Λογισμός μεταβολών

Συναρτησοειδή, $I[y(x)] = \int_a^b F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx$

$y(x) \to y(x) + \alpha \eta(x)$ $\quad \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$I(\alpha) = \int_a^b F(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)\, dx = \int_a^b \Big[F(y, y', x) +$
$+ \alpha \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \alpha\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\Big] dx + \dots$ Απαιτούμε:

$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b dx \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\right)$
$= 0 \Rightarrow \left.\eta \frac{\partial F}{\partial y'}\right|_a^b + \int_a^b dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta = 0$

Υποθέτουμε ότι θεωρούμε μεταβολή τέτοια ώστε $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Κατά τ' άλλα η ισότητα οφείλει να ισχύει για κάθε η, άρα $\boxed{~~\frac{\partial F}{\partial y}=~~ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.}$ $\boxed{\text{Euler Lagrange}}$

(Συναρτησιακή παράγωγος).

Η αρχή του Hamilton: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} =$

Αν $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, θα έχουμε ότι $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}=$ σταθερά

(Πρώτη ολοκλήρωση)

Κυκλικές μεταβλητές.

Αν $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{dF}{dx}=\overset{\nearrow 0}{\frac{\partial F}{\partial x}}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}$. Εξ αυτού!

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \Rightarrow y'\frac{\partial F}{\partial y}-y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow$$

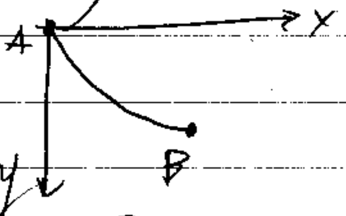
$$\Rightarrow \left(\frac{dF}{dx}-y''\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx}-\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=$ σταθερά (πρώτο ολοκλήρωμα).

(Αν η F είναι Λαγκρανζιανή ανεξάρτητη από το χρόνο, το $F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ είναι η ενέργεια).

Παράδειγμα: Βραχυστόχρονο.



$v=\frac{ds}{dt} \rightarrow$

$$\rightarrow dt=\frac{ds}{v} \Rightarrow t=\int_A^B\frac{ds}{v}=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}=$$

$$=\int_0^{x_0}\underbrace{\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}}_{F}\,dx.$$ Το F δεν εξαρτάται από το x.

άρα ~~$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$~~ $F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=$ σταθερά

$$F=\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{1/2},\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{-1/2}\frac{2y'}{2gy}=\frac{\sqrt{2gy}}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{y'}{2gy}=$$

$$=\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)2gy}}\qquad F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}-\frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}\left(1+y'^2-y'^2\right)=\text{σταθερά}\Rightarrow y(1+y'^2)=c$$

Αλλαγή μεταβλητών: $y'=\cot\vartheta \Rightarrow y=\frac{c}{1+y'^2}=$

$$=\frac{c}{1+\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}}=c\sin^2\vartheta=\frac{c}{2}(1-\cos2\vartheta).$$ Εξάλλου: $\frac{dx}{d\vartheta}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\vartheta}$

$$=\frac{\frac{dy}{d\vartheta}}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}\frac{dy}{d\vartheta}\ \frac{y'=\cot\vartheta}{y=c\sin^2\vartheta}\ \frac{1}{\cot\vartheta}\,2c\sin\vartheta\cos\vartheta=\frac{2c\sin\vartheta\cancel{\cos\vartheta}\sin\vartheta}{\cancel{\cos\vartheta}}=$$

$$=2c\sin^2\vartheta=c(1-\cos2\vartheta)\Rightarrow x=\int c(1-\cos2\vartheta)\,d\vartheta=$$

$$=c\vartheta-\frac{c}{2}\sin2\vartheta+C'.$$ Αν $x(\vartheta=0)=y(\vartheta=0)=0\Rightarrow C'=0.$

Θέτουμε $C=2A$, $2\vartheta=\varphi$, οπότε: $\left\{\begin{array}{l}x=A(\varphi-\sin\varphi)\\ y=A(1-\cos\varphi)\end{array}\right\}$ κυκλοειδής

Γενικεύσεις.

Αν έχουμε δύο εξαρτημένες μεταβλητές,

η μέθοδος γενικεύεται εύκολα: $\frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial z}=0$, $I=\int_a^b F(y,y',z,z',x)dx$

Αν έχουμε παραγώγους ανώτερης τάξης:

$I[y(x)]=\int_a^b F(y,y',y'',x)dX$ με $y(a), y(b), y'(a), y'(b)$ σταθερά, τότε:

$$I(\alpha)=F(0)+\int_a^b dx\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial \eta''}\eta''\right)\Rightarrow I(0)+$$

$$+\int_a^b dx\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta''}\right)\eta'\right]\Rightarrow I(0)+$$

$$+\int_a^b dx\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta''}\right)\right]\eta \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\delta F}{\delta y}\equiv\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0.}$$

[illegible] ορισμός της συναρτησιακής παραγώγου

Αν έχουμε συναρτήσεις περισσοτέρων της μιας μεταβλητών, $I[f(x,y)]=\int_G F(f,f_x,f_y,x,y)\,dxdy$ και μεταβάλλουμε κρατώντας σταθερές τις τιμές στο σύνορο, τότε

$$\frac{\delta F}{\delta f}\equiv\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right)=0.$$

Μπορεί κανείς, αντί να απομονώσει τη συνηθισμένη θεωρία, να εκφράσει τη λύση παραμετρικά: $\left\{\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t)\end{matrix}\right\}$ και να θεωρήσει ότι ψάχνει αυτές τις δύο συναρτήσεις, αντί για την $y(x)$.

$$I=\int_a^b F(y,y',x)\,dx=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{F\left(y,\frac{\dot y}{\dot x},x\right)\dot x}_{\mathcal{F}(x,y,\dot x,\dot y)}dt \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial\mathcal F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal F}{\partial\dot x}\right)= \\ \frac{\partial\mathcal F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal F}{\partial\dot y}\right)=\end{cases}$$

Οι δύο εξισώσεις δεν είναι ανεξάρτητες:

$$\dot x\left(\frac{\partial\mathcal F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal F}{\partial\dot x}\right)+\dot y\left(\frac{\partial\mathcal F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal F}{\partial\dot y}\right)=\dot x\left[\frac{\partial F}{\partial x}\dot x-\frac{d}{dt}\left(F+\dot x\frac{\partial F}{\partial y'}\left(-\frac{\dot y}{\dot x^2}\right)\right)\right]+\dot y\left[\frac{\partial F}{\partial y}\dot x-\frac{d}{dt}\left(\dot x\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{1}{\dot x}\right)\right]=\dot x^2\frac{\partial F}{\partial x}-\dot x\frac{dF}{dt}+$$

$$+\dot x\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{\dot x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\dot x\dot y\frac{\partial F}{\partial y}-\dot y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dot x^2\frac{\partial F}{\partial x}-\dot x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\dot x+\right.$$

$$\left.+\cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)}{dt}}+\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}\dot y}\right)+\cancel{\dot x\frac{d\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'}}+\cancel{\dot x\frac{\dot y}{\dot x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}+\cancel{\dot x\dot y\frac{\partial F}{\partial y}}-$$

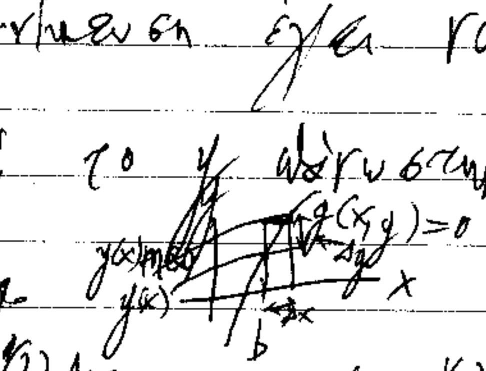
$$-\cancel{\dot y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}=0\ \cancel{\dot x\frac{\partial F}{\partial x}+\dot y\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Σπουδαία είναι η γενίκευση για μεταβλητά όρια.

