ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
Τελική εξέταση στο μάθημα: "ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι"
Σεπτέμβρης 2006

Διάρκεια: 3 ώρες
Γράψτε και τα τέσσερα (βαθμολογικά ισοδύναμα) θέματα.

Θέμα 1ο Θεωρήστε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R που φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q. Η επιφάνεια αυτή περιβάλλεται από διηλεκτρικό ρευστό με σταθερά ϵ, που επί πλέον είναι φορτισμένο με πυκνότητα $\rho(\vec{r}) = -\mu\Phi(\vec{r})$, $\mu > 0$. Να υπολογιστεί το δυναμικό $\Phi(\vec{r})$ παντού, υποθέτοντας ότι $\Phi \to 0$ για $r \to \infty$. (Να υπολογιστεί και τυχόν πολλαπλασιαστική σταθερά για το δυναμικό). Υποδείξεις: Ξεκινήστε από την εξίσωση του Poisson. Η αντικατάσταση $\Phi = \frac{\psi}{r}$ θα βοηθήσει στη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Λύση: Αφού το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία, η εξίσωση του Poisson θα γράφεται:

$$\frac{1}{r^2}(r^2\Phi')' = -\frac{\rho}{\epsilon} = +\frac{\mu\Phi}{\epsilon}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγωγίσεις ως προς r. Με την αντικατάσταση της υπόδειξης θα έχουμε $(r^2\Phi')' = r\psi''$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{r^2}r\psi'' = \frac{\mu}{\epsilon}\frac{\psi}{r} \to \psi'' - \frac{\mu}{\epsilon}\psi = 0 \to \Phi = A\frac{\exp[-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}r]}{r} + B\frac{\exp[+\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}r]}{r}.$$

Όμως $\Phi \to 0$ για $r \to \infty$, άρα $B = 0$, $\Phi = A\frac{\exp[-\kappa r]}{r}$, όπου $\kappa \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ και

$$E = -\frac{d\Phi}{dr} = A\frac{\exp[-\kappa r]}{r^2}(\kappa r + 1).$$

Το φορτίο θα δίνεται από τη σχέση

$$Q = \epsilon\int daE = \epsilon 4\pi R^2 A\frac{\exp[-\kappa R]}{R^2}(\kappa R + 1) \to A = \frac{Q\exp[\kappa R]}{4\pi\epsilon(\kappa R + 1)}.$$

Θέμα 2ο Θεωρήστε άπειρο αγώγιμο γειωμένο επίπεδο xy, ένα φορτίο $q_1 = q$ στη θέση $(0, 0, z_1 = L)$ και ένα δεύτερο φορτίο q_2 στη θέση $(0, 0, z_2 = 4L)$.

(α) Να υπολογίσετε το φορτίο q_2, συναρτήσει του q, ώστε η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(\rho)$, όπου $\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$, να μηδενίζεται στη θέση $x=y=0$.

(β) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στο φορτίο q_1.

Λύση: (α) Η μέθοδος των ειδώλων δίνει, για το δυναμικό:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{kq_1}{[\rho^2+(z-L)^2]^{1/2}} - \frac{kq_1}{[\rho^2+(z+L)^2]^{1/2}} +$$

$$+\frac{kq_2}{[\rho^2+(z-4L)^2]^{1/2}} - \frac{kq_2}{[\rho^2+(z+4L)^2]^{1/2}}.$$

Η επαγόμενη πυκνότητα φορτίου θα είναι $\epsilon_0 E|_{z=0} = \frac{1}{4\pi k}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}\right)$:

$$\sigma(\rho) = -\frac{1}{4\pi k}\left(-\frac{kq_1(z-L)}{[\rho^2+(z-L)^2]^{3/2}} + \frac{kq_1(z+L)}{[\rho^2+(z+L)^2]^{3/2}} -\right.$$

$$\left.-\frac{kq_2(z-4L)}{[\rho^2+(z-4L)^2]^{3/2}} + \frac{kq_2(z+4L)}{[\rho^2+(z+4L)^2]^{3/2}}.\right)\Bigg|_{z=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2q_1L}{[\rho^2+L^2]^{3/2}} + \frac{8q_2L}{[\rho^2+16L^2]^{3/2}}\right).$$

Η απαίτηση να μηδενίζεται η $\sigma(\rho)$ για $\rho=0$ δίνει $\frac{2q_1L}{L^3}+\frac{8q_2L}{(4L)^3}=0$, δηλαδή $q_2=-16q_1=-16q$.

