Συναρτημένη εξίσωση Legendre

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

Αν η y είναι λύση της Legendre, η $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m y}{dx^m}$ είναι λύση της συναφούς Legendre. Ορίζουμε τα συναρτημένα πολυώνυμα Legendre: $P_n^{|m|} = (1-x^2)^{|m|/2}\dfrac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_n(x)$

Υπάρχει, βέβαια, και η δεύτερη λύση: $Q_n^m(x)$, με ανωμαλίες στα $x=\pm 1$. Σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l^{|m|}(x)\, P_{l'}^{|m|}(x) = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\,\frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

(Αποδεικνύεται με παραγοντικές, όπως η αντίστοιχη σχέση για τα $P_n(x)$). Υπάρχει ακόμα η σειρά $f(x) = \sum_{n=|m|}^{\infty} c_n P_n^{|m|}$, αλλά βασικά χρησιμοποιείται η $f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{mn} P_n^{|m|}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$ υπό τη μορφή των σφαιρικών αρμονικών:

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} \times \begin{cases} (-1)^m, & m \geq 0 \\ 1, & m < 0 \end{cases}$$

Η σχέση αυτή (παραλείποντας τα διάφορα $(-1)^m$)

μπορεί να γραφτεί και ως: $(N \equiv [\quad]^{1/2})$

$$Y_{\ell m}(\underline{\Omega}) = N\left(1-\cos^2\vartheta\right)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{d(\cos\vartheta)^{|m|}} P_\ell\, e^{im\varphi} =$$

$$= N \sin^{|m|}\vartheta \frac{d^{|m|}}{d(\cos\vartheta)^{|m|}} e^{im\varphi} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d(\cos\vartheta)^\ell}\left(\cos^2\vartheta-1\right)^\ell =$$

$$= \frac{N}{2^\ell \ell!} \sin^{|m|}\vartheta\, e^{im\varphi} \frac{d^{\ell+|m|}}{d(\cos\vartheta)^{\ell+|m|}}\left(\cos^2\vartheta-1\right)^\ell$$

Με το $(-1)^m$ γίνεται $(-\sin\vartheta)^m$

έχει νόημα και για αρνητικά m.

Είναι φανερό ότι $Y_{\ell,-m}(\underline{\Omega}) = (-1)^m Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega})$.

Αποδεικνύεται ότι $\int d\underline{\Omega}\, Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega})\, Y_{\ell' m'}(\underline{\Omega}) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$

Η σειρά του Laplace είναι η $f(\underline{\Omega}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell m} Y_{\ell m}(\underline{\Omega})$

όπου $B_{\ell m} = \int d\underline{\Omega}\, Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}) f(\underline{\Omega})$

Αθροιστικό θεώρημα:

$$f(\underline{\Omega}) = \sum_{\ell m} B_{\ell m} Y_{\ell m}(\underline{\Omega}) = \sum_{\ell m}\int d\underline{\Omega}'\, Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}') f(\underline{\Omega}') Y_{\ell m}(\underline{\Omega})$$

$$= \int d\underline{\Omega}' f(\underline{\Omega}') \sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}')\, Y_{\ell m}(\underline{\Omega}) \Rightarrow \boxed{\sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}') Y_{\ell m}(\underline{\Omega}) = \delta(\underline{\Omega}'-\underline{\Omega})}$$

Η $\delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}')$ εξαρτάται μόνο από τη γωνία γ μεταξύ των διανυσμάτων $\underline{\Omega}$ και $\underline{\Omega}'$, δηλαδή

$\delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell P_\ell(\cos\gamma)$, όπου $B_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\gamma)\cdot\delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}') P_\ell(\cos\gamma) = \frac{2\ell+1}{2}\int \frac{d\underline{\Omega}}{2\pi}\,\delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}')P_\ell(\cos\gamma) =$

$= \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(1)^{\to 1}$. Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι ο άξονας των $\hat z$ κατευθύνεται κατά την $\underline{\Omega}'$, οπότε $\gamma \to \theta$, $d\underline{\Omega} = d\varphi\, d(\cos\gamma)$. (Υπενθυμίζουμε ότι

$\cos\gamma = \hat n \hat n' = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\cdot(\sin\theta'\cos\varphi', \sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta')$

$= \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\theta\sin\theta'\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\theta\cos\theta' =$

$= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$).