Θεωρούμε το $I=\int_a^b dx\, F(y,y',x)$, αλλά δεν υποθέτουμε ότι το $y(b)$ είναι ορισμένο. $\delta I=\int_a^b dx\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)=\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b+\int_a^b\cancelto{0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)}\eta\, dx=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=b}=0.}$ Αν χαλαρώσουμε τις συνθήκες μας και στο $x=a$, μια ανάλογη συνθήκη οφείλει να ικανοποιείται και στο a.

Μια γενίκευση έχει να κάνει με σταθερό όριο $x=a$, αλλά το y κινούμενο στην καμπύλη $g(x,y)=0$ στο άλλο άκρο.



~~$\delta I=\int_a^{g(x,y)}\delta F\, dx=$~~

~~$=\int_a^{\eta(b)+y'(b)\Delta x} dx\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)F=\int_a^{\eta(b)+y'(b)\Delta x} dx\left[\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{d}{dx}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=$~~

~~$=\left(\eta(b)+y'(b)\Delta x\right)\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{0}+\int^{\eta(b)+y'(b)\Delta x} dx\,\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$~~

$\delta I=\delta\int_a^{b(x)}F\, dx=\int_b^{b+\Delta x}F\, dx+\int_a^b\delta F\, dx\simeq F(b)\Delta x+$

← όπου το $y(b)$ δεν είναι καθορισμένο

$+\int_a^b\delta F\, dx=F(b)\Delta x+\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b+\int_a^b\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$

Σημειώνουμε ότι $\Delta y = \eta(b) + y'(b)\Delta x$. Η απαίτηση $\Delta g = 0$ γράφεται: $\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(\eta + y'\Delta x) = 0 \Rightarrow (g_x + y' g_y)\Delta x + g_y \eta = \quad (1)$$

Από το λογισμό των μεταβολών [illegible]:

$F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta = 0$ (2). Για μη μηδενική λύση των (1) και (2) πρέπει: $\begin{vmatrix} g_x + y' g_y & g_y \\ F & \frac{\partial F}{\partial y'} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g_x \frac{\partial F}{\partial y'} + y' g_y \frac{\partial F}{\partial y'} - F g_y = 0 \Rightarrow \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) g_y - g_x \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (3)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η τροχιά ~~[illegible]~~ κατά την οποία σωματίδιο σε πεδίο βαρύτητας φτάνει σε ελάχιστο χρόνο σε δοσμένη καμπύλη $g(x,y) = 0$. Ξέρουμε ήδη ότι $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, οπότε $\frac{\partial F}{\partial y'} = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}}\, 2y'\right)\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$

Η σχέση (3) δίνει: $\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{\cancel{y}}} - \frac{y'^2}{\sqrt{\cancel{y}(1+y'^2)}}\right) g_y - g_x \frac{y'}{\sqrt{\cancel{y}(1+y'^2)}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1 + \cancel{y'^2} - \cancel{y'^2})\, g_y = g_x y' \Rightarrow y' = \frac{g_y}{g_x}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $g=0 \Rightarrow g_x dx + g_y dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{g=σταθ} = -\frac{g_x}{g_y}$. Άρα η ζητούμενη σχέση γράφεται: $y'_{τροχ} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{g=σταθ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'_{τροχ}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{g=σταθ} = -1$, δηλαδή οι δύο καμπύλες είναι ορθογώνιες.

Τέλος θεωρούμε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης ενός συναρτησοειδούς $I[y(x)] = \int_a^b F(y, y'; x)\,dx$ υπό την προϋπόθεση ότι κάποιο άλλο συναρτησοειδές, το $J[y(x)] = \int_a^b G(y, y'; x)\,dx$ διατηρείται σταθερό. Ισοπεριμετρικά προβλήματα.

Πολλαπλασιαστές Lagrange. Αν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x,y)$ υπό την προϋπόθεση $g(x,y) =$ σταθερό, γνωρίζουμε ότι $df = f_x dx + f_y dy = 0$. Εξ άλλου $g_x dx + g_y dy = 0$, άρα $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \lambda \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \end{matrix}\right\}$ Είναι σα θέλαμε να μεγιστοποιήσουμε την $f - \lambda g$

~~$I=\int_{-1}^{1} dx\, f(x)$~~ $f = x+y \Rightarrow$ ~~$dx+dy=0$~~

~~$I=\int_{-1}^{1} dx\,(1+y^2r^2)^{1/2} = A$~~ $g = xy \Rightarrow$ ~~$x\,dy+y\,dx=0$~~

$\frac{f_x}{g_x} = \frac{1}{y}$ $\frac{f_y}{g_y} = \frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}=\lambda$.

$f_x - \lambda g_x = 0 \rightarrow$ ~~$1-\lambda y=0$~~ ~~$\nabla f = \hat{x}+\hat{y}$~~

$f_y - \lambda g_y = 0 \rightarrow$ ~~$1-\lambda x=0$.~~ ~~$\nabla g = 2x\hat{x}+2y\hat{y}$~~

~~$xy=k$~~ ~~$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 1=2x\lambda \\ 1=2y\lambda \end{cases}$.~~

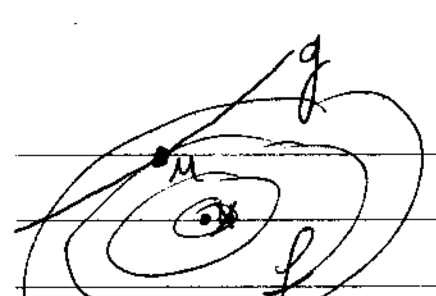
Παράδειγμα: Ποιά σημεία της καμπύλης $x^2y=2$ είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων;

$f=x^2+y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x, 2y)$ | $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2x=2xy\lambda \\ 2y=x^2\lambda \end{cases}$

$g=x^2y=2 \Rightarrow \vec{\nabla} g = (2x, y)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda y=1 \\ x^2\lambda-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{\lambda} \\ \frac{x^2}{y}-2y=0 \Rightarrow x^2=2y^2 \end{cases}$ Επειδή $x^2y=2 \Rightarrow$ η $x^2=2y^2$ γίνεται $x^2y=2y$

$\Rightarrow 2=2y^3 \Rightarrow y=1$, άρα $\lambda=1$ και $x=\sqrt{2}$. Τα σημεία είναι τα $(\pm\sqrt{2}, 1)$.



Γεωμετρική ερμηνεία: Αν θέλαμε τα μέγιστα της f χωρίς περιορισμούς, θα είναι το σημείο X. Αν επιβάλλουμε τον περιορισμό g, η λύση θα είναι το σημείο M, όπου το g και η ισοϋψής είναι εφαπτόμενες.

Η μέθοδος εφαρμόζεται και για μη ολόνομους (μη ολοκληρώσιμους) περιορισμούς: $A\,dx + B\,dy + C\,dz + \dots = 0$. Αρκεί να μεγιστοποιήσουμε λύνοντας τις $f_x = \lambda A$, $f_y = \lambda B$, $f_z = \lambda C$, ...

Έστω τώρα ότι θεωρούμε το πρόβλημα μεγίστου [illegible] του $I = \int F\,dx$ υπό τον περιορισμό $J = \int G\,dx =$ σταθ. Για μεταβολή $\delta y(x)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta I &= \int \frac{\delta F}{\delta y}\,\delta y\,dx \\ \delta J &= \int \frac{\delta G}{\delta y}\,\delta y\,dx \end{aligned} \right\}$$

Για όλες τις μεταβολές $\delta y(x)$ για τις οποίες $\delta J = 0$ θέλουμε και $\delta I = 0$, οπότε το πηλίκο $\dfrac{\left[\frac{\delta F}{\delta y}\right]}{\left[\frac{\delta G}{\delta y}\right]}$ πρέπει να είναι ανεξάρτητο του x, οπότε πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το $F+\lambda G$, δηλαδή να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'} \\ G = K \end{array}\right\}$$

Σχέση με προβλήματα ιδιοτιμών.

