῦ πενταγώνου δίχα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὸ Ζ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἰσοῦνται πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, μία ἄρα ἐξ αὐτῶν, ὡς ἡ ΑΖΒ εἶναι μία ὀρθὴ μεῖον ἓν πέμπτον· αἱ λοιπαὶ ἄρα αἱ ΖΑΒ + ΑΒΖ εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΑΒ πρὸς τὴν ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I.

ΕΤΕΡΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

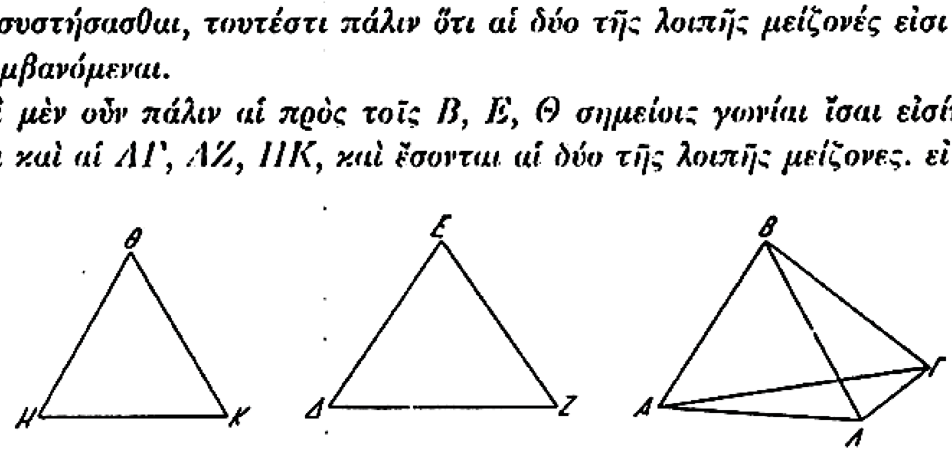
1.

Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 22

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ,



ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ μετὰ ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές

ΑΛΛΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1.

Εἰς τὸ βιβλίον XI θεώρ. 22.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, τῶν ὁποίων αἱ δύο ἔστωσαν μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, ἂς περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΓ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

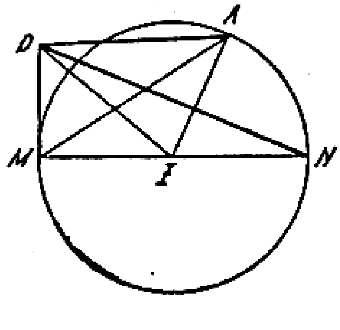
Ἐὰν μὲν λοιπὸν πάλιν αἱ παρὰ τὰ σημεῖα, Β, Ε, Θ γωνίαι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ θὰ εἶναι αἱ δύο μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Β, Ε, Θ γωνίαι καὶ μεγαλυτέρα ἡ παρὰ τὸ Β ἑκατέρας τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Ε, Θ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ (I. 24). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ $+$ ΔΖ $>$ ΗΚ καὶ ΑΓ $+$ ΗΚ $>$ ΔΖ. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΔΖ $+$ ΗΚ $>$ ΑΓ. Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Β, ἡ γωνία ΑΒΛ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΘΚ (I. 23), καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μίαν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΛ, ΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ πρὸς δύο τὰς ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΚ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Ε, Θ γωνίαι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΒΓ, τῶν ὁποίων ἡ ΗΘΚ $=$ ΑΒΛ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ παρὰ τὸ Ε γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΛΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ γωνία ΔΕΖ $>$ ΛΒΓ, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΛΓ. Ἐδείχθη δὲ ΗΚ $=$ ΑΛ· εἶναι ἄρα ΔΖ $+$ ΗΚ $>$ ΑΛ $+$ ΛΓ· ἀλλὰ αἱ ΑΛ $+$ ΛΓ $>$ ΑΓ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι ΔΖ $+$ΗΚ $>$ ΑΓ. Τῶν εὐθειῶν ἄρα ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται· εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

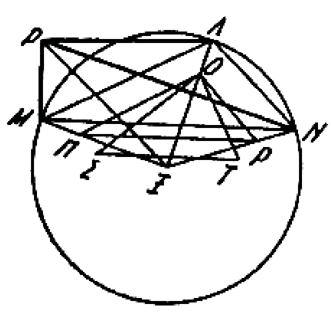
Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 23.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ. λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση. καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον. ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ



κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστιν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δύο ταῖς ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα



ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ καὶ ἴσην αὐτὴν ἀποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον

2.

Εἰς τὸ βιβλ. XI θεώρ. 23.

Ἀλλ' ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΞΛ. Λέγω πάλιν ὅτι εἶναι ΑΒ $>$ ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ΑΒ $\overline{\overline{<}}$ ΛΞ. Ἔστω πρότερον ἴση. Εἶναι λοιπὸν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι πρὸς τὴν ΜΝ, ἴσαι. Ἀλλὰ ἐλήφθη ΜΝ $=$ ΔΖ. Εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΔΕ $+$ ΕΖ ἴσαι πρὸς τὴν ΔΖ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα. Διότι κατὰ μείζονα λόγον τὸ ἀδύνατον θὰ εἶναι μεγαλύτερον. Εἶναι ἄρα ΑΒ $>$ ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ἀνυψώσωμεν τὴν ΞΡ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ὥστε νὰ εἶναι ΞΡ^2 $=$ ΑΒ^2 $-$ ΛΞ^2, συντίθεται πάλιν τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΜΞ. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως εἶναι ΑΒ $>$ ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴση ἢ μικροτέρα. Ἔστω πρότερον ἴση. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΛ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΑΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΜΛ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΞΛ (Ι. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΞΝ. Ὅλη ἄρα ἡ ΜΞΝ εἶναι ἴση πρὸς ΑΒΓ $+$ ΗΘΚ. Ἀλλὰ αἱ ΑΒΓ $+$ ΗΘΚ $>$ ΔΕΖ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΜΞΝ $>$ ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΝ, καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΜΝ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΜΝΞ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ (Ι. 8). Ἐδείχθη δὲ καὶ μεγαλυτέρα· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Ἐν συνεχείᾳ δὲ θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα. Εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα. Καὶ ἐὰν πάλιν ἀνυψώσωμεν τὴν ΞΡ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ λάβωμεν αὐτὴν οὕτως, ὥστε ΞΡ^2 $=$ ΑΒ^2 $-$ ΛΞ^2, πάλιν συντίθεται τὸ πρόβλημα.

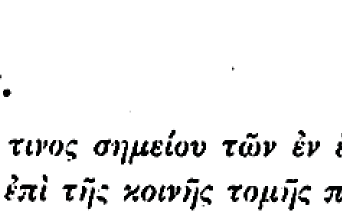
Λέγω λοιπόν, ὅτι οὔτε μικροτέρα εἶναι ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω. Καὶ ἃς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, πρὸς δὲ τὴν ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ $=$ΒΓ, εἶναι καὶ ΞΟ $=$ ΞΠ. Ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΟΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΠΜ. Εἶναι ἄρα ἡ ΛΜ τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστι μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δύο ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον.

3.

Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΑ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται.



μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔστω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, παράλληλος πρὸς τὴν ΠΟ (VI. 2) καὶ τὸ τρίγωνον ΛΜΞ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΠΞΟ (I. 29). Εἶναι ἄρα ΞΛ : ΛΜ = ΞΟ : ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ΛΞ : ΞΟ = ΛΜ : ΟΠ. Εἶναι δὲ ΛΞ > ΞΟ· εἶναι ἄρα καὶ ΛΜ > ΟΠ (V. 14). Ἀλλὰ ΛΜ = ΑΓ· εἶναι ἄρα καὶ ΑΓ > ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΠ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΟΠ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΟΞΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ἐὰν λάβωμεν τὴν ΞΡ ἴσην πρὸς ἑκατέραν τῶν ΞΟ, ΞΠ καὶ φέρωμεν τὴν[1] ΟΡ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΗΘΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΟΞΡ. Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΞ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Ξ, ὡς κορυφῆς, γωνία ΛΞΣ = ΑΒΓ καὶ γωνία ΛΞΤ = ΗΘΚ, καὶ ἂς ληφθῇ ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ ἴση πρὸς τὴν ΟΞ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΣ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΟΞΣ, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΟΣ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΛΝ = ΟΤ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ, εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΣΟ, ΟΤ, καὶ ἡ γωνία ΜΛΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΣΟΤ, εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΜΝ μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΣΤ (I. 24). Ἀλλὰ ΜΝ = ΔΖ· εἶναι ἄρα καὶ ΔΖ > ΣΤ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΣΞ, ΞΤ, καὶ ἡ βάσις ΔΣ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΣΤ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΣΞΤ (I. 25). Εἶναι δὲ ἡ ΣΞΤ = ΑΒΓ + ΗΘΚ. Ἡ γωνία ἄρα ΔΕΖ > ΑΒΓ + ΗΘΚ. Ἀλλὰ καὶ μικροτέρα· ὅπερ ἀδύνατον.

[1. Σημ. Πρόκειται περὶ τῆς ΟΡ ἐντὸς τοῦ κύκλου.]

3.

Εἰς τὸ βιβλ. XI θεώρ. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἀπό τινος σημείου ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, ἡ ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

Διότι ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΑ.

Διότι ἂς μὴ πέσῃ, καὶ εἰ δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ ἂς συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ ἔστω κάθετος ἡ ΖΗ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ (XI. ὁρ. 4), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ, ἡ γωνία ἄρα ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ. ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Εἰς βιβλ. XII θεώρ. 4.

Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΒΚΛΞ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΠΕΡΦ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. συνθέντι ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Εἰς βιβλ. XII θεώρ. 17.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ', καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΑ'. τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης

ΖΗΕ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ· ἄρα ἡ ΕΖΗ εἶναι ὀρθή. Εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ἴσαι πρὸς ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον (Ι.17). Δὲν θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀγομένη κάθετος ἐκτὸς τῆς ΔΛ. Θὰ πέσῃ ἄρα ἐπὶ τὴν ΔΛ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Εἰς τὸ βιβλ. XII θεώρ. 4.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ἀλλ' ὅμως καὶ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, εἶναι ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΚΛΞ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΟ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΔ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ ΠΕΡΦ, ἀπέναντι δὲ ἡ ΣΤ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ΚΒΞΛΜΟ + ΛΞΓΜΝΟ : ΛΞΓΜΝΟ = ΠΕΦΡΣΤ + ΡΦΖΣΤΥ : ΡΦΖΣΤΥ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΚΒΞΛΜΟ + ΛΞΓΜΝΟ : ΛΞΓΜΝΟ + ΡΦΖΣΤΥ = ΛΞΓΜΝΟ : ΡΦΖΣΤΥ. Ὡς δὲ τὸ πρίσμα ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὸ πρίσμα ΡΦΖΣΤΥ, οὕτως ἐδείχθη ἡ βάσις ΛΞΓ πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΜΝΟ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΤΥΘ δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΜΝΟ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΤΥΘ δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ ἀποδειχθῶσι καὶ ἐπὶ τῶν προκυπτόντων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πυραμίδων ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ καὶ ἁπλῶς ὅλων τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Εἰς τὸ βιβλ. XII θεώρ. 17.

Ὅμως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἄλλως προχειρότερον, ὅτι ΑΨ > ΑΗ. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ ἡ ΗΛ', καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΛ'. Τέμνοντες λοιπὸν τὸ τόξον ΕΒ δίχα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ καταλείψωμεν τόξον τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τόξου τοῦ

τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΑ'. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΑ'. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία. μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΚΒ μείζων ἐστὶν ἡ ΗΑ'· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΑ' μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΑ' τῇ ΑΒ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΑ' τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΑ' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ', τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ'· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

6.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 6.

Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστι. ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σύμμετρον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστι. κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΓ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΑ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. τὸ δὲ ᾱ ἀποτομὴν παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΒ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστιν. ἐὰν ἄρα ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστιν.

7.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφότερος ἡ ὅλη καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

κύκλου ΒΓΔΕ τοῦ ἔχοντος χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ΗΛ'. Ἂς ὑπολειφθῇ καὶ ἔστω τὸ τόξον ΚΒ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΒ μικροτέρα τῆς ΗΛ'. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΒΚΣΟ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, καὶ εἶναι $ΟΒ = ΒΚ = ΚΣ$, καὶ ἡ ΟΣ εἶναι μικροτέρα, εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα ἡ γωνία ΒΨΚ. Ἄρα $ΚΒ > ΒΨ$. Ἀλλ' εἶναι $ΗΛ' > ΚΒ$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $ΗΛ' > ΒΨ$· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς $ΗΛ' >$ τοῦ $ΒΨ^2$. Καὶ ἐπειδὴ $ΛΛ' = ΛΒ$, εἶναι καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΛΛ' ἴσον πρὸς $ΛΒ^2$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΛΛ' εἶναι ἴσα τὰ $ΛΗ^2 + Λ'Η^2$, πρὸς δὲ τὸ $ΛΒ^2$ εἶναι ἴσα τὰ $ΒΨ^2 + ΨΛ^2$· εἶναι ἄρα $ΛΗ^2 + Λ'Η^2 = ΒΨ^2 + ΨΛ^2$, τῶν ὁποίων τὸ $ΒΨ^2 < Λ'Η^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΨΛ^2 > ΛΗ^2$· εἶναι ἄρα $ΛΨ > ΛΗ$.