Τελικά $\boxed{\delta(\underline{\Omega}-\underline{\Omega}') = \sum_{\ell,m} Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}')\, Y_{\ell m}(\underline{\Omega}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\gamma)}$ (A)

Παρατήρηση: $Y_{\ell 0}(\underline{\Omega}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\theta) \Rightarrow P_\ell(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_{\ell 0}(\underline{\Omega})$,

όπου γ τώρα είναι γωνία στο σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα των $\hat z$ κατά την $\underline{\Omega}'$. Κατά την αλλαγή συντεταγμένων θα ισχύει: $P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m'} A^{\ell}_{0m'}(\underline{\Omega}')\, Y_{\ell m'}(\underline{\Omega})$.

Συγκρίνοντας με την (A) συμπεραίνουμε ότι η (A) ωφείλει να ισχύει χωριστά για κάθε ℓ:

$$\boxed{P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\underline{\Omega}')\, Y_{\ell m}(\underline{\Omega})}$$

Συναρτήσεις Bessel

Έχουμε ήδη λύσει την εξίσωση Bessel με τη μέθοδο του Frobenius της ανάπτυξης σε σειρά. Η εξίσωση είναι η $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$ και η λύση γράφεται και με τη μορφή της συνάρτησης Bessel:

$$J_m(x)=\frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\left[1-\frac{1}{m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4-+\dots\right]=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tau}}{\tau!\,\Gamma(m+\tau+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\tau}.$$

Αν στη θέση του m μπεί το $-m$ (ακέραιο), οι παράγοντες $\Gamma(-m+0+1)$, $\Gamma(-m+1+1)$, …, $\Gamma(-m+(m-1)+1)$ θα είναι άπειροι, άρα οι αντίστοιχοι όροι θα μηδενίζονται. Το άθροισμα θα γράφεται:

$$J_{-m}=\sum_{\tau=m}^{\infty}\frac{(-1)^{\tau}}{\tau!\,\Gamma(-m+\tau+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2\tau}\underset{\tilde{\tau}=\tau-m}{=}$$

$$=\sum_{\tilde{\tau}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{\tau}+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2\tilde{\tau}+2m}}{(\tilde{\tau}+m)!\,\Gamma(\tilde{\tau}+1)}=(-1)^m\sum_{\tilde{\tau}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{\tau}}}{\tilde{\tau}!\,\Gamma(\tilde{\tau}+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\tilde{\tau}}=$$

$=(-1)^m J_m$, άρα δεν βρίσκουμε ανεξάρτητη λύση για ακέραια m.

Αναδρομικές σχέσεις.

$$J_{m-1}+J_{m+1} = \sum_0^\infty \left[\frac{(-1)^r}{r!(m+r-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m-1} + \frac{(-1)^r}{r!(m+r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^r}{r!(r+m-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} + \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}\sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r!(m+1+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(r+1)} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}\sum_1^\infty\left[\frac{(-1)^r}{r!(r+m-1)!} - \frac{(-1)^r}{(r-1)!(r+m)!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{(m-1)!} + \sum_1^\infty (-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\frac{1}{r!(r+m)!}\big((r+m)-r\big)\right] =$$

$$= m\sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r!(r+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r-1} = \frac{2m}{x}\sum_0^\infty\frac{(-1)^r}{r!(r+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{m-1}+J_{m+1} = \frac{2m}{x}J_m}$$ Παρόμοια:

$$\boxed{J_{m-1}-J_{m+1} = 2J_m'}$$ Από αυτές τις δύο αθροίζοντας λύνοντας, έχουμε:

$$J_{m-1} = \frac{m}{x}J_m + J_m', \quad J_{m+1} = \frac{m}{x}J_m - J_m'$$

Αν το m είναι ημιακέραιο, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι $J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις μπορούν να βρεθούν από τις αναδρομικές σχέσεις.

