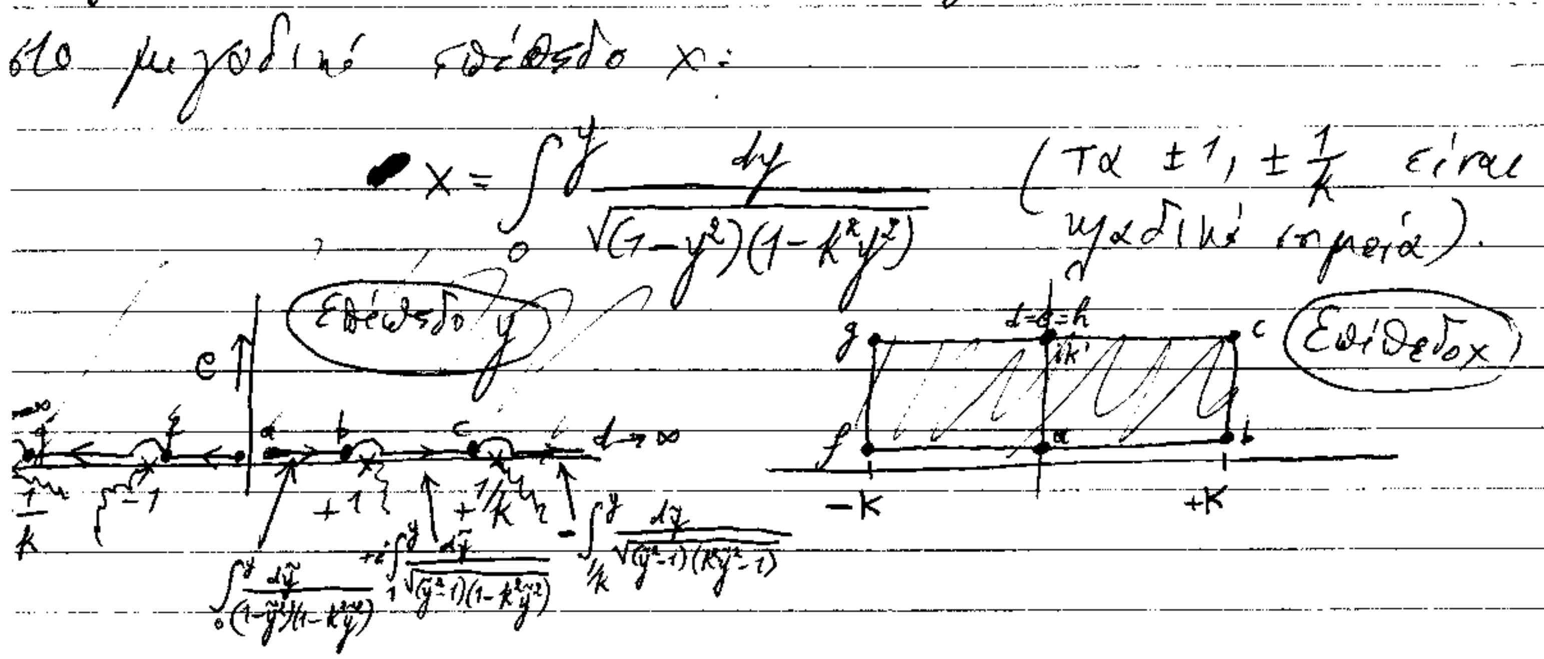
Η συνάρτηση $\mathrm{sn}(x)$ είναι περιοδική και η περίοδός της είναι: $P = 2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 4\int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 4K(k)$ πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους.

Στην πραγματικότητα είναι διπλά περιοδική συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $=\mathrm{sn}(y)$ ως απεικόνιση από το μιγαδικό επίπεδο y στο μιγαδικό επίπεδο x:

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$ (Τα $\pm 1, \pm\frac{1}{k}$ είναι ιδιάζοντα σημεία).



Παρατηρήσεις: Καθώς $y \to b$, $x \to \int_0^1 \frac{d\tilde y}{\sqrt{(1-\tilde y^2)(1-k^2\tilde y^2)}} = K(k)$. Στο δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα: $x = K(k) + i\int_1^y \frac{d\tilde y}{\sqrt{(\tilde y^2-1)(1-k^2\tilde y^2)}}$. Όταν $y = \frac{1}{k}$, το φανταστικό μέρος θα γίνει $K' = \int_1^{1/k} \frac{d\tilde y}{\sqrt{(\tilde y^2-1)(1-k^2\tilde y^2)}}$. Αν θέσουμε $z^2 = \frac{1-k^2\tilde y^2}{1-k^2} \Rightarrow 2z\,dz = \frac{-2k^2\tilde y}{1-k^2}d\tilde y \Rightarrow d\tilde y = -\frac{(1-k^2)z\,dz}{k^2\tilde y}$

$k^2\tilde y^2 = (1-k^2)z^2 \Rightarrow \tilde y^2 = -\frac{1}{k^2}\left[(1-k^2)z^2 - 1\right] \Rightarrow \tilde y^2 - 1 = \frac{1}{k^2}\left[-(1-k^2)z^2 + 1 - k^2\right] =$

$= \frac{1-k^2}{k^2}(1-z^2)$, οπότε $K'(k) = \int_{z=1}^{0} \frac{-\frac{(1-k^2)z\,dz}{k^2\tilde y}}{\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}(1-z^2)\left[(1-k^2)z^2\right]}} =$

$$= \int_0^1 \frac{k(\cancel{1-k^2})\cancel{z}\,dz}{(\cancel{1-k^2})\cancel{z}\sqrt{1-z^2}\,\tilde{y}k^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{k^2}(1-(1-k^2)z^2)}\,\sqrt{1-z^2}\,k} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-(1-k^2)z^2)}} =$$

$= K(\sqrt{1-k^2})$. Αν το y κινήσει στο τρίτο ευθύγραμμο τμήμα: $x = K + iK' - \int_{1/k}^{\tilde y} \frac{d\tilde y}{\sqrt{(\tilde y^2-1)(k^2\tilde y^2-1)}}$, δηλαδή το ~~φανταστικό~~ πραγματικό μέρος μειώνεται μέχρι την τιμή $K - \int_{1/k}^{\infty} \frac{d\tilde y}{\sqrt{(\tilde y^2-1)(k^2\tilde y^2-1)}} =$

$$\underset{d\tilde y = -\frac{dz}{kz^2}}{\overset{\tilde y = \frac{1}{kz}}{=}} K - \int_1^0 \frac{-\frac{dz}{kz^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2z^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}} = K - \int_0^1 \frac{dz}{kz^2\,\frac{1}{kz}\,\frac{1}{z}\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}} = K - K = 0,$$

ώστε στο $y=\infty$ μένει μόνο το φανταστικό μέρος, $x = iK' = iK(\sqrt{1-k^2})$. Στη συνέχεια ξεκινάμε από την αρχή και θα κινηθούμε κατά το φανταστικό άξονα των y. Στο $y = i\infty$ βρίσκουμε: $x = \int_0^{i\infty} \frac{d\tilde y}{\sqrt{(1-\tilde y^2)(1-k^2\tilde y^2)}} \overset{\tilde y = it}{=} \int_0^{\infty} \frac{i\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$

Αν θέσουμε $z^2 = \frac{1+t^2}{1+k^2t^2} \Rightarrow z^2 + k^2z^2t^2 = 1+t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{z^2-1}{1-k^2z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+t^2 = \frac{1-k^2z^2+z^2-1}{1-k^2z^2} = \frac{z^2(1-k^2)}{1-k^2z^2}$, $2t\,dt = \frac{2z(1-k^2z^2)-(-2k^2z)(z^2-1)}{(1-k^2z^2)^2}dz$

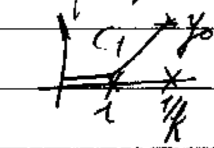
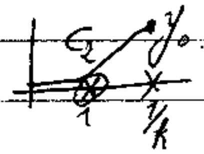
$= \frac{z - \cancel{k^2z^3} + \cancel{k^2z^3} - k^2z}{(1-k^2z^2)^2}dz = \frac{(1-k^2)z\,dz}{(1-k^2z^2)^2} \Rightarrow dt = \frac{(1-k^2)z}{t(1-k^2z^2)^2}dz$,

$1+k^2t^2 = 1 + \frac{k^2z^2-k^2}{1-k^2z^2} = \frac{1-\cancel{k^2z^2}+\cancel{k^2z^2}-k^2}{1-k^2z^2} = \frac{1-k^2}{1-k^2z^2}$.

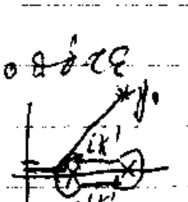
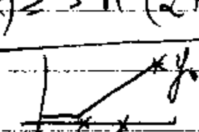
Αντικαθιστώντας: $\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} = \int_1^{1/k} \frac{\frac{(1-k^2)z\,dz}{t(1-k^2z^2)^2}}{\sqrt{\frac{z^2(1-k^2)}{1-k^2z^2}\,\frac{(1-k^2)}{1-k^2z^2}}} =$

$$= \int_1^{1/k} \frac{z\,dz}{tz(1-k^2z^2)} = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2-1}{1-k^2z^2}}\,(1-k^2z^2)} = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

οπότε $x = iK'(k) = iK(\sqrt{1-k^2})$. Τέλος, αν ξεκινήσουμε από την αρχή των αξόνων και πάμε προς τον αρνητικό ημιάξονα, το x θα ξεκινάει από το μηδέν, γίνεται $-K$ για $y=-1$, γίνεται $-K+iK'$ για $y=-1/k$ και καταλήγει στο iK' όταν φτάσουμε στο $y=h=-\infty$. Συνολικά, λοιπόν, το πάνω ημιεπίπεδο y απεικονίζεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου στο επίπεδο x και το περίγραμμα στο περίγραμμα.