6.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 6.

Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἀποτομή. Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ῥητὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ. Τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι σύμμετρον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή. Ἂς ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ ἡ ΑΔ (σχῆμα 0. 6 τοῦ XIII). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$, εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΔΑ^2$, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΔΓ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΔΓ^2 = 5ΔΑ^2$, ἄρα τὸ $ΔΓ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ὃν λόγον ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΓ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΑ. Καὶ ἑκατέρα εἶναι ῥητή· ἄρα αἱ ΓΔ, ΔΑ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ ῥητή, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ παρεβλήθη τὸ $ΑΓ^2$ ὡς ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$. Τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ἀποτομὴν πρώτην (X. 97). Καὶ ἡ ΓΒ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἀποτομή.

7.

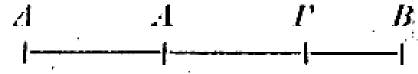
Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, θὰ εἶναι ὡς τὸ ἄθροισμα ὅλης μὲ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα.

Διότι ἂς τμηθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς $ΒΑ + ΑΓ : ΑΒ = ΒΑ : ΑΓ$.

Κείσθω γὰρ τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΔΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



8.

Εἰς βιβλ. XIII θεωρ. 1 - 5.

Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

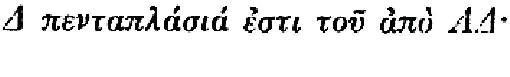
Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Τοῦ $\overline{α}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἔστι δέ· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ.



Διότι ἂς ληφθῇ $ΑΔ = ΑΓ$· λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΔ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$. Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, εἶναι ἄρα ὡς $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΑΔ$: εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ$· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς $ΔΑ : ΑΒ = ΒΓ : ΓΑ$· διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$. Εἶναι δὲ $ΔΑ = ΑΓ$· εἶναι ἄρα ὡς $ΒΑ + ΑΓ : ΑΒ = ΒΑ : ΑΓ$. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$, εἶναι δὲ $ΓΑ = ΔΑ$, εἶναι ἄρα ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ$. Καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα, ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεωρ. 1-5

Τί εἶναι ἀνάλυσις καὶ τί εἶναι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν λοιπὸν εἶναι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ἀποδειχθέντος, διὰ τῶν ἑπομένων συλλογισμῶν ἀποδεικνυομένου ὡς ἀληθοῦς.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ἀποδεικνυομένου, διὰ σειρᾶς ἀληθῶν προτάσεων.

Τοῦ α' θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ σχήματος.

(σχ. θεωρήματος).

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ $ΓΔ^2 = 5ΑΔ^2$.

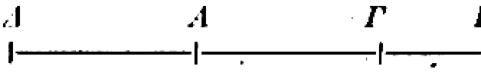
Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΑΔ^2$, τὸ δὲ $ΓΔ^2 = ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ$, εἶναι ἄρα $ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ = 5ΑΔ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $ΓΑ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ = 4ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $2ΓΑ \times ΑΔ = ΒΑ \times ΑΓ$· διότι $ΒΑ = 2ΑΔ$· καὶ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΒΓ$· διότι ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον· εἶναι ἄρα $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = 4ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = ΑΒ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 4ΑΔ^2$. Εἶναι δέ· διότι $ΑΒ = 2ΑΔ$.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΒΑ τὸ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{\beta}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.



Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἔστι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΑ. διελόντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως

Σύνθεσις.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $AB^2 = 4A\Delta^2$, ἀλλὰ τὸ $BA^2 = BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma$ (II. 2), εἶναι ἄρα $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. Ἀλλὰ $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$, καὶ $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$· εἶναι ἄρα $A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 4A\Delta^2$· ὥστε $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times \Gamma A = 5A\Delta^2$. Τὰ δὲ $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = \Gamma\Delta^2$ (II. 4). Εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma\Delta^2 = 5A\Delta^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ β' θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ σχήματος.

(σχ. θεωρήματος).

Διότι ἂς εἶναι τὸ τετράγωνον εὐθείας τινὸς τῆς ΓΔ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου μέρους αὐτῆς τῆς ΔΑ, τῆς δὲ ΔΑ ἔστω διπλασία ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. Εἶναι δὲ καὶ $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$· διότι ἡ $BA = 2A\Delta$· εἶναι ἄρα $AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $AB^2 = 2\Delta A + A\Gamma + A\Gamma^2$. Εἶναι δὲ τὸ $AB^2 = 4\Delta A^2$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $2\Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4A\Delta^2$· ὥστε $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$. Εἶναι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$, τὸ δὲ $\Gamma\Delta^2 = \Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma$, εἶναι ἄρα $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 5\Delta A$. Δι' ἀφαιρέσεως εἶναι $2\Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4\Delta A^2$· εἶναι δὲ καὶ $AB^2 = 4A\Delta^2$· εἶναι ἄρα $2\Delta A \times A\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $BA \times A\Gamma$ σὺν $A\Gamma^2 = AB^2$. Ἀλλὰ $AB^2 = AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$ (II. 2)· εἶναι ἄρα $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$· καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $BA \times A\Gamma$, τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$· εἶναι ἄρα $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. Εἶναι δὲ $BA > A\Gamma$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $A\Gamma > \Gamma B$· ἡ ΑΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{\gamma}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

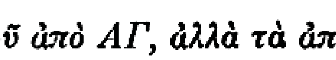
'Επεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ· διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἔστι δέ· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ.

'Η σύνθεσις.

'Επεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{\delta}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ.



'Επεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· διελόντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δέ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

'Η σύνθεσις.

'Επεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καί ἐστι μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ,

Τοῦ γ' θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι ἂς τμηθῆ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἥμισυ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ $ΒΔ^2 = 5ΓΔ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΒΔ^2 = 5ΓΔ^2$, τὸ δὲ $ΔΒ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2$ (II. 6), εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2 = 5ΔΓ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ = 4ΔΓ^2$. Εἶναι δὲ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΓ^2 = 4ΔΓ^2$. Εἶναι δέ· διότι $ΑΓ = 2ΔΓ$.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπειδὴ $ΑΓ = 2ΔΓ$, εἶναι τὸ $ΑΓ^2 = 4ΔΓ^2$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΒΓ$· εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = 4ΔΓ^2$. Διὰ προσθέσεως ἄρα εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2 = 5ΔΓ^2 = ΔΒ^2$ (II. 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δ' θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ ἂς τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$, ἀλλὰ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2$ (II. 7), εἶναι ἄρα $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = 3ΑΓ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $2ΑΒ \times ΒΓ = 2ΑΓ^2$· ὥστε $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$. Εἶναι δέ· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ εἶναι μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· εἶναι ἄρα $2ΑΒ \times ΒΓ =$

ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· συνθέντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ ε̅ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ

πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δέ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 17.

Ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ. προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. ῥητὴ δὲ

ἡ ΑΒ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστιν· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ.

$2ΑΓ^2$· καὶ διὰ προσθέσεως ἄρα εἶναι $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = 3ΑΓ^2$. Ἀλλὰ $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (II. 7)· εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ ε' θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἄς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἄς ληφθῇ $ΑΔ = ΑΓ$· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ, εἶναι ἄρα $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ$. Εἶναι δὲ $ΑΔ = ΑΓ$· εἶναι ἄρα $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων ἄρα εἶναι $ΒΔ : ΔΑ = ΑΒ : ΒΓ$ (V. 19 πόρ.) καὶ διὰ διαιρέσεως ἄρα τῶν λόγων εἶναι $ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ$ (V. 17). Εἶναι δὲ $ΑΔ = ΑΓ$· εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$. Εἶναι δέ· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΑΔ$· εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ$· καὶ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (V. 18) εἶναι $ΒΔ : ΔΑ = ΑΒ : ΒΓ$· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων εἶναι (V. 19 πόρ.) $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΑΔ$· εἶναι ἄρα $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ$. Ἡ ΔΒ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 17.

Διότι ἡ ῥητὴ ΑΒ ἄς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΑΓ. Ἄς πρόσκειται δὲ ἡ $ΑΔ = ΑΒ : 2$. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$ (XIII. 1), εἶναι ἄρα αἱ ΓΔ, ΔΑ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΒ. Τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος ἀποτομὴν (X. 97)· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ εἶναι ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ.

10.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 18.

Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΒ τριγώνῳ. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μεῖζόν ἐστιν. μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ. μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΒΝ μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστιν, δείξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστιν, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΒ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ δύο τῶν ἀπὸ ΒΝ μεῖζόν ἐστιν. ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ ΒΝ μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 18.

Ἄλλως ὅτι ἡ $MB > NB$.

Διότι, ἐπειδὴ $\Lambda\Delta = 2\Delta B$, εἶναι ἄρα $AB = 3B\Delta$. Εἶναι δὲ $AB : B\Delta = AB^2 : BZ^2$, διότι τὸ τρίγωνον ZAB εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον $Z\Delta B$. Εἶναι ἄρα τὸ $AB^2 = 3BZ^2$. Ἐδείχθη δὲ τὸ $AB^2 = 5K\Lambda^2$. Εἶναι ἄρα $5K\Lambda^2 = 3ZB^2$. Ἀλλὰ εἶναι $3ZB^2 > 6NB^2$. Καὶ ἄρα $5K\Lambda^2 > 6NB^2$. Ὥστε καὶ ἓν τὸ $K\Lambda^2 > NB^2$. Εἶναι ἄρα $K\Lambda > NB$. Εἶναι δὲ $K\Lambda = \Lambda M$. Εἶναι ἄρα $\Lambda M > NB$. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $MB > BN$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ $3ZB^2 > 6NB^2$, ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς· διότι, ἐπειδὴ $BN > NZ$, εἶναι ἄρα $ZB \times BN > BZ \times ZN$. Εἶναι ἄρα $ZB \times BN + BZ \times ZN > 2BZ \times ZN$. Ἀλλὰ $ZB \times BN + BZ \times ZN = ZB^2$ (II. 2), καὶ $BZ \times ZN = NB^2$. Εἶναι ἄρα $ZB^2 > 2BN^2$. Ἓν ἄρα τὸ ZB^2 εἶναι μεγαλύτερον δύο BN^2. Ὥστε καὶ $3ZB^2 > 6BN^2$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II.

λϛʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΕ, ΖΔ, ΔΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΗΔ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΚ στερεόν, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΛ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΕΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΜΛ, ΛΝ, ΝΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛΜ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΜ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἑκατέρα τῶν ΞΛ, ΛΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΠ στερεόν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΔΕ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΞΛ, ΛΟ, ἡ δὲ Γ τῇ ΔΘ, ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΜΛ, οὕτως ἡ ΟΛ πρὸς τὴν ΔΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, ΘΡ παραλληλόγραμμον τῷ ΟΛΜΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφεστᾶσιν αἱ ΗΔ, ΞΛ, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἀφῃρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΗΔ, ΞΛ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ τῷ ΛΠ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς Β. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.

36.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης ἰσόπλευρον μὲν στερεόν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προειρημένον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἀναλογίᾳ αἱ Α, Β, Γ, ὡς $Α : Β = Β : Γ$. Λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν $Α \times Β \times Γ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον στερεόν. Ἂς ληφθῇ $ΛΕ = Α$ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ ἂς κατασκευασθῇ πρὸς τυχοῦσαν εὐθύγραμμον στερεὰν γωνίαν ἴση εὐθύγραμμος στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΕ, ΖΔ, ΔΘ, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν Β ἴση ἡ ΗΔ, πρὸς δὲ τὴν Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν ΔΚ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΛΜ = Β$, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΛ καὶ μὲ κορυφὴν ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Λ πρὸς τὴν στερεὰν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΕΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ εὐθύγραμμος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΜΛ, ΛΝ, ΝΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛΜ, ὥστε νὰ εἶναι ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ΝΛ, ΛΜ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΞ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν Β ἴση ἑκατέρα τῶν ΞΛ, ΛΟ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν ΛΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Β : Γ$, ἴση δὲ ἡ μὲν Α πρὸς ΔΕ, ἡ δὲ Β πρὸς ἑκατέραν τῶν ΞΛ, ΛΟ, ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν ΔΘ, εἶναι ἄρα $ΔΕ : ΜΛ = ΟΛ : ΔΘ$. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (VI. 14)· εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΔΘ, ΘΡ ἴσον πρὸς τὸ ΟΛΜΣ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἔχουσιν ἀχθῇ κάθετοι ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αἱ ΗΔ, ΞΛ, περιέχουσιν ἴσας γωνίας τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἀφοῦ γίνει ἀφαίρεσις εἶναι ἴσαι αἱ εὐθεῖαι ΗΔ, ΞΛ, αἱ κάθετοι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ξ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ θὰ εἶναι ἴσαι. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι ἴσα, εἶναι ἴσα. Εἶναι ἄρα τὸ $ΔΚ = ΛΠ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ $Β^3$. Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεὸν ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προειρημένον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὗται ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἡ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν· πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο. ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ πρὸς τὴν ΗΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣΤ τῷ ΗΝ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΣΥ στερεόν. τὸ ΕΜ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΥ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΝ τῷ ΣΥ, καὶ ὁμόλογός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, ἴση δὲ ἡ ΣΤ τῷ ΗΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύβου διαμέτρου.