Αν το m δεν είναι ακέραιος, δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι οι J_m και J_{-m}. Για να καλύψουμε και την περίπτωση ακέραιου m, ορίζουμε την $Y_m = \dfrac{\cos m\pi\, J_m - J_{-m}}{\sin m\pi}$. Η $W = J_m Y_m' - J_m' Y_m$ είναι μη μηδενική για όλα τα m.

Σημειώνουμε ότι $J_0' = J_1$. Από τις αναδρομικές σχέσεις: $(x^n J_n)' = n x^{n-1} J_n + x^n J_n' = x^n \left[\frac{n}{x} J_n + J_n'\right] = x^n J_{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(x^n J_n)' = x^n J_{n-1}}, \text{ όμοια } \boxed{\left(\frac{J_n}{x^n}\right)' = -\frac{J_{n+1}}{x^n}}$$

<u>Ορθογωνιότητα</u>

$$\left[\frac{d^2 J_m(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_m(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(kx)\right] \times J_m(lx) = 0$$

$$\left[\frac{d^2 J_m(lx)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_m(lx)}{dx} + \left(l^2 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(lx)\right] \times J_m(kx) = 0$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε: $\dfrac{d}{dx}\left[x\left(J_m(kx)\dfrac{dJ_m(lx)}{dx} - \dfrac{dJ_m(kx)}{dx}J_m(lx)\right)\right]$

$$= -(k^2 - l^2)\, x\, J_m(kx) J_m(lx) \Rightarrow x\left(J_m(kx)\frac{dJ_m(lx)}{dx} - \frac{dJ_m(kx)}{dx}J_m(lx)\right)\Bigg|_a^b$$

$$= -(k^2 - l^2)\int_a^b dx\, x\, J_m(kx) J_m(lx).$$

Άρα, αν $k^2 \neq l^2$ (και [illegible] μηδενίζεται [illegible])

$$\int_a^b dx\, x\, J_m(kx) J_m(lx) = 0$$

Αν $k=\ell$, ωφέλει να υπολογίσουμε το

$$\int dx\, x\, J_m^2(kx) = \frac{1}{k^2}\int dy\, y\, J_m^2(y):$$

$$\int dy\, y\, J_m^2 = \frac{1}{2}\int d(y^2)\, J_m^2 = \frac{1}{2}y^2 J_m^2 - \frac{1}{2}\int y^2\, 2 J_m J_m'\, dy =$$

εξ. Bessel

$$= \frac{1}{2}y^2 J_m^2 - \int dy\, J_m' \underbrace{(y^2 J_m)}_{} = \frac{y^2 J_m^2}{2} - \int dy\, J_m'(m^2 J_m -$$

$$- y J_m' - y^2 J_m'') = \frac{y^2 J_m^2}{2} - m^2\frac{J_m^2}{2}$$

$$+ \int dy\, y\, J_m'^2 + \int dy\, J_m'(y^2 J_m'') = \frac{(y^2-m^2)J_m}{2} + \int dy (y J_m')\left[J_m' +\right.$$

$$\left. + y J_m''\right] = \frac{(y^2-m^2)J_m^2}{2} + \int dy\,(y J_m')(y J_m')' =$$

$$= \frac{(y^2-m^2)J_m^2}{2} + \frac{1}{2}(y J_m')^2.$$ Δηλαδή!

$$\boxed{\int dx\, x\, J_m^2(kx)} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{k^2x^2-m^2}{2}J_m^2(kx) + \frac{k^2x^2 J_m'^2(kx)}{2}\right]$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{m^2}{k^2}\right)J_m^2(kx) + \frac{x^2}{2}J_m'^2(kx)}$$ Αν $J_m(ka) =$

