

Περιεχόμενα

1	Ιδιότητες ημιαγωγών	3
1.1	Ποιοτική εισαγωγή	3
1.2	Ενδογενείς και εξωγενείς ημιαγωγοί	5
1.3	Ενεργειακές στάθμες σε εξωγενείς ημιαγωγούς	8
1.4	Συγκεντρώσεις φορέων	10
1.4.1	Εξάρτηση από τη θερμοκρασία	16
1.4.2	Υπολογισμός της ενέργειας Fermi	16
1.5	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	22
2	Ημιαγωγοί σε επαφή	25
2.1	Επαφές $p - n$	25
2.2	Η επαφή $p - n$ υπό τάση	32
2.3	Εφαρμογές	40

Κεφάλαιο 1

Ιδιότητες ημιαγωγών

1.1 Ποιοτική εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό, τα ηλεκτρόνια των μεμονωμένων ατόμων των στοιχείων του περιοδικού πίνακα βρίσκονται σε διακεκριμένες κβαντικές ιδιοκαταστάσεις που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες τιμές της ενέργειας, δηλαδή σε ενεργειακές στάθμες. Όταν δεν εξετάζουμε την κατάσταση του μεμονωμένου ατόμου, αλλά μας απασχολούν τα ίδια άτομα όταν βρίσκονται σ' έναν κρύσταλλο, αποδεικνύεται με διάφορους τρόπους ότι οι ενεργειακές στάθμες μετατρέπονται σε (επιτρεπτές) ενεργειακές ζώνες, δηλαδή περιοχές της ενέργειας όπου μπορούν να κινούνται οι φορείς φορτίου. Μεταξύ των επιτρεπομένων ενεργειακών ζωνών παρεμβάλλονται οι λεγόμενες απαγορευμένες ενεργειακές ζώνες, πράγμα που σημαίνει ότι οι φορείς φορτίου δεν είναι δυνατόν να έχουν ενέργεια που να εμπίπτει σε απαγορευμένη ενεργειακή περιοχή. Οι ιδιότητες αγωγιμότητας των υλικών μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως, αν εξετάσουμε το πολύ τις δύο επιτρεπτές ζώνες με την υψηλότερη ενέργεια.

Πιο συγκεκριμένα, αν η υψηλότερη ενεργειακή ζώνη είναι κατά ένα μέρος μόνο γεμάτη, τότε και ένα ελάχιστο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι δυνατόν να θέσει τα ηλεκτρόνια σε κίνηση, διότι υπάρχουν διαθέσιμες στάθμες με ενέργεια πολύ κοντά σε αυτήν που ήδη διαθέτουν, οπότε η μετάβασή τους εκεί είναι εύκολη. Αυτά τα υλικά λέγονται μέταλλα και χαρακτηρίζονται μεταξύ άλλων και από τη μεγάλη ηλεκτρική τους αγωγιμότητα. Εξ άλλου υπάρχουν υλικά που η υψηλότερη ενεργειακή τους στάθμη (που λέγεται ζώνη σθένους) είναι γεμάτη με ηλεκτρόνια. Αυτό σημαίνει ότι αυτά τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να κινηθούν εύκολα, γιατί οι στάθμες με ενέργειες παραπλήσιες με τη δική τους είναι κατειλημμένες. Η μόνη περίπτωση να κινηθούν είναι να αποκτήσουν από κάποιο εξωτερικό αίτιο αρκετά μεγάλη πρόσθετη ενέργεια, ώστε να μπορέσουν

να μεταπηδήσουν στην αμέσως επόμενη ενεργειακή ζώνη που λέγεται ζώνη αγωγιμότητας και απέχει από τη ζώνη σθένους κατά το λεγόμενο ενεργειακό χάσμα E_G που είναι αρκετά μεγάλο (της τάξης των 10eV). Αυτή η μεταπήδηση είναι εξαιρετικά δύσκολη και τα υλικά αυτά, που λέγονται μονωτές, έχουν πολύ μεγάλη ηλεκτρική αντίσταση. Τέλος, υπάρχει μια ειδική κατηγορία μονωτών, που το ενεργειακό τους χάσμα τυχαίνει να είναι μικρό (της τάξης του 1eV) οπότε κάποιο ποσοστό ηλεκτρονίων της ζώνης σθένους μπορούν να περάσουν (π.χ. λόγω θερμικής διέγερσης) στη ζώνη αγωγιμότητας και να δώσουν μια ασθενική αγωγιμότητα. Αυτά τα υλικά λέγονται (ενδογενείς) ημιαγωγοί.

Τα ηλεκτρόνια που κινούνται στη ζώνη αγωγιμότητας χαρακτηρίζονται από έναν κυματικό αριθμό $\vec{k}$ που συνδέεται με την ενέργεια E μέσω της σχέσης διασποράς $E = E(\vec{k})$. Η ζώνη αγωγιμότητας χαρακτηρίζεται από κάποια ελάχιστη ενέργεια (η οποία μπορεί να σημειώνεται για περισσότερους από έναν κυματικούς αριθμούς, οπότε έχουμε πολλά ισοδύναμα ελάχιστα) και κάποια μέγιστη ενέργεια. Έστω ότι η ελάχιστη ενέργεια στη ζώνη αγωγιμότητας είναι E_C . Τότε συνηθίζεται να αναπτύσσει κανείς τη σχέση διασποράς περί τον αντί-

στοιχο κυματαριθμό $\vec{k}_0$ και, αν το υλικό είναι (για απλότητα) ισότροπο, να βρίσκει την προσεγγιστική σχέση διασποράς:

$$E(k) \simeq E_C + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 \equiv E_C + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m_n^*}.$$

Αυτή η σχέση ορίζει τη λεγόμενη ενεργό μάζα m_n^* του ηλεκτρονίου, που γενικά δεν ισούται με τη μάζα του ηλεκτρονίου που μετράμε στον ελεύθερο χώρο. Η ποσότητα E_C , το ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας, είναι πολύ σημαντική παράμετρος.

Αναφορικά με τη ζώνη σθένους ισχύουν ανάλογα πράγματα, μόνο που η σημαντική παράμετρος είναι το μέγιστο E_V της ζώνης σθένους, το οποίο βρίσκεται πάντα στο σημείο $(0,0,0)$ και η αντίστοιχη προσεγγιστική σχέση διασποράς είναι η

$$E(k) \simeq E_V + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right|_{k=(0,0,0)} k^2 \equiv E_V - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*},$$

απ' όπου ορίζεται η ενεργός μάζα των οπών m_p^* . Εδώ χρειάζεται κάποια εξήγηση: αφού πρόκειται για μέγιστο, η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική, γι' αυτό έχουμε εισαγάγει ένα αρνητικό πρόσημο, ώστε η m_p^* να προκύπτει θετική. Είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια τα οποία τυχόν θα μεταβούν

στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνουν πίσω τους ένα κενό, που το λέμε οπή. Κάποιο γειτονικό ηλεκτρόνιο είναι δυνατόν να γεμίσει αυτό το κενό, αλλά τότε η δικιά του θέση θα μείνει κενή, δηλαδή θα γίνει οπή. Άρα η οπή μπορεί κι αυτή να κινείται και η κίνησή της θα χαρακτηρίζεται από τη μάζα που μόλις ορίσαμε. Βέβαια, οι οπές θεωρούνται θετικά φορτισμένοι φορείς, αφού αντιστοιχούν στην έλλειψη ενός αρνητικά φορτισμένου ηλεκτρονίου. Είναι προφανές ότι το ενεργειακό χάσμα εκφράζεται ποσοτικά με τη σχέση:

$$E_G = E_C - E_V.$$

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι ο κυματικός αριθμός k δεν έχει νόημα να παίρνει όλες τις τιμές του πραγματικού άξονα: το γινόμενο ka (όπου το a θα μπορούσε να είναι η πλεγματική σταθερά) πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα $[-\pi, +\pi]$. Μεγαλύτερες απόλυτες τιμές του γινομένου θα αντιστοιχούσαν σε χωρικές μεταβολές με μήκος κύματος τόσο μικρό που οι ταλαντώσεις θα συνέβαιναν μεταξύ των ιόντων και δεν θα ήταν φυσικά ανιχνεύσιμες. Η ανισότητα

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq +\frac{\pi}{a}$$

ορίζει την λεγόμενη (πρώτη) ζώνη Brillouin στο χώρο των κυματαριθμών. Οι περιοχές στις οποίες κινούνται η ειδική αντίσταση και η αγωγιμότητα για μονωτές, ημιαγωγούς και αγωγούς φαίνονται στον πίνακα.

Ιδιότητες αγωγιμότητας υλικών		
Υλικά	Ειδική αντίσταση $\rho(Ohm \cdot cm)$	Αγωγιμότητα $\sigma(S/cm)$
Μονωτές	$10^{18} - 10^8$	$10^{-18} - 10^{-8}$
Ημιαγωγοί	$10^8 - 10^{-3}$	$10^{-8} - 10^3$
Αγωγοί	$10^{-3} - 10^{-8}$	$10^3 - 10^8$

1.2 Ενδογενείς και εξωγενείς ημιαγωγοί

Ενδογενείς (intrinsic) ονομάζονται οι ημιαγωγοί που δεν έχουν προσμείξεις. Κατ' ακολουθία δεν υπάρχουν φορείς φορτίου στους $0^\circ K$. Αν η θερμοκρασία αυξηθεί, θα υπάρξουν φορείς λόγω θερμικής διέγερσης: ηλεκτρόνια θα αποκτήσουν αρκετή ενέργεια λόγω θερμότητας, ώστε από τη ζώνη σθένους να ανέβουν στη ζώνη αγωγιμότητας, αφήνοντας ταυτόχρονα ένα κενό (οπή) στη ζώνη σθένους. Είναι, λοιπόν, φανερό, ότι η συγκέντρωση n των ηλεκτρονίων και η συγκέντρωση p των οπών θα είναι ίσες για τους ενδογενείς ημιαγωγούς:

$$n_i = p_i.$$

Ο δείκτης i (από το intrinsic) απλά επισημαίνει ότι αναφερόμαστε σε ενδογενή ημιαγωγό.

Εξωγενείς ημιαγωγοί ονομάζονται όσοι περιέχουν προσμείξεις, οι οποίες μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες, έχοντας υπόψη ότι κατ' αρχήν τα άτομα του ημιαγωγού είναι τετρασθενή: (1) Αν το άτομο μιας πρόσμιξης τύχει να είναι πεντασθενές, τα τέσσερα από τα πέντε ηλεκτρόνια θα σχηματίζουν δεσμούς με το υλικό του ημιαγωγού, ενώ το πέμπτο θα συνδέεται ασθενικά με το άτομο προέλευσής του, με πιθανό αποτέλεσμα να απομακρυνθεί και να παίζει το ρόλο του ελεύθερου αρνητικού φορέα, ενώ ταυτόχρονα θα αφήσει πίσω του το θετικό ιόν της πρόσμιξης. Τέτοιου είδους άτομα λέγονται δότες. (2) Αν, αντίθετα, ένα άτομο πρόσμιξης είναι τρισθενές, τα τρία ηλεκτρόνια του θα σχηματίσουν δεσμούς με τα γειτονικά άτομα του ημιαγωγού, αλλά απαιτείται άλλο ένα ηλεκτρόνιο από το τετρασθενές περιβάλλον: λείπει ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο πιθανόν να συμπληρωθεί από κάποιο ηλεκτρόνιο του ημιαγωγού δημιουργώντας μια οπή και ταυτόχρονα φορτίζοντας αρνητικά το άτομο πρόσμιξης. Τέτοια άτομα λέγονται αποδέκτες.

Δεν είναι υποχρεωτικό οι διεργασίες που μόλις περιγράψαμε να συμβούν σε όλα τα άτομα των προσμείξεων. Έστω N_D η συγκέντρωση των συνολικά υπαρχόντων ατόμων δότη και N_D^+ η συγκέντρωση όσων ατόμων τελικά παραχωρούν το ηλεκτρόνιό τους και ιονίζονται θετικά. Τα αντίστοιχα μεγέθη για τα άτομα αποδέκτες είναι αντίστοιχα N_A και N_A^- , ενώ n είναι η συγκέντρωση των

αρνητικών φορέων (ηλεκτρονίων) και p των θετικών φορέων (οπών). Αφού ο ημιαγωγός θα είναι ηλεκτρικά ουδέτερος, το συνολικό αρνητικό φορτίο που συγκεντρώνεται (ηλεκτρόνια και αρνητικά ιόντα) πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο θετικό φορτίο (οπές και θετικά ιόντα):

$$n + N_A^- = p + N_D^+. \quad (1.1)$$

Φυσικά, τα φαινόμενα της θερμικής διέγερσης και του εμπλουτισμού σε προσμείξεις είναι δυνατόν να συνυπάρχουν. Τελικά ο ημιαγωγός θα ονομασθεί ενδογενής αν $N_A^- \ll n_i$, $N_D^+ \ll n_i$. Αντίστοιχα θα ονομασθεί εξωγενής αν $N_A^- \gg n_i$ είτε $N_D^+ \gg n_i$. Για εξωγενείς ημιαγωγούς: αν $N_A^- > N_D^+$ λέγονται ημιαγωγοί τύπου p ενώ αν $N_A^- < N_D^+$ λέγονται τύπου n .

Θα δούμε αργότερα ότι, εκτός από τη σχέση (1.1) ισχύει και η

$$n_n p_n = n_p p_p = n_i^2, \quad (1.2)$$

όπου π.χ. n_p συμβολίζει τη συγκέντρωση των αρνητικών φορέων n σε ημιαγωγό τύπου p και η έννοια των λοιπών συμβόλων είναι ανάλογη. Οι δύο

Σχήμα 1.1: Συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας (M) και μειονότητας (m) συναρτήσει της διαφοράς στις συγκεντρώσεις των προσμείξεων.

σχέσεις (1.1) και (1.8) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων ηλεκτρονίων και οπών για ενδογενείς και εξωγενείς ημιαγωγούς. Υποθέτουμε για απλότητα ότι **όλα** τα άτομα δότες ή αποδέκτες είναι ιονισμένα: $N_A^- = N_A, N_D^+ = N_D$.