37.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀνάλογοι, εἶναι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογα. Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα, καὶ αὗται εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ. Διότι ἂς γίνῃ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΓΔ : Ξ = Ξ : Ο. Ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· εἶναι δὲ ΕΖ : ΗΘ = ΗΘ : Π = Π : Ρ. Εἶναι ἄρα ΕΖ : Ρ = ΕΜ : ΗΝ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, ἀλλὰ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΓΔ : Ξ = Ξ : Ο, ὡς δὲ ΕΖ : ΗΘ = ΗΘ : Π = Π : Ρ, δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ΑΒ : Ο = ΕΖ : Ρ (V. 22). Ἀλλὰ ΑΒ : Ο = στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΓΛ, καὶ ΕΖ : Ρ = στερεὸν ΕΜ : στερεὸν ΗΝ. Ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ.

Ἔστω τώρα πάλιν ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ. Διότι ἂς γίνῃ ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΣΤ ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΝ καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, εἶναι ἄρα καὶ ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΣΤ. Τὸ ΕΜ ἄρα ἔχει πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΤ τὸν αὐτὸν λόγον. Εἶναι ἄρα τὸ ΗΝ = ΣΤ, καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΣΤ. Εἶναι ἄρα ΗΘ = ΣΤ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, εἶναι δὲ ΣΤ = ΗΘ, εἶναι ἄρα ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τοῦ κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐκβληθῶσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων θὰ τέμνῃ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου δίχα, καὶ αὐτὴ θὰ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου.

κύβου γὰρ τοῦ ΑΒ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΣΤ, διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν τοῦ κύβου διαμέτρων.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΕ ἡμίσεια ἡ ΓΝ, τῆς δὲ ΔΑ ἡμίσεια ἡ ΛΑ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΛΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΣΝ τῇ ΣΛ ἴση. δύο δὴ αἱ ΓΝ, ΝΣ δυσὶ ταῖς ΛΑ, ΛΣ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΝΣ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΛΑ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΓΣ βάσει τῇ ΣΑ ἴση, καὶ τὸ ΓΝΣ τρίγωνον τῷ ΛΑΣ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν ΝΣ, ΣΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ταῖς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΝΣ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΣΝ, ΝΣΑ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΣ τῇ ΣΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΤ τῇ ΤΗ ἐπ᾽ εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ τῇ ΕΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι παράλληλοι εἰσίν, αἱ ΓΒ, ΑΗ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΒΗ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΣΑ, τῆς δὲ ΒΗ ἡμίσεια ἡ ΒΤ. αἱ ΣΑ, ΒΤ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΣΤ, ΑΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΣΥ τῇ ΥΤ, ἡ δὲ ΑΥ τῇ ΥΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ´.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ ΚΛΝ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ ΒΓΔΕ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΔ, ΠΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τοῦ ΝΚΛ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου δι-

Διότι ἂς τμηθῶσιν τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τοῦ κύβου ΑΒ τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἂς ἐκβληθῶσιν ἐπίπεδα τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΣΤ, διαγώνιος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. Λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ τέμνει δίχα τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου, καὶ αὕτη θὰ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΓΕ = ΔΑ$, καὶ εἶναι $ΓΝ = \frac{1}{2} ΓΕ$ καὶ $ΛΑ = \frac{1}{2} ΔΑ$, εἶναι ἄρα $ΓΝ = ΛΑ$· εἶναι δὲ καὶ $ΣΝ = ΣΛ$. Δύο λοιπὸν αἱ ΓΝ, ΝΣ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΛΑ, ΛΣ· καὶ ἡ γωνία $ΓΝΣ =$ γων. ΣΛΑ· ἡ βάσις ἄρα $ΓΣ =$ βάσιν ΣΑ, καὶ τὸ τρίγωνον $ΓΝΣ =$ τρίγ. ΑΛΣ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· εἶναι ἄρα ἡ γωνία τῶν πλευρῶν ΓΣ, ΣΝ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ΛΣ, ΣΑ. Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ γωνία τῶν πλευρῶν ΝΣ, ΣΛ· εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΛ ἴσαι πρὸς τὰς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΛΣ, ΣΝ. Ἀλλὰ αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· εἶναι δηλ. ἐπί τινος εὐθείας τῆς ΝΣ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΝΣ καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς $ΓΣΝ + ΝΣΑ$ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· κεῖται ἄρα ἡ ΓΣ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ΣΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΤ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ΤΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἀλλὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι παράλληλοι (XI. 9), εἶναι ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΗ ἴσαι καὶ παράλληλοι. Καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΓΑ, ΒΗ, καὶ εἶναι $ΣΑ = \frac{1}{2} ΓΑ$, καὶ $ΒΤ = \frac{1}{2} ΒΗ$. Εἶναι ἄρα αἱ ΣΑ, ΒΤ ἴσαι καὶ παράλληλοι· καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΣΤ, ΑΒ. Εἶναι ἄρα $ΣΥ = ΥΤ$ καὶ $ΑΥ = ΥΒ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ καὶ τὸ μὲν ἂς ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, τὸ ΚΛΝ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ $ΒΓΔΕ = 2ΝΚΛ$. Λέγω, ὅτι τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα. Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΝΚΛ, εἶναι δὲ τοῦ τριγώνου ΝΚΛ διπλάσιον τὸ *πλάσιον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΛ τῷ ΝΛ. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ἰσοϋψῆ ἐστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΛ, ΗΛ, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΛ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜ πρίσμα. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἄρα πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν $\overline{ια}$.

XII.

Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{ιβ}$.

1.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ, καὶ ἐν τοῖς ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΖ, ΘΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, ΘΗΜ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΜ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΜ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΜΘ τῇ ὑπὸ ΗΝΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘΗΝ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΝ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΗΘΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ΘΗ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΘΝ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘ ΚΛΜ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον, παραλληλόγραμμον ΝΛ, εἶναι ἄρα ἴσον τὸ ΒΔ πρὸς τὸ ΝΛ. Τὰ ἐπὶ ἴσων λοιπὸν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ὑπάρχοντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ εἶναι ἥμισυ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ δὲ ΗΛ εἶναι ἥμισυ τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.

Εὐκλείδου Στοιχείων ιβ'

1.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ καὶ εἰς τοὺς ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ ἔστωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΖ, ΘΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγ. ΗΘΚΛΜ. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς $ΒΑ : ΑΕ = ΘΗ : ΗΜ$ καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΒΑΕ, ΘΗΜ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΘΜ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΒ = γων. ΗΘΜ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖΒ, ἡ δὲ ΗΜΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΝΘ. Εἶναι δὲ ἡ ὀρθὴ ΒΑΖ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΘΗΝ. Ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΘΝ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΖ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΘΝ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $ΒΖ : ΒΑ = ΘΝ : ΘΗ$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $ΒΖ : ΘΝ = ΒΑ : ΘΗ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 = (ΖΒ : ΘΝ)^2$, εἶναι δὲ καὶ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς πολύγωνον $ΗΘΚΛΜ = (ΑΒ : ΗΘ)^2$, καὶ εἶναι $ΒΖ : ΘΝ = ΑΒ : ΗΘ$, καὶ ὡς ἄρα $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΗΘΚΛΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (σχῆμα XII. 2. Ἀντὶ Σ τὸ Φ καὶ κύκλος $ΕΖΗΘ = Φ + Χ$).

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ. Λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ. Διότι ἐὰν δὲν *οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Φ, καὶ τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ ΦΧ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ. τὸ ΕΖΗΘ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. [ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου]. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Χ χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε ΕΖΘ κύκλου καὶ τοῦ Χ χωρίου ἀφῄρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο ἀεὶ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἔλασσον ἔσται τοῦ Χ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓ ΠΔΡ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωχωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.*

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλ. ΑΒΓΔ : κύκλ. ΕΖΗΘ, θὰ εἶναι πρὸς μικρότερόν τι χωρίον ἢ πρὸς μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Φ, καὶ ἔστω κύκλος ΕΖΗΘ $= Φ + Χ$, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. ["Εκαστον ἄρα τρίγωνον τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος]. Ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος. Ἐὰν λοιπὸν γίνῃ τοιουτοτρόπως ἡ διαίρεσις, θὰ ληφθῶσι τοιαῦτα τμήματα ἐξ ὅλου τοῦ κύκλου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ χωρίου Χ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο μεγέθη ἄνισα καὶ ὁ κύκλος ΕΖΘ καὶ τὸ χωρίον Χ ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφῃρέθη μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο ἔγινε πάντοτε, καὶ ἀπέμεινε χωρίον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ Χ (Χ. 1). Τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χωρίου Φ. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Φ, ἀλλ' ὅμως εἶναι καὶ $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ, εἶναι ἄρα κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Φ $=$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐντὸς αὐτοῦ πολύγωνον, οὕτως τὸ χωρίον Φ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛ ΗΜΘΝ. Εἶναι δὲ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ μεγαλύτερος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· εἶναι ἄρα καὶ τὸ χωρίον Φ μεγαλύτερον τοῦ πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἀλλ' ὅμως τὸ Φ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς μικρότερόν τι χωρίον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸ Φ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $ΖΘ^2 : ΔΒ^2 =$ χωρίον Φ : κύκλον ΑΒΓΔ. Ὡς δὲ τὸ χωρίον Φ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς μικρότερόν τι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ χωρίον. Ὡς ἄρα τὸ $ΖΘ^2 : ΒΔ^2 =$ κύκλος ΕΖΗΘ : μικρότερόν τι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἀπεδείχθη. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : μεγαλύτερόν τι τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ χωρίον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ.

3.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μὲν ἔστω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΖΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΕΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΖΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΘ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ. καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΘΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΔ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον τῷ ΖΘΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΘ τρίγωνον τῷ ΖΔΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. τὸ δὲ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΘΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ κεῖνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΔΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΕΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΘΔ, ΔΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΔΚ ἴση ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τῷ ΘΔΚ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διῄρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΗΛΒ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΛΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ᾖ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἔτι τοῦ ΖΘΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. διῄρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο

3.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (σχ. XII. 3). Λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ διαιρεῖται καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Ἂς τμηθῶσιν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΖ = ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ = ΘΔ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΘ. Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ = ΖΔ, εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Εἶναι ἄρα τὸ ΕΒΖΘ παραλληλόγραμμον. Εἶναι ἄρα ἡ μὲν ΕΒ = ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ = ΒΘ. Ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ = ΕΑ, ἡ δὲ ΒΘ = ΘΛ. Καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ = ΘΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΖ = ΖΔ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΘΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΘ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΔΚ. Τὸ δὲ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ, εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ, καὶ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας (XI. 10). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΕΖΗ = γων. ΘΔΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΘΔ, ΔΚ ἀντιστοίχως, καὶ γωνία ΕΖΗ = γων. ΘΔΚ, ἡ βάσις ἄρα ΕΗ = βάσιν ΘΚ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΖΗ = τρίγ. ΘΔΚ καὶ ὅμοιον. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, εἶναι ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ. [Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ]. Διῃρέθη ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην.

Λέγω τώρα, ὅτι διῃρέθη καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Διότι ἐπειδὴ ἡ ΒΛ = ΛΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗΛΒ = δύο τρίγωνα ΗΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου (XI. 39) τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἀκόμη τοῦ ΖΘΛΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. Διῃρέθη ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα

πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

4.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΛΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΓ τριγώνῳ. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΛ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΜΝΞ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΗΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΝ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΥΤ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΑΕΗ βάσις πρὸς τὴν ΜΠΣ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΛΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΠΣΡ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ ΖΘΚ βάσις πρὸς τὴν ΤΡΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΡΤΥΟ πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἴσα, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πυραμίδες οὖσαι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο ἴσα πρίσματα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἄλλης πυραμίδος, οὕτως πάντα τὰ εἰς τὴν μίαν πυραμίδα πρίσματα πρὸς πάντα τὰ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα ἰσοπληθῆ πρίσματα.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες οὖσαι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Δ, Ο, καὶ ἃς διαιρεθῇ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως πάντα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς πάντα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἰσοπληθῆ πρίσματα.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΗ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν ΝΞ καὶ ΞΦ. Καὶ εἶναι ΒΓ : ΓΛ = ΝΞ : ΞΦ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΜΝΞ πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΦΞ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΗΛΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΦΞ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΤΝ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΤΥ. Ἀλλὰ τὰ μὲν πρίσματα εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσια τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ. Τὰ δὲ πρίσματα εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ εἶναι διπλάσια τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΤΥ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρίσματα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΕΗ πρὸς τὴν βάσιν ΜΠΣ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΕΗΖ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΠΣΡ πρίσματα. Ὡς δὲ ἡ βάσις ΖΘΚ πρὸς τὴν βάσιν ΤΡΥ, οὕτως εἶναι τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΖΘΚΔ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΡΤΥΟ πρίσματα. Θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα.