$= J_m(kb) = 0$, θα είχαμε: $\int_a^b dx\, x\, J_m^2(kx) = \frac{x^2}{2}\left[J_m'(kx)\right]^2\Big|_a^b$

$$\cancel{= \frac{1}{2}x^2\frac{1}{4}\left[J_{m-1}^2 + J_{m+1}^2 - 2J_{m-1}J_{m+1}\right]\Big|_a^b} = \left(J_m' = \frac{m}{x}J_m - J_{m+1}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{m^2}{x^2}J_m^2 + J_{m+1}^2 - 2\frac{m}{x}J_m J_{m+1}\right)\Big|_a^b - \frac{x^2}{2}J_{m+1}^2(kx)\Big|_a^b$$

Σειρά Bessel: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m(k_n x),\ x \in [0,a]$

Αν εξασφαλίσουμε τα k_n είναι ώστε $J_m(k_n a) = 0$, θα ισχύει: $\int_0^a dx\, x\, J_m(k_n x) J_m(k_p x)\, dx = \delta_{np}\frac{a^2}{2}[J_{m+1}(k_p a)]^2$ (αν $m+1 \neq 0$).

και: $c_n = \dfrac{\int_0^a dx\, x\, f(x)\, J_m(k_n x)}{\frac{a^2}{2}J_{m+1}^2(k_n a)}$

Θα μπορούσαμε να πάμε σε ένα διάστημα $[a,b]$ και να χρησιμοποιήσουμε ~~στη θέση~~ το ανάπτυγμα σε:

$f(x) = \sum c_n [J_m(k_n x) Y_m(k_n a) - Y_m(k_n x) J_m(k_n a)]$ και να εξασφαλίσουμε τα k_n, ώστε $[\ ]|_b = 0$.

Γεννήτρια συνάρτηση

$F(z,h) = \sum_n h^n J_n(z)$. Ξεκινάμε από την αναδρομική σχέση: $J_{m+1}h^m + J_{m-1}h^m = \frac{2m}{z}J_m h^m \Rightarrow \frac{1}{h}\sum J_{m+1}h^{m+1} +$

$+ h\sum J_{m-1}h^{m-1} = \frac{2}{z}\sum m J_m h^m \Rightarrow \frac{1}{h}F + hF =$

$= \frac{2}{z}h\frac{\partial F}{\partial h} \Rightarrow \frac{dF}{F} = \left(\frac{1}{h^2}+1\right)\frac{z}{2}\frac{dh}{h} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln F = K(z) + \left(\int \frac{dh}{h^2} + \int dh\right)\frac{z}{2} \Rightarrow \ln F = K(z) + \frac{z}{2}\left(-\frac{1}{h} + h\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{F = e^{K(z)} e^{\frac{z}{2}\ln h} e^{\frac{z h}{2}}} \Rightarrow F = e^{K(z)} e^{\frac{z}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)}.$$

Ο συντελεστής του h^0 είναι $e^{K(z)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 \binom{2}{1}(-1)^1 + \frac{1}{4!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 \binom{4}{2}(-1)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^6 \binom{6}{3}(-1)^3\frac{1}{6!} + \dots\right) =$

$$= e^{K(z)}\left(1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!\,3!}\left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots\right) = e^{K(z)} J_0(z).$$

Αν απαιτήσουμε ο συντελεστής να είναι το $J_0(z)$, αρκεί $K(z) = 0$, οπότε:

$$\boxed{F(z,h) = e^{\frac{z}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)} = \sum_n h^n u_n(z)}$$

Από τη γεννήτρια συνάρτηση βρίσκουμε τις αναδρομικές σχέσεις, αφ' όσον $u_0' = \frac{1}{2}(u_{-1} - u_1) \to u_1 = -u_0' = -J_0' = J_1$. Άρα $u_0 = J_0$ και $u_1 = J_1$, οι αναδρομικές σχέσεις διασφαλίζουν ότι $u_n = J_n$.