$I = \frac{1}{2}\int_V d^3x (\vec{\nabla}\varphi)^2 \Rightarrow F = \frac{1}{2}\left[\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right]$ $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla^2\varphi = 0.$

$I = \int_a^b (pu'^2+qu^2)\,dx$ Ελαχιστοποίηση του I, υπό τον όρο: $J = \int_a^b \rho u^2 dx =$ σταθερά

Εξισώσεις: $\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial u} = 2qu - \lambda 2\rho u$, $\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial u'} = 2pu' - \lambda \cdot 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial u'}\right) = 2(pu')'$ και η εξίσωση γράφεται

$2qu - 2\lambda\rho u = 2(pu')' \Rightarrow (pu')' - qu + \lambda\rho u = 0.$ Sturm-Liouville

$\int_a^b dx\left[u(pu')' - qu^2 + \lambda\rho u^2\right] = 0 \Rightarrow \underbrace{puu'\Big|_a^b}_{u(a)=u(b)=0} - \int_a^b (pu'^2+qu^2)\,dx =$

$= -\int_a^b \lambda\rho u^2 dx \Rightarrow \lambda = \dfrac{\int_a^b (pu'^2+qu^2)\,dx}{\int_a^b \rho u^2 dx}$. Ειδικά για προβλήματα Sturm-Liouville υπάρχει ένα ελάχιστο λ_0 και καθώς $n\to\infty$, $\lambda_n \to n^2$. Άρα το ελάχιστο που $\dfrac{\int_\alpha^b dx(pu'^2+qu^2)}{\int_\alpha^b dx\,pu^2}$ θα είναι το λ_0...

Έστω ότι οι ακριβείς ιδιοσυναρτήσεις, που αντιστοιχούν στα λ_i, είναι οι u_i (κανονικοποιημένες). Εμείς, όμως, δεν τις ξέρουμε και χρησιμοποιούμε τις $u = u_0 + c_1u_1 + c_2u_2 + \dots \Longrightarrow$

$\Rightarrow (u,u) = 1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots \simeq 1$, αν η u είναι ακριβής (ως προς το u_0) σε πρώτη τάξη, ώστε τα c_k είναι μικρά. Τότε $\overset{\text{εκτίμηση του } \lambda_0}{\boxed{\bar\lambda_0}} \simeq \int_\alpha^b dx\left[p(u_0'+c_1u_1'+\dots)^2 + q(u_0+c_1u_1+\dots)^2\right]$

Αλλά $\int_\alpha^b dx(pu_i'^2+qu_i^2) = \lambda_i$ και:

$$\left.\begin{array}{l}\int_\alpha^b dx\left[(pu_i')'u_j - qu_iu_j + \lambda_i p u_i u_j\right] = 0\\ \int_\alpha^b dx\left[(pu_j')'u_i - qu_ju_i + \lambda_j p u_j u_i\right] = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_j}\right)\int_\alpha^b dx\left[pu_i'u_j'+qu_iu_j\right]$$

$$= 0 \Longrightarrow \int_\alpha^b dx\left[pu_i'u_j'+qu_iu_j\right] = 0, \lambda_i \neq \lambda_j$$

Τελικά $\bar\lambda_0 \simeq \lambda_0 + c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + \dots$, οπότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι ακριβής σε δεύτερη τάξη.

(Υπενθύμιση: θεωρία διαταραχών στην Κ. Μηχ.)

Εξ άλλου $\int_\alpha^b p u^2 dx = 1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots$, οπότε:

$$\frac{\int_\alpha^b dx[pu'^2+qu^2]}{\int_\alpha^b dx\, pu^2} = \frac{\lambda_0+\lambda_1 c_1^2+\lambda_2 c_2^2+\dots}{1+c_1^2+c_2^2+\dots} = (\lambda_0+\lambda_1 c_1^2+\lambda_2 c_2^2+\dots)(1-c_1^2-c_2^2-\dots) =$$

$= \lambda_0+\lambda_1 c_1^2+\lambda_2 c_2^2+\dots-\lambda_0 c_1^2-\lambda_0 c_2^2=\dots=\lambda_0+c_1^2(\lambda_1-\lambda_0)+c_2^2(\lambda_2-\lambda_0)+\dots$, άρα $\lambda \geqslant \lambda_0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $u=u_0$.

Παράδειγμα 1. Να εκτιμηθεί η ελάχιστη ιδιοτιμή του προβλήματος: $[u''+\lambda u=0,\ u(0)=0,\ u(1)=0]$. Φυσικά, είναι γνωστό ότι $\lambda_0=\pi^2$. Αν δοκιμάσουμε τη συνάρτηση $u=x(1-x)$, το κ

$$\frac{\int_0^1[pu'^2+qu^2]dx}{\int_0^1 \rho u^2 dx} \xrightarrow[\rho=1,\ q=0]{p=1} \frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\int_0^1(1-2x)^2dx}{\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx} =$$

$$= \frac{\int_0^1(1+4x^2-4x)dx}{\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx} = \frac{1+4\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-2\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{+\frac{2}{6}}{\frac{1}{30}} = 10 > \pi^2.$$

Η δοκιμαστική συνάρτηση πρέπει να μοιάζει κατά το δυνατόν με τη λύση και να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Μπορούμε να καλυτερέψουμε την εκτίμη

Στη γενίκευση, [illegible], $u = x(1-x) + cx^2(1-x)^2$. Τότε το πηλίκο γίνεται $K(c) = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2c}{15} + \frac{2c^2}{105}}{\frac{1}{30} + \frac{c}{70} + \frac{c^2}{630}}$, που έχει ελάχιστο στο $c_0 = 1.13$ και $K(c_0) = 9.87$. $(\pi^2 \simeq 9.87)$

Παράδειγμα 2 Ελάχιστη συχνότητα κυκλικού τυμπάνου ακτίνας a: $\nabla^2 u + k^2 u = 0 \Rightarrow k^2 \leqq \dfrac{\int (\nabla u)^2 dx\,dy}{\int u^2 dx\,dy}$. Αν $u = 1 - \frac{\rho}{a}$ θα είναι: $\vec{\nabla} u = \hat{\rho}\, u' = \hat{\rho}\left(-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow k^2 \leqq \dfrac{\int_0^a \rho\, d\rho\, 2\pi \frac{1}{a^2}}{\int_0^a \rho\, d\rho\, 2\pi \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} - 2\frac{\rho}{a}\right)} = \dfrac{\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{a^2}}{\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a^2}\frac{a^4}{4} - \frac{2}{a}\frac{a^3}{3}}$

$= \dfrac{1/2}{\frac{a^2}{12}(6+3-8)} = \dfrac{1/2}{a^2/12} = \dfrac{6}{a^2}$, ενώ το ακριβές είναι $\left(\dfrac{2.405}{a}\right)^2 \simeq \dfrac{5.78}{a^2}$.

Παράδειγμα 3 Rayleigh-Ritz: ελαχιστοποίηση του $\dfrac{\psi \cdot H\psi}{\psi \cdot \psi}$. Για τον αρμονικό ταλαντωτή $-[illegible]\psi'' + [illegible] = E\psi \Rightarrow E \leqq \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* H\psi}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \psi} =$

$= \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \left(-[illegible]\psi'' + [illegible]x^2\psi\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \psi}$. Αν $\psi = (1+[illegible]x^2)e^{-x^2[illegible]}$, βρίσκουμε ότι $E \leqq \dfrac{\frac{43\alpha^2}{64} - \frac{\alpha}{8} + \frac{5}{4}}{\frac{3\alpha^2}{16} + \frac{\alpha}{2} + 1}$, που γίνεται ελάχιστο (1.034) για $\alpha \simeq 0.67$

Επόμενη ιδιότητα: Επιβάλλαμε τη συνθήκη οι διαφορετικές συναρτήσεις να είναι ορθογώνιες στη θερμοδυναμική.