<u>Περιοδικότητα</u>: Θεωρούμε τις δύο διαδρομές από την αρχή των αξόνων ως το σημείο y_0:  

Μπορούμε να δούμε ότι $\underbrace{\int_{C_2}^{y_0}}_{x} = 2K - \underbrace{\int_{C_1}^{y_0}}_{x}$. Αφού οι διαδρομές καταλήγουν στο ίδιο σημείο y_0, βρίσκουμε ότι $y_0 = \mathrm{sn}\,x$ από την C_1 και $y_0 = \mathrm{sn}(2K-x)$ από την C_2, οπότε $\boxed{\mathrm{sn}(x) = \mathrm{sn}(2K-x)}$. Εξ άλλου, οι διαδρομές

 και  δίνουν: $\int_{C_4}^{y_0} + 2iK' = \int_{C_3}^{y_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0 = \begin{cases} \mathrm{sn}(x+2iK') \\ \mathrm{sn}(x) \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\mathrm{sn}(x+2iK') = \mathrm{sn}(x)}$$

Επίσης ορισμοί: $\begin{cases} cn\,x = \sqrt{1-sn^2 x}, & cn\,0 = 1 \\ dn\,x = \sqrt{1-k^2 sn^2 x}, & dn\,0 = 1 \end{cases}$

Αν $y = sn\,x$, τότε $\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} \Longrightarrow$

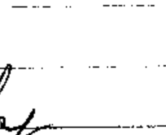
$$\Longrightarrow \frac{d\,sn\,x}{dx} = cn\,x\,dn\,x$$

ΜΔΕ

Ομογενής, αν η Ly είναι το ίδιο σχήμα με των y. Μη ομογενής $\begin{matrix}\nearrow \text{ΔΕ} \\ \searrow \text{Ο.Σ.}\end{matrix}$

Οριακές συνθήκες: Dirichlet, Neumann, Cauchy.

Ας θεωρήσουμε ότι η καμπύλη στην οποία επιβάλλονται οι Ο.Σ. είναι η $(x(s), y(s))$. Το διάνυσμα $\hat{t}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ είναι εφαπτόμενο μοναδιαίο, ενώ το $\hat{n} \equiv \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right)$ είναι κάθετο μοναδιαίο:



Η κάθετη παράγωγος είναι: $N(s) \equiv \vec{\nabla}\Psi \cdot \hat{n} =$

$$= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dx}{ds}.$$

Επίσης $\frac{d\Psi(s)}{ds} = \frac{d\Psi}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{d\Psi}{dy}\frac{dy}{ds}$, οπότε το σύστημα μπορεί να λυθεί.

Έστω ότι δίνονται τα $\Psi(s)$, $N(s)$.

V5

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dy}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{dx}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= N(s) \\ \frac{dx}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{dy}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{d\psi}{ds} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} N(s) & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d\psi}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} -\frac{dy}{ds} & N(s) \\ \frac{dx}{ds} & \frac{d\psi}{ds} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}} \end{aligned}\right.$$

Δηλαδή:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{1}{-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\left[N(s)\frac{dy}{ds}-\frac{d\psi}{ds}\frac{dx}{ds}\right] = -N(s)\frac{dy}{ds}+\frac{d\psi}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{1}{-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\left[-\frac{dy}{ds}\frac{d\psi}{ds}-N(s)\frac{dx}{ds}\right] = \frac{d\psi}{ds}\frac{dy}{ds}+N(s)\frac{dx}{ds}. \end{aligned}\right.$$

Εμφανίζεται όμως πρόβλημα με τον υπολογισμό των δεύτερων παραγώγων. Παραγωγίζοντας τις εκφράσεις $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ και $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ κατά μήκος του συνόρου βρίσκουμε:

$$\cancel{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{dN(s)}{ds}\frac{dy}{ds}-N(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2\psi}{ds^2}\frac{dx}{ds}+\frac{d\psi}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}.$$

Τα αριστερά μέλη είναι γνωστές ~~ποσότητες~~. Θέλουμε και μια τρίτη εξίσωση, που είναι η ίδια η ΜΔΕ, δηλαδή η $A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$:

Το σύστημα έχει λύση εκτός αν $\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 2B\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + C\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$. Οι δύο λύσεις (του $\frac{dy}{ds}$ συναρτήσει του $\frac{dx}{ds}$) δηλ. αλλιώς του dy συναρτήσει του dx) καθορίζουν δύο χαρακτηριστικές διευθύνσεις στο επίπεδο xy σε κάθε σημείο. Αν αυτές ταυτίζονται με αυτές που ορίζονται από τα $x(s), y(s)$ έχουμε πρόβλημα. Καμπύλες που σε κάθε σημείο τους οι εφαπτόμενες συμπίπτουν με τις χαρακτηριστικές διευθύνσεις λέγονται χαρακτηριστικές της Δ.Ε. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι οι δεύτερες παράγωγοι μπορούν να προσδιοριστούν, εκτός αν το σύνορο εφάπτεται κάπου σε μια χαρακτηριστική της Δ.Ε. Η ανάλυση για την εύρεση των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι η ίδια μ' αυτήν που μόλις διεξήγαμε. Άρα οι Σ.Σ. Cauchy προσδιορίζουν τη λύση αν το σύνορο δεν εφάπτεται πουθενά σε χαρακτηριστικές. Γίνονται ενδιαφέρουσες μαθηματικές καμπύλες οι χαρακτηριστικές όταν $B^2 > AC$: υπερβολικές εξισώσεις (ωραίες!).

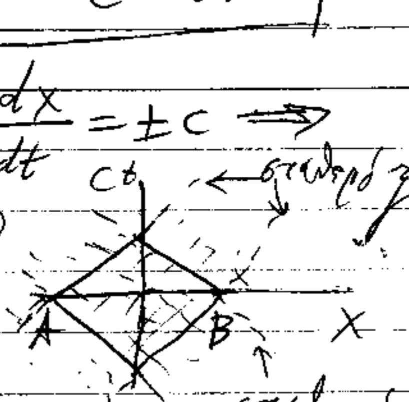
(διάχυση, Schrödinger)

Εξισώσεις με $B^2=AC$ λέγονται παραβολικές, ενώ αν $B^2<AC$, ελλειπτικές (Laplace).

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση: $\boxed{\psi_{xx}-\frac{1}{c^2}\psi_{tt}=0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} A=1 \\ B=0 \\ C=-\frac{1}{c^2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\pm c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x=ct+\xi \\ x=-ct+\eta \end{Bmatrix} \text{σταθερές} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x-ct=\xi \\ x+ct=\eta \end{Bmatrix}$$



Αν θεωρήσουμε τα ξ και η ως ανεξάρτητες, θα ισχύει: $\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=-c\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+c\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-c\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(-c\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(c\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(c\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}$$

Άρα η $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ γίνεται $\cancel{\psi_{\xi\xi}}+2\psi_{\xi\eta}+\cancel{\psi_{\eta\eta}}=\cancel{\psi_{\xi\xi}}-2\psi_{\xi\eta}+\cancel{\psi_{\eta\eta}}$

$\Rightarrow \boxed{\psi_{\xi\eta}=0} \Rightarrow \boxed{\psi=f(\xi)+g(\eta)}$. Αν ξέρουμε το $\psi(x)$ και το $N(x)=\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ κατά μήκος του AB, ξέρουμε επίσης, ότι $\begin{cases} \Psi|_{t=0} = f(x)+g(x) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = -f'(x)+g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\Psi(x) - \frac{1}{2c}\int\frac{\partial\Psi}{\partial t}dx \\ g(x) = \frac{1}{2}\Psi(x) + \frac{1}{2c}\int\frac{\partial\Psi}{\partial t}dx \end{cases}$

Η $f(x)$ προσδιορίζει το $f(\xi)$ κατά μήκος των χαρακτηριστικών με σταθερό ξ που τέμνουν το AB και παρόμοια για την $g(x)$. Άρα, το πεδίο, όπου είναι γνωστή η λύση είναι το τετράπλευρο που είναι η τομή των γνωστών χαρακτηριστικών. Οι κατάλληλες ΟΣ για τα τρία είδη ΔΕ αναγράφονται ως εξής:

Μ.Δ.Ε.	Ο.Σ.	Σύνορο
Υπερβολική	Cauchy	Ανοιχτό
Παραβολική	Dirichlet/Neumann	Ανοιχτό
Ελλειπτική	Dirichlet/Neumann	Κλειστό

Χωρισμός μεταβλητών.

$$\left[\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0,\ \Psi = X(\vec{x})T(t)\right] \Rightarrow \frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}T'' = -k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 X + k^2 X = 0 \quad \text{Helmholtz} \\ T'' + \underbrace{k^2 c^2}_{\omega^2} T = 0 \Rightarrow T = \left\{ \begin{matrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{matrix} \text{ ή } e^{\pm i\omega t} \right\}. \end{cases}$$

$$\nabla^2 X + k^2 X = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\cdot$$

$\cdot X + k^2 X = 0$, θέτουμε $X = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$ και διαιρούμε με $R\Theta\Phi$, οπότε:

$$\frac{1}{r^2 R}(r^2 R')' + \frac{1}{r^2\Theta\sin\vartheta}(\sin\vartheta\,\Theta')' + \frac{1}{r^2\Phi\sin^2\vartheta}\underbrace{\Phi''}_{\to -m^2} + k^2 = 0$$

$\Phi = \begin{Bmatrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$ ή $e^{\pm im\varphi}$. Η υπόλοιπη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{R}(r^2R')' + \underbrace{\frac{1}{\sin\vartheta\,\Theta}(\sin\vartheta\,\Theta')' - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}}_{-l(l+1)\Theta} + k^2 r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r^2}(r^2R')' + \left[k^2 - \dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0 \\[2ex] (1-x^2)\dfrac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\dfrac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0, \quad x \equiv \cos\vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε ήδη δει την τελευταία εξίσωση: είναι η συναφής εξίσωση Legendre με λύσεις $\Theta = \begin{Bmatrix} P_l^m(x) \\ Q_l^m(x)\end{Bmatrix}$.