Οι εξισώσεις $n_n + N_A = p_n + N_D, n_n p_n = n_i^2$, για ημιαγωγούς τύπου n ($N_D > N_A$), δίνουν τα αποτελέσματα:

$$n_n = \frac{1}{2} \left[(N_D - N_A) + \sqrt{(N_D - N_A)^2 + 4n_i^2} \right], p_n = \frac{n_i^2}{n_n}.$$

Ειδικότερα, αν μελετούμε σαφώς εξωγενή ημιαγωγό τύπου n , δηλαδή αν ισχύουν οι σχέσεις $N_D \gg n_i, N_A = 0$, τα αποτελέσματα αυτά γράφονται προσεγγιστικά με τη μορφή:

$$n_n \approx N_D + \frac{n_i^2}{N_D} \approx N_D, p_n = \frac{n_i^2}{n_n} \approx \frac{n_i^2}{N_D}.$$

Για έναν ημιαγωγό που είναι βασικά ενδογενής, ενώ οι συγκεντρώσεις των προσμείξεων ικανοποιούν τη σχέση ($0 < N_D - N_A \ll n_i$), ώστε το υλικό να τείνει ελαφρά προς τους ημιαγωγούς τύπου n , οι τύποι για τις συγκεντρώσεις παίρνουν τις προσεγγιστικές μορφές:

$$n_n = n_i + \frac{N_D - N_A}{2}, p_n = n_i - \frac{N_D - N_A}{2}.$$

Το σχήμα παριστάνει το πηλίκο $\frac{n_n}{n_i}$ συναρτήσει του $\frac{N_D - N_A}{n_i}$ και συνοψίζει αυτά που μόλις είπαμε.

Οι εξισώσεις $n_p + N_A = p_p + N_D, n_p p_p = n_i^2$, για ημιαγωγούς τύπου p ($N_A > N_D$), δίνουν τα αποτελέσματα:

$$p_p = \frac{1}{2} \left[(N_A - N_D) + \sqrt{(N_A - N_D)^2 + 4n_i^2} \right], n_p = \frac{n_i^2}{p_p}.$$

Ειδικότερα, αν μελετούμε σαφώς εξωγενή ημιαγωγό τύπου p , δηλαδή αν ισχύουν οι σχέσεις $N_A \gg n_i, N_D = 0$, τα αποτελέσματα αυτά γράφονται προσεγγιστικά με τη μορφή:

$$p_p \approx N_A + \frac{n_i^2}{N_A} \approx N_A, n_p = \frac{n_i^2}{p_p} \approx \frac{n_i^2}{N_A}.$$

Για έναν ημιαγωγό που είναι βασικά ενδογενής, ενώ οι συγκεντρώσεις των προσμείξεων ικανοποιούν τη σχέση ($N_A - N_D \ll n_i$), ώστε το υλικό να τείνει ελαφρά προς τους ημιαγωγούς τύπου p , οι τύποι για τις συγκεντρώσεις παίρνουν τις προσεγγιστικές μορφές:

$$n_p = n_i - \frac{N_A - N_D}{2}, p_p = n_i + \frac{N_A - N_D}{2}.$$

Όπως είδαμε, ένας ημιαγωγός με προσμείξεις εξακολουθεί να λειτουργεί και ως ενδογενής ημιαγωγός. Το υλικό λέγεται εξωγενής ημιαγωγός αν $|N_A - N_D| \gg n_i$ και ενδογενής αν $|N_A - N_D| \ll n_i$. Η τυπική τιμή του n_i σε θερμοκρασία δωματίου είναι 10^{10}cm^{-3} . Συμπερασματικά, μια πρακτική συνθήκη για να είναι εξωγενής ο ημιαγωγός είναι η $|N_A - N_D| \approx 10^{15} \text{cm}^{-3}$.

1.3 Ενεργειακές στάθμες σε εξωγενείς ημιαγωγούς

Θα εξετάσουμε το θέμα των ενεργειακών σταθμών για τους εξωγενείς ημιαγωγούς τύπου n που προκύπτουν με την προσθήκη πεντασθενών ατόμων (π.χ. As) σε ημιαγωγό με τετρασθενή άτομα (π.χ. Si .) Τα τέσσερα από τα πέντε άτομα της πρόσμιξης θα σχηματίσουν δεσμούς με τα γειτονικά άτομα του Si , αλλά το πέμπτο παραμένει χαλαρά συνδεδεμένο με το μητρικό άτομο. Με τη διατύπωση της παλιάς Κβαντικής Μηχανικής του Bohr θα λέγαμε ότι η ακτίνα της τροχιάς του πέμπτου ηλεκτρονίου γίνεται μεγάλη και περιλαμβάνει αρκετά άτομα πυριτίου, συνεπώς το ηλεκτρόνιο μπορεί σε καλή προσέγγιση να περιγραφεί μέσω μιας τροποποιημένης δυναμικής ενέργειας

$$V(r) = \frac{ke^2}{\epsilon_r r},$$

όπου το ϵ_r είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του Si , το k μια σταθερά που εξαρτάται από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιούμε (π.χ. στο διεθνές σύστημα μονάδων SI $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$) και e είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Στον κενό χώρο $\epsilon_r = 1$, αλλά για το πυρίτιο είναι $\epsilon_r = 11.7$, πράγμα που μειώνει ακόμα περισσότερο τη ζεύξη του πέμπτου ηλεκτρονίου. Υπενθυμίζουμε την τιμή της ενέργειας για τα υδρογονοειδή άτομα:

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -\frac{ke^2}{2a_0n^2} \equiv -\frac{E_R}{n^2},$$

όπου με $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{mke^2}$ συμβολίζεται η λεγόμενη ακτίνα του Bohr που είναι ίση με την πιο μικρή δυνατή ακτίνα στο άτομο του Bohr και είναι τυπική μονάδα μέτρησης αποστάσεων σε ατομικό επίπεδο. Η αριθμητική της τιμή είναι 0.529 Å. Η ενέργεια

$$E_R \equiv \frac{m_0 k^2 e^4}{2\hbar^2} = \frac{ke^2}{2a_0} = 13.6 \text{ eV}$$

λέγεται ενέργεια Rydberg. Στην περίπτωση του πέμπτου ηλεκτρονίου στο τροποποιημένο δυναμικό, ή σχέση που δίνει την ενέργεια μετατρέπεται στην

$$E_D = -\frac{m_n^* k^2 e^4}{2\epsilon_r^2 \hbar^2} = -\frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{m_n^*}{m_0} \frac{m_0 k^2 e^4}{2\hbar^2} = -\frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{m_n^*}{m_0} E_R.$$

Στη θέση της μάζας του ηλεκτρονίου έχουμε θέσει στον τύπο της ενέργειας την ενεργό του μάζα m_n^* , η οποία δεν είναι υποχρεωτικά ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου στον ελεύθερο χώρο, την οποία συμβολίζουμε στο εξής με m_0 . Ένα σχόλιο που πρέπει να γίνει έχει να κάνει με τη στάθμη αναφοράς της ενέργειας. Για το άτομο του υδρογόνου ένα σχεδόν ελεύθερο ηλεκτρόνιο (έστω με μεγάλο κύριο κβαντικό αριθμό) έχει (τουλάχιστον) μηδενική ενέργεια. Όμως για την περίπτωση του ημιαγωγού ένα ηλεκτρόνιο θα κινηθεί ελεύθερα αν φτάσει στη ζώνη αγωγιμότητας, δηλαδή αν η ενέργειά του γίνει (τουλάχιστον) E_C . Επομένως, αν θέλουμε να ακριβολογήσουμε, η ενέργεια αυτού του ηλεκτρονίου είναι

$$E_D = E_C - \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{m_n^*}{m_0} E_R.$$

Για $\frac{m_n^*}{m_0} = 0.5$, $\epsilon_r = 11.7$, η διαφορά είναι: $E_C - E_D \simeq 50 \text{ meV}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το ενεργειακό χάσμα είναι της τάξης του eV , είναι φανερό ότι η στάθμη E_D βρίσκεται ελάχιστα πιο κάτω από το κάτω όριο E_C της ζώνης αγωγιμότητας. Αυτό ακριβώς το γεγονός μπορεί να ερμηνεύσει την αυξημένη αγωγιμότητα των ημιαγωγών τύπου n : τα ηλεκτρόνια με ενέργεια E_D μπορούν να μεταπηδήσουν εύκολα (τουλάχιστον πολύ ευκολότερα απ' ό,τι τα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους) στη ζώνη αγωγιμότητας. Ανάλογα επιχειρήματα ισχύουν για ημιαγωγούς τύπου p .

Είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την τάξη μεγέθους της ακτίνας της τροχιάς του πέμπτου ηλεκτρονίου του δότη. Για την κατά προσέγγιση εκτίμηση της ακτίνας αρκεί η θεωρία του Bohr. Η δύναμη μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πυρήνα στο άτομο του υδρογόνου λόγω έλξης Coulomb λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη: $k \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow (mvr)^2 = kme^2 r$. Το αριστερό μέλος είναι το τετράγωνο της στροφορμής, που πρέπει να ισούται με $(n\hbar)^2$, οπότε

$$r = \frac{\hbar^2}{kme^2} n^2 = a_0 n^2.$$

Στην περίπτωση του ημιαγωγού το ηλεκτρόνιο κινείται σε περιβάλλον με σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r και η μάζα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα m_n^* :

$$r = \frac{\epsilon_r \hbar^2}{k m_n^* e^2} n^2 = \epsilon_r \frac{m_0}{m_n^*} \frac{\hbar^2}{k m_0 e^2} n^2 = \epsilon_r \frac{m_0}{m_n^*} a_0 n^2.$$

Για τα δεδομένα που είχαμε και προηγουμένως ($\frac{m_n^*}{m_0} = 0.5$, $\epsilon_r = 11.7$), η ελάχιστη ακτίνα ($n = 1$) ισούται με $r \simeq 23.4 a_0 = 12.4 \text{\AA}$. Η πλεγματική σταθερά (μέση απόσταση μεταξύ ατόμων πυριτίου) ισούται με $a_{Si} \simeq 5.4 \text{\AA}$, δηλαδή $\frac{r}{a_{Si}} \simeq 2.3$. Αυτό το αποτέλεσμα δικαιώνει εκ των υστέρων την αρχική υπόθεση της χαλαρής σύνδεσης του πέμπτου ηλεκτρονίου, αφού σημαίνει ότι μέσα στην τροχιά του περιλαμβάνονται δύο και πλέον άτομα πυριτίου.

Συνοπτικά, για ημιαγωγούς τύπου n ισχύουν οι σχέσεις:

$$E_D = E_C - \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{m_n^*}{m_0} E_R, \quad r = \epsilon_r \frac{m_0}{m_n^*} a_0 n^2. \quad (1.3)$$

Παρόμοια, για ημιαγωγούς τύπου p ισχύουν οι σχέσεις:

$$E_A = E_V + \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{m_p^*}{m_0} E_R, \quad r = \epsilon_r \frac{m_0}{m_p^*} a_0 n^2. \quad (1.4)$$

1.4 Συγκεντρώσεις φορέων

Για να υπολογίσουμε τις συγκεντρώσεις των φορέων χρειαζόμαστε δύο στοιχεία:

(1) Τη στατιστική κατανομή $f_{FD}(E)$ που διέπει τους φορείς, (2) Την πυκνότητα καταστάσεων $g_n(E)$, $g_p(E)$ των αρνητικών και των θετικών φορέων αντίστοιχα.

Και τα δύο είδη φορέων υπακούουν στην στατιστική Fermi-Dirac:

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, όπου

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} J \text{grad}^{-1} = 8.62 \times 10^{-2} \text{meV grad}^{-1},$$

είναι η σταθερά Boltzmann, που μετατρέπει μονάδες θερμοκρασίας (τους βαθμούς Kelvin $^{\circ}K \rightarrow \text{grad}$) σε κατάλληλες μονάδες ενέργειας. Η ποσότητα T

Σχήμα 1.2: Κατανομή f_{FD} των Fermi και Dirac συναρτήσεων της ενέργειας.

Σχήμα 1.3: Ενέργεια συναρτήσεων της κατανομής f_{FD} των Fermi και Dirac.

είναι η θερμοκρασία στην απόλυτη κλίμακα Kelvin. Η ποσότητα E_F λέγεται ενέργεια Fermi και εξαρτάται γενικά από τη θερμοκρασία.¹ Αξίζει να σημειώσουμε ότι η κατανομή $f_{FD}(E)$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$ για $E = E_F$. Η κατανομή φαίνεται στο σχήμα (1.2).

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε όχι ακριβώς το $f_{FD}(E)$, αλλά την αντίστροφη συνάρτηση (το E συναρτήσεων του $f_{FD}(E)$), πράγμα που διευκολύνει τη συνέχεια της συζήτησής μας και είναι η συνηθισμένη πρακτική.

Πρέπει να τονίσουμε ότι, για την στατιστική που αφορά ενέργειες μεγαλύτερες από την E_C (το κάτω όριο της ζώνης αγωγιμότητας), δηλαδή για την περιοχή που φορείς είναι τα ηλεκτρόνια, χρησιμοποιείται η συνάρτηση $f_n(E)$ που ταυτίζεται με την $f_{FD}(E)$:

$$f_n(E) = f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}, E \geq E_C.$$

Για την περιοχή ενεργειών κάτω από την E_V (το άνω όριο της ζώνης σθένους), δηλαδή στην περιοχή όπου φορείς είναι οι οπές, η πιθανότητα κατάληψης **από οπές** των αντίστοιχων κβαντικών καταστάσεων είναι η μονάδα μείον την πιθανότητα κατάληψης **από ηλεκτρόνια**: $f_p(E) = 1 - f_{FD}(E)$. Δηλαδή:

$$f_p(E) = 1 - f_{FD}(E) = \frac{e^{\beta(E-E_F)}}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}, E \leq E_V.$$

Σημειώνουμε ότι δεν έχει νόημα να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τις τιμές που παίρνει η πιθανότητα κατάληψης μεταξύ των ενεργειών E_V και E_C , αφού θα πολλαπλασιαστεί με την πυκνότητα καταστάσεων, που είναι μηδέν σ' αυτήν την περιοχή, επομένως δεν θα παίζει ρόλο.

Στην πλειονότητα των περιπτώσεων η ενέργεια Fermi E_F είναι κάπου στο διάστημα μεταξύ της E_V και της E_C , δηλαδή αρκετά μακριά και από τις δύο.