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ αἱ ΑΒΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ Ω, καὶ τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ Ω, Χ χωρία, καὶ διῃρήσθω ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἳ ἔσονται ἐλάσσονες τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ Χ. λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διῃρήσθω ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ὁμοίως τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ ΑΒΓΔ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων πάντων. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρισμάτων πάντων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν. ὡς ἄρα ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, αἱ ΑΒΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Δ, Ο. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ, θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ἢ πρὸς μικρότερον τῆς ΜΝΞΟ στερεὸν ἢ πρὸς μεγαλύτερον. Ἔστω πρὸς μικρότερον τὸ Ω καὶ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἔστωσαν ἴσα τὰ χωρία Ω + Χ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα. Εἶναι ἄρα τὰ πρίσματα μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος (XII, 3). Τέμνοντες τώρα (συνεχῶς) τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα θὰ λάβωμεν πυραμίδας τινὰς ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ στερεοῦ Χ. Ἂς λάβωμεν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι ἴση πρὸς τὰ στερεά, τὰ ληφθέντα ἀποτμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ Χ. Τὰ ὑπόλοιπα ἄρα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ στερεοῦ Ω. Ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ὁμοίως πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα, εἶναι ἄρα ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν Ω, οὕτως ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς ὅλα τὰ εἰς αὐτὴν πρίσματα, οὕτως τὸ στερεὸν Ω πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ὅλων τῶν εἰς αὐτὴν πρισμάτων (XII, 3). Εἶναι ἄρα καὶ τὸ στερεὸν Ω μεγαλύτερον ὅλων τῶν εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρισμάτων. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΜΝΞΟ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΜΝΞ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως τὸ στερεὸν Ω πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Ω πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ. Ὡς ἄρα ἡ βάσις ΜΝΞ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως εἶναι ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ· ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, *ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΜΝΞΟ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὔτε πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημείωσις. Όπου εἰς τὰ θεωρήματα τῶν παραρτημάτων δὲν ὑπάρχουσι σχήματα, νοοῦνται τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων εἰς τὰ οἰκεῖα Βιβλία τῶν Στοιχείων.

Τὰ θεωρήματα 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 τῆς ἐκδόσεως Heiberg τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν δὲν ἔχουσι σχήματα καὶ αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν δὲν συμφωνοῦσι πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου. Κατόπιν τούτου δὲν προέβημεν εἰς τὴν μετάφρασιν αὐτῶν οὔτε ἠθελήσαμεν νὰ ἐπιφέρωμεν μεταβολὰς εἰς τὰ γράμματα, διὰ νὰ προσαρμόσωμεν τὰς ἀποδείξεις πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὀρθῆς διατυπώσεως θὰ πρέπῃ νὰ γίνῃ ἀντιβολὴ πρὸς τοὺς παπύρους τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Βατικανοῦ ἢ ἄλλης τινὸς Βιβλιοθήκης, ἔνθα ὑπάρχουσιν οἱ συναφεῖς κώδικες τῶν Στοιχείων. Ἐν ἐλλείψει τῶν παπύρων θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ προσαρμογὴ τῶν ἀποδείξεων πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου.

7.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ἔστω πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν ΓΖΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΒΖ, ΖΕ. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Β σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μέν εἰσιν ΑΒΓΔ, ΕΑΕΖ, κορυφὴ δὲ τὰ Β, Ζ σημεῖα.

8.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΗ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ ΒΔΜΑ, ΖΘΡΟ στερεά. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΖ, ΖΗ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΡ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΑΛ τῷ ΕΘ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΝΒ τῷ ΖΠ. ἀλλὰ τὰ μὲν ΒΝ, ΑΛ, ΒΜ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΑΔ, ΜΝ, ΑΛ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ΖΡ, ΕΘ, ΠΖ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘΟ, ΕΟ, ΡΗ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα το ΒΔΜΑ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΔΜΑ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΖΘΡΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΑ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓ πυραμὶς τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς· καὶ ἡ ΑΒΓΑ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

9.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΔ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΔΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΕΖΗΘ ἑξαπλάσιον τὸ ΖΘΡΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος. ὡς δὲ ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΔΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν καὶ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ἀντιπεπονθέτωσαν δὴ πάλιν τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος, ὡς δὲ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων καὶ τῶν ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ, ΑΒΓΔ πυραμίς, τοῦ δὲ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσον.

ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἤτοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ ΡΣ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνεσταμένων πρισμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τοῦ Ρ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ Ρ στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ΕΖΗΘ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθή-

10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κύλινδρος τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ἄρα ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου κατὰ τὸ ΡΣ στερεόν. Καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Τὸ ἀνυψωθὲν ἄρα πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἕκαστον τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος. Ἐὰν γίνῃ συνεχῶς τοιαύτη κατασκευή, θὰ ληφθῶσι τμήματά τινα τοῦ ὅλου κυλίνδρου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ Ρ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἂς εἶναι τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. Τὸ ἀπομεῖναν ἄρα πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος τῆς ἐχούσης βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ μὲ τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται εἰς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μικρότερος. Ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ στερεοῦ Ρ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον. Εἶναι ἄρα ἡ ἀνυψωθεῖσα πυραμὶς μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἂς ἀνασταθῇ ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον. Ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Ἐὰν γίνῃ *σεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἔλαττον αὐτοῦ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστιν ἡ ΑΕΒ ΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. [τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος]ʳ τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν.*

11.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, ἔσται ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Α στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΕΞ, ΞΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΖΘΜΝ κῶνος τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΞΖ, ΘΗΠ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Α στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΞΖΟ ΗΠΘΡ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΓΒΤΓΥΔΦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΣΒΠΥΔΦ συνεχῶς τοιαύτη κατασκευή, θὰ ληφθῶσι τμήματά τινα ἐξ ὅλου τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ (Ρ). Ἂς ληφθῶσιν καὶ ἔστω ὅτι ἔχουσιν ἀνυψωθῆ πυραμίδες ἀπὸ τῶν τριγώνων ΛΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. Ἡ ἀπομείνασα ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΛΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, [εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος] τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται εἰς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου. Εἶναι ἄρα τριπλάσιος.

πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Λ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Λ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Λ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον· μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Λ στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΘΝ κώνου στερεόν.

λέγω δὴ οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Λ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Λ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον. ὡς δὲ τὸ Λ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου τοῦ ΑΒΓΔΛ στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. καί ἐστι μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου, τοῦ δὲ ΕΖΗΘΝ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κύλινδρον.

12.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς ΖΘ.

εἰ γὰρ μὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Α, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο Π, Ρ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ᾿ ἑκάστου τῶν ΕΞ, ΞΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾿ αὑτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΞΖ, ΖΟΗ, ΗΠΘ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΞΖΟΗ ΠΘΡΕ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΞΖΟΗΠΘΡΕ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε πολύγωνον τὸ ΑΕΒΤΓΥΔΦΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολυγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, τρίγωνον ἐφεστάτω τὸ ΛΣΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΞΟ ΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον ἐφεστάτω τὸ ΝΖΞ τρίγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΚ, ΜΞ. ἐπεὶ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΜΖ. ὡς ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΖ· καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΒ, ΜΝ, ΜΖ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΛ τρίγωνον τῷ ΜΝΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΖΝ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΝΖ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΣΚΛ, ΞΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΚΛ τρίγωνον τῷ ΞΜΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΓ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΚΣ, ΖΜΞ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΣ τρίγωνον τῷ ΖΜΞ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΚ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΞΜ πρὸς ΞΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΞΝ. δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΣ

16

πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ. ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΣΒ τρίγωνον τῷ ΝΞΖ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΚΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΖΞ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜΘ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΘΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΣΚ, ΜΚ, ΦΚΛ, ΚΔΥ, ΥΚΓ, ΚΓΤ, ΚΤΒ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΞΜΕ, ΕΜΡ, ΜΘΡ, ΜΘΠ, ΜΠΝ, ΗΜΘ, ΜΟΖ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΜΟΦΛ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΓΠΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΔΒ. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΜΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεόν. ὁ ΕΖΗΘΜΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ ΑΒΓΔΚΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

13.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΘ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα. ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδήποτε ὁ ΖΞ, ΖΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠΡΣ, ΤΥΦΧ ἴσοι ὄντες τοῖς ΑΒΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΗΡ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΒΗ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶ ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ Η κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶν καὶ ὁ ΠΗ *κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΛ κύλινδρον.*

14.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτό εἰσιν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΒΕ κύλινδρος τῷ ΓΜ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΜ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονί ἐστιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΒΕ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὅ τε ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.

15.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσίν.

ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, [ΕΖΗΘ] κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΕΖ, ΗΘ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος.

τὸ γὰρ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἴσος δέ ἐστιν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΚΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΓΔ βάσει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ, καὶ ἀπὸ *βάσεως τῆς ΓΔ, ὕψους δὲ τοῦ ΗΚ νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ ΓΔΚ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΚ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ ἄρα κώνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*

ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΒΞ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΘΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ τῷ ΕΖ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΚ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΖΒ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, ὡς δὲ τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, οὕτως ὁ ΓΔΘΔΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΔΕΖ.

ἤχθωσαν τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ΖΘ. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΕΖ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΓΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΔ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλήψομέν τινα περιφέρειαν, ἥτις ἔσται ἐλάσσων τῆς ΗΓ. λελήφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΓΜ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΓ, ΓΜ πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΚΜ, ἡ δὲ ΗΘ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου, ἡ ΚΜ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. πολλῷ ἄρα οὐδετέρα τῶν ΚΓ, ΓΜ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ ΚΓ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἑξῆς καὶ ἐπιζευγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖ, καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὖσαι τὸ Α. δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. ποιήσει δὴ τομὰς μεγίστους κύκλους. ποιείτω τοὺς ΑΒΓΔ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ΒΓΔ κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ, ὁ δὲ ΕΖΗ ἐν τῇ ἐλάσσονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ ΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΕ, ΓΔ. καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων ΒΓΔ, ΕΖΗ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΑ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΜΞ καὶ τῆς ΑΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσει δὴ τομὰς κύκλους. ποιείτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ ΓΝΔ, ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΓΔ, ΓΝΔ, ΜΝΞ κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ἑκατέρῳ τῷ ΓΝ, ΜΝ τῇ ΜΓ ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΓΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΝ, ΝΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΟ, ΤΠ, ΕΡ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΟΦ, ἀπὸ δὲ τοῦ Υ ἐπὶ τὴν ΜΞ ἡ ΥΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΝΑ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΝΑ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΓΝΔ κύκλος.

ὁ ΓΝΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΛ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΛ κύκλον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΝΔ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΒΓΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν τῷ ΓΝΔ ἐπιπέδῳ ἡ ΟΦ, ἡ ΟΦ ἄρα καὶ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΧ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΥΧ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΥΜ τῇ ΟΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΜ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΟΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΜ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΜΧ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ καὶ ΔΓΦ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΞΜ. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΦ τῇ ΜΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΓΑ ὅλῃ τῇ ΑΜ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΜΓ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓΘ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΥ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΟ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΓΦΟ γωνία· τῷ δ' ἀπὸ τῆς ΜΥ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΧΟ γωνία· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΧ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΟ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΧΥ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΟ τῇ ΥΧ. ἔστι δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ ΦΧ, ΟΥ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα ΦΧ τῇ ΓΜ ἐστι παράλληλος. καὶ ἡ ΓΜ ἄρα τῇ ΟΥ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεῖα τὰ Ν, Μ, Ο, Γ, καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΜΥ, ΓΟ. αἱ ἄρα ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ, ΟΥ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ ΥΜΓΟ τετράπλευρον. τὸ ἄρα ΥΜΓΟ τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΡΣ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΣΡΝ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΥ τῇ ΓΟ, καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΓ τῇ ΥΟ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Μ, Γ, Υ, Ο σημεῖα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΜΓΥΟ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ. τὸ Ψ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ Μ, Γ, Ο, Υ σημεῖα κύκλου. ἐπεζεύχθω ἡ ΨΓ. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΜΓΟΥ, καὶ τρεῖς αἱ ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΓ τῆς ΥΟ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΦ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ΜΕ ἐπὶ τὴν ΓΦ κάθετος ἡ ΜΩ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΓΩ τῆς ΩΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΩ πρὸς τὴν ΩΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΩΜ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΜ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΛ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ψ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΛ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΩΑ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΩ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΛ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΩ. μείζων ἄρα ἡ ΨΑ τῆς ΑΩ· ἡ δὲ ΑΩ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῷ ἄρα ἡ ΨΑ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΓΟΥ ἐπίπεδόν ἐστιν. τὸ ἄρα ΜΓΟΥ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἑκάστῃ τῶν λοιπῶν τεταρτημορίων τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἕξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψωμεν, ἔσται ἑκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ καὶ τὸ ΝΟΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἑκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετράπλευρα καὶ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

18.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα ἤτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολύεδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ τριπλασίονα λόγον ἤπερ

18.

Αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν αἱ σφαῖραι ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον ὃν οἱ κύβοι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΕΖ.

Διότι ἐὰν ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ δὲν ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν (διαμέτρων) ΒΓ, ΕΖ. Ἂς ἔχῃ πρότερον λόγον ἴσον πρὸς μικροτέραν σφαῖραν τὴν ΗΘΚ καὶ ἂς νοηθῶσιν αἱ σφαῖραι ΔΕΖ, ΗΘΚ ὁμόκεντροι, καὶ ἐν ᾧ ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι αἱ ΔΕΖ, ΗΘΚ νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τῆς μικροτέρας σφαίρας τῆς ΗΘΚ (θ. 17), καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΒΓ ἄρα στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον [πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον]. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἐχέτω τῆς ΔΕΖ σφαίρας πρὸς τὴν Λ ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. ὡς δὲ ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ΑΒΓ σφαῖρα [ἄρα] πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{ιβ}$.

ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον [πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον]. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ σφαῖρα ΗΘΚ πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεοῦ πολυέδρου. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μικροτέραν τῆς ΔΕΖ λόγον ἴσον, πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς σφαῖραν τινα μικροτέραν τῆς ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν οἱ κύβοι τῶν ΕΖ, ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ οὐδὲ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ἔχῃ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ, τὴν σφαῖραν Λ, λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ σφαῖρα Λ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν ὁ κύβος τῆς ΕΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ σφαῖρα Λ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ, οὕτως εἶναι ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς σφαῖράν τινα μικροτέραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ. Καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΕΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὅν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς μικροτέραν. Ἡ σφαῖρα (ἄρα) ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ κύβου τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Βιβλίον XI.

1. «ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ...» θεωρεῖται παρεμβολή, διότι δὲν ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόδειξιν. Εἰς ἄλλους παπύρους (ἐκτὸς τοῦ παπύρου Peyrard, ἰδὲ εἰσαγωγὴν Ι τόμου), ὑπάρχει ἀντὶ τούτου «ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι εἰ μὴ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον· ἄλλως θὰ συμπίπτωσι».

33. Πόρισμα. Αἱ εὐθεῖαι νοοῦνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὡς $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, διὰ νὰ εἶναι $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$. Τὴν πρότασιν ὅμως ταύτην τὴν περιλαμβάνει ὁ δέκατος ὁρισμὸς τοῦ V βιβλίου. Ὅθεν γεννᾶται ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν γνησιότητα τοῦ πορίσματος. Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἐὰν ληφθῇ $\delta = 2\alpha$ καὶ θεωρηθῇ ἡ α ὡς ἀκμὴ κύβου, ἡ $\beta = \alpha\sqrt[3]{2}$ εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ διπλασίου κύβου (δήλιον πρόβλημα).

39. Τὰ πρίσματα νοοῦνται τριγωνικά.

Βιβλίον XII.

2. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα εἶναι θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμὴ περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ σχολιαστοῦ τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, Σιμπλικίου [1] (περὶ τὸ 550 μ. Χ.). Ὁ Σιμπλίκιος ἀρύεται τὰς πληροφορίας του, ὡς λέγει ὁ ἴδιος, παρὰ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Εὐδήμου, ὅστις ἔγραψε τὴν πρώτην ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (ἀπολεσθεῖσαν), καὶ τοῦ Ἀλεξάνδρου τοῦ Ἀφροδισιέως (περὶ τὸ 200 μ. Χ.). Τὸ θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου (τὸ διατυπωθὲν ὅμως τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, ἰδὲ εἰσαγωγὴν εἰς τὸν Ι τόμον, σ. 23) καὶ τὸ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν (πρῶτον θεώρημα τοῦ X βιβλίου). Κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας οἱ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὴν ἐν τῷ θεωρήματι ἐφαρμοζομένην ἀποδεικτικὴν μέθοδον ἐξαντλητικὴν μέθοδον. Ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ὅμως τοῦ διανυομένου αἰῶνος ἀναγνωρίζεται γενικῶς, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἦτο ἀτυχὴς καὶ ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἁπάντων θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

---

1. Σχόλια Σιμπλικίου εἰς Φυσικ. Η' τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἔκδοσις Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου καὶ Ἐγκυκλοπαιδεία Pauly-Wissowa, ἄρθρον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ ($=K_1$), ΕΖΗΘ ($=K_2$) καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν ἀντιστοίχως, αἱ ΒΔ, ΖΘ.

Λέγω, ὅτι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{K_2}$ (1). Ὑποτίθεται $K_1 \neq K_2$.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\lessgtr K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (2), ἔνθα $\Sigma < K_2$, καὶ $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρὰ ἐπιφάνεια.

Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν καὶ ἐγγράφομεν τετράγωνον. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου, δηλ. τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον K_2 ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κλπ. μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὰ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα μεταξὺ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνομεν κάποτε μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κύκλου (K_2) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἀπέμειναν τέσσαρα κυκλικὰ τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΚΖ. Ἐὰν ἐγγράψωμεν ὀκτάγωνον καὶ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐξ ἑκάστου τῶν 4 κυκλικῶν τμημάτων ΕΚΖ (ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διότι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΚΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΕΚΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΚΖ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ὅθεν κατὰ τὴν ἐγγραφὴν ὀκταγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει 4 τρίγωνα ΕΚΖ, ἤτοι περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Κατὰ τὴν ἐγγραφὴν δεκαεξαγώνου θὰ ἔχωμεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ ὀκταγώνου, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς ἀπόδειξιν. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ (νυοστοῦ) πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_2, ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon \qquad (3)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$ (4).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma \qquad (5).$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 τὸ ΑΞΒΟ ΓΠΔΡ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII. 1 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} \qquad (6).$$

Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$.

Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, διότι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον περιέχεται ὑπὸ τοῦ κύκλου, εἶναι καὶ $\Pi_2 < \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη, ὅτι εἶναι $\Pi_2 > \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_2. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{K_2}{\text{Μ}}$ (7) ἔνθα Μ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι εἶναι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (8), ἔνθα $\Sigma > K_2$.

Ἐκ τῆς (8) ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Τ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{\text{Τ}} \qquad (9).$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (9) καὶ $K_1 > \text{Τ}$ (V. 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{K_2}{\text{Τ}}$, ἔνθα $\text{Τ} < K_1$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (7) ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\text{Ζ}\Theta^2 : \text{Β}\Delta^2 = K_2 :$ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

Ἀφοῦ λοιπὸν δὲν εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$, εἶναι $\Sigma = K_2$.

Σημ. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως δύναται νὰ γίνῃ χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς τετάρτης ἀναλόγου, διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων, ὡς ἔγινε τοῦτο καὶ διὰ τὸ πρῶτον μέρος.

Ὑποτίθεται ὅτι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$ καὶ $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρόν.

Ἔστω ὅτι μετὰ τὴν περιγραφὴν πολυγώνου τινὸς ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \qquad (1)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$ (2).

Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν,
Περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον K_2 πολύγωνον $\Pi_2 < \Sigma$ (3), ἐὰν καλέσωμεν τὸ τελευταῖον περιγραφὲν πολύγωνον Π_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον τὸ Π_1. Κατὰ τὸ XII.1 θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}.$$ Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}.$$

Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, διότι ὁ κύκλος περιέχεται ὑπὸ τοῦ πολυγώνου, εἶναι καὶ $\Pi_2 > \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον.
Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, ἔνθα $M > K_1$.

Θεωροῦμεν λογικὸν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ἐπινοητὴς τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐγγραφῆς πολυγώνων θὰ εἶχεν ἐπινοήσει καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων. Εἰς τὸ λογικὸν τοῦτο συμπέρασμα ἀντιστρατεύεται τὸ ἑξῆς ἐπιχείρημα.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων πρέπει νὰ δειχθῇ προηγουμένως ὅτι κατὰ τὴν περιγραφὴν εἰς τὸν κύκλον τοῦ ν πολυγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ (ν - 1) πολυγώνου καὶ τοῦ κύκλου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει μόνον ἐκείνας τὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἔχουσιν ἀποδείξει οἱ πρὸ αὐτοῦ μαθηματικοί.

5. Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος 2.

Ἔστωσαν αἱ πυραμίδες ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{\Delta EZ\Theta}$. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$, ἔνθα Χ στερεὸν $\lessgtr \Delta EZ\Theta$.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$ (1), ἔνθα $X < \Delta EZ\Theta$ καὶ $\Delta EZ\Theta = X + \varepsilon$, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικρόν.

Διαιροῦμεν τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ εἰς δύο ἴσας πυραμίδας ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ (θ. 3). Κατὰ τὸ αὐτὸ θ. 3 τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν δύο πυραμίδων. Ἀφαιροῦντες τὰ δύο πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Τῶν ἀπομεινασῶν δύο πυραμίδων διαιροῦμεν ἑκατέραν εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ, ἤτοι λαμβάνομεν 4 πυραμίδας ἴσας καὶ 4 πρίσματα ἴσα. Ἀφαιροῦντες τὰ 4 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῶν 2 πυραμίδων, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν κατὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς ΔΕΖΘ, περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διαιροῦμεν τὰς 4 ἴσας πυραμίδας εἰς 8 ἴσας πυραμίδας καὶ ὁμοίας πρὸς τὰς προηγουμένας καὶ 8 ἴσα πρίσματα. Ἀφαιροῦντες τὰ 8 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῶν 4 πυραμίδων. Συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν τῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πρισμάτων, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον πυραμίδας τινάς, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις ΔΕΖΘ $=$ Χ $+$ ε (2)

Ὄγκος ὑπολειφθεισῶν πυραμίδων $<$ ε (3).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (3) ἀπὸ τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Ὄγκος συνόλου ἀφαιρεθέντων πρισμάτων $>$ Χ, ἢ $\Pi_2 > X$, (4)

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων. (Τὸ πλῆθος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς προόδου $2+4+8+\ldots+2^\nu$).

Διαιροῦμεν ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς καὶ τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῆς τόσα τὸ πλῆθος πρίσματα, ὅσα ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ, καλοῦμεν δὲ τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων Π_1. Κατὰ τὸ θ. 4 εἶναι $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$ (5). Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$ (6), (ἔνθα Χ $<$ ΔΕΖΘ). Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ὑπ' αὐτῆς περιεχομένων πρισμάτων Π_1, εἶναι ἄρα καὶ Χ $> \Pi_2$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (4) ἀπεδείχθη $\Pi_2 >$ Χ. Ὥστε δὲν εἶναι $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$, ἔνθα Χ $<$ ΔΕΖΘ. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\dfrac{\text{ΔΕΖ}}{\text{ΑΒΓ}} = \dfrac{\text{ΔΕΖΘ}}{\text{Μ}}$, ἔνθα Μ στερεόν τι $<$ ΑΒΓΗ.

2. Ἔστω δεύτερον $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$, ἔνθα Χ $>$ ΔΕΖΘ.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\dfrac{\text{ΔΕΖ}}{\text{ΑΒΓ}} = \dfrac{\text{Χ}}{\text{ΑΒΓΗ}}$ (7).

Τῶν Χ, ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Σ, $\frac{X}{ΑΒΓΗ}=\frac{ΔΕΖΘ}{Σ}$ (8).

Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως Χ ⟩ ΔΕΖΘ. Εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓΗ ⟩ Σ (9). Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$\frac{ΔΕΖ}{ΑΒΓ}=\frac{ΔΕΖΘ}{Σ},\text{ ἔνθα } Σ < ΑΒΓΗ \text{ (ἐκ τῆς 9).}$$

Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι βάσις : βάσιν = ἀντίστοιχος πυραμίς : στερεὸν μικρότερον τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ὥστε Χ = ΔΕΖΘ, ἤτοι $\frac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ}=\frac{ΑΒΓΗ}{ΔΕΖΘ}$.

10. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι κύλινδρος = 3 κῶνοι (βάσις καὶ ὕψος τὰ αὐτά), θὰ εἶναι κύλινδρος $\gtrless$ 3 κώνων.

1. Ἔστω πρῶτον κύλινδρος ⟩ 3 κώνων καὶ κύλινδρος = 3 κῶνοι + ε, ἔνθα ε στερεὸν ὄγκου ὁσονδήποτε μικροῦ. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πρισμάτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν κυλινδρικὰ τμήματα (ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ...), τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

κύλινδρος = 3 κῶνοι + ε (1)

ὄγκος ἀπομεινάντων κυλινδρικῶν τμημάτων ⟨ ε (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ ⟩ 3 κώνων ἐχόντων βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτὸ) ἢ πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ ⟩ κώνου ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτό). Ὅπερ ἀδύνατον, διότι ὁ κῶνος ἐμπεριέχει τὴν πυραμίδα.

2. Ἔστω δεύτερον κύλινδρος ⟨ 3 κώνων (βάσις, ὕψος τὰ αὐτὰ)

$$\text{ἢ κῶνος} > \frac{1}{3}\text{ κυλίνδρου,}$$

ὁπότε θὰ εἶναι κῶνος $=\frac{1}{3}$ κυλίνδρου + ε, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου στερεόν.

