ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ" ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"

Τελική εξέταση στο μάθημα: "ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι"

Φλεβάρης 2006

Διάρκεια: 3 ώρες. Γράψτε και τα τέσσερα (βαθμολογικά ισοδύναμα) θέματα.

Θέμα 1ο Θεωρήστε δύο ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες R_1 και R_2 ($R_2 > R_1$). Η σφαίρα είναι αγώγιμες και γειωμένες, ενώ μεταξύ τους, στη θέση $\vec{R}_0$ ($R_1 < R_0 < R_2$) τοποθετείται φορτίο q. Να αποδειχθεί ότι το φορτίο που επάγεται στην εσωτερική σφαίρα ισούται με $Q = -q\frac{R_1}{R_0}\frac{R_2-R_0}{R_2-R_1}$.

Υποδείξεις: Το δυναμικό μπορεί να γραφτεί: $\Phi = \frac{kq}{|\vec{r}-\vec{R}_0|}+\sum\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)$. Επίσης, ο άξονας των z καλό είναι να περνάει από τη θέση του φορτίου q.

Λύση: Κατά την υπόδειξη,

$$\Phi = \frac{kq}{|\vec{r}-\vec{R}_0|} + \sum\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right).$$

Παρατηρούμε ότι, για $r < R_0$, το δυναμικό του φορτίου q γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{kq}{|\vec{r}-\vec{R}_0|} = \frac{kq}{R_0}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{R_0}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R_0}\right)\cos\theta}} = kq\sum_0^\infty \frac{r^n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta), \quad r < R_0.$$

Εντελώς αντίστοιχα, αν $r > R_0$,

$$\frac{kq}{|\vec{r}-\vec{R}_0|} = kq\sum_0^\infty \frac{R_0^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta), \quad r > R_0.$$

Τακτοποιώντας τους διάφορους όρους, το συνολικό δυναμικό δίνεται από τις δυό διαφορετικές παραστάσεις:

$$\Phi = \Phi_< = \sum_0^\infty\left[\left(a_n + \frac{kq}{R_0^{n+1}}\right)r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right], \quad r < R_0$$

$$\Phi = \Phi_> = \sum_0^\infty\left[a_n r^n + \frac{b_n + kqR_0^n}{r^{n+1}}\right], \quad r > R_0.$$

Τώρα θα επιβάλλουμε τις οριακές συνθήκες: $\Phi|_{R_1} = \Phi_<|_{R1} = 0$, και $\Phi|_{R_2} = \Phi_>|_{R2} = 0$. Η πρώτη συνεπάγεται ότι $\left(a_n + \frac{kq}{R_0^{n+1}}\right) R_1^n + \frac{b_n}{R_1^{n+1}} = 0$ και η δεύτερη ότι: $a_n R_2^n + \frac{b_n + kqR_0^n}{R_2^{n+1}} = 0$. Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_n και b_n, άρα το δυναμικό. Η πυκνότητα φορτίου θα βρεθεί από τη σχέση $\sigma = \frac{1}{4\pi k} E|_{R_1} = -\frac{1}{4\pi k} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{R_1} = -\frac{1}{4\pi k} \left.\frac{\partial \Phi_<}{\partial r}\right|_{R_1}$, και το φορτίο στην εσωτερική σφαίρα θα είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα αυτής της ποσότητας. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $\int_{-1}^{1} d\cos\theta P_n(\cos\theta) = 2\delta_{n0}$, είναι εύκολο να δούμε ότι μόνο οι όροι με $n = 0$ θα συνεισφέρουν στο φορτίο, δηλαδή αρκεί να υπολογίσουμε τα a_0 και b_0. Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν: $a_0 = -\frac{kq}{R_0}\frac{R_0 - R_1}{R_2 - R_1}$, $\;b_0 = -\frac{kqR_1}{R_0} - R_1 a_0 = -kq\frac{R_1}{R_0}\frac{R_2 - R_0}{R_2 - R_1}$. Τελικά:

$$Q = -4\pi R_1^2 \frac{1}{4\pi k} \left.\frac{\partial\left[a_0 + \frac{kq}{R_0^{n+1}} + \frac{b_0}{r}\right]}{\partial r}\right|_{R_1} = \frac{R_1^2}{k}\frac{b_0}{R_1^2} = -q\frac{R_1}{R_0}\frac{R_2 - R_0}{R_2 - R_1}.$$