¹Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι συνήθως αυτή η ποσότητα ονομάζεται χημικό δυναμικό και μόνο για μηδενική θερμοκρασία ονομάζεται ενέργεια Fermi. Για λόγους απλότητας στην ορολογία θα την ονομάζουμε καταχρηστικά ενέργεια Fermi.

Με αυτό το δεδομένο είναι απλό να ελέγξει κανείς ότι ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις που θα διευκολύνουν τις πράξεις:

Στη σχέση $f_n(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}$ το εκθετικό είναι πολύ μεγαλύτερο από τη μονάδα για $E \geq E_C \gg E_F$ (και όχι υπερβολικά υψηλή θερμοκρασία, ώστε το β να μην είναι υπερβολικά μικρό, περιορισμός που συνήθως ικανοποιείται), οπότε:

$$f_n(E) \approx e^{-\beta(E-E_F)}, E \geq E_C.$$

Εξ άλλου η σχέση $f_p(E) = \frac{e^{\beta(E-E_F)}}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_F-E)}}$ προσεγγίζεται καλά αν παραλειφθεί στον παρονομαστή η μονάδα σε σύγκριση με το εκθετικό, για ενέργειες $E \leq E_V \ll E_F$, οπότε:

$$f_p(E) \approx e^{\beta(E-E_F)}, E \leq E_V.$$

Θεωρούμε τώρα σωματίδια με σπιν $\frac{1}{2}$ και μάζα m που κινούνται σ' ένα κουτί έξω από το οποίο η δυναμική ενέργεια είναι άπαιρη, ενώ μέσα σε αυτό είναι μηδέν, συνεπώς η στάθμη αναφοράς της ενέργειας είναι το μηδέν: $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα καταστάσεων στην ενέργεια E δίνεται από τη σχέση:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις ανά μονάδα όγκου στο διάστημα ενέργειας από E μέχρι $E + dE$ είναι $g(E)dE$.

Θεωρούμε στη συνέχεια ηλεκτρόνια που κινούνται στη ζώνη αγωγιμότητας και η ενέργειά τους περιγράφεται από τη σχέση διασποράς $E = E(\vec{k})$, η οποία μπορεί να αναπτυχθεί γύρω από ένα ελάχιστο $\vec{k} = \vec{k}_0 \neq (0, 0, 0)$ της ζώνης αγωγιμότητας και να δώσει την προσεγγιστική σχέση διασποράς:

$$E = E_C + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*},$$

που εξαρτάται από την ελάχιστη τιμή E_C της ενέργειας στη ζώνη αγωγιμότητας και από την ενεργό μάζα των αρνητικών φορέων, που γενικά δεν ταυτίζεται με τη μάζα m_0 του ηλεκτρονίου στον ελεύθερο χώρο. Συνεπώς η πυκνότητα καταστάσεων για τα ηλεκτρόνια (αρνητικούς φορείς) είναι εύκολο να υπολογιστεί: αρκεί η μάζα m να αντικατασταθεί με m_n^* και η ενέργεια E με $E - E_C$:

$$g_n(E) = N \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_C}, E \geq E_C.$$

Σχήμα 1.4: Πυκνότητες καταστάσεων

Έχουμε περιλάβει στον τελευταίο τύπο τον αριθμό N των ισοδύναμων ελαχίστων της ζώνης αγωγιμότητας μέσα στην πρώτη ζώνη Brillouin, για να καλύψουμε την περίπτωση που αυτά είναι περισσότερα από ένα.

Σχετικά με τις οπές πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το μέγιστο E_V της ζώνης σθένους, στην οποία κινούνται οι οπές, βρίσκεται πάντα στο κέντρο $\vec{k} = (0, 0, 0)$ της ζώνης Brillouin, οπότε $N = 1$, και το ανάπτυγμα της αντίστοιχης σχέσης διασποράς είναι το εξής:

$$E = E_V - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*}.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση ο κυματικός αριθμός k , με βάση τον οποίο προκύπτει η πυκνότητα καταστάσεων, σχετίζεται με την ποσότητα $\sqrt{E_V - E}$, οπότε η πυκνότητα των καταστάσεων θετικού φορτίου (οπών) είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι δίνεται από τη σχέση:

$$g_p(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_V - E}, \quad E \leq E_V.$$

Τα αποτελέσματα για τις πυκνότητες καταστάσεων φαίνονται στο σχήμα (1.4).

Έχουμε πια δώσει όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης των φορέων. Η συγκέντρωση n των ηλεκτρονίων (αρνητικών φορέων) θα προκύψει από το γινόμενο της συνάρτησης κατανομής $f_n(E)$ με την πυκνότητα καταστάσεων ανά μονάδα όγκου των φορέων με αρνητικό φορτίο $g_n(E)$, αν το ολοκληρώσουμε από την ελάχιστη ενέργεια E_C μέχρι το άπειρο. Δύο παρατηρήσεις: (1) Για την $f_n(E)$ θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση που βρήκαμε προηγουμένως. (2) Αυστηρά μιλώντας, η ολοκλήρωση δεν πρέπει να εκτείνεται ως το άπειρο, αλλά ως το ανώτατο όριο της συγκεκριμένης ενεργειακής ζώνης. Λόγω όμως, του εκθετικού, δεν κάνουμε σημαντικό λάθος αν χρησιμοποιήσουμε ως άνω όριο το άπειρο, που είναι πιο εύχρηστο από μαθηματική άποψη. Όλα αυτά συνοψίζονται στην έκφραση:

$$\begin{aligned} n &= \int_{E_C}^{\infty} dE g_n(E) f_n(E) = \int_{E_C}^{\infty} dE \frac{N}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_C} e^{-\beta(E - E_F)} \\ &= \frac{N}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_C}^{\infty} dE \sqrt{E - E_C} e^{-\beta(E - E_F)}. \end{aligned}$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών ($E = E_C + x^2, dE = 2xdx$), το ολοκλήρωμα θα μετατραπεί στο

$$e^{-\beta(E_C-E_F)} \int_0^\infty 2xdxxe^{-\beta x^2} = e^{-\beta(E_C-E_F)} \int_{-\infty}^{+\infty} dxx^2e^{-\beta x^2},$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια. Το τελευταίο υπολογίζεται με τη βοήθεια του Γκαουσιανού ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-\beta x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, το οποίο με παραγωγή ως προς β δίνει: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2dxe^{-\beta x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$. Άρα η συγκέντρωση των αρνητικών φορέων ισούται με:

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} e^{-\beta(E_C-E_F)} \Rightarrow \\ \Rightarrow n &= N_C e^{-\beta(E_C-E_F)}, \quad N_C \equiv \frac{N}{4} \left(\frac{2m_n^*}{\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Η ποσότητα N_C λέγεται **ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη αγωγιμότητας**. Ενδεικτικές τιμές για θερμοκρασία δωματίου ($T = 300^\circ K$) είναι $2.8 \times 10^{19} cm^{-3}$ για το Si και $4.7 \times 10^{17} cm^{-3}$ για το $GaAs$.

Εντελώς παρόμοιος είναι ο υπολογισμός για την συγκέντρωση των θετικών φορέων (οπών). Γράφουμε μόνο τις αναγκαίες μαθηματικές σχέσεις με λίγες μόνο εξηγήσεις:

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{E_V} dE g_p(E) f_p(E) = \int_{-\infty}^{E_V} dE \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_V - E} e^{\beta(E-E_F)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{E_V} dE \sqrt{E_V - E} e^{\beta(E-E_F)}. \end{aligned}$$

Αν κάνουμε τώρα την ελαφρά διαφορετική αλλαγή μεταβλητών ($E_V - E = x^2, dE = -2xdx$), το ολοκλήρωμα θα μετατραπεί στο

$$e^{\beta(E_V-E_F)} \int_{+\infty}^0 (-2xdx) x e^{-\beta x^2} = e^{\beta(E_V-E_F)} \int_{-\infty}^{+\infty} dxx^2 e^{-\beta x^2},$$

όπου και πάλι λάβαμε υπόψη ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια. Εμφανίζεται το ίδιο ολοκλήρωμα όπως πριν, οπότε:

$$p = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} e^{\beta(E_V-E_F)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = N_V e^{\beta(E_V - E_F)}, \quad N_V \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{2m_p^*}{\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (1.6)$$

Η ποσότητα N_V λέγεται **ενεργός πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους**. Ενδεικτικές τιμές για θερμοκρασία δωματίου ($T = 300^\circ K$) είναι $1.04 \times 10^{19} cm^{-3}$ για το Si και $7.0 \times 10^{18} cm^{-3}$ για το $GaAs$.

Από τις δύο σχέσεις για τις συγκεντρώσεις συμπεραίνουμε ότι

$$np = N_C N_V e^{-\beta(E_C - E_V)}.$$

Η διαφορά

$$E_G \equiv E_C - E_V$$

που εμφανίζεται στο εκθετικό είναι μια χαρακτηριστική παράμετρος για τον ημιαγωγό και ονομάζεται **ενεργειακό χάσμα (gap)**. Άρα

$$np = N_C N_V e^{-\beta E_G}. \quad (1.7)$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (1.5, 1.6, 1.7) ισχύουν εξ ίσου καλά για ενδογενείς και για εξωγενείς ημιαγωγούς. Το μόνο που μεταβάλλεται είναι η ενέργεια Fermi. Αυτό συνεπάγεται:

$$n_p p_p = n_n p_n = n_i p_i. \quad (1.8)$$

Η σχέση αυτή είναι εξαιρετικά σπουδαία και λέγεται **νόμος δράσης μαζών**. Στα σύμβολα που μόλις χρησιμοποιήσαμε (π.χ. το n_p) το n παριστάνει τη συγκέντρωση των αντίστοιχων φορέων (επί του προκειμένου των αρνητικών), ενώ ο δείκτης p υποδεικνύει ότι αναφερόμαστε σε ημιαγωγό τύπου p .

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι, επειδή η σχέση (1.5) ισχύει για ενδογενείς και για εξωγενείς ημιαγωγούς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί δύο φορές και να δώσει: $n = N_C e^{-\beta(E_C - E_F)}$, $n_i = N_C e^{-\beta(E_C - E_i)}$. Έχουμε συμβολίσει με E_i την ενέργεια Fermi για ενδογενείς ημιαγωγούς, που λέγεται **ενδογενής ενέργεια Fermi**. Συμπεραίνουμε ότι:

$$n = n_i e^{\beta(E_F - E_i)} \rightarrow E_F = E_i + k_B T \ln \left(\frac{n}{n_i} \right). \quad (1.9)$$

Έχουμε εκφράσει, δηλαδή, την ενέργεια Fermi συναρτήσει της ενδογενούς ενέργειας Fermi. Παρόμοια:

$$p = p_i e^{\beta(E_i - E_F)} = n_i e^{\beta(E_i - E_F)} \rightarrow E_F = E_i - k_B T \ln \left(\frac{p}{n_i} \right). \quad (1.10)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $p_i = n_i$. Ο νόμος δράσης μαζών $np = n_i^2$ δείχνει ότι $\ln \left(\frac{p}{n_i} \right) = \ln \left(\frac{n_i^2}{n_i n} \right) = -\ln \left(\frac{n}{n_i} \right)$, άρα οι δύο εκφράσεις για την ενέργεια είναι συμβιβαστές μεταξύ τους.

1.4.1 Εξάρτηση από τη θερμοκρασία

Αντικαθιστώντας τα N_C και N_V στην (1.7) από τις σχέσεις (1.5) και (1.6) βρίσκουμε τη σχέση:

$$np = \frac{(m_p^* m_n^*)^{3/2}}{2\pi^3 \beta^3 \hbar^6} e^{-\beta E_G} = \frac{k_B^3 (m_p^* m_n^*)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} T^3 e^{-\beta E_G}. \quad (1.11)$$

Τα m_p^* και m_n^* δεν εξαρτώνται από τη θερμοκρασία. Όμως το ενεργειακό χάσμα έχει βρεθεί ότι εξαρτάται από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση:

$$E_G(T) = E_G(0) - \frac{aT^2}{T+b}, \quad (1.12)$$

όπου τα a και b είναι θετικές σταθερές (βλέπε πίνακα).

	$E_G(0)(eV)$	$a \times 10^{-4}(eV/grad)$	$b(grad)$
<i>Si</i>	1.170	4.73	636
<i>Ge</i>	0.744	4.77	235
<i>GaAs</i>	1.519	5.41	204

Τελικά:

$$np = AT^3 e^{-\frac{E_G(0)}{k_B T} + \frac{aT}{k_B(T+b)}}. \quad (1.13)$$

Τέλος, από τον ορισμό των N_C και N_V προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{N_C(T_1)}{N_C(T_2)} = \frac{N_V(T_1)}{N_V(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}, \quad (1.14)$$

που εκφράζουν την εξάρτηση αυτών των συγκεντρώσεων από τη θερμοκρασία.

1.4.2 Υπολογισμός της ενέργειας Fermi

Για καθαρά ενδογενείς ημιαγωγούς η σχέση $n_i = p_i$ με τη βοήθεια των (1.5) και (1.6) δίνει το αποτέλεσμα $N_C e^{-\beta(E_C - E_F)} = N_V e^{\beta(E_V - E_F)}$, οπότε

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} - \frac{k_B T}{2} \log \left(\frac{N_C}{N_V} \right),$$

η οποία, αντικαθιστώντας τα N_C, N_V , γράφεται:

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3k_B T}{4} \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \Rightarrow E_F - E_V = \frac{E_G}{2} + \frac{3k_B T}{4} \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right). \quad (1.15)$$

Αυτό το αποτέλεσμα, επειδή αναφέρεται σε ενδογενείς ημιαγωγούς, ονομάζεται ενδογενής ενέργεια Fermi και συμβολίζεται με E_i . Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση που οι ενεργές μάζες είναι ίσες, η ενέργεια Fermi ενός ενδογενούς ημιαγωγού είναι ο μέσος όρος των E_C και E_V . Αν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα (1.15) σε οποιαδήποτε από τις (1.9,1.10) θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$n_i = p_i = \left(\frac{k_B T}{8\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_p^* m_n^*)^{3/4} e^{-\frac{\beta E_G}{2}}. \quad (1.16)$$

Από αυτή τη σχέση με κάποιες εύλογες τιμές για τα μεγέθη που υπεισέρχονται ($E_G = 1.4\text{eV}$, $m_p^* = m_n^* = m_0$,) όπου m_0 είναι η μάζα του ηλεκτρονίου στον ελεύθερο χώρο, μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της συγκέντρωσης σε τιμή δωματίου: είναι περίπου 10^{10}cm^{-3} . Επισημαίνουμε επίσης την εύλογη πρόβλεψη ότι ένα μικρό ενεργειακό χάσμα αντιστοιχεί σε μεγάλη συγκέντρωση.