Άλλη εφαρμογή της γεννήτριας συνάρτησης:

$$\sum_n J_n(x+y) h^n = e^{\frac{x+y}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)} = e^{\frac{x}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)} e^{\frac{y}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)} =$$

$$= \sum_k h^k J_k(x) \sum_l h^l J_l(y) = \sum_{k,n} J_k(x) J_{n-k}(y) h^n \to$$

$$\to \boxed{J_n(x+y) = \sum_k J_k(x) J_{n-k}(y)}$$

Από την $F(z,h)=\sum J_n(z)h^n$ ξέρουμε ότι

$J_n(z)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial h^n}\Big|_{h=0}$. Ο τύπος του Cauchy δίνει:

περιμετρική καμπύλη

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial h^n}\Big|_{h=0}=\frac{1}{\cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{2\pi i}\oint\frac{F(z,t)\,dt}{(t-0)^{n+1}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boxed{J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\,dt}$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση του Schläfli

Θέτοντας $t=e^{i\vartheta}$: $J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\frac{z}{2}2i\sin\vartheta}}{e^{i\vartheta(n+1)}}\,ie^{i\vartheta}\,d\vartheta=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(z\sin\vartheta-n\vartheta)}\,d\vartheta\Rightarrow\boxed{J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\vartheta-z\sin\vartheta)\,d\vartheta}$$

Ολοκλήρωμα Bessel.

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$f_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu+1}}\,dt$$

και ας εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες λύνει την εξίσωση Bessel. Δρούμε πάνω του με τον τελεστή Bessel: $\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+z^2-\nu^2\right]f_\nu(z)=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dt}{t^{\nu+1}}\, e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\left[z^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + z\left(\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right) + z^2 - \nu^2\right]$$

Αλλά
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu}}\left(\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\nu\right)\right] = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\cdot\left\{-\nu t^{-\nu-1}\cdot\left(\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\nu\right)+\frac{1}{t^{\nu}}\left[\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\nu\right)+\frac{z}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu+1}}\left[\cancel{-\frac{\nu z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} - \nu^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 + \cancel{\frac{\nu z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} + \frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu+1}}\left[\underbrace{\left(\frac{z}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + \cancel{4}\frac{z^2}{\cancel{4}}} + \frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) - \nu^2\right]$$

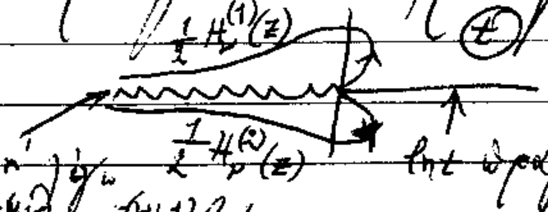
το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\frac{1}{2\pi i}\int dt\, \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu}}\left(\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\nu\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{\nu}}\left(\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\nu\right)\right]\Bigg|$$

Πρέπει να αφαιρέσουμε τις τιμές στα άκρα του μονοπατιού. Αν η διαφορά είναι μηδέν, το ολοκλήρωμα λύνει την εξίσωση Bessel. Αν το $\nu = n$ (ακέραιος), οποιοδήποτε κλειστό διάδρομο κάνει (που δεν περιλαμβάνει την αρχή).

Αν το ν δεν είναι ακέραιος και ότι το z είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε η συνάρτηση μέσα στις αγκύλες μηδενίζεται καθώς: (α) $t \to 0+$ και (β) $t \to -\infty$. Άρα μπορούμε να ξεπροσμεθοδεύσουμε τα δύο μονοπάτια:



Τα αθροιζόμενα λέγονται συναρτήσεις <u>Hankel</u>.

Για ακέραιο $\nu = n$: $\frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)\right] = J_n(z)$, αφού το μονοπάτι περικλείει την αρχή. Αυτός ο ορισμός είναι σωστός μόνο για $\mathrm{Re}(z) > 0 \Rightarrow |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$.

Αν αυτό δεν ισχύει, πρέπει να στραφούν αλλιώς.