Η ακτινική εξίσωση $R'' + \frac{2}{r}R' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2R'' + 2rR' + \left[k^2r^2 - l(l+1)\right]R = 0$ μπορεί να μετασχηματισθεί στην Bessel με το μετασχηματισμό $R = \frac{u}{\sqrt{r}} \Rightarrow R' = \frac{u'\sqrt{r} - \frac{1}{2\sqrt{r}}u}{r} = \frac{u'}{\sqrt{r}} - \frac{u}{2r^{3/2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R'' = \frac{u''\sqrt{r} - \frac{1}{2\sqrt{r}}u'}{r} - \frac{u' r^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r}\,u}{2r^3} = \frac{u''}{\sqrt{r}} - \frac{u'}{r^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{u}{r^{5/2}},$$

οπότε

$$r^2\frac{u''}{\sqrt{r}} - r^2\frac{u'}{r^{3/2}} + \frac{3}{4}r^2\frac{u}{r^{5/2}} + 2r\frac{u'}{\sqrt{r}} - \cancel{2r}\frac{u}{\cancel{2r}\sqrt{r}} + \left[k^2 r^2 - \ell(\ell+1)\right]\frac{u}{\sqrt{r}} = 0 \Rightarrow r^2u'' - ru' + \frac{3}{4}u + 2ru' - u + \left[k^2r^2 - \ell^2 - \ell\right]u = 0,$$

$$\Rightarrow r^2 u'' + ru' + \left[k^2r^2 - \ell^2 - \ell - \frac{1}{4}\right]u = 0 \Rightarrow r^2u'' + ru' + \left[k^2r^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2\right]u = 0$$

Οι λύσεις είναι: $u = J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$ και $u = N_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$, οπότε

$R = \frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$ και $R = \frac{N_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$. Με αφορμή αυτά τα αποτελέσματα ορίζονται οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel: $j_\ell(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$, $n_\ell(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,N_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$,

$h^{(1,2)}(x) \equiv j_\ell(x) \pm i\,n_\ell(x)$.

Μπορεί κανείς ν' αποδείξει ότι: $j_\ell(x) = (-x)^\ell\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell \frac{\sin x}{x}$,

$n_\ell(x) = (-x)^\ell\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell\left(-\frac{\cos x}{x}\right)$.

Για $\underline{k=0}$ η (Laplace) αντίστοιχη εξίσωση έχει λύσεις r^ℓ και $\frac{1}{r^{\ell+1}}$

Τελικά:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \psi = \begin{Bmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_\ell^m(\cos\theta) \\ Q_\ell^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_\ell(kr) \\ n_\ell(kr)\end{Bmatrix}$$

$$\nabla^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = \begin{Bmatrix} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_\ell^m(\cos\theta) \\ Q_\ell^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r^\ell \\ \frac{1}{r^{\ell+1}}\end{Bmatrix}.$$

~~Παράδειγμα 1~~ Κεραία με $\Psi\Big|_{r=a} = \begin{cases} V_0 e^{-i\omega_0 t}, & \vartheta\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ -V_0 e^{-i\omega_0 t}, & \vartheta\in[\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$

Προφανώς $\omega=\omega_0$, $k=k_0=\frac{\omega_0}{c}$ και $m=0$ (αζιμουθιακή συμμετρία). Φυσικά δεν τα συνεισφέρουν. Άρα:

$$\Psi = e^{-i\omega_0 t}\sum_l P_l(\cos\vartheta)\left[A_l j_l(k_0 r)+B_l \eta_l(k_0 r)\right].$$

Η συμπεριφορά για μεγάλα ορίσματα είναι:

$$j_l(x)\sim\frac{1}{x}\cos\left(x-(l+1)\frac{\pi}{2}\right),\ \eta_l(x)\sim\frac{1}{x}\sin\left(x-(l+1)\frac{\pi}{2}\right),\ h_l^{(1,2)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{\pm i(x-(l+1)\frac{\pi}{2})}$$

Επειδή θέλουμε κύματα που να απομακρύνονται από την κεραία, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις $h^{(1)}(k_0 r)$. Δηλαδή $\Psi=e^{-i\omega_0 t}\sum A_l P_l(\cos\vartheta)h_l^{(1)}(k_0 r)$ και η οριακή συνθήκη γίνεται: $\sum_l A_l P_l(\cos\vartheta)h_l^{(1)}(k_0 a) = \begin{cases}+V_0, & \vartheta\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ -V_0, & \vartheta\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$

Οι συντελεστές A_l βρίσκονται από τη σχέση:

$$\frac{2}{2l+1}A_l h_l^{(1)}(k_0 a) = V_0\int_0^{\pi/2}P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta - V_0\int_{\pi/2}^{\pi}P_l(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = (x\equiv\cos\vartheta) =$$

$$= -V_0\int_1^0 P_l\,dx + V_0\int_0^{-1}P_l\,dx = V_0\int_0^1 P_l(x)\,dx +$$

$$+V_0\int_{-x=0}^{-1}P_l(-x)\,d(-x) = V_0\int_0^1 P_l(x)\,dx - V_0\int_0^1 P_l(-x)\,dx = V_0\int_0^1\left[P_l(x)-(-1)^l P_l(x)\right].$$

$= V_0(1-(-1)^\ell)\int_0^1 P_\ell(x)\,dx.$ Αλλά $P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1} = (2\ell+1)P_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 P'_{\ell+1}\,dx - \int_0^1 P'_{\ell-1}\,dx = (2\ell+1)\int_0^1 P_\ell\,dx \Rightarrow \int_0^1 P_\ell\,dx = \frac{1}{2\ell+1}\Big[\cancel{P_{\ell+1}(1)}$

$- P_{\ell+1}(0) - \cancel{P_{\ell-1}(1)} + P_{\ell-1}(0)\Big] = \frac{1}{2\ell+1}\left[(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}\frac{(\ell-1)!}{2^{\ell-1}\left[\left(\frac{\ell-1}{2}\right)!\right]^2} - (-1)^{\frac{\ell+1}{2}}\frac{(\ell+1)!}{2^{\ell+1}\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!\right]^2}\right]$

$= \frac{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}}{(2\ell+1)2^{\ell+1}}\frac{1}{\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!\right]^2}\left[(\ell-1)!\,2^2\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 + (\ell-1)!\,\ell(\ell+1)\right] =$

$= \frac{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}(\ell-1)!}{(2\ell+1)2^{\ell+1}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!}\left[(\ell+1)^2 + \ell(\ell+1)\right] = \frac{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}(\ell-1)!\,(\ell+1)}{2^{\ell+1}\cancel{(2\ell+1)}\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!\right]^2}\cancel{(2\ell+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = \frac{(2\ell+1)V_0\cancel{(1-(-1)^\ell)}}{\cancel{2}h^{(1)}(k_0a)}\cdot\frac{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}(\ell-1)!\,(\ell+1)}{2^{\ell+1}\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!\right]^2}$ (για περιττά ℓ)

$A_\ell = 0$, για άρτια ℓ.

Τελικά $\psi = V_0 e^{-i\omega_0 t}\sum_{\text{περιττά } \ell}(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}\frac{(\ell+1)(2\ell+1)(\ell-1)!}{2^{\ell+1}\left[\left(\frac{\ell+1}{2}\right)!\right]^2}\frac{h^{(1)}(k_0r)}{h^{(1)}(k_0a)}P_\ell(\cos\theta)$

<u>Παράδειγμα 2.</u> Κυκλική μεμβράνη

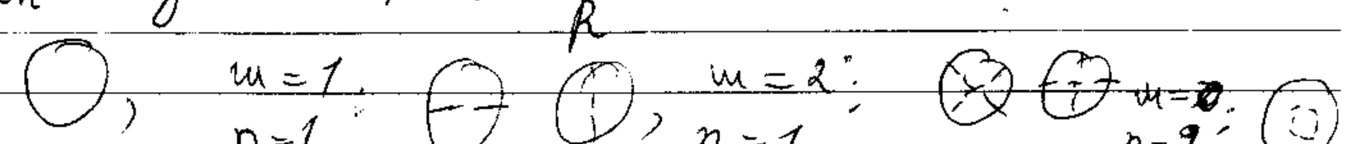
$u = u(x)e^{\pm i\omega t} \Rightarrow \nabla^2 u + k^2 u = 0,\ k = \frac{\omega}{c}$

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + k^2u = 0 \xrightarrow{u=R(r)\Theta(\theta)} \begin{cases}\Theta'' + n^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta = e^{\pm in\theta}\\ r^2R'' + rR' + (k^2r^2 - n^2)R = 0\end{cases}$

Άρα $R = \begin{Bmatrix}J_n(kr)\\ Y_n(kr)\end{Bmatrix}$ και $u = J_n(kr)\begin{Bmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix}e^{\pm i\omega t}$

Το m θα πρέπει να είναι ακέραιος για λόγους μοναδικότητας. Οριακή συνθήκη: $J_m(kR)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_{mn}R = \xi_{mn} \Rightarrow k_{mn} = \dfrac{\xi_{mn}}{R}$



$m=0,\ n=1$; $\quad m=1,\ n=1$ (εκφυλισμοί); $\quad m=2,\ n=1$ (εκφυλισμοί); $\quad m=0,\ n=2$

Παρατήρηση: Στις τρεις διαστάσεις $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow$ οι λύσεις της εξίσωσης Laplace $\nabla^2 u=0$ είναι: $\psi = \begin{Bmatrix} J_m(\alpha\rho) \\ Y_m(\alpha\rho)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e^{\alpha z} \\ e^{-\alpha z}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e^{im\varphi} \\ e^{-im\varphi}\end{Bmatrix}$

ενώ της Helmholtz $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ είναι:

$\psi = \begin{Bmatrix} J_m(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,\rho) \\ Y_m(\sqrt{k^2-\alpha^2}\,\rho)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e^{i\alpha z} \\ e^{-i\alpha z}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e^{im\varphi} \\ e^{-im\varphi}\end{Bmatrix}$ Για $\alpha=0$ παίρνουμε το διδιάστατο όριο, ενώ για $k=0$ η Helmholtz γίνεται Laplace (με αλλαγές $\alpha \to i\alpha$).