Αν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x\cdot Mx}{x\cdot x}$ ή ισοδύναμα, την $x\cdot Mx$ υπό τον όρο $\sum x_i^2=$ σταθερά, οδηγούμαστε σε εξισώσεις $Mx=\lambda x$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις Μεγιστοποίηση του

$$I[\varphi(x)]=\int_a^b dx\int_a^b dy\, \varphi(x)K(x,y)\varphi(y) \quad (K(x,y)=K(y,x))$$

με τον όρο: $\int_a^b \varphi^2(x)dx=$ σταθερά ανάγεται στη μεγιστοποίηση του

$$I[\varphi]+\lambda\int_a^b \varphi^2 dx=\int_a^b dx\left[\int_a^b dy\, K(x,y)\varphi(y)\right]\varphi(x)+\int_a^b dx\,\varphi^2(x).$$

$$~~\int dx\,dy\,\varphi K\varphi+\lambda\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\int dx\,\varphi^2~~$$

$$~~\Rightarrow 2\int dx\,dy\,K(x,y)\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(z)}\varphi(y)+2\lambda\int dx\,\varphi\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi}~~$$

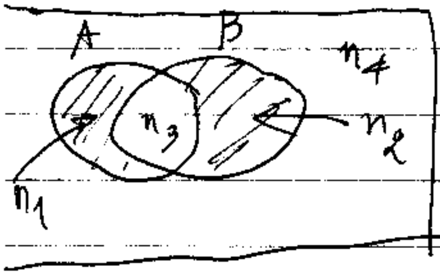
$$\int dx\,dy\,\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}[\varphi(x)K\varphi(y)]+\lambda\int dx\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\varphi^2(x)=0\Rightarrow$$

Εναλλακτικά: $\frac{\delta(\varphi K\varphi)}{\delta\varphi}+\lambda\frac{\delta(\varphi^2)}{\delta\varphi}=0$

$$\Rightarrow \cancel{2}\int dy\,K(x,y)\varphi(y)+\cancel{2}\lambda\,\varphi(x)=0.$$

Πιθανότητες και στατιστική

$\lim_{N\to\infty} \frac{N_5}{N} = p_5$ (αποστεριόρι). Ισοπίθανα: $\frac{N_5}{N} = p_5$ (απριόρι)



η ισοπίθανα αλληλοεξαιρούμενα.

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$$P(A) = \frac{n_1+n_3}{n}, \quad P(B) = \frac{n_2+n_3}{n}, \quad \ldots$$

$$P(A+B) = P(A\cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}, \quad P(AB) = P(A\cap B) = \frac{n_3}{n},$$

$$P(A|B) = \frac{n_3}{n_2+n_3}, \quad P(B|A) = \frac{n_3}{n_1+n_3}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1)$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \quad (2)$$

Παράδειγμα της (1): Πιθανότητα, αν τραβήξουμε από ένα χαρτί κάθε μία τράπουλα, να έχουμε τουλάχιστον έναν άσσο: $P(A+B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52} =$

$= \frac{2}{13} - \frac{1}{169} = \frac{25}{169}$

Παράδειγμα της (2): πιθανότητα να τραβήξουμε δύο κούπες, αν τραβήξω από την ίδια τράπουλα:

$P(\text{δύο κούπες}) = P(\text{μια κούπα}) \cdot P(\text{1 κούπα}/\text{1 κούπα}) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

Αν $P(AB)=0$ έχουμε αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα και τότε: $P(A+B) = P(A)+P(B)$.

Αν $P(AB) = P(A)P(B)$ έχουμε στατιστικώς ανεξάρτητα γεγονότα και $P(AB) = P(A)P(B|A) \Rightarrow \cancel{P(A)}P(B) = \cancel{P(A)}P(B|A) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$ και όμοια $P(A|B)=P(A)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(AB) = P(B)P(A|B) \\ P(AB) = P(A)P(B|A) \end{array}\right\} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}P(A|B)$$

$$P(C|A) = \frac{P(C)}{P(A)}P(A|C)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P(B|A)}{P(C|A)} = \frac{P(B)}{P(C)}\frac{P(A|B)}{P(A|C)}}$$ Θεώρημα του Bayes

Παράδειγμα: Θεωρούμε τρία συρτάρια που περιέχουν: το A δύο χρυσά νομίσματα, το B ένα χρυσό ένα ασημένιο και το C δύο ασημένια. Τραβάμε το πρώτο νόμισμα στην τύχη από τυχαίο συρτάρι. Αν είναι χρυσό, ποια είναι η πιθανότητα και το δεύτερο νόμισμα να είναι χρυσό;

Απάντηση, αν το D συμβολίζει το γεγονός ότι τραβάμε το πρώτο χρυσό νόμισμα, ζητάμε το $P(A|D)$.

Φανερά, $P(C|D)=0$. $\dfrac{P(A|D)}{P(B|D)} = \dfrac{P(A)\,P(D|A)}{P(B)\,P(D|B)} = \dfrac{(1/3)\cdot 1}{(1/3)\cdot 1/2} = 2$.

Εξ άλλου $P(A|D)+P(B|D)+P(C|D)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2P(B|D)+P(B|D)+\cancel{P(C|D)}^{0}=1 \Rightarrow P(B|D)=\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P(A|D)=\frac{2}{3}}$.

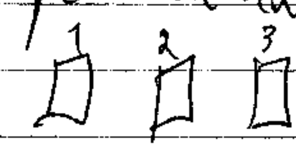
Συνδυασμοί και Διατάξεις

Διατάξεις: $n!$ Διατεταγμένα υποσύνολα m αντικειμένων από n είναι: $n(n-1)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, γιατί η πρώτη θέση μπορεί να καταληφθεί από οποιοδήποτε από τα n αντικείμενα, η δεύτερη από κάθ από τα υπόλοιπα n-1 κλπ. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, πρέπει να διαιρέσουμε επί θέσεων με m!, οπότε οι συνδυασμοί n πραγμάτων ανά m είναι: $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\binom{n}{n-m}$.

Διακεκριμένες διατάξεις $n=n_1+n_2+\cdots$ αντικειμένων είναι: $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots}$

Αν επιτρέπονται επαναλήψεις, οι συνδυασμοί n αντικειμένων ανά m είναι: $\binom{n+m-1}{m}$. Π.χ. αν $n=3$, $m=2$ οπότε είναι $\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$, θα αντιστοιχεί στους συνδυασμούς 11 12 13 22 23 33.

Για να αποδείξουμε τον τύπο, αντί να συνδυάσουμε n αντικείμενα ανά m, θεωρούμε (ισοδύναμα) ότι κατανέμουμε m ταυτόσημα αντικείμενα σε n κουτιά.

Π.χ.  είναι τρία κουτιά και χρειάζεται να βάλουμε δύο ταυτόσημες μπάλες. Τότε θα γράφουμε τα 6 ενδεχόμενα όπως σημειώσαμε.

Γενικά, γράφουμε m σταυρούς και n-1 κάθετες γραμμούλες, π.χ. xx|xxx||x σημαίνουν δύο μπάλες στο πρώτο κουτί, τρεις στο δεύτερο, καμμία στο τρίτο και μία στο τέταρτο. Για το συνολικό αριθμό Διατάξεων m (ταυτοτικών) σταυρών και n-1 (ταυτοτικών) γραμμών ο τύπος $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}$ δίνει: $\frac{[m+(n-1)]!}{m!(n-1)!} = \binom{n+m-1}{m}$.