Σημειώνουμε ότι:
$$\begin{cases} H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\,Y_n(x) \\ H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\,Y_n(x) \end{cases}$$

Ασυμπτωτικές μορφές:

$$J_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$H_n^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_n^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel:

$$I_n(z) = \frac{J_n(iz)}{i^n}, \quad K_n(z) = \frac{i\pi}{2} i^n H_n^{(1)}(iz).$$

$$I_n(z) \to \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)}, \text{ καθώς } z \to 0$$

$$K_n(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-z}, \text{ καθώς } z \to \infty$$

$$J_n\left(x e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \equiv \mathrm{ber}_n x + i\, \mathrm{bei}_n x$$

Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Υπεργεωμετρικές συναρτήσεις

Εισαγωγή: Θεωρούμε την εξίσωση $y'' + Py' + Qy = 0$, η οποία έχει τρία κανονικά ανώμαλα σημεία, ξ, η, ζ.

Τότε: $P = \dfrac{\text{πολυώνυμο}}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}$, $Q = \dfrac{\text{πολυώνυμο}}{(z-\xi)^2(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}$.

Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 1 με τις διαφορικές εξισώσεις, για να είναι το άθροισμα συνηθισμένο ομαλό σημείο, θα πρέπει οι εκφράσεις $2z - z^2 P(z)$ και $z^4 Q(z)$ να είναι πεπερασμένες για $|z| \to \infty$. Στην περίπτωσή μας:

$$2z - \frac{z^2 P_1(z)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \quad \text{και} \quad \frac{z^4 Q_1(z)}{(z-\xi)^2(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}$$

να είναι πεπερασμένα στο άπειρο. Για την P_1 αυτό σημαίνει ότι το $P_1(z)$ πρέπει να είναι δεύτερου βαθμού, ώστε να γίνει ίσο με την z στο όριο $|z| \to \infty$ για να αναιρεί το $2z$. Γράφοντας

$$\boxed{\frac{P_1(z)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} = \frac{A}{z-\xi} + \frac{B}{z-\eta} + \frac{C}{z-\zeta}} =$$

$$= \frac{A(z^2-(\eta+\zeta)z+\eta\zeta) + B(z^2-(\xi+\zeta)z+\xi\zeta) + C(z^2-(\xi+\eta)z+\xi\eta)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}$$

και απαιτώντας στην συνθήκη:

πολλαπλασιασμός του $2z$

$$\Big[(2z^2-2\xi z)(z^2-(\xi+\eta)z+\xi\eta) - (A+B+C)z^4 - A(\eta+\zeta)z^3 - B(\xi+\zeta)z^3 - C(\xi+\eta)z^3 - A\eta\zeta z^2 - B\xi\zeta z^2 - C\xi\eta z^2\Big]$$

$$/(\;)(\;)(\;) = \text{σταθ} \xrightarrow{z\to\infty} \frac{(2-A-B-C)z^4 + O(z^3)}{z^3} = \text{σταθ}$$

$\Rightarrow \boxed{A+B+C=2}$. Για την Q, το Q_1 θα πρέπει να είναι (το πολύ) δεύτερου βαθμού, άρα

$$Q = \frac{1}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \left[\frac{D}{z-\xi} + \frac{E}{z-\eta} + \frac{F}{z-\zeta} \right].$$

Ας θεωρήσουμε τον πόλο σε $z=\zeta$ και ας ψάξουμε να βρούμε λύση που σ' αυτήν την περιοχή είναι σαν $y \sim (z-\zeta)^{\alpha}$, $P \simeq \frac{A}{z-\zeta} + \cancel{\frac{B}{\zeta-\eta}} + \cancel{\frac{C}{\zeta-\xi}}$,

$Q \simeq \frac{1}{(z-\zeta)(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)}\left[\frac{D}{z-\zeta} + \cancel{\frac{E}{\zeta-\eta}} + \cancel{\frac{F}{\zeta-\xi}}\right]$ και η εξίσωση