(β) Η δύναμη στο q_1 ισούται με τη συνισταμένη των τριών δυνάμεων από τα φορτία $q_2, -q_1, -q_2$:

$$F = \frac{kq_1(-q_1)}{(2L)^2} + \frac{kq_1(q_2)}{(3L)^2} + \frac{kq_1(-q_2)}{(5L)^2} = -\frac{kq^2}{4L^2} - 4\frac{kq^2}{9L^2} + 4\frac{kq^2}{25L^2} = -\frac{481}{900}\frac{kq^2}{L^2}.$$

Θέμα 3ο Θεωρήστε ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{p}$, που βρίσκεται στη θέση (x,y,z), πάνω από γειωμένο αγώγιμο επίπεδο, που συμπίπτει με το επίπεδο xy. (α) Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος; (β) Εξετάστε κατά πόσο το δίπολο έλκεται ή απωθείται από το αγώγιμο επίπεδο, αν επιβάλλουμε ο προσανατολισμός του να παραμένει αναλλοίωτος. (γ) Εξετάστε την ευστάθεια του διπόλου κάτω από στροφές, ενώ δεν μετακινείται καθόλου κατά τον z.

Λύση: (α) Από τη σχέση $\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{p}_I\cdot\vec{r}_I}{r_I^3}=0$, όπου $\vec{r}$ και $\vec{r}_I$ τα διανύσματα θέσης από το δίπολο και το είδωλό του προς σημείο παρατήρησης πάνω στο γειωμένο επίπεδο και τις αναπαραστάσεις $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_I = (x, y, -z), \vec{p} = (p_x, p_y, p_z), \vec{p}_I = (p_{Ix}, p_{Iy}, p_{Iz})$ καταλήγουμε, αν λάβουμε υπ' όψη ότι $r_I = r$, στο συμπέρασμα ότι $p_{Ix} = -p_x$, $p_{Iy} = -p_y$, $p_{Iz} = p_z$. Δηλαδή, το εικονικό δίπολο έχει ροπή $\vec{p}_I = (-p_x, -p_y, p_z)$. Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $U = -2\vec{p}\cdot\vec{E}_I$, όπου το $\vec{E}_I = \frac{3(\hat{n}\cdot\vec{p}_I)\hat{n}-\vec{p}_I}{|\vec{x}-\vec{x}_I|^3}, \hat{n} \equiv \frac{\vec{x}-\vec{x}_I}{|\vec{x}-\vec{x}_I|} = \hat{z}$, είναι το πεδίο που δημιουργείται μόνο από το εικονικό δίπολο. Ο παράγοντας 2 προέρχεται από το γεγονός ότι πρέπει να λάβουμε υπ' όψη και το εικονικό δίπολο. Αντικαθιστώντας $\vec{x} - \vec{x}_I = 2z\hat{z}$ βρίσκουμε: $U = -\frac{p_x^2+p_y^2+2p_z^2}{4z^3} = -\frac{p^2+p_z^2}{4z^3}$.

(β) Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια αυξάνει αυξανομένου του z (υπό την προϋπόθεση ότι τα p και p_z είναι σταθερά). Άρα το δίπολο έλκεται από το αγώγιμο επίπεδο.

(γ) Έστω ότι το δίπολο σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των z. Τότε $p_z = p\cos\theta$ $U = -\frac{p^2(1+\cos^2\theta)}{4z^3}$. Αν το z μένει σταθερό, η γραφική παράσταση του U συναρτήσει του θ παρουσιάζει ένα ελάχιστο για $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, ενώ έχει τοπικό μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι το δίπολο τείνει να προσανατολιστεί κάθετα στο επίπεδο (με οποιονδήποτε από τους δύο προσανατολισμούς), όπου η ισορροπία του είναι ευσταθής. Η τιμή $\theta = \frac{\pi}{2}$ χαρακτηρίζει μια θέση ασταθούς ισορροπίας.

Θέμα 4ο Επίπεδη πλάκα πάχους $2d$ κατά τον άξονα z εκτείνεται μέχρι το άπειρο στις κατευθύνσεις x και y και διαρρέεται από ρεύμα με σταθερή πυκνότητα $\vec{J}$ στην κατεύθυνση x.

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και στις τρεις περιοχές του χώρου.

(β) Βρείτε το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ και στις τρεις περιοχές του χώρου.

Λύση: (α) Με εφαρμογή του νόμου του Ampère βρίσκουμε εύκολα ότι το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τις εκφράσεις:

$$\vec{B} = \begin{cases} +B_0\hat{y}, & z \leq -d, \\ -B_0\frac{z}{d}\hat{y}, & -d \leq z \leq +d, \\ -B_0\hat{y}, & z \geq +d, \end{cases}$$

όπου $B_0 = \mu_0 J d$.

(β) Γράφοντας αναλυτικά τις συνιστώσες της σχέσης $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις και υποθέτοντας ότι $A_y = A_z = 0$ βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$\vec{A} = \begin{cases} +B_0 z\hat{x}, & z \leq -d, \\ -B_0\frac{z^2}{2d}\hat{x}, & -d \leq z \leq +d, \\ -B_0 z\hat{x}, & z \geq +d. \end{cases}$$

Ισχύει η σχέση $\partial_z A_x = B_y(z)$.