Κατανομές

Έστω ότι κάναμε N δοκιμές, τα αποτελέσματα των οποίων μπορούν να είναι: επιτυχία (Ε) με πιθανότητα p ή αποτυχία (Α) με πιθανότητα $q=1-p$. Η πιθανότητα να έχουμε σειρά γεγονότων π.χ. $\overset{m}{\overline{ΕΑΑΕΕ\ldots Α}}$ είναι $p^m(1-p)^{N-m}$, αλλά υπάρχουν $\binom{N}{m}$ τέτοιες σειρές (συνδυασμοί N δοκιμών με m επιτυχίες). Άρα η πιθανότητα να έχουμε m επιτυχίες σε N δοκιμές είναι:

$$\boxed{P(m) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}}$$ Διωνυμική κατανομή!

Για $p = \frac{1}{2}$: $P(m) \Rightarrow \binom{N}{m}\frac{1}{2^N}$. Υπάρχουν δύο πολύ ενδιαφέρουσες οριακές θεωρήσεις αυτής της κατανομής.

1) Το όριο των "μεγάλων αριθμών" (και $p \simeq q$):

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow P(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m (1-p)^{N-m} \simeq$$

$$\simeq \frac{\sqrt{2\pi N}\,\frac{N^N}{\cancel{e^N}}}{\sqrt{2\pi m}\,\frac{m^m}{\cancel{e^m}}\sqrt{2\pi(N-m)}\,\frac{(N-m)^{N-m}}{\cancel{e^{N-m}}}} p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}}\,\frac{N^N}{m^m (N-m)^{N-m}} p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\,\frac{1}{\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{N^{m+\frac{1}{2}}}\frac{(N-m)^{N-m+\frac{1}{2}}}{N^{N-m+\frac{1}{2}}}} p^m (1-p)^{N-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\left(\frac{m}{N}\right)^{-(m+\frac{1}{2})}\left(\frac{N-m}{N}\right)^{-(N-m+\frac{1}{2})} p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\, e^{-(m+\frac{1}{2})\ln\frac{m}{N}}\, e^{-(N-m+\frac{1}{2})\ln\frac{N-m}{N}}\, e^{m\ln p}\, e^{(N-m)\ln(1-p)}$$

Περιμένουμε ότι η $P(m)$ θα έχει μέγιστο στο $m = Np$, οπότε θέτουμε $m = Np + \xi$.

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\Big[-\left(Np+\zeta+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left[p\left(1+\frac{\zeta}{pN}\right)\right] - \left(N-Np-\zeta+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left[(1-p)\left(1-\frac{\zeta}{N(1-p)}\right)\right] + (Np+\zeta)\ln p + (N-Np-\zeta)\ln(1-p)\Big]$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\Big[\cancel{-(Np+\zeta)\ln p} - \frac{1}{2}\ln p - \left(Np+\zeta+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{\zeta}{pN} - \frac{\zeta^2}{2p^2N^2}\right) - \cancel{(N-Np-\zeta)\ln(1-p)} - \frac{1}{2}\ln(1-p) + \left(N-Np-\zeta+\tfrac{1}{2}\right)\left(+\frac{\zeta}{N(1-p)} + \frac{\zeta^2}{2N^2(1-p)^2}\right) + \cancel{(Np+\zeta)\ln p} + \cancel{(N-Np-\zeta)\ln(1-p)}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\Big[-\frac{1}{2}\ln p(1-p) -$$

$$\cancel{-\zeta} + \frac{\zeta^2}{2pN} - \frac{\zeta^2}{pN} - \frac{\zeta}{2pN} + \cancel{\frac{\zeta^2}{4p^2N^2}} \cancel{\frac{\zeta}{1-p}} + \frac{\zeta^2}{2N(1-p)} - \frac{\zeta^2}{N(1-p)} + \frac{\zeta}{2N(1-p)} + \cancel{\frac{\zeta^2}{4N^2(1-p)^2}}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \exp\Big[\frac{\zeta}{2N}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{p}\right) +$$

$$+ \zeta^2\left[-\frac{1}{2pN} - \frac{1}{2(1-p)N}\right]\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \exp\left[\frac{(2p-1)\zeta}{2Np(1-p)} - \frac{\zeta^2}{2N}\frac{1}{p(1-p)}\right].$$

Αν $|(2p-1)\zeta| << |\zeta|^2 \Rightarrow \Rightarrow |p-\frac{1}{2}| << \frac{|\zeta|}{2}$. (Το ζ είναι της τάξης του σ, ώστε είναι ο όρος με το ζ αμελείται και:

$$P(m) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} e^{-\frac{\zeta^2}{2Np(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 \equiv Np(1-p)$$

$\sigma \sim \sqrt{N} \Rightarrow \frac{\sigma}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0.$

(2) Το όριο Poisson: $Np = \alpha$ (σταθερό).

Για $m << N$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{N!}{(N-m)!} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots(N-m)}(N-m+1)(\cdots)N}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdots(N-m)}} \simeq N^m$$ και $(1-p)^{N-m} =$

$$= \left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-m} \simeq \left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\alpha},$$ οπότε

$$P(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!}p^m(1-p)^{N-m} \to \frac{N^m}{m!}p^m e^{-\alpha} = \frac{(pN)^m e^{-\alpha}}{m!} =$$

$$= \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \Longrightarrow P(m) \simeq \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!}.$$ Κατανομή Poisson

Προφανώς $\sum_0^\infty P(m) = 1$. α: αναμενόμενη τιμή επιτυχ είναι πεπερασμένος αριθμός, παρά το ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται πάρα πολλές φορές.

Σπάνια γεγονότα, πχ. η πιθανότητα να περάσουν m αυτοκίνητα σε κάποιο ορισμένο χρονικό διάστημα (μία ώρα, έστω) από έρημο δρόμο (είναι πείραμα που διαρκεί ένα δευτερόλεπτο και επαναλαμβάνεται 3600 φορές με διωνυμική κατανομή)

Η μέση τιμή είναι γύρω στο m = α και το πλάτος είναι περίπου $\sqrt{\alpha}$.

Ιδιότητες κατανομών

Η έκφραση $P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$, όπου $m = Np + \xi \Rightarrow$

$\Rightarrow y = n - Np \to x - \bar{x}$ και $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$ γράφεται: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

Μέση αναμενόμενη τιμή: $<x> = \int dx\, x\, p(x)$, $<f(x)> = \int dx\, f(x) p(x)$. Για την κατανομή Gauss:

$$<x> = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\overset{\nearrow 0}{(x-\bar{x})} + \bar{x}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x-\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} = \bar{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} = \bar{x} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2\pi\sigma^2}} = \bar{x},$$

$$\underset{\text{(variance)}}{<(x-\bar{x})^2>} = \int_{-\infty}^{+\infty} d(x-\bar{x}) (x-\bar{x})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{8\sigma^6}}} =$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, t^2 e^{-\lambda t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}\right) \quad = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{8\pi}\, \sigma^{\overset{2}{\cancel{3}}} = \sigma^2 \sqrt{\frac{8\pi}{8\pi}} = \sigma^2$$

Τυπική απόκλιση $= \sqrt{\text{variance}} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma \equiv$ μισό του πλάτ της Γκαουσιανής. Παρατήρηση: $<(x-<x>)^2> = <x^2 + <x>^2 - 2x<x>> =$ $= <x^2> + <x>^2 - 2<x>^2 = <x^2> - <x$

n-οστή ροπή: $<x^n> \equiv \int dx\, x^n P(x)$. Μπορεί κα να χαρακτηρίζει μια κατανομή με τις ροπές της. Ορίζουμε τη <u>γεννήτρια συνάρτηση</u>

ως τον μετασχηματισμό Fourier της κατανομής: $\varphi(k) \equiv \int dx\, e^{ikx} p(x) = \int dx\, P(x)\big(1+ikx$

$-\frac{k^2x^2}{2!} - \frac{i}{3!}k^3x^3 + \dots\big) = 1 + ik<x> - \frac{k^2}{2}<x^2> + \dots$

$+\frac{(ik)^n}{n!}<x^n> + \dots$ Για τη Γκαουσιανή κατανομή: $\varphi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