Για $k=\alpha=0$ έχουμε τις λύσεις $\rho^{\pm m}e^{\pm im\varphi}$.

Παράδειγμα 3. Κύβος με αρχική θερμοκρασία $T=0$ στη στιγμή $t=0$ εμβαπτίζεται σε λουτρό θερμοκρασίας $T=T_0$.

$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}$ $\quad T \sim e^{-\lambda t} \Rightarrow \nabla^2 T = -\frac{\lambda}{\kappa} T \Rightarrow$

$\Rightarrow T \sim e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z}$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{\lambda}{\kappa}$

$T|_{x=0} = T|_{x=L} = T|_{y=0} = T|_{y=L} = T|_{z=0} = T|_{z=L} = T_0$.

Άρα $T - T_0 = \sum_{l,m,n} C_{lmn} \sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{n\pi z}{L}\, e^{-\lambda_{lmn} t}$,

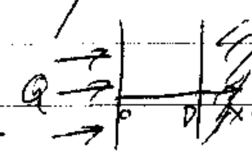
$\lambda_{lmn} = \kappa\frac{\pi^2}{L^2}(l^2+m^2+n^2)$. Μένει η αρχική συνθήκη:

$-T_0 = \sum_{l,m,n} C_{lmn} \sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{n\pi z}{L} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{lmn} = \begin{cases} -\frac{64 T_0}{\pi^3 lmn}, & \text{αν τα } l,m,n \text{ είναι όλα περιττά} \\ & \text{(αλλιώς το αριστερό μέλος θα μηδενίζεται).} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τελικά $T = T_0\left[1 - \frac{64}{\pi^3}\sum_{\text{περιττά}} \frac{1}{lmn}\sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{n\pi z}{L} \cdot e^{-(l^2+m^2+n^2)\kappa\frac{\pi^2 t}{L^2}}\right]$

Για $t \gg \frac{L^2}{\kappa}$ μόνο οι πρώτοι όροι συνεισφέρουν.

<u>Παράδειγμα 4</u> 

Έστω ότι η αρχική θερμοκρασία είναι μηδέν και μετά έχουμε παροχή θερμότητας από αριστερά με ρυθμό Q $\frac{\text{θερμίδες}}{cm^2 s}$

$$T_{\varepsilon\iota\delta}\Big|_{t=0} = \frac{Q}{2KD}(x-D)^2 \Rightarrow T'_{\varepsilon\iota\delta} = \frac{Q}{KD}(x-D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'_{\varepsilon\iota\delta}(0) = -\dfrac{Q}{K} \\ T'_{\varepsilon\iota\delta}(D) = 0 \end{cases}.$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \kappa = \frac{K}{c\rho}$$ Δοκιμάζουμε:

$$T = u(x) + \alpha t \Rightarrow u'' = \frac{\alpha}{\kappa} \Rightarrow u' = \frac{\alpha}{\kappa}x + a \Rightarrow u = \frac{\alpha}{2\kappa}x^2 + ax + b$$

Οριακές συνθήκες: $\left\{\begin{array}{l} u'(D) = 0 \\ -Ku'(0) = Q \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha D}{\kappa} + a = 0 \\ -Ka = Q \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\kappa}{D}a \\ a = -\frac{Q}{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\kappa Q}{KD} \Rightarrow u = \frac{\kappa Q}{2KD\cdot\kappa}x^2 - \frac{Q}{K}x + b \Rightarrow$$

$\Rightarrow u' = \frac{Q}{KD}x - \frac{Q}{K}$ ✓ Το b δεν προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες. Μπορούμε να επιλέξουμε $b = \frac{QD^2}{2KD}$, οπότε $u = \frac{Q}{2KD}(x-D)^2$.

Σημειώνουμε ότι $\alpha = \frac{\kappa Q}{KD} = \frac{\frac{K}{c\rho}Q}{KD} = \frac{Q}{c\rho D}$. Βρήκαμε λοιπόν μια ειδική λύση, την $T_{ειδ} = \frac{Q}{2KD}(x-D)^2 + \frac{Q}{c\rho D}t$

Μένει να βρούμε τη γενική λύση του ομογενούς

~~προβλήματος: $-Ku'(0) = 0 \Rightarrow u'(0) = 0 \Rightarrow a_{ομ} = 0 \Rightarrow \alpha_{ομ} = 0$, δηλ. $u_{ομ} = b$ και $T = T_{ομ} + T_{ειδ} = b + \frac{Q}{2KD}(x-D)^2 + \frac{Q}{cD\rho}t$.~~

~~Αυτή η λύση θα έπρεπε να ικανοποιεί την:~~

~~$T(x,0) = 0 \Rightarrow (T_{ομ} + T_{ειδ})\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow b + \frac{Q}{2KD}(x-D)^2 = 0$.~~

$$\left.\begin{array}{l} K\Theta_{xx}=\Theta_t \\ \Theta_x|_0=\Theta_x|_D=0\end{array}\right\} \quad \Theta = X(x)T(t) \Rightarrow K\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''+\frac{\lambda}{K}X=0,\ X''|_0=X''|_D=0. \\ T=Ce^{-\lambda t}\end{cases}$$

$$X=\begin{Bmatrix}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{K}}x \\ \sin\sqrt{\frac{\lambda}{K}}x\end{Bmatrix} \quad \Theta=A_0+\sum_n\left(A_n\cos k_n x+B_n\sin k_n x\right)e^{-\lambda_n t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta_x=\sum_n\left(-k_nA_n\sin k_nx+k_nB_n\cos k_nx\right)e^{-\lambda_n t}$$

$\Theta_x|_{x=0}=0\Rightarrow B_n=0$. $\Theta_x|_{x=D}=-\sum k_nA_n\sin k_nD\, e^{-\lambda_n t}=0\Rightarrow$

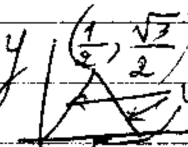
$\Rightarrow k_nD=n\pi\Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{D}$.

$\Theta_{o\mu}=A_0+\sum A_n\cos\frac{n\pi x}{D}e^{-\lambda_n t}$, $k_n=\sqrt{\frac{\lambda_n}{K}}\Rightarrow\lambda_n=Kk_n^2=K\frac{n^2\pi^2}{D^2}$.

Αρχική συνθήκη: $\left(\Theta_{o\mu}+\Theta_{\epsilon\iota\delta}\right)\Big|_{t=0}=0\Rightarrow A_0+\sum_n A_n\cos\frac{n\pi x}{D}+$

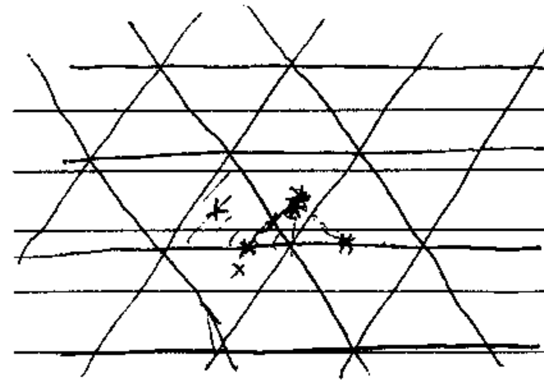
$+\frac{Q}{2KD}(x-D)^2=0\Rightarrow \int_0^D dx\cos\frac{N\pi x}{D}\left[A_0+\sum_n A_n\cos\frac{n\pi x}{D}\right]+$

$+\frac{Q}{2KD}\int_0^D dx(x-D)^2\cos\frac{N\pi x}{D}\Rightarrow A_n=\dots$

Παράδειγμα 5. $\nabla^2u+k^2u=0$, 

Ανακλάμε το u στις πλευρές του τριγώνου, ώστε στο κάθε συμμετρικό σημείο το u να "πάει" στο −u:

Η Παλινδρομική επαναλαμβάνεται μέχρι να καλυφθεί όλο το επίπεδο.



Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι $u(x+3,y)=u(x,y)$ και $u(x,y+\sqrt{3})=u(x,y)$.

Σειρά Fourier με περιόδους 3 και $\sqrt{3}$:

$$u(x,y)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{lm}\, e^{il\frac{2\pi}{3}x}\, e^{im\frac{2\pi}{\sqrt{3}}y}$$ οπότε

η $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ δίνει $-\left(\frac{4\pi^2}{9}l^2+\frac{4\pi^2}{3}m^2\right)+k^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^2 = 4\pi^2\left(\frac{l^2}{9}+\frac{m^2}{3}\right).$$

Άλλες ιδιότητες συμμετρίας είναι ότι (α) $u(x,-y)=$
$=-u(x,y) \Rightarrow \boxed{a_{l,-m}=-a_{lm}}$ και (β) στροφές κατά $\frac{2\pi}{3}$:

$$u\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)=u(x,y) \Rightarrow \boxed{a_{-\frac{l}{2}-\frac{3m}{2},\ \frac{l}{2}-\frac{m}{2}}=a_{lm}}$$

$$\sum a_{lm}\, e^{i\left(-\frac{l}{2}-\frac{3m}{2}\right)\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)}\, e^{i\left(\frac{l}{2}+\frac{m}{2}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{y}{2}\right)} = \sum a_{lm}\, e^{il\frac{2\pi x}{3}}\, e^{im\frac{2\pi y}{\sqrt{3}}}$$

$$\left(\frac{l}{2}+\frac{3m}{2}\right)\frac{2\pi}{3}\frac{x}{2}+\left(\frac{l}{2}-\frac{m}{2}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}+\frac{3m}{2}\right)y\frac{2\pi}{3}-$$

$$-\left(\frac{l}{2}-\frac{m}{2}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{y}{2}=\frac{2\pi}{3}\frac{x}{2}\underbrace{\left(\frac{l}{2}+\frac{3m}{2}-\frac{3l}{2}+\frac{3m}{2}\right)}_{-l+3m}-\frac{y}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\underbrace{\left(\frac{l}{2}+\frac{3m}{2}+\frac{l}{2}-\frac{m}{2}\right)}_{l+m}.$$

Αν κάναμε δεξιόστροφη στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$, θα βρίσκαμε ότι $\boxed{a_{-\frac{l}{2}+\frac{3m}{2},\ -\frac{l}{2}-\frac{m}{2}}=a_{lm}}$.