Διὰ συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κώνου, θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κῶνος} = \frac{1}{3}\,\text{κυλίνδρου} + \varepsilon \qquad (3)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < \varepsilon \qquad (4).$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ $> \frac{1}{3}$ κυλίνδρου (ὕψος τὸ αὐτό), ἢ

πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > κυλίνδρου. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ πρίσμα ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου.

11. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΕΝ}}$, θὰ εἶναι $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\Xi}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lessgtr$ ΕΝ.

1. Ἔστω πρότερον Ξ < ΕΝ καὶ ΕΝ = Ξ + Ψ, ἔνθα Ψ στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Ἀνυψοῦντες ἀπὸ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ συνεχῶς πυραμίδας, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιροῦντες ταύτας ἀπὸ τοῦ κώνου θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα κώνου μικρότερα τοῦ Ψ (Χ. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{ΕΝ} = \Xi + \Psi \qquad (1)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < \Psi \qquad (2).$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ > Ξ (3) (ἐὰν ἡ τελευταίως ἀφαιρεθεῖσα πυραμὶς εἶχε βάσιν τὸ ἀνωτέρω πολύγωνον καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ τοῦ κώνου). Ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Καλοῦμεν Κ_1 τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΑΓ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον Π_1 καὶ Κ_2 τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΕΗ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον Π_2. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ καὶ $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2}$, θὰ εἶναι ἄρα $\frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ (4).

Εἶναι δὲ $\frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2} = \frac{\text{ΑΛ}}{\Xi}$ (5), ἔνθα Ξ < ΕΝ, καὶ $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{πυραμίς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμίς, } \Pi_2 \cdot \upsilon}$ (6) ἂν καλέσωμεν υ τὸ ὕψος ΚΛ = ΜΝ.

Ἐκ τῶν (4), (5), (6) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΛ}}{\Xi} = \frac{\text{πυραμίς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμίς, } \Pi_2 \cdot \upsilon}$ (7).

Ἐπειδὴ κῶνος ΑΛ > πυραμίδος, $\Pi_1 \cdot \upsilon$, εἶναι ἄρα καὶ Ξ > πυραμίδος, $\Pi_2 \cdot \upsilon$, (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη ὅτι Ξ < $\Pi_2 \cdot \upsilon$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι $\frac{\text{Κ}_2}{\text{Κ}_1} = \frac{\text{ΕΝ}}{\text{Μ}}$, ἔνθα Μ στερεὸν < τοῦ κώνου ΑΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ}$, ἔνθα Ξ $\rangle$ κώνου ΕΝ.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{K_2}{K_1} = \frac{Ξ}{ΑΛ}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΛ, ΕΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΛ} = \frac{ΕΝ}{Χ}$ (2). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως Ξ $\rangle$ ΕΝ. Εἶναι ἄρα καὶ ΑΛ $\rangle$ Χ (V. 14).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{K_2}{K_1} = \frac{ΕΝ}{Χ}$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κύκλος : κύκλον = κῶνος : μικρότερον ἀντιστοίχου κώνου στερεόν. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ \lesseqgtr ΕΝ}$, καὶ συνεπῶς εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{ΕΝ}$.

Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\text{κύλινδρος}}{\text{κύλινδρον}}$.

12. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{\text{κῶνος } ΑΒΓΔΛ}{\text{κῶνος } ΕΖΗΘΝ} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓΔΛ}{Ξ} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lesseqgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ.

1. Ἔστω πρότερον Ξ $\langle$ ΕΖΗΘΝ καὶ ΕΖΗΘΝ = Ξ + ε, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων καὶ ἀφαιρέσεως τούτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε (Χ. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

ΕΖΗΘΝ = Ξ + ε (1)

καὶ ἀποτμήματα κώνου $\langle$ ε (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν

πυραμὶς (βάσις ΕΟΖΠΗΡΘΣ, ὕψος ΜΝ) $\rangle$ Ξ. (3).

Εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγράφομεν τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος τὸ ΚΛ. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τὰ τρίγωνα ΒΚΛ, ΖΜΝ εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα ΒΚΤ, ΖΜΟ καὶ τὰ τρίγωνα ΛΚΤ, ΝΜΟ. Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι $\frac{ΛΒ}{ΒΚ} = \frac{ΝΖ}{ΖΜ}$ (4) καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων

ΒΚΤ, ΖΜΟ εἶναι $\frac{KB}{BT}=\frac{MZ}{ZO}$ (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4) καὶ (5) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda B}{BT}=\frac{NZ}{ZO}$. Ἀνάπαλιν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι $\frac{BT}{\Lambda B}=\frac{ZO}{NZ}$ (6). Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΤΚ, ΝΟΜ εἶναι $\frac{\Lambda T}{TK}=\frac{NO}{OM}$ (7), καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι $\frac{KT}{TB}=\frac{MO}{OZ}$ (8). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (7) καὶ (8) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda T}{TB}=\frac{NO}{OZ}$ (9). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (9) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{T\Lambda}{\Lambda B}=\frac{NO}{NZ}$, ἤτοι καὶ ἡ τετάρτη ἕδρα τῆς πυραμίδος ΒΚΤΛ ἡ ΒΤΛ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τετάρτην ἕδραν τῆς πυραμίδος ΖΜΟΝ τὴν ΖΟΝ. Αἱ πυραμίδες ἄρα αὗται εἶναι ὅμοιαι. Εἶναι ἄρα $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=\frac{BK^3}{ZM^3}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$ (θ. 8).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}=\frac{TK\Lambda\Lambda}{OMEN}=\frac{\Lambda KX\Lambda}{EM\Sigma N}$ $=\frac{XK\Delta\Lambda}{\Sigma M\Theta N}=\frac{\Delta K\Phi\Lambda}{\Theta MPN}=\frac{\Phi K\Gamma\Lambda}{PMHN}=\frac{\Gamma K\Upsilon\Lambda}{HM\Pi N}=\frac{\Upsilon KB\Lambda}{M\Pi ZN}$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (V. 12) θὰ εἶναι $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=$

$$\frac{BKT\Lambda+TK\Lambda\Lambda+\Lambda KX\Lambda+XK\Delta\Lambda+\Delta K\Phi\Lambda+\Phi K\Gamma\Lambda+\Gamma K\Upsilon\Lambda+\Upsilon KB\Lambda}{ZMON+OMEN+EM\Sigma N+\Sigma M\Theta N+\Theta MPN+PMHN+HM\Pi N+M\Pi ZN}$$

ἢ $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=\frac{\text{πυραμίς, } \Lambda TB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$.

Ὑπετέθη δὲ καὶ $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ ⟨ κώνου ΕΖΗΘΝ.

Εἶναι ἄρα $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{\text{πυραμίς, } \Lambda TB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}$.

Ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ ⟩ πυραμίδος ΛΤΒΥΓΦΔΧΛ, εἶναι ἄρα καὶ στερεὸν Ξ ⟩ πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη Ξ ⟨ πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ ⟨ κώνου ΕΖΗΘΝ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι

$\frac{\text{κῶνος } EZH\Theta N}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{Z\Theta^3}{B\Delta^3}$, ἔνθα Ξ ⟨ κώνου ΑΒΓΔΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ ⟩ κώνου ΕΖΗΘΝ.
Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΒΓΔΛ, ΕΖΗΘΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ}$ (2). Ἐπειδὴ ὑπετέθη Ξ ⟩ ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓΔΛ ⟩ Χ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$, ἔνθα Χ ⟨ κώνου ΑΒΓΔΛ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον, ἑνὸς κώνου : διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον ἄλλου κώνου = πρῶτος κῶνος : στερεὸν μικρότερον τοῦ ἄλλου κώνου. Ὅθεν ἀφοῦ δὲν εἶναι Ξ $\lessgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ, θὰ εἶναι Ξ = κῶνος ΕΖΗΘΝ καὶ συνεπῶς $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κῶνος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς κῶνοι = κύλινδρος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους, θὰ εἶναι $\frac{\text{κύλινδρος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κύλινδρος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

17. Τὸ $ΚΒ^2$ εἶναι ⟩ $2ΒΨ^2$, διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου = $2ΒΨ^2$. Ἐπειδὴ δὲ ΚΒ = ΚΣ = ΒΟ ⟩ ΟΣ, ἕπεται ΚΒ ⟩ πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου τεραγώνου.

18. Ἔστωσαν αἱ σφαῖραι ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$, ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα $\lessgtr$ σφαίρας ΔΕΖ.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (2), ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα ⟨ σφαίρας ΔΕΖ. Θεωροῦμεν τὰς σφαίρας ὁμοκέντρους. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_2$. Ἐπίσης ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν εἰς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_1$. Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3} \qquad (3).$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{H\Theta K}} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ 〉 τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου πολυέδρου Π_1. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ 〉 τοῦ πολυέδρου Π_2 (V. 14). Ἀλλὰ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ πολυέδρου Π_2 καὶ συνεπῶς εἶναι μικροτέρα αὐτοῦ· ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{H\Theta K}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3}$, ἔνθα ΗΘΚ 〈 ΔΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι καὶ $\frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$, ἔνθα Σ σφαῖρα 〈 σφαίρας ΑΒΓ (α).

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\Lambda\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3}$, ἔνθα ΛΜΝ σφαῖρα 〉 σφαίρας ΔΕΖ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{\Lambda\mathrm{MN}}{\mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$ (1). Τῶν σφαιρῶν ΛΜΝ, ΑΒΓ, ΔΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν σφαῖραν ἔστω Σ, ἤτοι $\frac{\Lambda\mathrm{MN}}{\mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma}$ (2). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΛΜΝ 〉 ΔΕΖ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓ 〉 Σ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$, ἔνθα Σ 〈 ΑΒΓ. Ὅπερ ἀδύνατον.

Διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (α). Ὥστε δὲν εἶναι ΗΘΚ $\lessgtr$ ΔΕΖ, ἤτοι ΗΘΚ = ΔΕΖ.

Παρατήρησις ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 2, 5, 11, 12, 18.

Εἰς τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1), ἔνθα α 〉 γ, διὰ νὰ συναχθῇ τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ β 〉 δ, λαμβάνεται ὁ ἐναλλὰξ λόγος $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, ἐν ᾧ εἰς τὸ συναφὲς θεώρημα τοῦ V. 14 ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς (1), ὅτι ἂν α $\gtreqless$ γ εἶναι καὶ β $\gtreqless$ δ.

Σημ. Τοῦ θεωρήματος 6 δὲν ὑπάρχει ἄλλη ἀπόδειξις εἰς τὸ Παράρτημα II.

Βιβλίον XIII.

1. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς εὐθείας α τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι x, θὰ εἶναι καὶ

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2=5\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

2. Ἀντίστροφον προηγουμένου.

3. Ἐὰν $x^2=\alpha(\alpha-x)$ εἶναι καὶ $\left[(\alpha-x)+\frac{x}{2}\right]^2=5\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

4. Ἐὰν $x^2=\alpha(\alpha-x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2+(\alpha-x)^2=3x^2$.

5. Ἐὰν $x^2=\alpha(\alpha-x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2=(\alpha+x)x$.

6. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ῥητή, ρ, καὶ εἶναι $x^2=\rho(\rho-x)$, ἡ x καὶ ἡ $(\rho-x)$ εἶναι ἀποτομαί.

Κατὰ τὸ θεώρ. 1 εἶναι $\left(x+\frac{\rho}{2}\right)^2=5\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}$. Τὰ μονώνυμα τῆς διαφορᾶς x εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73). Ἐὰν εἰς τὴν $(\rho-x)$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν x διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς της, θὰ ἔχωμεν $\rho-x=\frac{3\rho}{2}-\frac{\rho}{2}\sqrt{5}$. Καὶ ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀποτομή, διότι τὰ μονώνυμα τοῦ β' μέλους εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73).

9. Ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου εἶναι $\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (IV. 10). Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ ὅλη εὐθεῖα θὰ εἶναι

$$\rho+\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}\right)=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}+\frac{\rho}{2},$$

ρ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ταύτης τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5}+\frac{\rho}{2}\right)-\rho=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}$, τὸ μικρότερον τμῆμα. Ἤτοι $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5}+\frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}\right)=\rho^2$.

11. Ἔστω ἡ ῥητὴ διάμετρος $B\Theta=2\rho$, καὶ $ZK=\frac{\rho}{4}$. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος εἶναι $BK^2=5KM^2$ (1) καὶ εἶναι $BM=BK-KM$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐνταῦθα ἐκ τῆς (1) τὴν ΒΚ λαμβάνομεν $\mathrm{BM} = \mathrm{BK}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (2). Εἶναι δὲ $\mathrm{BK} = \frac{5\rho}{4}$. Συνεπῶς $\mathrm{BM} = \frac{5\rho}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BM} \times \mathrm{B\Theta} = \frac{10\rho^2}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathrm{AB} = \frac{\rho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, (3), ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Αὕτη εἶναι ἐλάσσων (X. 76). Εἶναι ὅμως δεδομένη ὑπὸ τὴν μὴ ἀνεπτυγμένην μορφὴν τοῦ X. 94 (τοῦ α′ μέλους τοῦ θ. τούτου· ἰδὲ ἐπεξήγησιν). Ἡ (3) γράφεται $\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Κατὰ τὸ X. 94 θὰ εἶναι

$$\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} - \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \quad (4).$$

(Ἡ εἰς τὸ X. 94 σχέσις $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ εἶναι ἐνταῦθα $1^2 + 2^2 = 5$).