Εκθέτης: $-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\bar{x}x+\bar{x}^2)+ikx = -\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{2\bar{x}x}{2\sigma^2} - \frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2} + ik$

$= -\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \left(\frac{\bar{x}}{\sigma^2}+ik\right)x - \frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\Big[x^2 - 2(\bar{x}+ik\sigma^2)x + (\bar{x}+ik\sigma^2)^2 - (\bar{x}+ik\sigma^2)^2 + \bar{x}^2\Big]$

$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\bar{x}+ik\sigma^2)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}+ik\sigma\right)^2 - \frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2} =$

$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\bar{x}+ik\sigma^2)\right)^2 + \cancel{\frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2}} - \frac{k^2\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}2ik\sigma\frac{\bar{x}}{\sigma} - \cancel{\frac{\bar{x}^2}{2\sigma^2}} =$

$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\bar{x}+ik\sigma^2)\right)^2 - \frac{k^2\sigma^2}{2} + ik\bar{x}$, άρα:

$\varphi(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{ik\bar{x}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\left[x-(\bar{x}+ik\sigma^2)\right] e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-(\bar{x}+ik\sigma^2)\right]^2} =$

$= \frac{1}{\cancel{\sigma\sqrt{2\pi}}}\, e^{ik\bar{x}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \sqrt{\pi\cancel{2\sigma^2}} = e^{ik\bar{x}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$. Δηλαδή μόν

τα μικρά ($k \lesssim \frac{1}{\sigma}$) είναι σημαντικά.

Θεωρούμε τώρα μιά μεταβλητή x με κατανομή p(x) και μιά μεταβλητή y με κατανομή q(y). Έστω μια τρίτη μεταβλητή $\boxed{z=f(x,y)}$. Ποιά είναι η κατανομή της z; $\langle z^n\rangle=\int dx\,dy\,[f(x,y)]^n p(x)\,q(y)$, άρα η γεννήτρια συνάρτηση της κατανομής της z είναι:

$$\boxed{\varphi(k)=\int dx\,dy\,e^{ikf(x,y)}p(x)\,q(y).}$$

Αν $f=x+y$, τότε

$$\varphi(k)=\left[\int dx\,e^{ikx}p(x)\right]\left[\int dy\,e^{iky}q(y)\right],$$

δηλαδή το γινόμενο. Γενικεύεται εύκολα σε περισσότερες μεταβλητές.

Θεωρούμε μια μεταβλητή x με κατανομή p(x) κάνουμε n μετρήσεις και παίρνουμε το μέσο όρο: $a=\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$. Θέλουμε την κατανομή P(a) ή, ισοδύναμα, $(\bar{x}=\int dx\,x\,p(x))$ την κατανομή $Q(a-\bar{x})=P(a)$ της μεταβλητής $a-\bar{x}$ που έχει μέση τιμή μηδέν.

$$\Phi(k)=\int e^{ik(a-\bar{x})}Q(a-\bar{x})\,da=\int e^{ik\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}-\frac{n\bar{x}}{n}\right)}$$

$$\cdot\,p(x_1)\,dx_1\cdots p(x_n)\,dx_n=$$

$$= \int e^{\frac{ik}{n}[(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x})]} p(x_1)\,dx_1\dots p(x_n)\,dx_n =$$

$$= \int dx_1\, p(x_1)\, e^{\frac{ik}{n}(x_1-\bar{x})} \int dx_2\, p(x_2)\, e^{\frac{ik}{n}(x_2-\bar{x})} \dots \int dx_n\, p(x_n)\, e^{\frac{ik}{n}(x_n-\bar{x})} =$$

$= \left[\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n$, όπου $\varphi(k) = \int dx\, p(x)\, e^{ik(x-\bar{x})} = \int dx\, p(x)\left(1+ik(x-\bar{x}) - \frac{k^2}{2}(x-\bar{x})^2+\dots\right) = 1+ik\cdot\cancelto{0}{(\bar{x}-\bar{x})} - \frac{k^2}{2}\sigma^2+\dots$, όπου τα $\bar{x}$ και σ έχουν οριστεί από την αρχή ως η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής x. Άρα

$$\Phi(k) = \left[\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n \approx \left[1-\frac{k^2\sigma^2}{2n^2}\right]^n = \left[1-\frac{\frac{k^2\sigma^2}{2n}}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2n}} =$$

$$= \int da\, e^{ik(a-\bar{x})}\, Q(a-\bar{x}) \Rightarrow \int e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2n}}\, e^{-ik(a'-\bar{x})}\, dk =$$

$$= \int da\, dk\, e^{ik[(a-\bar{x})-(a'-\bar{x})]}\, Q(a-\bar{x}) \Rightarrow \int e^{-\frac{\sigma^2}{2n}\left(k^2+\frac{i(a'-\bar{x})2n}{\sigma^2}k\right)}\, dk =$$

$$= 2\pi\, Q(a'-\bar{x}) \Rightarrow Q(a-\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-\frac{\sigma^2}{2n}\left[k^2+2\frac{in(a-\bar{x})}{\sigma^2}k-\frac{n^2(a-\bar{x})^2}{\sigma^4}+\frac{n^2(a-\bar{x})^2}{\sigma^4}\right]} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma^2}{2n}}}\, e^{-\frac{\sigma^2}{2n}\frac{n^2(a-\bar{x})^2}{\sigma^4}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi n}{\sigma^2}}\, e^{-\frac{n(a-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \Longrightarrow$$

central limit theorem

$$\Rightarrow \boxed{Q(a-\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n}{2}\frac{(a-\bar{x})^2}{\sigma^2}}}$$

Ο μέσος όρος μεγάλου αριθμού μετρήσεων της μεταβλητής x είναι Γκαουσιανός, με μέσο όρο $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, όπου σ η τυπική απόκλιση για μια μέτρηση.

Πολυμεταβλητές κατανομές (Γκαουσιανές).

$(\langle x_\ell \rangle = 0)$

$p(x_1,x_2,\dots,x_n) = \mathcal{N}\exp\left[-\sum \alpha_{ij} x_i x_j\right] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \varphi(k_1,k_2,\dots,k_n) = \int dx_1\dots dx_n\, p(x_1,\dots,x_n)\, e^{+i\sum_1^n k_\ell x_\ell} = e^{-\sum b_{ij}k_ik_j}$

$\left(\varphi(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}\right)$. $\langle x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}\dots x_n^{\mu_n}\rangle = (-i)^{\mu_1+\dots+\mu_n}\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n}\varphi(k_1,\dots,k_n)}{\partial k_1^{\mu_1}\dots\partial k_n^{\mu_n}}\Big|_{k}$

Π.χ. $\langle x_i^2\rangle = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial k_i^2}(0,\dots,0) = 2b_{ii}$, $\langle x_ix_j\rangle = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial k_i\partial k_j}(0,\dots,0) = b_{ij}$.

Έστω $\varphi(k_1,k_2) = e^{-\alpha k_1^2 - b k_1k_2 - ck_2^2}$. Αν $b=0$, δηλαδή $\langle x_1x_2\rangle = 0$ (ασυσχέτιστες μεταβλητές), $\varphi(k_1,k_2)=\varphi_1(k_1)\varphi_2(k_2)$ $\Rightarrow p(x_1,x_2)=p_1(x_1)p_2(x_2)$. (στατιστικά ανεξάρτητες).

Θόρυβος: $f[I(t)]$, $g[I(t),I(t')]$ για γκαουσιανές κατανομές, $f[I(t)]$ ανεξάρτητη του χρόνου, $g[I(t),I(t')]$ εξαρτάται μόνο από το $t-t'$ και $\langle I(t)\rangle=0$. (Παίρνουμε μέσους όρους σε μεγάλα χρονικά διαστήματα T. Αυτά είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Αν ολοκληρώναμε από $-\infty$ μέχρι $+\infty$, η υπόθεση δεν έχει νόημα μια και ο χρόνος ολοκληρώνεται).