Για εξωγενείς ημιαγωγούς τύπου n μια πρώτη προσέγγιση είναι να ξεκινήσει κανείς από τη σχέση (1.5) με την πρόσθετη υπόθεση του πλήρους ιονισμού ($n_n = N_D^+ = N_D$), οπότε επιλύοντας προκύπτει η σχέση:

$$E_F = E_C - k_B T \ln \frac{N_C}{N_D}. \quad (1.17)$$

Παρόμοια για εξωγενείς ημιαγωγούς τύπου p με αφετηρία τη σχέση (1.6) και με την πρόσθετη παραδοχή του πλήρους ιονισμού ($p_p = N_A^- = N_A$) προκύπτει η σχέση:

$$E_F = E_V + k_B T \ln \frac{N_V}{N_A}. \quad (1.18)$$

Όμως η υπόθεση του πλήρους ιονισμού δεν είναι πάντα δικαιολογημένη, όπως θα δούμε, οπότε χρειάζεται κάτι πιο ακριβές. Αποδεικνύεται (βλέπε το παράρτημα στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου) ότι ο αριθμός n_D των μη ιονισμένων δοτών (δηλαδή ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εξακολουθούν να κατέχουν τις ενεργειακές στάθμες των δοτών E_D και **δεν** έχουν περάσει στη ζώνη αγωγιμότητας) δίνεται από τη σχέση:

$$n_D = \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} \exp[\beta(E_D - E_F)]},$$

όπου N_D είναι η συγκέντρωση των δοτών. Συνεπώς ο αριθμός N_D^+ των ιονισμένων δοτών θα είναι:

$$N_D^+ = N_D - \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} \exp[\beta(E_D - E_F)]} = \frac{N_D}{1 + 2 \exp[-\beta(E_D - E_F)]}. \quad (1.19)$$

Εντελώς παρόμοια αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των μη ιονισμένων αποδεκτών (που ισούται με τον αριθμό των οπών που εξακολουθούν να κατέχουν τις ενεργειακές στάθμες E_A των αποδεκτών και **δεν** έχουν μεταβεί στη ζώνη σθένους) δίνεται από την έκφραση:

$$p_A = \frac{N_A}{1 + \frac{1}{2} \exp[\beta(E_F - E_A)]}.$$

Τελικά

$$N_A^- = N_A - p_A = \frac{N_A}{1 + 2 \exp[-\beta(E_F - E_A)]}, \quad (1.20)$$

όπου το νόημα των N_A^- και N_A είναι φανερό. Οι ποσότητες E_D και E_A είναι οι ενεργειακές στάθμες των δοτών και των αποδεκτών, τις οποίες θα εξετάσουμε λεπτομερειακότερα στη συνέχεια, είναι πάντως γνωστές: εξαρτώνται από τον ημιαγωγό και το είδος των προσμείξεων. Το τελικό βήμα είναι να επικαλεστούμε τη συνθήκη ουδετερότητας (1.1):

$$n + N_A^- = p + N_D^+$$

και να αντικαταστήσουμε τα n, N_A^-, p, N_D^+ με τα ίσα τους, οπότε προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} & N_C \exp[-\beta(E_C - E_F)] + \frac{N_A}{1 + 2 \exp[-\beta(E_F - E_A)]} = \\ & = N_V \exp[-\beta(E_F - E_V)] + \frac{N_D}{1 + 2 \exp[-\beta(E_D - E_F)]} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Στην εξίσωση αυτή όλα τα μεγέθη είναι γνωστά, εκτός από την ενέργεια Fermi που ζητάμε η οποία, επομένως, μπορεί να προσδιορισθεί. Βέβαια η λύση είναι συνήθως αριθμητική. Ένα πρόβλημα θα διαφωτίσει την πορεία λύσης και τα όρια αξιοπιστίας της προσέγγισης πλήρους ιονισμού.

Πρόβλημα Κρύσταλλος πυριτίου νοθεύεται με προσμείξεις αρσενικού με πυκνότητα $N_D = 10^{17}$ (άτομα αρσενικού)/ cm^3 . Να υπολογιστούν οι πυκνότητες φορέων και η στάθμη Fermi σε θερμοκρασία (1) δωματίου ($T_1 = 300^\circ K$), (2) υγρού αζώτου ($T_2 = 77^\circ K$) και (3) υγρού ηλίου ($T_3 = 4^\circ K$). Δίνονται οι ποσότητες: $\delta E \equiv E_C - E_D = 54 meV$, $N_C(T_1) = 2.8 \times 10^{19} cm^{-3}$, $N_V(T_1) =$

$1.04 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$, $N_A = 0.0 \text{cm}^{-3}$. Επίσης δίνονται οι τιμές του ενεργειακού χάσματος για τις τρεις θερμοκρασίες: είναι 1123meV , 1166meV και 1170meV αντίστοιχα, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.12) και τον σχετικό πίνακα. Σταθερά του Boltzmann $k_B = 0.0862 \text{meV/grad}$.

Πρόκειται, βέβαια, για ημιαγωγό τύπου n . Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε την ενέργεια Fermi. Αρκεί να υπολογίσουμε τη διαφορά $E_F(T) - E_V(T)$. Είναι φανερό ότι μόνο διαφορές ενεργειών μπορούν να υπολογιστούν. Επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς των ενεργειών την ποσότητα $E_V(T)$. Η εξίσωση (1.21) γράφεται:

$$\begin{aligned} N_C(T) \exp[-\beta(\{E_C(T) - E_V(T)\} - \{E_F(T) - E_V(T)\})] = \\ = N_V(T) \exp[-\beta(E_F(T) - E_V(T))] \\ + \frac{N_D}{1 + 2 \exp[-\beta(\{E_C(T) - \delta E\} - E_V(T) + E_V(T) - E_F(T))]}, \end{aligned}$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $E_G(T) \equiv E_C(T) - E_V(T)$ και συμβολίζοντας με x την προς εύρεση ποσότητα $E_F(T) - E_V(T)$ παίρνουμε την ισότητα:

$$\begin{aligned} N_C(T) \exp[-\beta(E_G(T) - x)] = N_V(T) e^{-\beta x} + \\ + \frac{N_D}{1 + 2 \exp[-\beta(E_G(T) - \delta E - x)]}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

(1) Για την πρώτη περίπτωση ισχύει ότι $k_B T_1 = 25.8 \text{meV}$, $E_G(T_1) = 1123 \text{meV}$, οπότε η (1.22) δίνει $x \equiv E_F(T_1) - E_V(T_1) \simeq 976.2 \text{meV}$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες:

$$\begin{aligned} E_C(T_1) - E_F(T_1) &= (E_C(T_1) - E_V(T_1)) - (E_F(T_1) - E_V(T_1)) = E_G(T_1) - x \\ &= 1123 \text{meV} - 976.2 \text{meV} = 146.8 \text{meV}, \end{aligned}$$

$$E_D(T_1) - E_F(T_1) = E_C(T_1) - E_F(T_1) - \delta E = 146.8 \text{meV} - 54 \text{meV} = 92.8 \text{meV},$$

$$\begin{aligned} E_D(T_1) - E_V(T_1) &= (E_D(T_1) - E_F(T_1)) + (E_F(T_1) - E_V(T_1)) = \\ &= (92.8 + 976.2) \text{meV} = 1069.0 \text{meV}, \end{aligned}$$

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp[-\frac{E_D(T_1) - E_F(T_1)}{k_B T_1}]} \simeq 0.95 \times N_D.$$

Είναι φανερό, σ' αυτήν την περίπτωση, ότι η προσέγγιση πλήρους ιονισμού των δοτών είναι αξιόπιστη (το N_D^+ είναι περίπου ίσο με το N_D), προφανώς λόγω της σχετικά υψηλής θερμοκρασίας.

Αν εφαρμόσουμε το προσεγγιστικό αποτέλεσμα (1.17) για την ενέργεια Fermi θα βρούμε:

$$\begin{aligned} E_F(T_1) - E_V(T_1) &= E_C(T_1) - E_V(T_1) - k_B T_1 \log \frac{N_C}{N_D} \\ &= E_G(T_1) - k_B T_1 \log \frac{N_C}{N_D} \simeq 977.6 \text{ meV}, \end{aligned}$$

που είναι πολύ κοντά στο 976.2 meV που βρήκαμε προηγουμένως.

(2) Για τη δεύτερη θερμοκρασία ισχύει ότι $k_B T_2 = 6.6 \text{ meV}$, $E_G(T_2) = 1166 \text{ meV}$. Πριν προχωρήσουμε πρέπει να υπολογίσουμε τα $N_C(T_2)$, $N_D(T_2)$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.14):

$$\frac{N_C(T_1)}{N_C(T_2)} = \frac{N_V(T_1)}{N_V(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2}.$$

Ο υπολογισμός δίνει $N_C(T_2) = 3.6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $N_V(T_2) = 1.35 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, οπότε η (1.22) δίνει $x \equiv E_F(T_2) - E_V(T_2) \simeq 1124.6 \text{ meV}$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες:

$$\begin{aligned} E_C(T_2) - E_F(T_2) &= (E_C(T_2) - E_V(T_2)) - (E_F(T_2) - E_V(T_2)) = E_G(T_2) - x = \\ &= 1166 \text{ meV} - 1124.6 \text{ meV} = 41.4 \text{ meV}, \end{aligned}$$

$$E_D(T_2) - E_F(T_2) = E_C(T_2) - E_F(T_2) - \delta E = 41.4 \text{ meV} - 54 \text{ meV} = -12.6 \text{ meV},$$

$$\begin{aligned} E_D(T_2) - E_V(T_2) &= (E_D(T_2) - E_F(T_2)) + (E_F(T_2) - E_V(T_2)) = \\ &= (-12.6 + 1124.6) \text{ meV} = 1112.0 \text{ meV}, \end{aligned}$$

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left[-\frac{E_D(T_2) - E_F(T_2)}{k_B T_2}\right]} \simeq 0.069 \times N_D.$$

Είναι φανερό, σ' αυτήν την περίπτωση, ότι δεν ισχύει η προσέγγιση πλήρους ιονισμού των δοτών (το N_D^+ είναι πολύ μικρότερο από το N_D), προφανώς λόγω της σχετικά χαμηλής θερμοκρασίας.

Αν εφαρμόσουμε το προσεγγιστικό αποτέλεσμα (1.14) για την ενέργεια Fermi θα βρούμε:

$$\begin{aligned} E_F(T_2) - E_V(T_2) &= E_C(T_2) - E_V(T_2) - k_B T_2 \log \frac{N_C}{N_D} = \\ &= E_G(T_2) - k_B T_2 \log \frac{N_C}{N_D} \simeq 1128.8 \text{ meV}, \end{aligned}$$

που δεν απέχει πολύ από το 1124.6meV που βρήκαμε προηγουμένως. Δύο ενδιαφέροντα μεγέθη: $E_C - E_F = 1166\text{meV} - 1128.8\text{meV} = 37.2\text{meV}$, $E_D - E_F = 37.2\text{meV} - 54\text{meV} = -16.8\text{meV}$.

(3) Στην τρίτη περίπτωση τα πράγματα είναι εντελώς παραπλήσια με τη δεύτερη. Ισχύει ότι $k_B T_3 = 0.34\text{meV}$, $E_G(T_3) = 1170\text{meV}$. Εξ άλλου

$$\frac{N_C(T_1)}{N_C(T_3)} = \frac{N_V(T_1)}{N_V(T_3)} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{3/2}.$$

Ο υπολογισμός δίνει $N_C(T_3) = 4.3 \times 10^{16}\text{cm}^{-3}$, $N_V(T_3) = 1.6 \times 10^{16}\text{cm}^{-3}$, οπότε η (1.22) δίνει $x \equiv E_F(T_3) - E_V(T_3) \simeq 1139\text{meV}$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες:

$$\begin{aligned} E_C(T_3) - E_F(T_3) &= (E_C(T_3) - E_V(T_3)) - (E_F(T_3) - E_V(T_3)) = E_G(T_3) - x = \\ &= 1170\text{meV} - 1139\text{meV} = 31\text{meV}, \end{aligned}$$

$$E_D(T_3) - E_F(T_3) = E_C(T_3) - E_F(T_3) - \delta E = 31\text{meV} - 54\text{meV} = -23\text{meV},$$

$$\begin{aligned} E_D(T_3) - E_V(T_3) &= (E_D(T_3) - E_F(T_3)) + (E_F(T_3) - E_V(T_3)) = \\ &= (-23.0 + 1139.0)\text{meV} = 1116.0\text{meV}, \end{aligned}$$

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left[-\frac{E_D(T_3) - E_F(T_3)}{k_B T_3}\right]} \simeq 2 \times 10^{-20} \times N_D.$$

Είναι φανερό ότι σ' αυτήν την περίπτωση κατά μείζονα λογο δεν ισχύει η προσέγγιση πλήρους ιονισμού των δοτών, αφού η θερμοκρασία είναι πολύ κοντά στο απόλυτο μηδέν. Αν εφαρμόσουμε το προσεγγιστικό αποτέλεσμα (1.14) για την ενέργεια Fermi θα βρούμε:

$$\begin{aligned} E_F(T_3) - E_V(T_3) &= E_C(T_3) - E_V(T_3) - k_B T_3 \log \frac{N_C}{N_D} = \\ &= E_G(T_3) - k_B T_3 \log \frac{N_C}{N_D} \simeq 1164.1\text{meV}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το προσεγγιστικό αποτέλεσμα σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι καλό: η τιμή 1164.1meV πλησιάζει περισσότερο προς την $E_C(T_3) - E_V(T_3) = 1170\text{meV}$, παρά προς την ακριβή ενέργεια Fermi $E_F(T_3) - E_V(T_3) = 1139\text{meV}$.