Τὸ β′ μέλος τῆς (4) εἶναι ἡ μορφὴ τῆς ἐλάσσονος τοῦ X. 76, ἤτοι εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μονωνύμων εἶναι ῥητὸν $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{2}\right)$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων εἶναι μέσον, ἤτοι περιέχει τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{4\sqrt{5}}\right)$.

16. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφεται πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου, λαμβάνεται συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγγράφεται τὸ εἰκοσάεδρον καὶ εἶναι $\rho = \frac{2r}{\sqrt{5}}$, ἐὰν r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων κατὰ τὸ θ. 11.

Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τὸ ὁποῖον μνημονεύεται εἰς τὸν πρόλογον ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο».

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων θεώρημα τοῦ Euler. Ὁ Max Zacharias εἰς τὸ ἔργον του Στοιχειώδης Γεωμετρία τοῦ Ἐπιπέδου καὶ τοῦ Χώρου, 1930, σελ. 172 (Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Göschens Lehrbücherei B. 16) γράφει ἐπὶ τούτου τὰ ἑξῆς·

« Τὸ θεώρημα διετυπώθη, ὡς πρῶτος παρετήρησεν ὁ R. Baltzer τῷ 1861, ἤδη πρὸ τοῦ Euler, ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (Descartes), ὡς συνάγεται ἐκ παρεφθαρμένου τινὸς ἀντιγράφου διατηρηθέντος ὑπὸ τοῦ Leibnitz καὶ δημοσιευθέντος μόλις τῷ 1860. Καὶ δὴ καὶ εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης τὸ ἐγνώριζεν. Ὁ Euler τὸ ἀνεκάλυψεν ἐκ νέου τῷ 1752 κατ' ἀρχὰς δι' ἐπαγωγῆς καὶ τὸ ἐδημοσίευσεν ἄνευ ὅμως ἀποδείξεως, τὴν ὁποίαν εὗρεν ἀμέσως μετὰ ταῦτα (Descartes, Oeuvres inéd., Paris 1860, σ. 214. Euler, Nov. Comm. Petz. (1752 - 1753) 4 (τυπωθὲν 1758) σ. 109 καὶ 140. Baltzer, Berl. Mon. Ber. 1861, σ. 1043) ».

Ἐκ τῆς διατυπουμένης ἀνωτέρω γνώμης τοῦ M. Zacharias ὅτι πιθανὸν ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ διερευνήσωμεν τὸ πρᾶγμα. Πρὸ παντὸς πρέπει νὰ εὑρεθῇ, εἰς ποῖα στοιχεῖα στηρίζει ὁ M. Zacharias τὴν γνώμην του ταύτην. Ἐγράψαμεν εἰς διακεκριμένους ἐν Γερμανίᾳ μαθηματικούς, ἀσχολουμένους εἰδικῶς μὲ τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικά, ἀλλὰ δυστυχῶς δὲν ἦσαν οὗτοι εἰς θέσιν νὰ παράσχωσιν εἰς ἡμᾶς συναφεῖς πληροφορίας. Οὔτε ἐλάβομεν ζητηθὲν ἀντίγραφον τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης πραγματείας τοῦ Baltzer.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΓΕΝΟΜΕΝΑΙ ΕΝ ΤΗ͂Ι ΑΚΑΔΗΜΙᾼ ΑΘΗΝΩΝ

1. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου. Συνεδρία 11 - 6 - 1953.

Διὰ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης, λαμβανομένης ἀφορμῆς ἐκ παρατηρήσεως τοῦ G. Vacca [1], *γενομένης τῷ 1910, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς (ὁ καλούμενος καὶ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς ἢ ἐκ τῆς ἀληθείας τῶν ν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν ν + 1) ἐφαρμόζεται εἰς πλεῖστα θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Πρὸς τοῦτο μνημονεύονται 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 20 θεωρ. τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, 2) Τὸ χωρίον ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων (73 b 32) τοῦ Ἀριστοτέλους « Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται » καὶ 3) Ἐκ τῶν συγχρόνων ἀποδείξεων τὸ θεώρημα « ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων (πεπερασμένου) εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».*

Ὁ E. Lindelœf [2] *διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου γράφει τὰ ἑξῆς· « Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις ἓν γινόμενον ἐκ τριῶν συναρτήσεων*

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi),$$

τὰς ὁποίας ὅλας ὑποθέτομεν διὰ $\chi = \chi_0$ *συνεχεῖς. Ἐν ᾧ τώρα τὰς δύο ἔστω πρώτας συναρτήσεις θεωροῦμεν ὡς μίαν, δυνάμεθα τὴν δοθεῖσαν παράστασιν νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)$ *καὶ* $u_3(\chi)$. *Καὶ αἱ δύο αὗται συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς διὰ* $\chi = \chi_0$, *ἤτοι* $u_3(\chi)$ *κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)$ *κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν θεώρημα.*

[Σημ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔστω (α) λέγει : ἐὰν αἱ 2 συναρτήσεις $u(\chi)$

---

1. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 240, σελ. 79, Λειψία 1935, ὑπὸ Clemens Thaer, παρατήρησις εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2. Ernst Lindelöf, Einführung in die Höhere Analysis, γερμανικὴ ἔκδοσις ὑπὸ E. Ullrich μετὰ τὴν πρώτην σουηδικὴν καὶ τὴν δευτέραν φινλανδικήν, σελ. 41, B. C. Teubner, 1950, Λειψία.

καὶ $v(\chi)$ *εἶναι συνεχεῖς διὰ* $\chi = \chi_0$ *εἶναι καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν* $u(\chi)$ $v(\chi)$ *συνεχές]. Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα εἶναι συνεπῶς καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων [τῶν* $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ *καὶ* $u_3(\chi)$*] συνεχὲς διὰ* $\chi = \chi_0$ *καὶ κατὰ ταῦτα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημά μας ἐπίσης καὶ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων.*

'Εὰν τώρα ἔχωμεν γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi)\ u_4(\chi),$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, *δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι τοῦ ἑνὸς* $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ $u_3(\chi)$ *καὶ τοῦ ἄλλου* $u_4(\chi)$. *'Ο πρῶτος παράγων εἶναι συνεχὴς κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν (περὶ τριῶν συναρτήσεων), ὁ δεύτερος εἶναι συνεχὴς καθ' ὑπόθεσιν. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα (α) εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων* $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ $u_3(\chi)$ *καὶ* $u_4(\chi)$ *συνεχές. 'Η ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ πέντε συναρτήσεις κλπ. 'Αλλὰ τοῦτο δὲν χρειάζεται, διότι δυνάμεθα ὅλας αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις νὰ τὰς συμπεριλάβωμεν εἰς μίαν ἀπόδειξιν, καθ' ἣν ἀποδεικνύομεν :*

'Εὰν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον n *συναρτήσεων, ἰσχύει τοῦτο ἐπίσης διὰ γινόμενον* $n+1$ *συναρτήσεων, ἔνθα* n *δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς* 2, 3, 4 ....

'Υπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἓν γινόμενον n *συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι συνεχές, θεωροῦμεν τὸ γινόμενον* $n+1$ *συναρτήσεων*

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ldots u_n(\chi)\ u_{n+1}(\chi), \qquad (1)$$

ἔνθα ἕκαστος παράγων διὰ $\chi = \chi_0$ *εἶναι συνεχής.*

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι ἔχομεν γινόμενον μόνον δύο παραγόντων, τῶν $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)\ldots u_n(\chi)$ *καὶ* $u_{n+1}(\chi)$. *"Εκαστος παράγων ἐκ τούτων εἶναι συνεχὴς διὰ* $\chi = \chi_0$, *διότι ὑπεθέσαμεν ὅτι τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ* n *παράγοντας. 'Επειδὴ δὲ κατὰ τὸ θεώρημα (α) ἔχομεν ἀποδείξει τὴν συνέχειαν διὰ γινόμενον δύο παραγόντων, ἕπεται ὅτι ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι τὸ γινόμενον (1) εἶναι διὰ* $\chi = \chi_0$ *συνεχές. "Οθεν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς ἐπίσης διὰ γινόμενον* $n+1$ *παραγόντων, ἐὰν εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον* n *παραγόντων. "Οπερ ἔδει δεῖξαι ».*

Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ὁ Lindelœf ἀκολουθεῖ πιστότατα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20οῦ θεωρήματος τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

'Ολίγους μῆνας μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ἡμῶν ἐν τῇ 'Ακαδημίᾳ 'Αθηνῶν ἐλάβομεν παρὰ τοῦ 'Ολλανδοῦ καθηγητοῦ Hans Freudenthal (Μαθηματικὸν 'Ινστιτοῦτον τοῦ Πανεπιστημίου Rijks) πραγματείαν του γερμανιστί, ὑπὸ τὸν τίτλον «'Επὶ τῆς ἱστορίας τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς », δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ φύλλον 22 τοῦ 1953 τῆς τριμηνιαίας 'Επιθεωρήσεως τοῦ Διεθνοῦς 'Αρχείου τῆς 'Ιστορίας τῶν 'Επιστημῶν, (ARCHIVES INTERNATIONALES D' HISTOIRE DES SCIENCES, Revue trimestrielle de l' Union Interna-

tionale d' Histoire des Sciences, Publiée avec le concours financier de l' UNESCO) Numéro 22-1953. Pages 17 à 37).

Μεταφέρομεν ἐνταῦθα τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα σημεῖα τῆς πραγματείας ταύτης.

« Λίαν ἐνωρὶς ὁ Ἰάκωβος Μπερνοῦλι (Jakob Bernoulli, 1645 — 1705) ἐθεωρεῖτο ὁ ἐπινοητὴς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ἔπειτα ἀπέδωκαν τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου εἰς τὸν Pascal (1623 — 1662). Εἰς τὰς περισσοτέρας ὅμως νέας πραγματείας θεωρεῖται ὅτι ὁ πρῶτος ἐπινοήσας τὴν μέθοδον ταύτην εἶναι ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος [1]. Εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς γνώμης ταύτης συνετέλεσεν ὁ G. Vacca, ὅστις ἀνέφερε πέντε θεωρήματα ἐκ τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Μαυρολύκου καὶ προεκάλεσε οὕτω τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν πρόκειται περὶ ἐφαρμογῆς τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ὁ Vacca μνημονεύει, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του τονίζει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἠσχολήθη μόνον μὲ τοὺς ἐπιπέδους, τοὺς στερεούς, τοὺς τετραγώνους καὶ τοὺς κύβους ἀριθμούς, ἐν ᾧ διὰ τοὺς τριγώνους, πενταγώνους, ἑξαγώνους, ἑπταγώνους πολὺ ὀλίγαι ἔρευναι ἔγιναν καὶ ὅτι αὐτός, ὁ Μαυρόλυκος, ἐπιθυμεῖ νὰ ἐπανορθώσῃ τὴν παράλειψιν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου.

Οὔτε ἐκ τῆς Εἰσαγωγῆς οὔτε ἐκ τοῦ λοιποῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰσήγαγε καὶ ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ...».

« Εἰς τὸ θεώρημα 84 πρόκειται περὶ τῶν πολυγωνικῶν — πυραμιδικῶν ἀριθμῶν [2]. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν ἐνταῦθα γνησίαν πλήρη ἐπαγωγήν... Ἐν τῷ συνόλῳ εὗρον εἰς τὸν Μαυρόλυκον δύο παραδείγματα γνησίας καὶ ἓν τοιοῦτο ἀμφιβόλου, πλήρους ἐπαγωγῆς ».

Ἀκολουθεῖ ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 32, 35, 36 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Καὶ ὁ Freudenthal ἐπὶ τούτου ἐπάγεται : « Συμπερασματικῶς δύναταί τις νὰ εἴπῃ, ὅτι ἐπίσης καὶ εἰς τὸν Εὐκλείδην (δηλ. παραλλήλως πρὸς τὸν Μαυρόλυκον, ὅστις ἐγνώριζεν ἄριστα τὸν Εὐκλείδην) παρατηροῦνται μερικὰ παρα-

---

1. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἐγεννήθη ἐν Μεσσήνῃ τῆς Σικελίας τῷ 1494, ἐκ γονέων Ἑλλήνων, οἵτινες κατέφυγον εἰς Ἰταλίαν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως μετὰ τὴν ἅλωσιν αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων. Ἀπέθανε τῷ 1575. Ὁ πατήρ του ἦτο ἐκ τῶν λογίων ἀνδρῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἠσπάσθη τὸν Καθολικισμόν, γενόμενος μοναχός. [ἰδὲ Μεγάλη Ἰταλικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία]. Μετέφρασεν ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὰ Φαινόμενα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ σφαιρικὰ τοῦ Θεοδοσίου καὶ τοῦ Μενελάου καὶ ἐξέδωκε παράφρασιν τοῦ περὶ Κέντρου βάρους τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Περὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων διαλαμβάνει ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Εἰσαγωγῇ, ἐκδ. R. Hoche, Teubner, σελ. 99 κ. ἑ.