Χαρακτηριστικά μεγέθη: Μέσο τετράγωνο $<I^2(t)>$ και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho(\tau)\equiv<I(t)I(t+\tau)>$, και τα δύο ανεξάρτητα του χρόνου. Αν δίνεται το $\rho(\tau)$ $(P=\rho(0))$, η διαδικασία είναι πλήρως ορισμένη. Έστω $x\equiv I(t)$, $y\equiv I(t+\tau_1)$, $z\equiv I(t+\tau_2)$.

$$p(x,y,z)\to\varphi(k,l,m)=\exp[-ak^2-bl^2-cm^2-dkl-ekm-flm]$$

Οι σταθερές a,b,c,d,e,f μπορούν να υπολογιστούν αν ξέρουμε τα $\rho(\tau)$ και P: $a=\frac{1}{2}<x^2>=\frac{1}{2}P=b=c$, $d=<xy>=\rho(\tau_1)$, $e=\rho(\tau_2)$, $f=\rho(\tau_2-\tau_1)$. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του I^2: $R(\tau)\equiv<I^2(t)I^2(t+\tau)>$. Ξέρουμε ότι

$$\varphi(k,l)=\exp\left[-\frac{P}{2}k^2-\frac{P}{2}l^2-\rho(\tau)kl\right].$$ Τότε: $\overline{E}$

$$R(\tau)=\left.\frac{\partial^4\varphi}{\partial k^2\partial l^2}\right|_{k=l=0}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial l}=-[Pl+\rho(\tau)k]\,e^{-\frac{P}{2}k^2-\frac{P}{2}l^2-\rho kl}$$

$$\rightsquigarrow\frac{\partial^2\varphi}{\partial l^2}=-Pe^E+(Pl+\rho k)^2e^E\to\frac{\partial^3\varphi}{\partial k\partial l^2}=+P(Pl+\rho k)e^E+2(Pl+\rho k)\rho e$$

$$+(Pl+\rho k)^2(Pk+\rho l)e^E\to\frac{\partial^4\varphi}{\partial k^2\partial l^2}=P^2e^E+P(\text{[illegible]})(Pk+\rho l)^2e^E+$$

$$+\cancel{2\rho(Pl+\rho k)}(Pk+\rho l)e^E+2\rho^2e^E+(Pl+\rho k)^2(Pk+\rho l)^2e^E+2\rho(Pl+\rho k)(Pk+\rho l)e^E$$

$$+P(Pl+\rho k)^2e^E$$

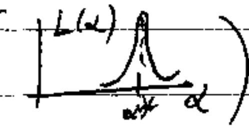
$$\cancel{\frac{\partial^4 R}{\partial k^2 \partial l^2}\Big|_{k=l=0} = P^2 - 2\rho^2} \quad \frac{\partial^4 \rho}{\partial^2 k \partial l^2} = (P^2+2\rho^2)e^{E} - P(lP+k\rho)^2 e^{E} -$$

$$- P(kP+l\rho)^2 e^{E} - 4\rho(lP+k\rho)(kP+l\rho)e^{E} + (lP+k\rho)^2(kP+l\rho)^2 e^{E}$$

$$\Rightarrow R(\tau) = P^2 + 2\rho^2(\tau).$$

Επεξεργασία πειραματικών δεδομένων

A, B: εναλλακτικές θεωρίες. Π: πειραματικό αποτέλεσμα.

Bayes: $\frac{P(A|\Pi)}{P(B|\Pi)} = \frac{P(A)P(\Pi|A)}{P(B)P(\Pi|B)}$. Συνήθως υποθέτουμε ότι $P(A)=P(B)$, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το πηλίκο $\frac{P(\Pi|A)}{P(\Pi|B)}$. Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε μια σταθερά α. Αν η πιθανότητα να πάρουμε το αποτέλεσμα α με μιά συγκεκριμένη πειραματική [illegible] διαδικασία είναι L(α), βρίσκουμε το μέγιστο της L(α) (έστω στη θέση $\alpha=\alpha^*$). Πιθανόν να έχουμε "καλό" () ή "μέτριο" () πείραμα. Το L(α) "ιδανικά" πρέπει να είναι συνάρτηση δέλτα. Το ίδιο δεν είναι συνδέεται με το ότι υπάρχει συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία. Αν το $L(\alpha)$ είναι κεντρωμένο στο $\alpha=\alpha^*$, ορίζουμε το σφάλμα ως

$$\Delta\alpha=\left[\frac{\int(\alpha-\alpha^*)^2L(\alpha)d\alpha}{\int L(\alpha)d\alpha}\right]^{1/2}.$$

Αν $L(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\alpha-\alpha^*)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow$ $\left(\frac{d}{d\alpha}\ln L(\alpha)\Big|_{\alpha^*}=-\frac{\alpha-\alpha^*}{\sigma^2}\Big|_{\alpha^*}=0\right)$

$$\Rightarrow\left(\int dt\, t^2e^{-\lambda t^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}\right)\Rightarrow\int d\alpha(\alpha-\alpha^*)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\alpha-\alpha^*)^2}{2\sigma^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{2}\sqrt{\pi 8\sigma^6}=\frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}\sigma}\cancel{2\sqrt{2}}\sigma^3=\sigma^2\Rightarrow\Delta\alpha=\left[\frac{\sigma^2}{1}\right]^{1/2}=\sigma=$$
$$=-\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}\ln L(\alpha)\right]^{-1/2}.$$

<u>Παράδειγμα 1</u> Έστω ότι θέλουμε το χρόνο ημιζωής τ ενός ασταθούς σωματιδίου, για το οποίο $p(t)dt=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}dt$ και έχουμε μετρήσει τους χρόνους ζωής $t_1, t_2, \dots, t_n$. Πιθανοφάνεια: $L(\tau)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t_1}{\tau}}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t_2}{\tau}}\cdots\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t_n}{\tau}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln L(\tau)=\ln\frac{1}{\tau^n}-\frac{1}{\tau}\sum_1^n t_i=-n\ln\tau-\frac{1}{\tau}\sum_1^n t_i$$

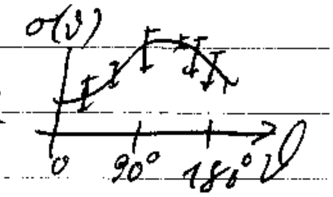
$$\frac{d\ln L(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau_*}=0\Rightarrow-\frac{n}{\tau_*}+\frac{1}{\tau_*^2}\sum_1^n t_i=0\Rightarrow\tau_*=\frac{1}{n}\sum_1^n t_i.$$

Αν έχουμε αρκετές μετρήσεις, ώστε η $L(\tau)$ να μπορεί να θεωρηθεί γκαουσιανή, έχει νόημα να υπολογίσουμε το σφάλμα: $\Delta\tau = \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} \ln L(\tau)\right]^{-1/2} =$

$$= \left[-\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{n}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\sum_1^n t_i\right)\right]^{-1/2} = \left[-\frac{n}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3}\sum_1^n t_i\right]^{-1/2}.$$

Για $\tau = \tau_*$: $\Delta\tau = \left[-\frac{n}{\tau_*^2} + \frac{2}{\tau_*^3}\sum_1^n t_i\right]^{-1/2} = \left[-\frac{n}{\tau_*^2} + \frac{2}{\tau_*^3} n\tau_*\right]^{-1/2} =$

$$= \left[\frac{n}{\tau_*^2}\right]^{-1/2} = \frac{\tau_*}{\sqrt{n}}.$$



Παράδειγμα 2. Θεωρούμε ότι τα δεδομένα μπορούν να εκφραστούν με τη σχέση $\sigma(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\cos\theta + \alpha_2\cos^2\theta + \alpha_3\cos^3\theta$, και θέλουμε να βρούμε τα α_i. Γενικότερα, μια τέτοια σχέση τη συμβολίζουμε με $f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Θεωρούμε ότι οι αβεβαιότητες των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι γκαουσιανές, οπότε

$$L(\alpha_1, \dots, \underset{\text{αριθμός παραμέτρων}}{\alpha_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma_1 \dots \sigma_N} e^{-\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - f_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$\boxed{N: \text{αριθμός πειραματικών σημείων}}$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το L, δηλαδή να ελαχιστοποιήσουμε τον εκθέτη $\frac{1}{2}\chi^2(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - f_i)^2}{2\sigma_i^2}$.