Θέμα 2ο Θεωρήστε έναν μονωτή ημισφαιρικού σχήματος που έχει ακτίνα R, και είναι φορτισμένος με πυκνότητα $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$. Η επίπεδη πλευρά του μονωτή βρίσκεται στο επίπεδο xy και εκτείνεται στον ημιχώρο με θετικό z. (α) Να βρείτε την πολυπολική ανάπτυξη του δυναμικού για αποστάσεις $r > R$. (β) Να βρείτε την αντίστοιχη πολυπολική ανάπτυξη του δυναμικού για ημισφαιρικό μονωτή που εκτείνεται στον ημιχώρο με αρνητικό z.

Λύση: Το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1} Q_{lm}\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}, \quad Q_{lm} \equiv \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^l Y^*_{lm}.$$

(α) Η ολοκληρωτέα παράσταση δεν έχει εξάρτηση από το ϕ, οπότε η ολοκλήρωση αυτή θα δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα μόνο για $m = 0$. Σημειώνουμε ότι $Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$. Η ολοκλήρωση ως προς θ θα εκτείνεται από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \frac{\pi}{2}$ και πρέπει να υπολογιστεί το

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d(-\cos\theta) P_l(\cos\theta) = -\int_{x=1}^{0} dx P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\int_0^1 dx [P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)] =$$

$$= \frac{1}{2l+1}[(P_{l+1}(1) - P_{l+1}(0)) - (P_{l-1}(1) - P_{l-1}(0))] = \frac{1}{2l+1}[P_{l-1}(0)) - P_{l+1}(0)].$$

Για την ειδική περίπτωση $l = 0$ το ολοκλήρωμα θα είναι μονάδα. Για άρτια l το ολοκλήρωμα θα μηδενίζεται. Μένουν τα περιττά $l = 2k + 1$. Η γεννήτρια συνάρτηση δίνει:

$$P_{2k}(x) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!},\ P_{2k+2}(x) = -\frac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k+2)!!}.$$

Μένει το ακτινικό ολοκλήρωμα, που ισούται με $\int_0^R dr' r'^2 \rho_0 \frac{r'}{R} r'^l = \rho_0 R^{l+3}$.

(β) Ένας απλός τρόπος για να υπολογίσουμε τη δεύτερη πολυπολική ανάπτυξη προκύπτει από την παρατήρηση ότι το σύστημα των δύο μονωτών, δηλαδή το άθροισμα των πολυπολικών αναπτυγμάτων, θα είναι μία σφαίρα με έναν μόνο όρο στην πολυπολική ανάπτυξη:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}(Q^+_{lm}+Q^-_{lm})\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}},$$

όπου τα Q^+_{lm} είναι γνωστά: είναι οι ποσότητες που συμβολίσαμε με Q_{lm} στο πρώτο μέρος της άσκησης και Q^-_{lm} είναι τα ζητούμενα. Εξ άλλου το Q είναι το ολικό φορτίο σφαίρας ακτίνας R με πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = \rho_0\frac{r}{R}$: $Q = \int_0^R (4\pi r^2 dr)\rho_0 \frac{r}{R} = \pi\rho_0 R^3$. Από τη σχέση των αναπτυγμάτων συμπεραίνουμε ότι: $Q^-_{00} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} - Q^+_{00}$ (για $l = m = 0$) και $Q^-_{lm} = -Q^+_{lm}$ για όλες τις άλλες τιμές των l και m.

Θέμα 3ο Λεπτός κυλινδρικός φλοιός με μήκος L και ακτίνα $R << L$ φέρει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Ο φλοιός περιστρέφεται περί τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα $\omega = at$. Να υπολογίσετε:

(α) Το μαγνητικό πεδίο μέσα στον φλοιό.

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον φλοιό.

(γ) Την ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια μέσα στο φλοιό.

Αγνοήστε: (α) πιθανές παραμορφώσεις των πεδίων κοντά στις δύο βάσεις του φλοιού (β) πιθανό ρεύμα μετατόπισης.