Ας θεωρήσουμε $l=3, m=1$. Τότε $-\frac{l}{2}-\frac{3m}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3$, $\frac{l}{2}-\frac{m}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$, άρα το $(-3,1)$ είναι ένα ακόμα ζεύγος με ίδιο a_{lm}. Εξ άλλου $-\frac{l}{2}+\frac{3m}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$, $-\frac{l}{2}-\frac{m}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$, άρα βρίσκουμε το $(0,-2)$. Επί πλέον έχουμε τα $(3,-1)$, $(-3,-1)$ και $(0,2)$ με αντίθετα a_{lm}. Το αντίστοιχο $k^2=4\pi^2\left(\frac{l^2}{9}+\frac{m^2}{3}\right)=4\pi^2\left(\frac{9}{9}+\frac{1}{3}\right)=4\pi^2\frac{12}{9}=\frac{16\pi^2}{3}$. Αν θεωρήσουμε τα $(-3,-1)$, $(3,-1)$, $(0,2)$, $(-3,1)$, $(3,1)$, $(0,-2)$ $\left\{\begin{matrix} l\leftrightarrow l \\ m\leftrightarrow -m\end{matrix}\right\}$ θα βρούμε νέα λύση διαφορετική της αρχικής. Υπάρχει μια δεύτερη λύση με $k^2=\frac{112\pi^2}{9}$ με τα ζεύγη $(5,1)$, $(-4,2)$, $(-1,-3)$, $(5,-1)$, $(-4,-2)$, $(-1,3)$. Επί, αν πάρουμε τα $(-l,-m)$ δεν βρίσκουμε γραμμικά ανεξάρτητα ζεύγη.

Ομοιωτικοί μετασχηματισμοί.

Παράδειγμα 1. Ημιάπειρη θερμική $x>0$, αρχικά $T(x,t=0)=0$ και $T(x=0,t)=T_0$.

Η εξίσωση είναι $\kappa T_{xx}=T_t$.

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace ως προς το t.

$F(x,s)=\int_0^\infty dt\, e^{-st}\,T(x,t) \Rightarrow \kappa\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = sF - \cancel{T(x,t=0)}^{\,0}$.

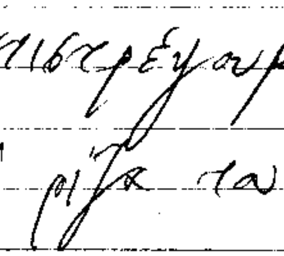
Εξ άλλου $T(x=0,t)=T_0 \Rightarrow F(x=0,s)=\frac{T_0}{s}$.

Η λύση της εξίσωσης είναι $F=Ae^{\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}$.

Πρέπει, βέβαια, $A=0$ και $Be^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\cdot 0}=\frac{T_0}{s} \Rightarrow F=\frac{T_0}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}$.

Πρέπει ν' αντιστρέψουμε τη σχέση: $T=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{T_0}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x}e^{st}_{\,d}$

Η τετραγωνική ρίζα του s εισάγει μια τομή από το 0 ως το $-\infty$. Θεωρούμε το μονοπάτι:



, γύρω από το οποίο το ολοκλήρωμα είναι μηδ

$\left(-2\pi i\,\frac{1}{2\pi i}T_0\right)$

Άρα $① = -\cancel{②}^{\,0} - ③ - ④ - ⑤ - \cancel{⑥}^{\,0}$.

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{T_0}{s}e^{-ix\sqrt{\frac{-s}{\kappa}}}e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{T_0}{s}e^{ix\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}e^{-st}ds\right.$$

$$\left.= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{T_0}{s}e^{-ix\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}e^{-st}ds\right)$$

$$= +T_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty ds\,\frac{T_0}{s}e^{-st}\left(e^{ix\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}-e^{-ix\sqrt{\frac{s}{\kappa}}}\right)=$$

$= T_0 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds\,\frac{T_0}{s}e^{-st}\sin\left[x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right]$. Θέτοντας $s=z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ds = 2z\,dz \Rightarrow \frac{ds}{s}=\frac{2z\,dz}{z^2}=2\frac{dz}{z}$. Βρίσκουμε:

$$\textcircled{1} = T_0 \frac{t_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{2dz}{z} e^{-tz^2}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{K}}z\right) =$$

$$= T_0\left[1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-tz^2}\sin\frac{xz}{\sqrt{K}}\right].$$

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνάρτησης σφάλματος: $\operatorname{erf} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-t^2}dt$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$2i\int_0^\infty \frac{dz}{iz} e^{-tz^2}\sin\frac{xz}{\sqrt{K}} = \int_0^\infty \frac{d(z\sqrt{t})}{iz\sqrt{t}} e^{-(z\sqrt{t})^2}\left(e^{ix\frac{z\sqrt{t}}{\sqrt{Kt}}} - e^{-ix\frac{z\sqrt{t}}{\sqrt{Kt}}}\right) =$$

$$\overset{z\sqrt{t}\equiv y}{=} \int_0^\infty \frac{dy}{iy} e^{-y^2} e^{ix\frac{y}{\sqrt{Kt}}} - \int_0^\infty \frac{dy}{iy} e^{-y^2} e^{-ix\frac{y}{\sqrt{Kt}}} \equiv I_+ - I_-$$

$$-i\frac{dI_+}{dx} = \int_0^\infty \frac{dy}{iy}\frac{y}{\sqrt{Kt}} e^{-y^2} e^{i\frac{x}{\sqrt{Kt}}y} = \frac{1}{i\sqrt{Kt}}\int_0^\infty dy\, e^{-\left(y^2 - 2\frac{ix}{2\sqrt{Kt}}y - \frac{x^2}{4Kt} + \frac{x^2}{4Kt}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \frac{1}{2i}\sqrt{\pi} \Rightarrow \frac{dI_+}{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}}.$$ Ομοίως:

$$\frac{dI_-}{dx} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}}.$$ Άρα $$\frac{d(I_+ - I_-)}{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_+ - I_- = \int_0^X \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Kt}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}}dx = \int_0^X \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{\sqrt{Kt}}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)^2} 2\cancel{\sqrt{Kt}}\, d\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Kt}}} e^{-t^2}dt = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) = \pi \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)$$

Άρα $\textcircled{1} = T_0 - \frac{T_0}{\pi}\pi \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{Kt}} = T_0\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η θερμοκρασία σε άπειρο στερεό, αν $T(x,0)=f(x)$ γνωστή. Η εξίσωση είναι: $T_{xx}=\frac{1}{K}T_t$. Μετασχηματίζω ως προς x: $T(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}F(k,t)e^{ikx} \Leftrightarrow F(k,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,t)e^{-ikx}dx$

Τότε: $-k^2F=\frac{1}{K}F_t \Rightarrow F=\varphi(k)e^{-k^2Kt}$ με την αρχική συνθήκη: $F(k,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,0)e^{-ikx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}dx=$

$=\varphi(k)$, άρα: $F=e^{-k^2Kt}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, f(x)e^{-ikx} \Rightarrow$

$\Rightarrow T(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}F(k,t)e^{ikx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}e^{-k^2Kt}\int_{-\infty}^{+\infty}dx' f(x')e^{-ikx'}$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx' f(x')\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-Kk^2t}e^{ik(x-x')}$. Όμως:

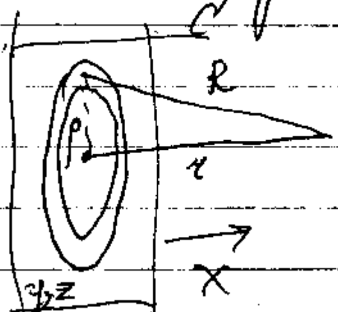
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-Kt\left(k^2-2ik\frac{x-x'}{2Kt}-\left(\frac{x-x'}{2Kt}\right)^2+\left(\frac{x-x'}{2Kt}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-Kt\frac{(x-x')^2}{4K^2t^2}}\sqrt{\frac{\pi}{Kt}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}},$$ οπότε:

$$T(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx' f(x')\underbrace{\sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}}}_{G(x,t;x')}.$$

Αν $f(x)=\delta(x)$, θα βρούμε: $T(x,t)=G(x,t;0)$.

Η $\delta(x)$ είναι ίδια για τα y και z. Αν θεωρήσουμε την $\delta(\vec{x})$, τα πράγματα θα είναι κάπως διαφορετικά. Υπάρχει ένα trick για να υπολογίσουμε την νέα συνάρτηση Green.



Έστω $f_{1D}(r,t)$ η απόκριση στην επίπεδη πηγή $\delta(x)$ και $g_{3D}(R,t)$ η απόκριση στο ερέθισμα $\delta(\vec{x})$. Σύμφωνα με το σχήμα:

$$f_{1D}(r,t) = \int_{\rho=0}^{\infty} 2\pi\rho\, d\rho\, g_{3D}(R,t) = \begin{pmatrix} R^2=\rho^2+r^2 \\ RdR=\rho d\rho \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{R=r}^{\infty} 2\pi R\, dR\, g_{3D}(R,t) \Rightarrow \frac{\partial f_{1D}}{\partial r} = -2\pi r\, g_{3D}(r,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{3D}(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial f_{1D}}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\left(-\frac{2r}{4\kappa t}e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}}\right) = \left(\frac{1}{4\pi\kappa t}\right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}}$$

<u>Παράδειγμα 3</u> Έστω ημιάπειρο στερεό ($x\geq 0$) με αρχική θερμοκρασία $T=0$. Ζητάμε την απόκριση του σε αρχική θερμοκρασία $\delta(x=a,0,0)$, ενώ $T|_{x=0}=0$.