Παραγωγίζουμε: $\boxed{-\sum_{i=1}^{N}\frac{2(x_i-\xi_i)}{\sigma_i^2}\frac{\partial\xi_i}{\partial\alpha_k}=0,\ k=1,\dots,n}$

Έστω $\xi_i=\sum_{k=1}^{n}\underset{\substack{i=1,\dots,N\\k=1,\dots,n}}{C_{ik}}\alpha_k\Rightarrow\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}C_{ik}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\xi_i}{\sigma_i^2}\frac{\partial\xi_i}{\partial\alpha_k}=$

$=\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum_{l=1}^{n}C_{il}\alpha_l}{\sigma_i^2}C_{ik}\Rightarrow\sum_{i=1}^{N}\frac{C_{ik}}{\sigma_i^2}x_i=\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}\frac{C_{ik}C_{il}}{\sigma_i^2}\alpha_l\Rightarrow$

$\Rightarrow\sum_{i,l}\frac{C_{ik}C_{il}}{\sigma_i^2}\alpha_l=\sum_{i=1}^{N}\frac{C_{ik}}{\sigma_i^2}x_i\Rightarrow\sum_{l=1}^{n}M_{kl}\alpha_l=X_k$, όπου

$M_{kl}=M_{lk}=\sum_{i=1}^{N}\frac{C_{ik}C_{il}}{\sigma_i^2}$, $X_k=\sum_{i=1}^{N}\frac{C_{ik}}{\sigma_i^2}x_i$. Άρα $M\alpha=X\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{\alpha=M^{-1}X}$ Σφάλματα:

$\alpha-\bar\alpha=M^{-1}(X-\bar X)\Rightarrow\alpha_k-\bar\alpha_k=\sum_{l}(M^{-1})_{kk'}(X_{k'}-\bar X_{k'})=$

$=\sum_{l,i}(M^{-1})_{kk'}\frac{C_{ik'}}{\sigma_i^2}(x_i-\bar x_i)$ Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή: $\langle(x_i-\bar x_i)(x_j-\bar x_j)\rangle$

Άρα: $\langle(\alpha_k-\bar\alpha_k)(\alpha_l-\bar\alpha_l)\rangle=\sum_{k',l',i,j}(M^{-1})_{kk'}\frac{C_{ik'}}{\sigma_i^2}(M^{-1})_{ll'}\frac{C_{jl'}}{\sigma_j^2}$

$\cdot\langle(x_i-\bar x_i)(x_j-\bar x_j)\rangle=\sum_{k',l',i,j}(M^{-1})_{kk'}\frac{C_{ik'}}{\cancel{\sigma_i^2}}(M^{-1})_{ll'}\frac{C_{jl'}}{\sigma_j^2}\cancel{\sigma_i^2}\delta_{ij}=$

$=\sum_{k',l'}(M^{-1})_{kk'}(M^{-1})_{ll'}\sum_i\frac{C_{il'}C_{ik'}}{\sigma_i^2}=\sum_{k',l'}(M^{-1})_{kk'}M_{k'l'}(M^{-1})_{l'l}$

$=(M^{-1})_{kl}\Rightarrow\Delta\alpha_m=\langle(\alpha_m-\bar\alpha_m)^2\rangle^{1/2}=\sqrt{(M^{-1})_{mm}}$

Οι παράμετροι α_m ΔΕΝ είναι στατιστικώς ανεξάρτητες!

Παράδειγμα 3 Να βρεθεί το σφάλμα του $z = \alpha_1 + 2\alpha_2$. Από τους ορισμούς: $\langle (z-\bar{z})^2 \rangle =$

$$= \langle (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + 2(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2))^2 \rangle = \langle (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^2 \rangle + 4 \langle (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^2 \rangle +$$

$$+ 4 \langle (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) \rangle = (M^{-1})_{11} + 4 (M^{-1})_{22} + 4 (M^{-1})_{12} .$$

Κριτήριο καλής προσαρμογής: χ^2.

Έστω $\bar{x}_k$ η αληθινή τιμή του x_k. Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε τα x_k σ' ένα διάστημα dx_k το καθένα είναι:

$$P(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} e^{-\frac{(x_k - \bar{x}_k)^2}{2\sigma_k^2}} dx_k = \left(q_k = \frac{x_k - \bar{x}_k}{\sigma_k} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma_k}} e^{-\frac{q_k^2}{2}} \cancel{\sigma_k}\, d q_k = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^N q_k^2}}_{Q(q_k)} dq_1 \cdots dq_N .$$

Το Q εξαρτάται από το $\chi^2 \equiv \sum_{k=1}^{N} q_k^2$ του οποίου η κατανομή πιθανότητας είναι:

για λόγους συμμετρίας

$$F(\chi^2)\, d\chi^2 = \int_{\substack{\text{φλοιός} \\ \chi, \chi + d\chi}} Q(q_k)\, dq_1 \cdots dq_N = \int 2C e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{N-1} d\chi$$

Το C προσδιορίζεται από την κανονικοποίηση:

$$\langle \chi^2 \rangle = \int_0^\infty F(\chi^2)\chi^2 d\chi^2 = C\int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{N-2}\chi^2 d\chi^2 \overset{t=\frac{\chi^2}{2}}{=\!=}$$

$$= C\int_0^\infty e^{-t} (2t)^{N/2}\, 2\, dt =$$

$$= C\, 2^{\frac{N}{2}+1} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\left(\frac{N}{2}+1\right)-1} dt = C\, 2^{\frac{N}{2}+1}\, \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{2^{\frac{N}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{2^{\frac{N}{2}}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{N}{2}+1}}{2^{\frac{N}{2}}} \frac{\frac{N}{2}\cancel{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}} = N \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \underline{\dfrac{\langle \chi^2 \rangle}{N}} = 1$ (χ^2 ανά βαθμό ελευθερία

$$\int_0^\infty F(\chi^2)\,d\chi^2=1 \Rightarrow c\int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}}\chi^{N-2}\,2\chi\,d\chi=1 \xRightarrow{z=\chi^2}$$

$$\Rightarrow c\int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{N-2}{2}}\,dz=1.$$ Αλλά $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt$,

οπότε $\left(\frac{z}{2}=t\right)$: $c\int_0^\infty e^{-t}(2t)^{\frac{N}{2}-1}\,2\,dt=1 \Rightarrow 2^{\frac{N}{2}}c\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{N}{2}-1}dt=1 \Rightarrow 2^{\frac{N}{2}}c\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$. Τελικά:

$$\boxed{F(\chi^2)\,d\chi^2=\frac{1}{2^{N/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\,e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left(\chi^2\right)^{\frac{N}{2}-1}d\chi^2}$$ Κατανομή του χ^2 για N βαθμούς ελευθερ.

Η πιθανότητα το χ^2 να είναι μεγαλύτερο από την τιμή που βρίσκουμε χ_0^2 για κάποιο πειραματικό μέγεθος θα είναι: $\boxed{P_N(\chi^2>\chi_0^2)=\int_{\chi_0^2}^\infty F(\chi^2)\,d\chi^2}$

Η προσαρμογή είναι καλή, αν αυτή η πιθανότητα είναι αρκετά μεγάλη.

Παρατηρήσεις: (A) Στην πραγματικότητα αντί των α_k χρησιμοποιούμε τα α_k^* και υπολογίζουμε τα σφάλματα.

(B) Οι βαθμοί ελευθερίας δεν είναι N, αλλά $N'=N-n$.