Λύση: (α) Η πυκνότητα ρεύματος είναι: $\vec{K} = \sigma\omega R\hat{\phi} \Rightarrow \vec{J} = \vec{K}\delta(\rho - R) = \sigma\omega R\delta(\rho - R)\hat{\phi}$. (Πράγματι, φορτίο $\delta Q = \sigma(2\pi R)\delta z$ συμπληρώνει έναν πλήρη κύκλο μια φορά κάθε περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, παράγοντας ρεύμα $\delta I = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\sigma(2\pi R)}{\frac{2\pi}{\omega}}\delta z$, οπότε $K \equiv \frac{\delta I}{\delta z} = \sigma\omega R$). Αν αγνοήσουμε το ρεύμα μετατόπισης, η εξίσωση $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ θα μας δώσει $-\frac{\partial B_z}{\partial\rho} = \mu_0\sigma\omega R\delta(\rho - R)$, οπότε: $\vec{B}(\rho) = -\mu_0\sigma\omega R\hat{z} = -\mu_0\sigma aRt\hat{z}, \rho < R$. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί κανείς να βρεί εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες για το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια του φλοιού.

(β) Από την $\int_{C(S)}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}da$, για κύκλο ακτίνας ρ κάθετο στον άξονα των z με κέντρο πάνω στον άξονα παίρνουμε: $\vec{E} = \frac{\mu_0\sigma aR\rho}{2}\hat{\phi}$.

(γ) $U_E = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3xE^2 = \frac{\epsilon_0 L}{2}\int_0^R \left(\frac{\mu_0\sigma a R\rho}{2}\right)^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\epsilon_0\mu_0^2\sigma^2a^2R^6L}{16}$, $U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int d^3xB^2 = \frac{1}{2\mu_0}(\pi R^2 L)\left(\mu_0\sigma\omega R\right)^2 = \frac{\pi\mu_0\sigma^2a^2R^4Lt^2}{2}$.

Θέμα 4ο (α) Γράψτε τη συνάρτηση Green για γειωμένο μη πεπερασμένο αγώγιμο επίπεδο που βρίσκεται στο επίπεδο xy. (β) Με τη βοήθεια της συνάρτησης Green του προηγούμενου ερωτήματος προσδιορίστε το δυναμικό στη θέση $(0,0,z)$ που οφείλεται σε ράβδο με πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{r}') = \lambda\Theta(L-|x'|)\delta(y')\delta(z'-z_0)$. (Ράβδος χωρίς πάχος και με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ που βρίσκεται στο επίπεδο xz, είναι παράλληλη στον άξονα των x, περνάει από το σημείο z_0 και εκτείνεται από το $-L$ μέχρι το $+L$.) Υπόδειξη: $\int dx\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

Λύση: (α) Η συνάρτηση Green για οριακές συνθήκες Dirichlet όπως οι παραπάνω είναι:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'_I|}.$$

(β) Για οριακές συνθήκες Dirichlet ξέρουμε ότι

$$\Phi(\vec{x}) = k\int_V d^3x'\rho(\vec{x}')G_D(\vec{x},\vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} da'\Phi(\vec{x}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}.$$

Για το πρόβλημά μας βρίσκουμε:

$$\Phi(0,0,z) = k\int_{z'\geq 0} dx'dy'dz'[\lambda\Theta(L-|x'|)\delta(y')\delta(z'-z_0)]\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'_I|}\right] =$$

$$= k\lambda\int_{z'\geq 0} dx'dy'dz'[\lambda\Theta(L-|x'|)\delta(y')\delta(z'-z_0)]\left[\frac{1}{\sqrt{(0-x')^2+(0-y')^2+(z-z')^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(0-x')^2+(0-y')^2+(z+z')^2}}\right] =$$

$$= k\lambda\int_{x'=-L}^{L} dx'\left[\frac{1}{\sqrt{x'^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2+(z+z_0)^2}}\right] =$$

$$= k\lambda\ln\frac{L+\sqrt{L^2+(z-z_0)^2}}{-L+\sqrt{L^2+(z-z_0)^2}} - k\lambda\ln\frac{L+\sqrt{L^2+(z+z_0)^2}}{-L+\sqrt{L^2+(z+z_0)^2}} =$$

$$= k\lambda\ln\frac{(\sqrt{L^2+(z-z_0)^2}+L)(\sqrt{L^2+(z+z_0)^2}-L)}{(\sqrt{L^2+(z-z_0)^2}-L)(\sqrt{L^2+(z+z_0)^2}+L)}.$$