Η λύση θα είναι υπέρθεση ~~[illegible]~~ της

$$\cancel{M v^{(1)} = 0 \Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & y & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \cancel{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(M - \lambda_1) v = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(M - \lambda_1) v = u \Rightarrow \underbrace{v^{(1)} (M - \lambda_1)}_{0} v = v^{(1)} u \Rightarrow v^{(1)} \cdot u$$

κατ' αρχήν πηγής και ενός ειδώλου:

$$T = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{4\kappa t}} - \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} e^{-\frac{(x+a)^2+y^2+z^2}{4\kappa t}}$$

<u>Παράδειγμα 4.</u> Κύβος με μηδενική αρχική θερμοκρασία, διαταραχή $T(\vec{x}, t=0) = \delta(\vec{x})$, όπου $\vec{x}=\vec{0}$ είναι το κέντρο του κύβου και θερμοκρασίες των πλευρών σταθερά μηδενικές.

Λύσεις: Με χωρισμό μεταβλητών (χρήσιμη για μεγάλα t) ή με είδωλα όπως στο Παράδειγμα 3 (χρήσιμη για μικρά t).

<u>Προβλήματα ιδιοτιμών</u>

$$Mv = \lambda v. \quad \left\{ M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda) v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + (1-\lambda) v_2 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\lambda_1 = 0,\; v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \left(\lambda_2 = 2,\; v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Η εξίσωση $(M-\lambda_k)v = u$ δεν έχει λύσεις, εκτός αν το u ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Π.χ. για $k=1$ η $(M-\lambda_1)v = u$ έχει λύσεις αν $u = v^{(2)}$.

$(M-\lambda_1)v = u \Rightarrow \underbrace{v^{(1)}(M-\lambda_1)}_{0}v = v^{(1)}\cdot u \Rightarrow \underline{v^{(1)}\cdot u = 0}$

Παράδειγμα 1 Χορδή με ~~...~~ ακλόνητα άκρα: $\frac{d^2}{dx^2}u = -k^2 u$ $\left(k=\frac{n\pi}{L}\right)$ (ιδιοτιμές)

Παράδειγμα 2 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ μέσα σε σφαίρα ακτίνας R με $u(r=R)=0 \Rightarrow u = j_\ell(kr)\,P_\ell^m(\cos\vartheta)\,e^{\pm im\varphi}$.

Οι ιδιοτιμές προσδιορίζονται μέσω της συνθήκης: $j_\ell(kR)=0$.

Θεωρούμε γραμμικό διαφορικό τελεστή και το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών: $Lu = \lambda u$ με κάποιες οριακές συνθήκες. Ο L λέγεται ερμιτιανός, αν $\int_\Omega u^* L v\, d^3x = \left[\int_\Omega v^* L u\, d^3x\right]^* \Rightarrow L_{uv} = L^*_{vu}$. Τα u, v πρέπει να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Έστω ότι ο L είναι ερμιτιανός. Τότε $\left\{\begin{matrix} Lu_i = \lambda_i u_i \\ Lu_j = \lambda_j u_j \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = (u_j, Lu_i) - (u_i, Lu_j)^* = (\lambda_i - \lambda_j^*)(u_i, u_j)$

Αν $i=j \Rightarrow \lambda_i$ είναι πραγματικό. Αν $\lambda_i \neq \lambda_j$, $(u_i, u_j) = 0$

Σύνολο ορθογωνίων συναρτήσεων:

$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$, $\left\{\begin{matrix} u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{matrix}\right\}$. Είναι ερμιτιανός ο τελεστής $\frac{d^2}{dx^2}$ στο $[0,2\pi]$: $\int_0^{2\pi} u^* v'' dx =$

$= \cancel{u^* v'\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - \int_0^{2\pi} u'^* v' \, dx = \cancel{-u^{*\prime} v\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} + \int_0^{2\pi} u^{*\prime\prime} v \, dx =$

$= \left[\int_0^{2\pi} v^* u'' dx\right]^*$. Άρα είναι.

Ο τελεστής $L = p\frac{d^2}{dx^2} + p'\frac{d}{dx} - q$ είναι ερμιτειανός, για συναρτήσεις που μηδενίζονται στα άκρα ενός διαστήματος. Αν θεωρήσουμε το πρόβλημα Sturm-Liouville: $\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right] - qu + \lambda\rho u = 0$, όπου το ρ μη αρνητικό, ~~το~~ το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $u_i \cdot u_j = \int_a^b u_i^* u_j \rho \, dx$. Εκφυλισμός.

$f(\vec{x}) = \sum_n c_n u_n(\vec{x}) \Rightarrow c_n = u_n \cdot f \Rightarrow f = \sum u_n (u_n \cdot f) =$

$= \sum_n u_n(\vec{x}) \int_{\Omega} d^3x' \, u_n^*(\vec{x}') f(\vec{x}') \rho(\vec{x}') =$

$= \int_{\Omega} d^3x' f(\vec{x}') \underbrace{\rho(\vec{x}') \sum_n u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}')} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \rho(\vec{x}') \sum_n u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ Πληρότητα.

$\int d^3x \, \rho(\vec{x}) \, u_i^*(\vec{x}) u_j(\vec{x}) = \delta_{ij}$. Ορθογωνιότητα.

Επίλυση προβλημάτων συνοριακών συνθηκών με αναπτύγματα σε ιδιοσυναρτήσεις.

Μεμβράνη: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$

Θεωρούμε τη μεταβλητή φ: ο τελεστής $L_\varphi = \frac{d^2}{d\varphi^2}$ έχει ιδιοσυναρτήσεις $e^{\pm i m\varphi}$ με ιδιοτιμές $-m^2$, άρα $u=\sum_0^\infty f_m\left(e^{im\varphi}+\alpha_n e^{-im\varphi}\right)$ και

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_m}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}f_m-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_m}{\partial t^2}=0$. Στη συνέχεια εξετάζουμε

τον τελεστή $L_r=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}$

με τις οριακές συνθήκες $u(0)<\infty$, $u(R)=0$.

Οι λύσεις είναι οι $J_m(k_{mi}r)$, όπου $J_m(k_{mi}R)=0$ και ιδιοτιμές $-k_{mi}^2$: $r^2J_m''+rJ_m'+(k_m^2r^2-m^2)J_m=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\right]J_m=-k_m^2J_m$. Άρα:

$f_m=\sum_{j=1}^{\infty} g_{mj}(t)\,J_m(k_{mj}r)$ και $k_{mj}^2 g_{mj}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial t^2}=0$

$\Rightarrow g_{mj}=e^{\pm i\omega_{mj}t}$, $\omega_{mj}\equiv ck_{mj}$. Τελικά:

$u(r,\varphi,t)=\sum_{j,n=1}^{\infty}A_{mj}\,J_m(k_{mj}r)\left(\sin m\varphi+B_m\cos m\varphi\right)\left(\sin\omega_{mj}t+C_{mj}\cos\omega_{mj}t\right)$.

Μη ομογενή προβλήματα: Συναρτήσεις Green.

Θεωρούμε το πρόβλημα $Lu - \lambda u = f$, όπου ο L είναι ερμιτιανός και οι οριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Αναπτύσσουμε τα u και f στις ιδιοσυναρτήσεις του L:

$u = \sum c_n u_n$, $f = \sum d_n u_n$. Η εξίσωση γίνεται: $\sum_n c_n(\lambda_n - \lambda) u_n = \sum_n d_n u_n \Rightarrow c_n = \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda}$. Εξ άλλου, $d_n = u_n f$, οπότε $c_n = \frac{u_n f}{\lambda_n - \lambda}$ και

$$u(\vec{x}) = \sum_n \frac{u_n \, u_n f}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{u_n(\vec{x})}{\lambda_n - \lambda} \int_\Omega d^3x' \, u_n^*(\vec{x}') f(\vec{x}') =$$

$$= \int_\Omega d^3x' \, f(\vec{x}') \sum_n \frac{u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}')}{\lambda_n - \lambda} \leftarrow G(\vec{x}, \vec{x}')$$

Συνάρτηση Green. $G(\vec{x}, \vec{x}'; \lambda)$.

Αν $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$, τότε $u(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x}, \vec{x}') \delta(\vec{x}' - \vec{x}_0) dx'$ $= G(\vec{x}, \vec{x}_0)$, οπότε $\boxed{L G(\vec{x}, \vec{x}') - \lambda G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')}$

Εναλλακτικά: $(L - \lambda) G = (L - \lambda) \sum_n \frac{u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}')}{\lambda_n - \lambda} =$

$= \sum \cancel{(\lambda_n - \lambda)} \frac{u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}')}{\cancel{\lambda_n - \lambda}} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

Αν $\lambda = \lambda_n$, για κάποιο n, θα υπάρχουν σοβαρές δυσκολίες στη λύση της μη ομογενούς Εξίσωσης. Λύση μπορεί να υπάρχει μόνο αν η $f(\vec{x})$ είναι ορθογώνια στο αντίστοιχο u_n: $\int u_n^*(\vec{x}) f(\vec{x})\, d^3x = 0$

Παράδειγμα (1D) Έστω το πρόβλημα: $\left\{ \begin{array}{l} u'' + k^2 u = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{array} \right\}$

Ποιά είναι η συνάρτηση Green;

(1) Αν $k^2 = \lambda$, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $u_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$, τότε:

$$G(x,x') = \sum_n \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} = \frac{2}{l} \sum \frac{\sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x'}{l}}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$$

Η $\sum_n \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} = G(x,x')$ συνεπάγεται την ιδιότητα: $G(x',x) = [G(x,x')]^*$

(2) Λύνουμε την ΔΕ: $\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x-x')$

Για $x \neq x'$: $\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = 0 \Rightarrow G(x,x') = \left\{ \begin{array}{l} a \sin kx, \ x < x' \\ b \sin k(x-l), \ x > x' \end{array} \right.$

Ολοκληρώνουμε πάνω από το x': $\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + 2k^2 \varepsilon G \to 0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x'+\varepsilon} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x'-\varepsilon} = 1}$ $\boxed{G\big|_{x'+\varepsilon} - G\big|_{x'-\varepsilon} = 0}$