δείγματα πλήρους ἐπαγωγῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερον στοιχειώδη ἢ τὰ τοῦ Μαυρολύκου, ἀλλὰ περὶ συστηματικῆς ἐφαρμογῆς ἢ διατυπώσεως τῆς 'Αρχῆς δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος. 'Ο ἰσχυρισμὸς ὅμως τοῦ Tropfke καὶ τοῦ Günther, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς εἶναι ὁπωσδήποτε ἀπορριπτέος ».

« Τὸ ἀκριβέστατον ὅμως ὑπόδειγμα (μέχρι τοῦ 19ου αἰῶνος) πλήρους ἐπαγωγῆς δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν 'Αρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς ἀπόσπασμα Πυθαγορείου θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ἐσώθη διὰ τοῦ Θέωνος (τοῦ Σμυρναίου), τοῦ 'Ιαμβλίχου καὶ τοῦ Πρόκλου. Πρόκειται διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται διὰ τῆς ἐπαγωγῆς

$$a_1 = d_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + d_n, \qquad d_{n+1} = d_n + 2a_n$$

(Σημ. Ἴδε εἰσαγωγὴν εἰς II τόμον Εὐκλείδου, σελ. 8).

«'Εὰν θέλῃ τις δύναται νὰ θεωρήσῃ ἀκόμη ἓν παράδειγμα πλήρους ἐπαγωγῆς τὸ ὑπὸ τοῦ B. L. van der Waerden σημειούμενον ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Σιμπλικίου εἰς τὰ Φυσικὰ τοῦ 'Αριστοτέλους [1]. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ χωρίου περὶ τοῦ Ζήνωνος :

Προδείξας γὰρ ὅτι ' εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη ', ἐπάγει ' εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου· καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν' ' ['Ερμηνεία : διότι προαποδείξας ὅτι « ἐὰν τὸ ὂν δὲν ἔχῃ μέγεθος, δὲν θὰ ὑπάρχῃ, ἐπάγεται « ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ, εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πάχος καὶ ἀπόστασιν τὸ ἓν μέρος ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Καὶ περὶ τοῦ προηγουμένως κειμένου μέρους ἰσχύει τὸ αὐτό· διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πρὸ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἄλλο· διότι τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τὸ εἴπῃ τις μίαν μόνον φορὰν καὶ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς »].

2. Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (19 - 1 - 1953).

Ἴδε Εἰσαγωγὴν II τόμου τῶν Στοιχείων, 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 'Αθῆναι 1953, σελὶς 17.

1. Math. Ann. 117 (1939), 148. — SIMPL. Phys. 140, 34.

3. Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (10 - 12 - 1953).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος 27 τοῦ VI Βιβλίου τῶν Στοιχείων περὶ μεγίστου (τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν) εἶναι γενική.

4. Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (4 - 6 - 1954).

Διὰ παραθέσεως χωρίων ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ οὐχὶ ἁπλῶς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἐκ τῶν χωρίων τούτων μνημονεύομεν δύο τοῦ Ἀριστοτέλους

α΄. « Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ » (Ἠθικὰ Νικομάχεια Ε΄ III 8).

β΄. « Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται » (Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4). [Σημ. Ὁ Ross διορθώνει « κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται », ὅπερ παρουσιάζεται μὴ ἀποδίδον ἔννοιάν τινα. Ὁ Apelt δέχεται τὸ ὀρθόν].

5. Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2 - 6 - 1955).

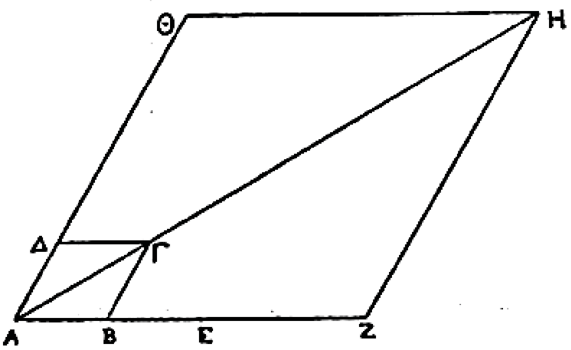
Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως (ὡς γνωστὰς) τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \qquad \text{καὶ}$$

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,, \qquad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 0. II. 10 τῶν Στοιχείων, διὰ τοῦ ὁποίου κατὰ τὸν Πρόκλον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον ὑπολογίζεται ἡ $\sqrt{2}$ διὰ κατασκευῆς τετραγώνων (ἴδε Εἰσαγωγὴν II τόμου, σ. 8) εὑρίσκονται οἱ ἀνωτέρω τύποι τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ κατασκευῆς συνεχῶν ῥόμβων.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ῥόμβον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ = 120°. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Καλοῦμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ῥόμβου ΑΒ = α_1 καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ = δ_1. Κατὰ τὸ ΙΙ 12 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$ (1) καὶ συνεπῶς $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. Ἐπὶ τῆς προεκτά-



σεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ = ΑΒ = α_1 καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΕΖ = ΑΓ = δ_1. Κατὰ τὸ ΙΙ 10 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2, \quad \text{καὶ ἐκ ταύτης}$$

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2 \qquad (2).$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1^2$ (3).

Ἀλλὰ κατὰ τὴν (1) εἶναι $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ β'. μέλος τῆς (3) λαμβάνομεν

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2$$

ἢ

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2 \qquad (4).$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ, ὅτι ἡ μὲν $2\alpha_1 + \delta_1$, ἣν καλοῦμεν α_2, εἶναι ἡ πλευρά, ἡ δὲ $3\alpha_1 + 2\delta_1$ ἣν καλοῦμεν δ_2, εἶναι ἡ διαγώνιος δευτέρου ῥόμβου τοῦ ΑΒΖΗΘ, ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τὸν ΑΒΓΔ. Ὅθεν εὑρέθη ὁ νόμος κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων. Ἡ πλευρὰ ἑκάστου τούτων εἶναι $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ καὶ ἡ διαγώνιος $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Οἱ συναφεῖς πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἤτοι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τῶν συνεχῶν ῥόμβων, θὰ εἶναι

	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ (πλευρὰ)	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ (διαγώνιος)
πρώτου ῥόμβου	α_1	δ_1
δευτέρου ῥόμβου	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
τρίτου ῥόμβου	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
τετάρτου ῥόμβου	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
	$\vdots$	$\vdots$
ν ῥόμβου	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$
$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$
$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$
$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$
$\vdots$	$\vdots$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 1^2 &= 3 \cdot 1^2 - 2 \\ 5^2 &= 3 \cdot 3^2 - 2 \\ 19^2 &= 3 \cdot 11^2 - 2 \\ 71^2 &= 3 \cdot 41^2 - 2 \\ 265^2 &= 3 \cdot 153^2 - 2 \\ &\vdots \\ y^2 &= 3 \cdot \chi^2 - 2 \end{aligned}$$

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 3 \cdot 1^2 + 1 \\ 7^2 &= 3 \cdot 4^2 + 1 \\ 26^2 &= 3 \cdot 15^2 + 1 \end{aligned}$$

$$97^2 = 3 \cdot 56^2 + 1$$
$$362^2 = 3 \cdot 209^2 + 1$$
$$1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1$$
$$\vdots$$
$$y^2 = 3 \cdot \chi^2 + 1$$

Εὑρέθησαν δηλ. οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἄνευ ἀποδείξεων (ὡς εὑρεθέντας ὑπὸ προγενεστέρων του), ἤτοι

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

καὶ $\quad 265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \qquad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$

[Σημ. Ἡ λῆψις 1) $a_1 = 1,\ \delta_1 = 1$ *καὶ 2)* $a_1 = 1,\ \delta_1 = 2$ *εἶναι χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῆς σήμερον λεγομένης iteratio. Αὕτη ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς* $\sqrt{2}$ *διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Συναφὴς εἶναι ἡ ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 14.6.1956].*

θ. Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2-6-1955).

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης πραγματείας διὰ τὴν $\sqrt{3}$ *εὑρίσκεται ἡ* $\sqrt{\lambda}$ *διὰ* $\lambda \geqq 5$, *(ἀκέραιον) ἐκ τῶν ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι :*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
a_1	δ_1
$a_2 = 2a_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda a_1 + 2\delta_1$
$a_3 = 2a_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda a_2 + 2\delta_2$
$a_4 = 2a_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda a_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$a_\nu = 2a_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda a_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

καὶ $$\frac{\delta_1}{a_1} < \frac{\delta_3}{a_3} < \frac{\delta_5}{a_5} < \cdots \sqrt{\lambda} \cdots < \frac{\delta_6}{a_6} < \frac{\delta_4}{a_4} < \frac{\delta_2}{a_2}$$

(λαμβάνεται $a_1 = 1$ *καὶ* $\delta_1 = 2$*).*

Εἶναι δὲ ἀκόμη $\delta_\nu^2 = \lambda a_\nu^2 + (\lambda - 4)^\nu (-1)^\nu$.

7. Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Διὰ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (24 - 11 - 1955).

Εἰς τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους αὐτοῦ γίνεται, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ταύτην, ὡς καὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γ' θεωρήματος τῆς Κύκλου μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

8. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (12 - 1 - 1956).

Εἰς τὸ χωρίον τοῦτο ὁ Πλάτων γράφει ὅτι ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ καὶ ὅτι μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν. Ὑποστηρίζεται διὰ τῆς πραγματείας ταύτης ἐπὶ τῇ βάσει χωρίων παλαιῶν συγγραφέων, ὅτι ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται ἐνταῦθα τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Μνημονεύονται 1) Ὁ μουσικὸς τόνος διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος ὁ $\frac{9}{8}$, 2) Ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτου 9 καὶ 8 ἰσοῦται πρὸς 17, 3) Ὅτι οἱ ὅροι οὗτοι 9 καὶ 8 εἶναι οἱ μέσοι ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8 = 9 : 12, 4) Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσείας «ἄνδρα μοι ἔννεπε...» εἶναι 17, 5) Ὅτι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας καὶ ἡ μικροτέρα 8, ἤτοι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8 = 9 : 12, ἐξ ἧς κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ τοῦ Πυθαγόρου.

9. Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (14 - 6 - 1956).

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις, καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος χ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi = \varphi(\chi)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω χ_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi_{n+1} = \varphi(\chi_n)$, $[n = 0, 1, 2....]$

κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν χ_1, χ_2, χ_3.... Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi = \varphi (\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἀποδεικνύεται διὰ συναφῶν παραδειγμάτων, ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου.

10. Ἐπὶ τοῦ X Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (17 - 1 - 1957).

Παρέχεται νέα ἑρμηνεία τοῦ περιεχομένου τοῦ X Βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ ὑποστηρίζεται, ὅτι σκοπὸς τοῦ Βιβλίου τούτου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται διὰ τὴν κατασκευὴν τούτου τὰ ἁπλούστατα τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν.

11. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, μέρος II.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (31 - 1 - 1957).

Διὰ τῆς παραθέσεως στίχων ἐκ τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἦτο ἱερὸς καὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὁμήρου. Συνεπῶς ἐνισχύεται ἔτι περαιτέρω ἡ κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς 12.1.1956 ὑποστηριχθεῖσα ἄποψις, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

'Αρχιμήδους τετραγωνισμὸς παραβολῆς, 'Αθῆναι, 1946.

'Αρχιμήδους Μηχανικά Ι, 'Αθῆναι, 1946.

Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, 'Αθῆναι, 1949.

'Αρχιμήδους, Κύκλου μέτρησις, 'Αθῆναι, 1950.

Εὐκλείδου, Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλ. Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV. Τόμ. Ι, 'Αθῆναι, 1952, ἔκδ. Νικ. Σάκκουλα.

Εὐκλείδου, Γεωμετρία — Θεωρία 'Αριθμῶν, Στοιχείων Βιβλ. V, VI, VII, VIII, IX, Τόμ. ΙΙ, 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων ('Υπουργείου Παιδείας), 'Αθῆναι, 1953.

Μαθήματα ἱστορίας τοῦ πολιτισμοῦ. Τὰ 'Ελληνικὰ Μαθηματικά. ['Εκ τῶν παραδόσεων ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως 'Ανωτέρων 'Αξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ 'Επιτελείου Στρατοῦ]. 'Αθῆναι 1956. Ἔκδ. 'Ανδ. Σιδέρη.

Εὐκλείδου, Περὶ 'Ασυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλ. X, Τόμ. ΙΙΙ, 'Εθνικὸν Τυπογραφεῖον, 'Αθῆναι, 1956/1957.

Εὐκλείδου, Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλ. XI, XII, XIII. Τόμ. IV, 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων ('Υπουργείου Παιδείας), 'Αθῆναι 1957.

'Επιμελητὴς ἐκδόσεως ΣΠ. ΜΑΓΓΙΝΑΣ (ἀπ. Δ. Σ. ΟΕΣΒ 11145/22.3.57)

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουσι τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α' 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1957 (IX) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 2.000

Ἐκτύπωσις - βιβλιοδεσία ΑΔΕΛΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ, Κεραμεικοῦ 40 — Ἀθῆναι