1.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θα εξετάσουμε την ελαχιστοποίηση της ελεύθερης ενέργειας F που αντιστοιχεί

σε n_D ηλεκτρόνια που τοποθετούνται σε N_D διαθέσιμες καταστάσεις με ενέργεια E_D . Έστω N_D ο αριθμός των δοτών και n_D ο αριθμός των ηλεκτρονίων σε στάθμη δοτών. Οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης n_D ηλεκτρονίων σε N_D θέσεις είναι, βέβαια, ο συνδυασμός των N_D πραγμάτων ανά n_D , δηλαδή $\binom{N_D}{n_D}$.

Όμως στην κάθε μια από αυτές τις εντοπισμένες καταστάσεις μπορούν να φιλοξενηθεί το πολύ ένα ηλεκτρόνιο (και όχι, π.χ. δύο με αντίθετα σπιν), άρα κάθε τέτοιος συνδυασμός πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό 2^{n_D} , που είναι ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων των n_D σπιν (π.χ. για δύο σπιν θα είχαμε τις τέσσερις (2^2) περιπτώσεις $++$, $+-$, $-+$, $--$). Άρα ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων είναι:

$$W = 2^{n_D} \binom{N_D}{n_D} = 2^{n_D} \frac{N_D!}{n_D!(N_D - n_D)!}.$$

Επομένως η σχετική εντροπία θα δίνεται από τη σχέση $S = k_B \ln W$ και η ελεύθερη ενέργεια από τη σχέση

$$F = E - TS = n_D E_D - k_B T \ln W.$$

Στη συνέχεια ο προσεγγιστικός τύπος του Stirling

$$\ln n! \simeq n \ln n - n \Rightarrow \frac{\partial \ln n!}{\partial n} \simeq \ln n.$$

θα μας επιτρέψει να γράψουμε απλούστερα το $\frac{\partial S}{\partial n_D} = k_B \frac{\partial \ln W}{\partial n_D}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial n_D} &= k_B \frac{\partial}{\partial n_D} [n_D \ln 2 + \ln N_D! - \ln n_D! - \ln(N_D - n_D)!] \simeq \\ &\simeq k_B [\ln 2 - \ln n_D + \ln(N_D - n_D)] = k_B \ln \frac{2(N_D - n_D)}{n_D}. \end{aligned}$$

Το χημικό δυναμικό (που καταχρηστικά θα ονομάζουμε ενέργεια του Fermi) ορίζεται ως:

$$E_F \equiv \frac{\partial F}{\partial n_D} = E_D - k_B \ln \frac{2(N_D - n_D)}{n_D},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της ελεύθερης ενέργειας. Μπορούμε τέλος να λύσουμε την τελευταία σχέση ως προς n_D και να καταλήξουμε στην:

$$n_D = \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} \exp[\beta(E_D - E_F)]}.$$

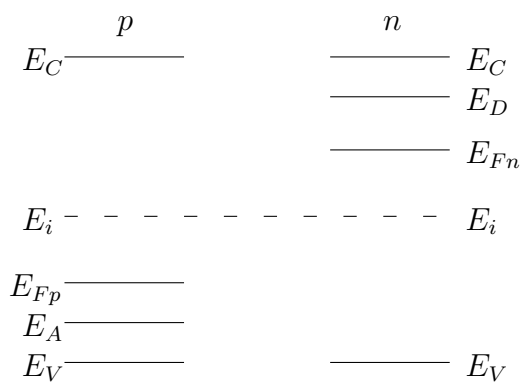
Κεφάλαιο 2

Ημιαγωγοί σε επαφή

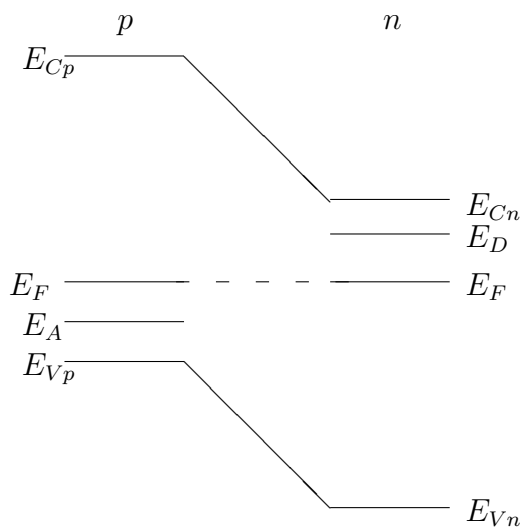
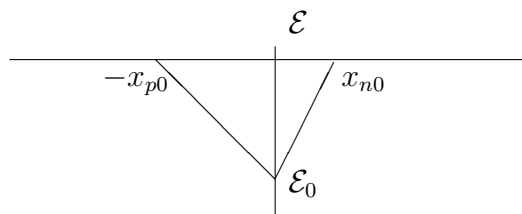
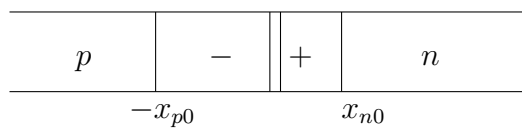
2.1 Επαφές $p - n$

Αν φέρουμε σε στενή επαφή έναν ημιαγωγό τύπου p με έναν ημιαγωγό τύπου n , εκείνο που θα συμβεί είναι, περιγραφικά, το εξής: επειδή η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στην πλευρά n είναι μεγάλη, ενώ στην πλευρά p είναι μικρή, θα έχουμε διάχυση ηλεκτρονίων από το n στο p , τα οποία αλληλοεξουδετερώνονται με οπές. Βέβαια, τα θετικά ιόντα των ατόμων-δοτών μένουν στη θέση τους και δημιουργούν ένα ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathcal{E}(x)$ που αναχαιτίζει τα φαινόμενα διάχυσης. Η διάχυση θα σταματήσει όταν το ρεύμα (αντίθετης φοράς προς το ρεύμα διάχυσης) που οφείλεται στο πεδίο $\mathcal{E}(x)$ εξισορροπήσει την κίνηση λόγω διάχυσης δημιουργώντας ένα ρεύμα ολίσθησης (που οφείλεται στη διαφορά δυναμικού) αντίθετης φοράς προς το ρεύμα διάχυσης. Αντίστοιχα ακριβώς φαινόμενα οφείλονται στη διάχυση οπών από την πλευρά p στην πλευρά n . Η διαδικασία έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μεταξύ των θέσεων $-x_{p0}$ και x_{n0} μιας περιοχής απογύμνωσης ή φορτίου χώρου (που οφείλεται στις μη αντισταθμιζόμενες συνεισφορές των ιόντων των προσμείξεων) μεταξύ των περιοχών n και p , στην οποία δεν υπάρχουν ηλεκτρόνια ή οπές.

Πριν την επαφή:



Μετά την επαφή:



Ας εξετάσουμε τα φαινόμενα αυτά ποσοτικά. Έστω ότι έχουμε έναν ημιαγωγό με δύο περιοχές 1 και 2 και για κάθε ενέργεια E η ροή ηλεκτρονίων $F(1 \rightarrow 2)$ από την 1 στη 2 είναι ανάλογη των κατειλημμένων καταστάσεων $N_1(E)f_1(E)$ στην περιοχή 1 (όπου $f_1(E)$ είναι η κατανομή Fermi-Dirac με ενέργεια Fermi ίση με E_{F1}) και των διαθέσιμων (άδειων) καταστάσεων $N_2(E)(1 - f_2(E))$ στην περιοχή 2, (όπου $f_2(E)$ είναι η κατανομή Fermi-Dirac με ενέργεια Fermi ίση με E_{F2}):

$$F(1 \rightarrow 2) \approx [N_1(E)f_1(E)] \cdot [N_2(E)(1 - f_2(E))].$$

Η σχέση ισχύει και αντίστροφα με τις κατάλληλες αλλαγές:

$$F(2 \rightarrow 1) \approx [N_2(E)f_2(E)] \cdot [N_1(E)(1 - f_1(E))].$$

Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} F(1 \rightarrow 2) &= F(2 \rightarrow 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow N_1(E)f_1(E)N_2(E) - N_1(E)f_1(E)N_2(E)f_2(E) &= \\ = N_2(E)f_2(E)N_1(E) - N_2(E)f_2(E)N_1(E)f_1(E) &\Rightarrow \\ \Rightarrow N_1(E)f_1(E)N_2(E) = N_2(E)f_2(E)N_1(E) &\Rightarrow f_1(E) = f_2(E) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + \exp[\frac{E - E_{F1}}{k_B T}]} &= \frac{1}{1 + \exp[\frac{E - E_{F2}}{k_B T}]} \Rightarrow E_{F1} = E_{F2}. \end{aligned}$$

Αυτή η σχέση εκφράζει ποσοτικά το πότε θα σταματήσει η ροή ηλεκτρονίων από το ένα κομμάτι στο άλλο. Η νέα διατύπωση είναι ότι καθώς οι φορείς ρέουν από το ένα μέρος στο άλλο μεταβάλλονται οι ενέργειες Fermi και των δύο περιοχών και η ροή σταματάει όταν οι δύο ενέργειες Fermi πάρουν την ίδια τιμή ($E_{F1} = E_{F2} \equiv E_F$). Σημειώνουμε ότι το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα θα είχαμε αν θεωρούσαμε τη ροή των οπών αντί της ροής των ηλεκτρονίων. Στην προκειμένη περίπτωση της επαφής $p-n$ η ισότητα παίρνει τη μορφή $E_{Fp0} = E_{Fn0} \equiv E_F$. Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, εκείνο που έχει ουσιαστική σημασία είναι οι διαφορές των ενεργειών. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω του ότι οι ενέργειες Fermi εξισώνονται στις δύο πλευρές, και οι στάθμες E_C, E_V θα μετατοπιστούν επίσης, όπως δείχνει το σχήμα. Πιο φορμαλιστικά, **πρίν** οι ημιαγωγοί τεθούν σε επαφή ίσχυαν οι σχέσεις

$$E_C - E_{Fp0} \equiv \epsilon_{Cp}, E_{Fp0} - E_V \equiv \epsilon_{Vp}, E_C - E_{Fn0} \equiv \epsilon_{Cn}, E_{Fn0} - E_V \equiv \epsilon_{Vn},$$

ενώ **αφότου** τέθηκαν σε επαφή οι σχέσεις

$$E_{Cp} - E_F = \epsilon_{Cp}, E_F - E_{Vp} \equiv \epsilon_{Vp}, E_{Cn} - E_F = \epsilon_{Cn}, E_F - E_{Vn} \equiv \epsilon_{Vn}.$$

Δηλαδή τα $\epsilon_{Cn}, \epsilon_{Cp}, \epsilon_{Vn}, \epsilon_{Vp}$ δεν αλλάζουν αλλά, ενώ πριν την επαφή τα E_C, E_V ήταν ίδια και οι ενέργειες Fermi διαφορετικές, μετά την επαφή τα (E_{Cn}, E_{Vn}) δεν είναι πια ίδια με τα (E_{Cp}, E_{Vp}) , αντίθετα εξισώνονται οι ενέργειες Fermi. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού απαιτώντας τη συνθήκη το ολικό ρεύμα να είναι μηδέν στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Θεωρούμε επί παραδείγματι τις οπές, που έχουν θετικό φορτίο, έστω q . Το συνολικό ρεύμα θα είναι το άθροισμα του ρεύματος διάχυσης $J_p(diff)$ και του ρεύματος ολίσθησης $J_p(drift)$ που οφείλεται στο ηλεκτροστατικό πεδίο. Όμως $J_p(drift) = q\mu_p p(x)\mathcal{E}(x)$, όπου μ_p η κινητικότητα των οπών, $p(x)$ η συγκέντρωση των οπών και $\mathcal{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Εξ άλλου, το ρεύμα διάχυσης δίδεται από τη σχέση: $J_p(diff) = -qD_p \frac{dp(x)}{dx}$, όπου D_p η σταθερά διάχυσης, που συνδέεται με μεγέθη που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως σύμφωνα με τη σχέση του Einstein:

$$\frac{\mu_p}{D_p} = \frac{q}{k_B T}.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} J_p(drift) + J_p(diff) = 0 &\Rightarrow -q \left(\frac{qD_p}{k_B T} \right) p(x) \frac{dV(x)}{dx} - qD_p \frac{dp(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{q}{k_B T} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} \Rightarrow -\frac{q}{k_B T} \int_{V_{p0}}^{V(x)} dV = \int_{p_{p0}}^{p(x)} \frac{dp}{p(x)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{q}{k_B T} (V(x) - V_{p0}) = \ln \frac{p(x)}{p_{p0}} \Rightarrow V(x) = V_{p0} + \frac{k_B T}{q} \ln \frac{p_{p0}}{p(x)}. \end{aligned}$$

Στην ολοκλήρωση υποθέσαμε ότι το κάτω όριο είναι βαθιά μέσα στην περιοχή p , οπότε το δυναμικό και η συγκέντρωση των οπών παίρνουν τις τιμές V_{p0}, p_{p0} που προσιδιάζουν στην περιοχή p . Το άνω όριο της ολοκλήρωσης μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο δεξιά του προηγούμενου, δηλαδή είτε στην περιοχή φορτίου χώρου είτε στην περιοχή n . Έχουμε χρησιμοποιήσει τον δείκτη μηδέν στις ποσότητες V_{p0}, p_{p0} για να υποδηλώσουμε ότι αναφερόμαστε σε επαφή pn που δεν είναι υπό (εξωτερική) τάση.