$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx \left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right| - \int dx \left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right|_{x'-\varepsilon} \, k\varepsilon^2 \to 0 \Rightarrow G$;

Οι δύο συνθήκες γράφονται: $\left\{\begin{array}{l} a\sin kx' = b\sin k(x'-l) \\ kb\cos k(x'-l) - ka\cos kx' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin kx'\, a - \sin k(x'-l)\, b = 0 \\ k\cos kx'\, a - k\cos k(x'-l)\, b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\sin k(x'-l)}{-k\sin kx'\cos k(x'-l) + k\cos kx'\sin k(x'-l)} \\ b = \dfrac{-\sin kx'}{} \end{array}\right.$$

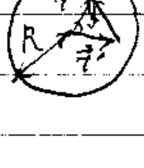
$$a = \frac{\sin k(x'-l)}{k\sin[k(x'-l) - kx']} = \frac{\sin k(x'-l)}{-k\sin kl}, \quad b = \frac{-\sin kx'}{-k\sin kl} = \frac{\sin kx'}{k\sin kl}$$

Άρα $G(x,x') = \dfrac{1}{k\sin kl}\left\{\begin{array}{l} \sin k(x'-l)\sin kx, \ x<x' \\ \sin kx'\sin k(x-l), \ x>x' \end{array}\right\} =$

$$= -\frac{1}{k\sin kl}\sin kx_< \sin k(l-x)_<, \quad \text{όπου} \left\{\begin{array}{l} x_< \equiv \min(x,x') \\ (l-x)_< \equiv \min(l-x,\, l-x') \end{array}\right\}$$

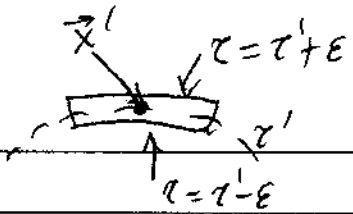
Συμμετρία $x \leftrightarrow x'$.

<u>Παράδειγμα (2D)</u>. Μεμβράνη. $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, $u|_{r=R} = 0$.



Η G θα εξαρτάται μόνο από τα r, r', φ και $\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$. Για $\vec{x}\neq\vec{x}'$ θα ισχύει η $\nabla^2 G + k^2 G = 0 \Rightarrow G = \left\{\begin{array}{ll} \sum_m A_m J_m(kr)\cos m\varphi, & r<r' \\ \sum_m B_m\left[J_m(kr)Y_m(kR) - J_m(kR)Y_m(kr)\right], & r>r' \end{array}\right.$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση πάνω από την ανωμαλία στο $\vec{r}'$: $\int \nabla^2 G\, d^2x = \oint (\nabla G)_n\, dl = 1$. Διαλέγουμε το βρόχο:



και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\int_{r'+\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial r}\, dl - \int_{r'-\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial r}\, dl = 1 \Rightarrow r'\int \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r'+\varepsilon} d\vartheta -$$

$$- r'\int \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r'-\varepsilon} d\vartheta = 1 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r'+\varepsilon} - \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r'-\varepsilon} = \frac{1}{r'}\delta(\vartheta) \quad (*)$$

Θα χρειαστεί το ανάπτυγμα της $\delta(\vartheta)$ σε σειρά:

$$\delta(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\vartheta \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\vartheta)\cos m'\vartheta\, d\vartheta = \sum_m C_m \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \cos m\vartheta \cos m'\vartheta$$

$$\Rightarrow 1 = C_{m'} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \cos^2 m'\vartheta \Rightarrow 1 = C_{m'}\, \pi \varepsilon_{m'}, \quad \varepsilon_{m'} = \begin{cases} 2, & m'=0 \\ 1, & m' \neq 0. \end{cases}$$

Δηλαδή $\delta(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\pi\varepsilon_m}\cos m\vartheta$. Αντικαθιστούμε στην (*) και τα δύο μέλη με τα αναπτύγματά τους ως προς ϑ:

$$\sum_m k B_m \left[J_m'(kr') Y_m(kR) - Y_m'(kr') J_m(kR)\right]\cos m\vartheta -$$

$$- \sum_m k A_m J_m'(kr') \cos m\vartheta = \frac{1}{r'} \sum_m \frac{1}{\pi \varepsilon_m} \cos m\vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_m \left[J_m'(kr') Y_m(kR) - Y_m'(kr') J_m(kR)\right] - A_m J_m'(kr') = \frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'} \quad (1)$$

Εξάλλου η συνέχεια της G στο $r=r'$ δίνει:

$$B_m \left[J_m(kr') Y_m(kR) - Y_m(kr') J_m(kR)\right] - A_m J_m(kr') = 0 \quad (2)$$

Για να βρούμε τα A_m, B_m λύνουμε το

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

$$\boxed{W' + pW} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + p(y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$= y_1(y_2'' + p y_2') - y_2(y_1'' + p y_1') =$$

$$= y_1(-q y_2) - y_2(-q y_1) = 0.$$

$$\frac{dW}{dx} = -pW$$

σύστημα των ① και ②.

Θα χρειαστεί η έκφραση

$$\begin{vmatrix} J_m(kr') & -[J_m(kr')Y_m(kR)-J_m(kR)Y_m(kr')] \\ -J_m'(kr') & J_m'(kr')Y_m(kR)-Y_m'(kr')J_m(kR) \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{J_m(kr')J_m'(kr')Y_m(kR)} - \underline{J_m(kr')Y_m'(kr')J_m(kR)} -$$

$$- \cancel{J_m'(kr')J_m(kr')Y_m(kR)} + \underline{J_m'(kr')J_m(kR)Y_m(kr')} =$$

$$= -J_m(kR)\left[J_m(kr')Y_m'(kr') - J_m'(kr')Y_m(kr')\right].$$

Αλλά $J_m(x)Y_m'(x) - J_m'(x)Y_m(x) = \frac{2}{\pi x} \Rightarrow J_m(kr')Y_m'(kr') -$

$- J_m'(kr')Y_m(kr') = \frac{2}{\pi k r'}$, οπότε η ορίζουσα γίνεται

$-\frac{2J_m(kR)}{\pi k r'}$. Βρίσκουμε: $A_m = \frac{1}{det}\begin{vmatrix} 0 & -J_m(kr')Y_m(kR) + J_m(kR)Y_m(kr') \\ \frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'} & J_m'(kr')Y_m(kR) - Y_m'(kr')J_m(kR) \end{vmatrix} =$

$$= \left(-\frac{\pi k r'}{2J_m(kR)}\right)\left(-J_m(kR)Y_m(kr') + J_m(kr')Y_m(kR)\right)\frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'} =$$

$$= \frac{J_m(kR)Y_m(kr') - J_m(kr')Y_m(kR)}{2\varepsilon_m J_m(kR)}$$ και

$$B_m = \frac{1}{det}\begin{vmatrix} J_m(kr') & 0 \\ -J_m'(kr') & \frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\pi k r'}{2J_m(kR)}\right)\frac{J_m(kr')}{\pi \varepsilon_m k r'} = -\frac{J_m(kr')}{2\varepsilon_m J_m(kR)}$$

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα: $\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$

Πρέπει να ξεπεράσουμε δύο προβλήματα: (1) Να αναπαράγουμε την συνάρτηση δέλτα, (2) Να ικανοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες. Συχνά βολεύει να ξεχωρίσουμε τα δύο προβλήματα γράφοντας: $G = u + v$, όπου η u (που λέγεται ιδιομορφική λύση) ικανοποιεί την εξίσωση, αλλά όχι υποχρεωτικά τις οριακές συνθήκες, ενώ $\nabla^2 v + k^2 v = 0$, δηλαδή είναι "ομαλή" συνάρτηση και επιλέγεται ώστε το άθροισμα να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.

Η ιδιομορφία μπορεί να προσδιοριστεί ολοκληρώνοντας την εξίσωση σ' ένα δίσκο με κέντρο το $\vec{x}'$: $(\rho \equiv |\vec{x}-\vec{x}'|)$.

$$\int_0^\rho \nabla^2 G \, 2\pi\rho \, d\rho = \oint (\nabla G)_n \, dl = 2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho}, \text{ άρα}$$

$$\int_0^\rho \nabla^2 G \, 2\pi\rho \, d\rho + k^2 \int G \, 2\pi\rho \, d\rho = \int \delta(\vec{x}-\vec{x}') 2\pi\rho \, d\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} + k^2 \int_0^\rho G \, 2\pi\rho \, d\rho = 1 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(\rho\to 0)} 2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \cancel{+ k^2 G \, 2\pi\rho} = 1 \Rightarrow dG = \frac{1}{2\pi} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow$$

$\Rightarrow G \rightarrow \frac{1}{2\pi} \ln\rho + \sigma\tau\alpha\theta$, καθώς $\rho \to 0$.

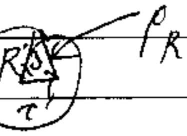
Από τις λύσεις της εξίσωσης $\nabla^2 G + k^2 G = 0$ υπάρχει μία, η Y_0, που έχει αυτή τη συμπεριφορά:

$Y_0(k\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} \frac{2}{\pi} \ln\rho + \sigma\tau\alpha\theta$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $G = \frac{1}{4} Y_0(k\rho) + v(\vec{x}, \vec{x}')$, όπου το v είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης: $v = \sum_n A_n J_n(kr) \cos n\theta$.

Τα A_n βρίσκονται από την απαίτηση:

$$G(r=R) = 0 = \frac{1}{4} Y_0(k\rho_R) + \sum_n A_n J_n(kR) \cos n\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n = -\frac{1}{4\pi J_n(kR)\,\varepsilon_n} \int_0^{2\pi} Y_0(k\rho_R) \cos n\theta \, d\theta.$$



$$\rho_R^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 2, & n = 0 \end{cases}$$

Τελικά:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4} Y_0(k\rho) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(kr)\cos n\theta}{2\pi J_n(kR)\,\varepsilon_n} \int_0^{\pi} Y_0(k\rho_R) \cos n\theta \, d\theta$$

Συνοπτικά, η συνάρτηση Green μπορεί να υπολογισθεί:

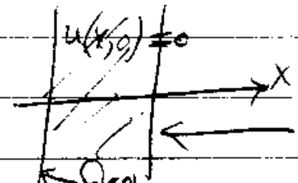
(1) Με το άθροισμα πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις.