Αν κάνουμε την επιλογή το άνω όριο να είναι βαθιά μέσα στην περιοχή n , μπορούμε να προσδιορίσουμε τον συνολικό φραγμό δυναμικού, που λέγεται δυναμικό επαφής:

$$V_0 \equiv V_{n0} - V_{p0} = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{p_{p0}}{p_{n0}}. \quad (2.1)$$

Σημειώνουμε την πολύ σημαντική σχέση:

$$qV_0 = E_{Cp} - E_{Cn} = E_{Vp} - E_{Vn}. \quad (2.2)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως πρώτη προσέγγιση το ότι στην πλευρά p , η συγκέντρωση των οπών ισούται με τη συγκέντρωση N_A των αποδεκτών $p_{p0} \approx N_A$ και αφού $p_{p0}n_{p0} = n_i^2$ συμπεραίνουμε ότι $n_{p0} \approx \frac{n_i^2}{N_A}$. Για την πλευρά n η συγκέντρωση n_{n0} των ηλεκτρονίων ισούται με τη συγκέντρωση N_D των δοτών, οπότε: $n_{n0} \approx N_D, p_{n0} \approx \frac{n_i^2}{N_D}$. Αυτές οι προσεγγίσεις δίνουν την εκτίμηση για τη διαφορά δυναμικού αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.1) τα p_{p0}, p_{n0} με τα ίσα τους:

$$V_0 \equiv V_{n0} - V_{p0} = \frac{k_B T}{q} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right). \quad (2.3)$$

Μπορούμε τέλος να αντιστρέψουμε την εξίσωση (2.1) και να οδηγηθούμε στις σχέσεις:

$$\frac{p_{p0}}{p_{n0}} = \frac{n_{n0}}{n_{p0}} = \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right], \quad (2.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επί πλέον τον νόμο δράσης μαζών, εφόσον εξακολουθούμε να αναφερόμαστε σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας.

Πρόβλημα Θεωρήστε μια επαφή $p-n$ με $N_A = 10^{17} \text{cm}^{-3}$ (στην πλευρά p) και $N_D = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ (στην πλευρά n). Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση πλήρους ιονισμού και υπολογίστε, για $T = 300^\circ \text{K}$, τις στάθμες Fermi E_{Fp0}, E_{Fn0} πριν την επαφή σε κάθε πλευρά ως προς την κοινή στάθμη Fermi E_F , που θα προκύψει αφ' ότου οι δύο πλευρές έλθουν σε επαφή, καθώς και το δυναμικό επαφής. Δίδεται η ενδογενής συγκέντρωση $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$. Υπενθύμιση: $k_B = 0.0862 \text{meV grad}^{-1}$.

Στην πλευρά p ισχύει εξ' υποθέσεως ότι: $p_{p0} = N_A = n_i \exp \left[\frac{E_{Fp0} - E_F}{k_B T} \right]$, λόγω της (1.10), οπότε:

$$E_{Fp0} - E_F = k_B T \ln \frac{N_A}{n_i} = 0.0862 \times 300 \ln \frac{10^{17}}{1.5 \times 10^{10}} \text{meV} = 405.1 \text{meV}.$$

Παρόμοια, στην πλευρά n ισχύει ότι: $n_{n0} = N_D$ και $n_{n0} = n_i \exp \left[\frac{E_F - E_{Fn0}}{k_B T} \right]$, οπότε:

$$E_F - E_{Fn0} = k_B T \ln \frac{N_D}{n_i} = 0.0862 \times 300 \ln \frac{10^{16}}{1.5 \times 10^{10}} \text{meV} = 346.0 \text{meV}.$$

Το δυναμικό επαφής θα δίνεται από τη σχέση: $qV_0 = E_{Fp0} - E_{Fn0} = (E_{Fp0} - E_F) - (E_F - E_{Fn0}) = (405.1 + 346.0) \text{meV} = 751.1 \text{meV}$. Μια σύγκριση με το αποτέλεσμα του κατ' ευθείαν υπολογισμού είναι χρήσιμη:

$$qV_0 = k_B T \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right) = 25.83 \text{meV} \ln \left(\frac{10^{17} 10^{16}}{(1.5 \times 10^{10})^2} \right) = 752.2 \text{meV}.$$

Ας εξετάσουμε πιά λεπτομερειακά την επαφή $p - n$ και ειδικότερα την περιοχή απογύμνωσης. Έστω ότι η περιοχή απογύμνωσης έχει διατομή A και πλάτος w_0 , ενώ υποθέτουμε ότι οι συγκεντρώσεις των ηλεκτρονίων και των οπών είναι αμελητέες σ' όλη την έκταση της περιοχής: $|p - n| \ll (N_A^+, N_D^-)$. Κάνουμε την επί πλέον υπόθεση του ολικού ιονισμού: $N_A^+ \approx N_A, N_D^- \approx N_D$, οπότε το ηλεκτροστατικό πεδίο θα εξαρτάται μόνο από τις συγκεντρώσεις των προσμείξεων N_A, N_D . Όπως φαίνεται στο σχήμα, η περιοχή p εκτείνεται στα αρνητικά x και ειδικότερα το αντίστοιχο τμήμα της περιοχής απογύμνωσης στο διάστημα $[-x_{p0}, 0]$, όπου $x_{p0} > 0$. Αντίστοιχα η περιοχή n εκτείνεται στα θετικά x και ειδικότερα το αντίστοιχο τμήμα της περιοχής απογύμνωσης στο διάστημα $[0, x_{n0}]$. (Φυσικά $w_0 = x_{p0} + x_{n0}$). Οι πυκνότητες φορτίου που οφείλονται στα ιόντα είναι $\rho_D = +qN_D$ και $\rho_A = -qN_A$, όπου το είναι q το ηλεκτρικό φορτίο των ιόντων κατ' απόλυτη τιμή (το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο). Οι όγκοι των δύο περιοχών είναι Ax_{n0} και Ax_{p0} , οπότε η αρχή της διατήρησης του φορτίου υπαγορεύει τη σχέση:

$$qN_D Ax_{n0} + (-qN_A)Ax_{p0} = 0 \rightarrow N_D x_{n0} = N_A x_{p0}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση $w_0 = x_{p0} + x_{n0}$ βρίσκουμε τα χρήσιμα αποτελέσματα:

$$x_{p0} = \frac{N_D w_0}{N_A + N_D}, \quad x_{n0} = \frac{N_A w_0}{N_A + N_D}. \quad (2.5)$$

Οι εξισώσεις Poisson γράφονται:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_A}{\epsilon_r \epsilon_0} = -\frac{qN_A}{\epsilon}, & -x_{p0} < x < 0 \\ \frac{\rho_D}{\epsilon_r \epsilon_0} = +\frac{qN_D}{\epsilon}, & 0 < x < x_{n0} \end{cases}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\epsilon \equiv \epsilon_0 \epsilon_r$, όπου ϵ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και ϵ_r η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου. Η λύση των εξισώσεων είναι τετριμένη:

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 - \frac{qN_A}{\epsilon} x, & -x_{p0} < x < 0 \\ \mathcal{E}_0 + \frac{qN_D}{\epsilon} x, & 0 < x < x_{n0} \end{cases}$$

Έχουμε ήδη υποθέσει ότι η λύση $\mathcal{E}(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ και παίρνει την τιμή $\mathcal{E}_0$. Η ποσότητα $\mathcal{E}_0$ πρέπει να έχει το κατάλληλο μέγεθος ώστε το $\mathcal{E}(x)$ να μηδενίζεται για $x = -x_{p0}$ και για $x = +x_{n0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 - \frac{qN_A}{\epsilon}(-x_{p0}) = 0 \\ \mathcal{E}_0 + \frac{qN_D}{\epsilon}(+x_{n0}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 = -\frac{qN_A x_{p0}}{\epsilon} \\ \mathcal{E}_0 = -\frac{qN_D x_{n0}}{\epsilon} \end{array} \right\}$$

Οι ανωτέρω ισότητες είναι συμβιβαστές, αφού $N_A x_{p0} = N_D x_{n0}$. Γνωρίζοντας ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τις πιο πάνω σχέσεις για την περιοχή απογύμνωσης και ότι είναι μηδέν έξω από αυτήν, μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό με τη βοήθεια της εξίσωσης

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{dV}{dx} \rightarrow V(x) = -\int dx \mathcal{E}(x).$$

Προφανώς το δυναμικό θα παίρνει δύο σταθερές τιμές έξω από την περιοχή απογύμνωσης:

$$V(x) = \begin{cases} V_{p0}, & x < -x_{p0} \\ V_{n0}, & x > x_{n0}. \end{cases}$$

Μέσα στην περιοχή απογύμνωσης η ολοκλήρωση της εξίσωσης θα δώσει:

$$V(x) = \begin{cases} C - \mathcal{E}_0 x + \frac{qN_A}{2\epsilon} x^2, & -x_{p0} < x < 0, \\ C - \mathcal{E}_0 x - \frac{qN_D}{2\epsilon} x^2, & 0 < x < x_{n0}. \end{cases}$$

Η C είναι σταθερά ολοκλήρωσης που είναι η ίδια και στις δύο εκφράσεις, ώστε η $V(x)$ να είναι συνεχής στο $x = 0$. Η τιμή της μπορεί να προσδιορισθεί εύκολα από τις οριακές συνθήκες, αλλά δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Η διαφορά δυναμικού εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv V_{n0} - V_{p0} = V(x)|_{x=x_{n0}} - V(x)|_{x=-x_{p0}} = \\ &= \left[C - \mathcal{E}_0 x_{n0} - \frac{qN_D}{2\epsilon} x_{n0}^2 \right] - \left[C + \mathcal{E}_0 x_{p0} + \frac{qN_A}{2\epsilon} x_{p0}^2 \right] = \\ &= -\mathcal{E}_0(x_{p0} + x_{n0}) - \left[\frac{qN_A}{2\epsilon} x_{p0}^2 + \frac{qN_D}{2\epsilon} x_{n0}^2 \right] = -\mathcal{E}_0 w_0 - \frac{qN_A x_{p0}}{2\epsilon} (x_{p0} + x_{n0}) = \\ &= -\mathcal{E}_0 w_0 - \frac{qN_A x_{p0}}{2\epsilon} w_0 = -\mathcal{E}_0 w_0 - \frac{qN_A N_D}{2\epsilon(N_A + N_D)} w_0^2. \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο θα επικαλεστούμε τη σχέση $\mathcal{E}_0 = -\frac{qN_A x_{p0}}{\epsilon} = -\frac{qN_A N_D w_0}{\epsilon(N_A + N_D)}$, οπότε το δυναμικό επαφής γράφεται:

$$V_0 = \frac{qN_A N_D w_0}{\epsilon(N_A + N_D)} w_0 - \frac{qN_A N_D}{2\epsilon(N_A + N_D)} w_0^2 \Rightarrow V_0 = \frac{qN_A N_D}{2\epsilon(N_A + N_D)} w_0^2,$$

το οποίο μπορεί να δώσει το πλάτος w_0 της περιοχής απογύμνωσης συναρτήσει του δυναμικού επαφής:

$$w_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)}, \quad (2.6)$$

το οποίο, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.3) που βρέθηκε προηγουμένως, δηλαδή την $V_0 = \frac{k_B T}{q} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)$, δίνει την τελική σχέση:

$$w_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon k_B T}{q^2} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)}.$$

Οι σχέσεις $x_{p0} = \frac{N_D w_0}{N_A + N_D}$, $x_{n0} = \frac{N_A w_0}{N_A + N_D}$ δίνουν τα αποτελέσματα:

$$x_{p0} = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{q} \left(\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)} \right)}, \quad x_{n0} = \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{q} \left(\frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \right)}. \quad (2.7)$$

2.2 Η επαφή $p - n$ υπό τάση

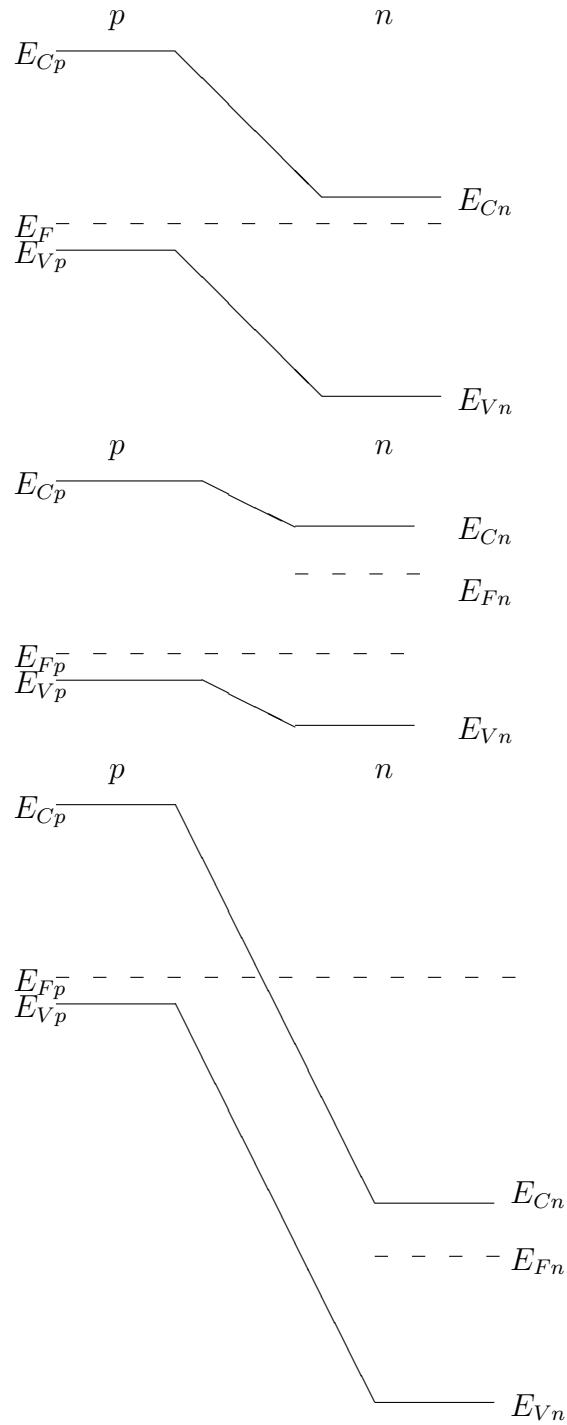
Μία συνεχής εξωτερική τάση V μπορεί να έχει δύο δυνατές φορές: είτε ο θετικός πόλος της πηγής να συνδέεται με την πλευρά p της επαφής, οπότε έχουμε την λεγόμενη ευθεία πόλωση, είτε το αντίθετο, οπότε η πόλωση λέγεται ανάστροφη. Πριν προχωρήσουμε σε λεπτομέρειες, θα δώσουμε μια ημιποσοτική επισκόπηση (με μεγάλη χρήση διαίσθησης). Θεωρούμε ότι η ευθεία πόλωση είναι μια θετική ποσότητα ($V = V_F$), ενώ η ανάστροφη πόλωση είναι αρνητική ($V = -V_R$), όπου τα V_F και V_R είναι οι απόλυτες τιμές των εξωτερικών διαφορών δυναμικού. Αποδεικνύεται ότι είναι αρκετά καλή η προσέγγιση για καταστάσεις όπου η απόκλιση από τη θερμοδυναμική ισορροπία είναι σχετικά μικρή, όπως εδώ, να υιοθετήσουμε τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου (που αποδείχθηκαν με την προϋπόθεση της θερμοδυναμικής ισορροπίας) αντικαθιστώντας απλά το V_0 με την ποσότητα $V_0 - V$. Εκείνο που συμβαίνει είναι ότι οι ενέργειες Fermi αλλάζουν με την εφαρμογή της εξωτερικής τάσης και παίρνουν διαφορετική τιμή για το κάθε κομμάτι του ημιαγωγού. Αποδεικνύεται ότι

$$E_{Fp} - E_{Fn} = -qV,$$

όπου το q είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Δηλαδή, ενώ πριν την εφαρμογή της εξωτερικής τάσης είχαμε μία κοινή στάθμη Fermi E_F , μετά την εφαρμογή της τάσης έχουμε τις δύο λεγόμενες ψευδοστάθμες Fermi, τις E_{Fp} και E_{Fn} . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τις σχέσεις:

$$E_{Cp} - E_{Cn} = E_{Vp} - E_{Vn} = q(V_0 - V),$$

που αντικαθιστούν τις εξισώσεις (2.2).



Οι σχέσεις αυτές, που αποτυπώνονται στο σχήμα, σημαίνουν τα ακόλουθα:

(1) Κατά την ευθεία πόλωση η ψευδοστάθμη Fermi E_{Fn} γίνεται μεγαλύτερη από την E_{Fp} και η διαφορά μεταξύ των ορίων των ζωνών αγωγιμότητας (αντίστοιχα σθένους) μειώνεται, άρα και ο φραγμός δυναμικού που χωρίζει τις δύο περιοχές έχει μικρότερο ύψος και είναι ευκολότερα διαπερατός.

(2) Κατά την ανάστροφη πόλωση η ψευδοστάθμη Fermi E_{Fn} γίνεται μικρότερη από την E_{Fp} και η διαφορά μεταξύ των βάσεων των ζωνών αγωγιμότητας αυξάνεται και ο φραγμός που χωρίζει τις δύο περιοχές γίνεται πολύ δύσκολο να υπερκερασθεί.

Τα πιο πάνω φαινόμενα επιτείνονται από τις αλλαγές και στο πλάτος των φραγμών, δηλαδή στο πλάτος w της περιοχής απογύμνωσης. Κάνουμε την αντικατάσταση $V_0 \rightarrow V_0 - V$ στη σχετική εξίσωση (2.6) και βρίσκουμε:

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon(V_0 - V)}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)}.$$

Κατά συνέπεια αλλάζουν και τα πλάτη x_{n0} και $-x_{p0}$: γίνονται x_n και $-x_p$: ($x_n + x_p = w$). Οι σχετικές εκφράσεις μπορούν να βρεθούν εύκολα, αν στις εξισώσεις (2.7) αντικαταστήσουμε το V_0 με το $V_0 - V$. Το πλάτος, λοιπόν, της περιοχής απογύμνωσης μειώνεται κατά την ευθεία πόλωση, διευκολύνοντας ακόμα περισσότερο τη διάβαση, ενώ αυξάνεται κατά την ανάστροφη πόλωση, δυσκολεύοντας ακόμα περισσότερο τη διέλευση φορέων και μειώνοντας τυχόν ρεύματα. Το αναμενόμενο τελικό αποτέλεσμα είναι ότι θα έχουμε μεγάλο ρεύμα κατά την ευθεία πόλωση και σημαντικά μικρότερο κατά την ανάστροφη πόλωση.

Ας εξετάσουμε τη δημιουργία ρευμάτων κάπως πιο λεπτομερειακά. Κατ' αρχήν αναζητούμε τη συγκέντρωση των φορέων μειονότητας στα όρια $-x_p$ και x_n . Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας οι φορείς στις δύο πλευρές της επαφής συνδέονται με τις σχέσεις (2.4):

$$p_{p0} = p_{n0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right], \quad n_{n0} = n_{p0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right], \quad (2.8)$$

όπου

$$V_0 = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

το εσωτερικό δυναμικό που αναπτύσσεται στα άκρα της ζώνης απογύμνωσης μιας επαφής $p-n$ και που λέγεται δυναμικό διάχυσης. (Οι διάφορες ποσότητες έχουν το δείκτη μηδέν για να είναι φανερό ότι όλα αυτά αναφέρονται στην κατάσταση πριν την εφαρμογή εξωτερικής τάσης). Μετά την εφαρμογή της εξωτερικής τάσης πρέπει να κάνουμε τη γνωστή αντικατάσταση $V_0 \rightarrow V_0 - V$

και να πάρουμε για τις συγκεντρώσεις στα όρια των περιοχών (δηλαδή στο $x = -x_p$ για την περιοχή p και στο $x = x_n$ για την περιοχή n) τις δύο σχέσεις:

$$p_p(-x_p) = p_n(x_n) \exp \left[\frac{q(V_0 - V)}{k_B T} \right], \quad n_n(x_n) = n_p(-x_p) \exp \left[\frac{q(V_0 - V)}{k_B T} \right]. \quad (2.9)$$

Υποθέτουμε ότι η αλλαγές στις συγκεντρώσεις δεν θα επηρεάσουν πολύ τους φορείς πλειονότητας, δηλαδή $p_p(-x_p) \simeq p_{p0}$ και $n_n(x_n) \simeq n_{n0}$. Όμως, ισχύουν επί πλέον οι σχέσεις (2.8), οπότε:

$$p_p(-x_p) \simeq p_{n0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right], \quad n_n(x_n) \simeq n_{p0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right], \quad (2.10)$$

και οι σχέσεις (2.9) και (2.10) συνεπάγονται τις:

$$\begin{aligned} p_{n0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right] &= p_n(x_n) \exp \left[\frac{q(V_0 - V)}{k_B T} \right] \rightarrow p_n(x_n) = p_{n0} \exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right], \\ n_{p0} \exp \left[\frac{qV_0}{k_B T} \right] &= n_p(-x_p) \exp \left[\frac{q(V_0 - V)}{k_B T} \right] \rightarrow n_p(-x_p) = n_{p0} \exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right]. \end{aligned}$$

Τελικά στη θέση $x = x_n$ (όριο της περιοχής n) ισχύει η ισότητα

$$p_n(x_n) - p_{n0} = p_{n0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right), \quad (2.11)$$

ενώ στη θέση $x = -x_p$ (όριο της περιοχής p) έχουμε την ισότητα

$$n_p(-x_p) - n_{p0} = n_{p0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right). \quad (2.12)$$

Οι δύο εξισώσεις (2.11) και (2.12) θα παίξουν το ρόλο των **οριακών συνθηκών** για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της διάχυσης που θα δούμε σε λίγο.

Για να προχωρήσουμε πρέπει να διατυπώσουμε κάποιες υποθέσεις που γίνονται κατά τη μελέτη της επαφής $p - n$. Αγνοούνται οι αλλαγές στους φορείς πλειονότητας, επειδή η ποσοστιαία μεταβολή (λόγω του μεγάλου πλήθους των φορέων αυτών) είναι πραγματικά αμελητέα. Ο ρόλος των φορέων πλειονότητας είναι μάλλον παθητικός σ' αυτή τη διαδικασία: συνοδεύουν τους φορείς μειονότητας κατά τις μετακινήσεις τους, ώστε να διατηρείται η ηλεκτρική ουδετερότητα του υλικού. Εκείνο που αλλάζει σημαντικά κατά την εφαρμογή εξωτερικής τάσης είναι η συγκέντρωση των φορέων μειονότητας. Δημιουργείται ανομοιογένεια στις συγκεντρώσεις αυτών των φορέων και εκείνο που

συμβαίνει είναι απλά διάχυση φορέων μειονότητας από περιοχές με μεγάλη συγκέντρωση σε περιοχές με μικρότερη συγκέντρωση.

Θα εξετάσουμε τώρα την κάθε περιοχή (p ή n) χωριστά. Στην περιοχή p ($x \leq -x_p$) ισχύει η διαφορική εξίσωση της διάχυσης που διέπει τη συγκέντρωση των φορέων μειονότητας ¹:

$$D_{n_p} \frac{d^2 n_p}{dx^2} - \frac{n_p - n_{p0}}{\tau_{n_p}} = \frac{\partial n_p}{\partial t}, \quad x \leq -x_p.$$

Με την υπόθεση ότι εξετάζουμε τη μόνιμη κατάσταση ($\frac{\partial n_p}{\partial t} = 0$) η εξίσωση μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$\frac{d^2(n_p(x) - n_{p0})}{dx^2} - \frac{1}{D_{n_p} \tau_{n_p}}(n_p(x) - n_{p0}) = 0,$$

αφού το n_{p0} δεν εξαρτάται από το x , άρα έχει μηδενική (δεύτερη) παράγωγο και δεν αλλάζει την αρχική εξίσωση. Η λύση της εξίσωσης, με την πρόσθετη απαίτηση ότι δεν πρέπει να παρουσιάζονται απειρισμοί καθώς $x \rightarrow -\infty$, είναι:

$$n_p(x) - n_{p0} = A_- \exp \left[+ \frac{x}{\sqrt{D_{n_p} \tau_{n_p}}} \right], \quad x \leq -x_p.$$

Η οριακή συνθήκη (2.12) υπαγορεύει ότι στη θέση $x = -x_p$ πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$n_p(-x_p) - n_{p0} = A_- \exp \left[- \frac{x_p}{\sqrt{D_{n_p} \tau_{n_p}}} \right] = n_{p0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right),$$

οπότε

$$A_- = n_{p0} \exp \left[+ \frac{x_p}{\sqrt{D_{n_p} \tau_{n_p}}} \right] \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right),$$

¹Στις σχέσεις που ακολουθούν οι συντελεστές διάχυσης D_n και D_p χαρακτηρίζονται με έναν επί πλέον δείκτη (D_{n_p}, D_{p_n}) ως υπενθύμιση ότι μελετάμε τη συμπεριφορά των φορέων n και p ως φορέων μειονότητας στις περιοχές p και n αντίστοιχα. Η διάκριση του D_n σε D_{n_p} και D_{n_n} καθώς και του D_p σε D_{p_n} και D_{p_p} είναι κατ' ακρίβειαν σωστή, επειδή οι συντελεστές διάχυσης (D_n, D_p) εξαρτώνται γενικά από τη συγκέντρωση των προσμειξέων, η οποία είναι διαφορετική στις δύο περιοχές p και n . Η ποσοτική μεταβολή των D_n και D_p όμως, για συγκεντρώσεις προσμειξέων από 10^{14} cm^{-3} μέχρι 10^{16} cm^{-3} είναι ασήμαντη. Η διάκριση αυτή έχει νόημα για υψηλότερες συγκεντρώσεις προσμειξέων. Επί παραδείγματι, στην περιοχή από 10^{16} cm^{-3} μέχρι 10^{18} cm^{-3} οι συντελεστές D_p και D_n μπορεί να μεταβάλλονται κατά έναν παράγοντα περί το 3 ο καθένας.

και η λύση γράφεται τελικά:

$$n_p(x) - n_{p0} = n_{p0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[\frac{(x + x_p)}{\sqrt{D_{n_p} \tau_{n_p}}} \right], \quad x \leq -x_p. \quad (2.13)$$

Εξ άλλου, στην περιοχή n ($x \geq x_n$) για τη μόνιμη κατάσταση ισχύει η διαφορική εξίσωση:

$$D_{p_n} \frac{d^2 p_n}{dx^2} - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_{p_n}} = 0$$

που μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$\frac{d^2(p_n(x) - p_{n0})}{dx^2} - \frac{1}{D_{p_n} \tau_{p_n}}(p_n(x) - p_{n0}) = 0.$$

Η λύση της εξίσωσης, με τον περιορισμό ότι δεν υπάρχουν απειρισμοί καθώς $x \rightarrow +\infty$, είναι: $p_n(x) - p_{n0} = A_+ \exp \left[-\frac{x}{\sqrt{D_{p_n} \tau_{p_n}}} \right]$. Η οριακή συνθήκη (2.11) υπαγορεύει ότι στη θέση $x = x_n$ πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$p_n(x_n) - p_{n0} = A_+ \exp \left[-\frac{x_n}{\sqrt{D_{p_n} \tau_{p_n}}} \right] = p_{n0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right),$$

οπότε

$$A_+ = p_{n0} \exp \left[\frac{x_n}{\sqrt{D_{p_n} \tau_{p_n}}} \right] \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right),$$

και η λύση γράφεται τελικά:

$$p_n(x) - p_{n0} = p_{n0} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[-\frac{(x - x_n)}{\sqrt{D_{p_n} \tau_{p_n}}} \right], \quad x \geq x_n. \quad (2.14)$$

Το επόμενο βήμα θα είναι ο υπολογισμός των πυκνοτήτων των αντίστοιχων ρευμάτων, τα οποία θα σχετίζονται με τη βαθμίδα (*gradient*) της πυκνότητας φορτίου με βάση τη γενική σχέση:

$$J = -D \vec{\nabla} \rho(x) = -D \vec{\nabla} (Qn(x)),$$

όπου $\rho(x) = Qn(x)$ είναι η πυκνότητα φορτίου, Q το φορτίο του αντίστοιχου φορέα, $n(x)$ η συγκέντρωσή του και D ο συντελεστής διάχυσης. Ειδικότερα, για το μονοδιάστατο πρότυπο που εξετάζουμε, βρίσκουμε:

$$J_{n_p}(x) = -D_{n_p} \frac{d((-q)n_p(x))}{dx} =$$

Σχήμα 2.1: Οι ποσότητες $\frac{J_{pp}(x)}{J}$, $\frac{J_{pn}(x)}{J}$, $\frac{J_{np}(x)}{J}$, $\frac{J_{nn}(x)}{J}$ για αυθαίρετες τιμές των παραμέτρων.