2) Λύνοντας την ομογενή και "ταιριάζοντας" τα δύο κομμάτια.

3) Αναλύοντάς την σε άθροισμα της θεμελιώδους λύσης και μιας λύσης της ομογενούς.

Αν η εξίσωση είναι ομογενείς αλλά οι οριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς, μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε ομογενείς οριακές συνθήκες και μη ομογενή εξίσωση. Ο μετασχηματισμός δεν είναι μοναδικά ορισμένος (διαλέγουμε αυτόν που δίνει τη πιο απλή ΔΕ).

Παράδειγμα



$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=D} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{Q}{K} \qquad \left(k \equiv \frac{K}{c\rho}\right).$$

Αλλαγή μεταβλητών: $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$, όπου

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{Q}{K}, \quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=D} = 0.$$ Το $w(x)$ κατά τάλλα είναι ελεύθερα επιλέξιμο.

Μια καλή επιλογή είναι: $W = \frac{Q}{2KD}(x-D)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q}{KD}(x-D)$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v+w) = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}(v+w) \Rightarrow v_{xx} + \frac{Q}{KD} = \frac{1}{k} v_t \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_{xx} - \frac{1}{k} v_t = -\frac{Q}{KD}$. Μια ειδική λύση είναι η:

$$v_{ειδ} = \frac{Qk}{KD} t, \text{ οπότε } u_{ειδ} = v_{ειδ} + W = \frac{Qk}{KD} t + \frac{Q}{2KD}(x-D)^2.$$

Τέλος, η συνάρτηση Green μας δίνει τη δυνατότητα να μετατρέψουμε μια ΜΔΕ σε ολοκληρωτική εξίσωση. Έστω η $\nabla^2 u(\vec{x}) = f(\vec{x})\, u(\vec{x})$. Έστω ότι είναι γνωστή για το σημειακό πρόβλημα η συνάρτηση Green: $\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$. Μπορούμε να "υποκριθούμε" ότι το αρχικό πρόβλημα είναι μη ομογενές, οπότε:

$$u(\vec{x}) = \int d^3x'\, G(\vec{x},\vec{x}')\, f(\vec{x}')\, u(\vec{x}').$$

Συναρτήσεις Green στην ηλεκτροδυναμική.

Η θεμελιώδης λύση για την ηλεκτροστατική $\nabla^2 G = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$ μπορεί να βρεθεί μέσω της $\varphi \sim \left\{ \begin{matrix} r^{l} \\ r^{-l-1} \end{matrix} \right\} P_l^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi}$, η οποία, λόγω σφαιρικής συμμετρίας, καταλήγει στην $\varphi = \frac{A}{r}$. Για να βρούμε το A ολοκληρώνουμε την εξίσωση: $\int^R \nabla^2\varphi\, d^3x = 1 \Rightarrow \int^R \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{S} = 1 \Rightarrow 4\pi R^2\left(-\frac{A}{R^2}\right) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = -\frac{1}{4\pi}$, οπότε $G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$.

Η θεμελιώδης λύση για την κυματική εξίσωση βρίσκεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\varphi_{tt} = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t')$$

$$\varphi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\tilde{\varphi}(\vec{k},\omega)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{k},\omega) = \int d^3x\int dt\,\varphi(\vec{x},t)\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\varphi} = 1 \Rightarrow \tilde{\varphi} = \frac{c^2}{\omega^2-k^2c^2} \Longrightarrow$$

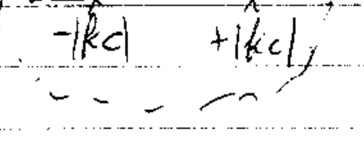
$$\Rightarrow \varphi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{c^2}{\omega^2-k^2c^2}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

Διαλέγουμε τον άξονα των z κατά μήκος του $\vec{x}$, οπότε $\varphi(\vec{x},t) = \frac{c^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty k^2dk\; 2\pi\int_{-1}^{1}d(\cos\vartheta)\int d\omega\,\frac{1}{\omega^2-k^2c^2}\,e^{ikr\cos\vartheta}\,e^{-i\omega t} =$

$$= \frac{c^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2dk\int d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-k^2c^2}\,\frac{1}{ikr}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{c^2}{ir}\int_{-\infty}^{+\infty}k\,dk\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{\omega^2-k^2c^2}.$$

Για το ολοκλήρωμα ως προς ω έχουμε δύο πόλους:



και επιλέγουμε να τους παρακάμψαμε όπως δείχνει το σχήμα. Αν $t<0$, $e^{-i(\omega_R+i\omega_I)t} \sim e^{\omega_I t} \to 0$, για θετικά ω_I, οπότε κλείνουμε "από πάνω", δεν περικλείουμε κανέναν πόλο, και το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Αν $t>0$, πρέπει προφανώς να κλείσουμε "από κάτω", οπότε περιλαμβάνονται και οι δύο πόλοι και το ολοκλήρωμα είναι:

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{c^2}{ir}\int_{-\infty}^{+\infty} k\,dk\, e^{ikr}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-k^2c^2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{c^2}{ir}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,k\,e^{ikr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2kc}\left[\frac{1}{\omega-kc}-\frac{1}{\omega+kc}\right]e^{-i\omega t}\,d\omega =$$

$$= \frac{c}{2i(2\pi)^3 r}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,e^{ikr}\left[-2\pi i\,e^{-ikct}-(-2\pi i)\,e^{+ikct}\right] =$$

$$= -\frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,e^{ikr}\left(e^{-ikct}-e^{+ikct}\right) = -\frac{c}{8\pi^2 r}\Big[2\pi\delta(r-ct) -$$

$$-\underbrace{2\pi\delta(r+ct)}_{}{}^{\to 0}\Big] = -\frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct).$$ Τελικά:

$$G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \begin{cases} 0, & t<t' \\ -\dfrac{c}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left[|x-x'|-c(t-t')\right], & t>t'\end{cases}$$

Δηλαδή η λύση γράφεται:

$$\varphi(\vec{x},t) = -\frac{c}{4\pi}\int d^3x'\,dt'\,f(\vec{x}',t')\,\frac{\delta\left[|\vec{x}-\vec{x}'|-c(t-t')\right]}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{f\left(\vec{x}', t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Καθυστερημένο δυναμικό.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x'} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial t'} = -\frac{\partial \xi_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x'}\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2} = -\frac{1}{c}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{}}\cancel{2}(x'-x) = -\frac{1}{c}\frac{x'-x}{|\vec{x}'-\vec{x}|}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial t'} = -1.$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dot{\xi}_x \\ 0 & 1 & 0 & -\dot{\xi}_y \\ 0 & 0 & 1 & -\dot{\xi}_z \\ -\frac{1}{c}\frac{x'-x}{|\vec{x}-\vec{x}'|} & -\frac{1}{c}\frac{y'-y}{|\vec{x}-\vec{x}'|} & -\frac{1}{c}\frac{z'-z}{|\vec{x}-\vec{x}'|} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\dot{\xi}_y \\ 0 & 1 & -\dot{\xi}_z \\ y'-y & z'-z & c|\vec{x}-\vec{x}'| \end{vmatrix}\left(-\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) +$$

$$+\dot{\xi}_x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x'-x & y'-y & z'-z \end{vmatrix}\left(-\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left[\begin{vmatrix} 1 & -\dot{\xi}_z \\ z'-z & c|\vec{x}-\vec{x}'| \end{vmatrix} + \dot{\xi}_y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y'-y & z'-z \end{vmatrix} + \dot{\xi}_x (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x'-x & z'-z \end{vmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left[c|\vec{x}-\vec{x}'| + \dot{\xi}_z(z'-z) + \dot{\xi}_y(y'-y) + \dot{\xi}_x(x'-x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left[c|\vec{x}-\vec{x}'| + \dot{\vec{\xi}}(t')\cdot(\vec{x}'-\vec{x})\right] =$$

Έστω ότι $f(\vec{x}', t') = \delta(\vec{x}' - \vec{\xi}(t'))$. Τότε

$$\varphi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \int dt' \frac{\delta[\vec{x}' - \vec{\xi}(t')]\,\delta(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\int dx\,dy\,dz\,dt\; \delta[f_1(xyzt)]\,\delta[f_2(xyzt)]\,\delta[f_3(xyzt)]\,\delta[f_4(xyzt)] =$$

$$= \int df_1\,df_2\,df_3\,df_4 \left|\frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1f_2f_3f_4)}\right| \delta(f_1)\,\delta(f_2)\,\delta(f_3)\,\delta(f_4) =$$

$$= \left|\frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1f_2f_3f_4)}\right| = \left|\frac{\partial(f_1f_2f_3f_4)}{\partial(xyzt)}\right|^{-1}.$$

Στην περίπτωσή μας: $\begin{bmatrix} f_1 = x' - \xi_x(t') \\ f_2 = y' - \xi_y(t') \\ f_3 = z' - \xi_z(t') \\ f_4 = t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'| \end{bmatrix}$, άρα

$$\cancel{\varphi(\vec{x}, t)}\; J = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\left[|\vec{x} - \vec{x}'| + \frac{1}{c}\dot{\vec{\xi}}(t')\cdot(\vec{x}' - \vec{x})\right] \text{ και}$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\cancel{|\vec{x} - \vec{x}'|}}\left|\frac{1}{-\frac{1}{\cancel{|\vec{x} - \vec{x}'|}}\left[|\vec{x} - \vec{x}'| + \frac{1}{c}\dot{\vec{\xi}}(t')\cdot(\vec{x}' - \vec{x})\right]}\right| =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'| + \frac{1}{c}\dot{\vec{\xi}}(t')\cdot(\vec{x}' - \vec{x})}, \quad t' = t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|$$

Δυναμικό Lienard-Wiechert.