$$= qn_{p0} \sqrt{\frac{D_{np}}{\tau_{np}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[+ \frac{(x + x_p)}{\sqrt{D_{np} \tau_{np}}} \right], x \leq -x_p, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} J_{pn}(x) &= -D_{pn} \frac{d((+q)p_n(x))}{dx} = \\ &= qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{pn}}{\tau_{pn}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[- \frac{(x - x_n)}{\sqrt{D_{pn} \tau_{pn}}} \right], x \geq x_n, \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (2.13) και (2.14). Οι οπές για $x \geq x_n$ διαχέονται προφανώς προς τα δεξιά, όπου η συγκέντρωση είναι μικρότερη και το ρεύμα είναι επίσης προς τα δεξιά, επειδή το φορτίο των οπών είναι θετικό. Αντίστοιχα, για $x \leq -x_p$ τα ηλεκτρόνια διαχέονται προς τα αριστερά, αλλά, λόγω του αρνητικού φορτίου τους, το ρεύμα θα κατευθύνεται και πάλι προς τα δεξιά. Μια ακόμα σημαντική παρατήρηση είναι ότι η αρχή της διατήρησης του φορτίου επιβάλλει το άθροισμα J των ρευμάτων διάχυσης των φορέων μειονότητας και των φορέων πλειονότητας (που, όπως είπαμε ήδη, ακολουθούν τους φορείς μειονότητας) να είναι ανεξάρτητο του x . Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα ρεύματα των φορέων πλειονότητας:

$$J = \begin{cases} J_{pp}(x) + J_{np}(x), & x \leq -x_p \\ J_{nn}(x) + J_{pn}(x), & x \geq x_n, \end{cases}$$

άρα: $J_{nn}(x) = J - J_{np}(x)$ για $x \geq x_n$, δηλαδή

$$J_{nn}(x) = J - qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{pn}}{\tau_{pn}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[- \frac{(x - x_n)}{\sqrt{D_{pn} \tau_{pn}}} \right], x \geq x_n.$$

Όμοια: $J_{pp}(x) = J - J_{pn}(x)$ για $x \leq -x_p$, δηλαδή

$$J_{pp}(x) = J - qn_{p0} \sqrt{\frac{D_{np}}{\tau_{np}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right) \exp \left[- \frac{(x + x_p)}{\sqrt{D_{np} \tau_{np}}} \right], x \leq -x_p.$$

Μια επί πλέον υπόθεση είναι ότι στην περιοχή απογύμνωσης τα ρεύματα δεν εξαρτώνται από το x , όπως άλλωστε φαίνεται στο σχήμα (2.1). Το σχήμα

Σχήμα 2.2: Χαρακτηριστική της επαφής pn

(2.1) δείχνει, επίσης, ότι το ρεύμα που είναι ρεύμα φορέων μειονότητας στη μια πλευρά είναι ρεύμα φορέων πλειονότητας στην άλλη πλευρά. Αυτά εκφράζονται συνοπτικά με τις σχέσεις:

$$J_{p_p}(-x_p) = J_{p_n}(x_n), \quad J_{n_p}(-x_p) = J_{n_n}(x_n).$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις το ολικό ρεύμα μπορεί να εκφραστεί με το άθροισμα:

$$J = J_{p_p}(-x_p) + J_{n_p}(-x_p) = J_{p_n}(x_n) + J_{n_n}(x_n) = J_{p_n}(x_n) + J_{n_p}(-x_p).$$

Άρα, για να προσδιορίσουμε το συνολικό ρεύμα J αρκεί να προσθέσουμε τα ρεύματα των φορέων μειονότητας στα όρια $x = -x_p$ και $x = x_n$:

$$\begin{aligned} J_{p_n}(x_n) &= qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right), \\ J_{n_p}(-x_p) &= qn_{p0} \sqrt{\frac{D_{n_p}}{\tau_{n_p}}} \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right), \\ J &= J_{p_n}(x_n) + J_{n_p}(-x_p) = J_S \left(\exp \left[\frac{qV}{k_B T} \right] - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου το $J_S = qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}} + qn_{p0} \sqrt{\frac{D_{n_p}}{\tau_{n_p}}}$ λέγεται ρεύμα κορεσμού. Η εξίσωση (2.17) λέγεται εξίσωση του Shockley και είναι κεντρικής σημασίας για τη μελέτη της χαρακτηριστικής της επαφής $p-n$. Σημειώνουμε ότι το ρεύμα ισούται με την πυκνότητα ρεύματος J επί την διατομή A της επαφής. Η χαρακτηριστική είναι ποιοτικά η ίδια μ' αυτή που φαίνεται στο σχήμα, που παριστάνει την ποσότητα $\frac{J}{J_S}$ συναρτήσει του $x \equiv \frac{qV}{k_B T}$. Όπως φαίνεται, ενώ για ευθεία πόλωση το ρεύμα αυξάνει εκθετικά με την εφαρμοζόμενη τάση, για ανάστροφη πόλωση το ρεύμα παίρνει μια μικρή οριακή τιμή ($-J_S A$).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι το συνολικό ρεύμα στην επαφή προσδιορίζεται κυρίως από την έγχυση φορέων από την πλευρά με την υψηλότερη συγκέντρωση προσμείξεων προς την πλευρά με τη χαμηλότερη συγκέντρωση. Αυτό φαίνεται από τη μορφή της πυκνότητας του ρεύματος κορεσμού

$$J_S = qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}} + qn_{p0} \sqrt{\frac{D_{n_p}}{\tau_{n_p}}}.$$

Αν, για παράδειγμα, θεωρήσουμε ότι έχουμε υψηλή συγκέντρωση προσμείξεων στην πλευρά p (περίπτωση p^+), και λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις $p_{n0} \simeq \frac{n_i^2}{N_D}$ και $n_{p0} \simeq \frac{n_i^2}{N_A}$, τότε

$$J_S \simeq qn_i^2 \left[\frac{1}{N_D} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}} + \frac{1}{N_A} \sqrt{\frac{D_{n_p}}{\tau_{n_p}}} \right].$$

Στην περίπτωση p^+ θα ισχύει ότι $N_A \gg N_D$, οπότε

$$J_S \simeq qn_i^2 \left[\frac{1}{N_D} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}} \right] = qp_{n0} \sqrt{\frac{D_{p_n}}{\tau_{p_n}}}$$

και μάλιστα, προκειμένου π.χ. να διπλασιάσει κανείς το J_S αρκεί να υποδιπλασιάσει τη συγκέντρωση προσμείξεων N_D στην πλευρά n και όχι να διπλασιάσει τη συγκέντρωση προσμείξεων N_A στην πλευρά p .

2.3 Εφαρμογές

Πρόβλημα 1 Σε δείγμα πυριτίου τύπου n με ενδογενή συγκέντρωση $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$ και με συγκέντρωση δοτών $N_D = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ εμφυτεύουμε βόριο και δημιουργούμε μια απότομη επαφή με τετραγωνική διατομή $S = 2 \times 10^{-3} \text{cm}^2$. Αν η συγκέντρωση βορίου είναι $N_A = 4 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$ και το σύστημα βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου, τότε:

(1) Το δυναμικό κατά μήκος της επαφής θα είναι: $V_0 = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = 26 \text{mV} \ln \frac{4 \times 10^{18} \times 10^{16}}{(1.5 \times 10^{10})^2} = 853 \text{mV}$.

(2) Το πάχος της περιοχής απογύμνωσης θα είναι:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{\frac{2\epsilon V_0}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 11.8 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 853}{1.6 \times 10^{-19}} (0.25 \times 10^{-18} + 1.00 \times 10^{-16}) \text{cm}} = \\ &= 0.334 \mu\text{m}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχετική διηλεκτρική σταθερά του πυριτίου ($\epsilon_r = 11.8$). Εύκολα προκύπτουν τα:

$$\begin{aligned} x_{p0} &= w_0 \frac{N_D}{N_A + N_D} = 8.3 \text{\AA}, \\ x_{n0} &= w_0 \frac{N_A}{N_A + N_D} = 0.333 \text{\AA}. \end{aligned}$$

(3) Τα φορτία στην επαφή θα είναι

$$Q_+ = -Q_- = qSx_{n0}N_D \simeq 1.07 \times 10^{-10}C.$$

(4) Τέλος το μέγιστο πεδίο

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{\epsilon}qN_Dx_{n0} \simeq -5.1 \times 10^4 \frac{V}{cm}.$$

Πρόβλημα 2 Αν σ' έναν ημιαγωγό με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 13$ που είναι εμπλουτισμένος με προσμείξεις και των δύο τύπων οι ενεργοί μάζες των θετικών και αρνητικών φορέων είναι $m_n^* = 0.176m_0$ και $m_p^* = 1.408m_0$ (m_0 είναι η μάζα του ελεύθερου ηλεκτρονίου), να υπολογιστούν οι ενεργειακές στάθμες που εισάγονται στο ενεργειακό χάσμα του υλικού.

Όπως είναι γνωστό,

$$E_C - E_D = \frac{m_n^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r^2} \left(\frac{m_0 q^4}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} \right).$$

Η τελευταία παρένθεση αντιπροσωπεύει την ενέργεια Rydberg $E_R \equiv \frac{m_0 q^4}{32\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} = 13.6eV$, οπότε $E_C - E_D = \frac{m_n^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r^2} E_R = 0.176 \frac{1}{(13)^2} 13.6eV = 14.1meV$ και παρόμοια $E_A - E_V = \frac{m_p^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r^2} E_R = 1.408 \frac{1}{(13)^2} 13.6eV = 113.1meV$.

Πρόβλημα 3 Θεωρήστε έναν ημιαγωγό με ενεργειακό χάσμα $E_G = 1.1eV$ και $N_C = N_V$. Αν ο ημιαγωγός αυτός έχει προσμείξεις τύπου δότη με συγκέντρωση $N_D = 10^{15}cm^{-3}$, στάθμη δοτών $E_D = E_C - \delta E$, $\delta E = 0.2eV$ και ενέργεια Fermi $E_F = E_C - \Delta E$, $\Delta E = 0.25eV$, να υπολογιστεί η ενδογενής συγκέντρωση n_i καθώς και οι συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων και οπών στους $300K$.

Η πιθανότητα κατάληψης της E_D είναι η κατανομή Fermi -Dirac $f(E_D) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp[\frac{E_D - E_F}{k_B T}]} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp[\frac{50meV}{26meV}]} \simeq 0.2262$. Εξ άλλου η πιθανότητα διέγερσης από την E_D ισούται με την πιθανότητα $1 - f(E_D)$ μη κατάληψης της E_D : $n = (1 - f(E_D))N_D = 7.738 \times 10^{14}cm^{-3}$. Αλλά $n = N_C \exp[-\frac{E_C - E_F}{k_B T}] \Rightarrow N_C = n \exp[\frac{E_C - E_F}{k_B T}] = 7.738 \times 10^{14}cm^{-3} \exp[\frac{250meV}{26meV}] = 1.16 \times 10^{19}cm^{-3}$, και από την παραδοχή της άσκησης: $N_V = N_C = 1.16 \times 10^{19}cm^{-3}$. Άρα

$$\begin{aligned} n_i &= \sqrt{N_C N_V} \exp\left[-\frac{E_G}{2k_B T}\right] = 1.16 \times 10^{19}cm^{-3} \exp\left[-\frac{1100meV}{2 \times 26meV}\right] = \\ &= 7.54 \times 10^9 cm^{-3}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά

$$\begin{aligned} p &= N_V \exp \left[-\frac{E_F - E_V}{k_B T} \right] = N_C \exp \left[-\frac{E_F - E_V}{k_B T} \right] = \\ &= N_C \exp \left[-\frac{E_C - \Delta E - E_V}{k_B T} \right] = N_C \exp \left[-\frac{E_G - \Delta E}{k_B T} \right] = 7.35 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}, \end{aligned}$$

οπότε $n_i = \sqrt{np} = 7.54 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$. Τέλος παρατηρούμε ότι ο ιονισμός των δοτών είναι: $\frac{N_D^+}{N_D} = 1 - f(E_D) \simeq 0.7738$.

Πρόβλημα 4 Θεωρήστε επαφή $p-n$ με συγκεντρώσεις προσμείξεων $N_A = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ στην πλευρά τύπου p και $N_D = 5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ στην πλευρά τύπου n . Δίδεται η ενδογενής συγκέντρωση $n_i = 1.05 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ και η σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 11.8$. (1) Υπολογίστε τα επίπεδα Fermi στις δύο περιοχές (2) Υπολογίστε το δυναμικό επαφής (3) Αν η επαφή έχει κυκλική διατομή με ακτίνα $r = 5 \mu\text{m}$, υπολογίστε τα x_{n0}, x_{p0}, Q_+ και το ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}_0$ της επαφής για $T = 300 \text{ K}$.

(1) Υποθέτουμε ότι έχουμε ολικό ιονισμό, δηλαδή $n \simeq N_D, p \simeq N_A$. Τότε από την $n = n_i \exp[\frac{E_{Fn} - E_i}{k_B T}]$ προκύπτει ότι: $E_{Fn} - E_i = k_B T \ln \left(\frac{N_D}{n_i} \right) \simeq 330 \text{ meV}$. Εξάλλου από την $p = n_i \exp[\frac{E_i - E_{Fp}}{k_B T}]$ προκύπτει ότι: $E_i - E_{Fp} = k_B T \ln \left(\frac{N_A}{n_i} \right) \simeq 468 \text{ meV}$.

(2) $qV_0 = k_B T \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right) = 798 \text{ meV}$. Παρατηρούμε ότι ισούται με το άθροισμα των $E_{Fn} - E_i$ και $E_i - E_{Fp}$, όπως θα έπρεπε.

(3) Συνολικό πλάτος της περιοχής απογύμνωσης $w_0 = \left[\frac{2\epsilon V_0}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) \right]^{1/2}$. Υπενθυμίζουμε ότι $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{Cb}^2}{\text{Nm}^2}$, οπότε $w_0 = 0.457 \mu\text{m}$. Με βάση αυτό το αποτέλεσμα βρίσκουμε $x_{n0} = \frac{N_A}{N_A + N_D} w_0 \simeq 0.455 \mu\text{m}, x_{p0} = \frac{N_D}{N_A + N_D} w_0 \simeq 0.0023 \mu\text{m}$ και $Q_+ = q(\pi r^2) x_{n0} N_D = 2.85 \times 10^{-4} \text{ Cb}$, $\mathcal{E}_0 = -\frac{q}{\epsilon} x_{n0} N_D = \frac{q}{\epsilon} x_{p0} N_A = -3.48 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.