γίνεται $\alpha(\alpha-1)(z-\zeta)^{\alpha-2} + \frac{A}{z-\zeta}\,\alpha(z-\zeta)^{\alpha-1} + \frac{D\,(z-\zeta)^{\alpha}}{(z-\zeta)^2(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)} = 0$,

$\rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha A + \frac{D}{(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)} = 0$. Αν α_1 και α_2 είναι οι δύο ρίζες, θα ισχύουν

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2 = 1-A\\[4pt] \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{D}{(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}A = 1-\alpha_1-\alpha_2\\[4pt] D = \alpha_1\alpha_2(\zeta-\eta)(\zeta-\xi)\end{array}\right\}.$$ Παρόμοια:

$$\left\{\begin{array}{l}B = 1-b_1-b_2\\[4pt] E = b_1b_2(\eta-\zeta)(\eta-\xi)\end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{l}C = 1-\gamma_1-\gamma_2\\[4pt] F = \gamma_1\gamma_2(\xi-\zeta)(\xi-\eta)\end{array}\right\}$$ και η

εξίσωση γράφεται:

$$\boxed{y'' + \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-\zeta} + \frac{1-b_1-b_2}{z-\eta} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-\xi}\right)y' - \frac{(\zeta-\eta)(\eta-\xi)(\xi-\zeta)}{(z-\zeta)(z-\eta)(z-\xi)}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{(z-\zeta)(\eta-\xi)} + \frac{b_1b_2}{(z-\eta)(\xi-\zeta)} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{(z-\xi)(\zeta-\eta)}\right]y = 0}$$

με λύση $\boxed{y = P\left\{\begin{array}{cccc}\zeta & \eta & \xi & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & z\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\}}$ Σύμβολο P του Riemann

$$(z-\gamma)\omega(\eta-\xi) = (z-\xi)(\eta-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\omega(\eta-\xi) - \gamma\omega(\eta-\xi) = z(\eta-\gamma) - \xi(\eta-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\left[\omega(\eta-\xi) - (\eta-\gamma)\right] = \gamma\omega(\eta-\xi) - \xi(\eta-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\gamma(\eta-\xi)\omega - \xi(\eta-\gamma)}{(\eta-\xi)\omega - (\eta-\gamma)}.$$

Σημειώνουμε ότι $A+B+C=2 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+b_1+b_2+\gamma_1+\gamma_2=1$, ώστε το $z=\infty$ να είναι ομαλό σημείο.

Μετασχηματισμοί:

$$\left(\frac{z-\xi}{z-\eta}\right)^p\left(\frac{z-\zeta}{z-\eta}\right)^q P\begin{Bmatrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & z\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1+p & b_1-p-q & \gamma_1+q & z\\ \alpha_2+p & b_2-p-q & \gamma_2+q & \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$P\begin{Bmatrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & z\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}\tilde\xi & \tilde\eta & \tilde\zeta & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & \tilde z\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

όπου $\tilde\xi=\dfrac{K\xi+L}{M\xi+N}$, $\tilde\eta=\dfrac{K\eta+L}{M\eta+L}$, $\tilde\zeta=\dfrac{K\zeta+L}{M\zeta+L}$, $\tilde z=\dfrac{Kz+L}{Mz+L}$

(ομογραφικός μετασχηματισμός).

Αξιοποιούμε τις δύο ιδιότητες ώστε να αναγάγουμε την υπεργεωμετρική εξίσωση σε μια κανονική μορφή.

Η (2) μπορεί να μεταφέρει τους όρους στα σημεία 0, 1 και ∞:

$$P\begin{Bmatrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & z\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0 & \infty & 1 & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & \tilde z=\dfrac{(z-\xi)(\eta-\zeta)}{(z-\eta)(\xi-\zeta)}\\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}, \text{ δηλαδή}$$

$K=\eta-\zeta$, $L=-\xi(\eta-\zeta)$, $M=\xi-\zeta$, $N=-\eta(\xi-\zeta)$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\tilde\xi=\dfrac{(\xi-\xi)(\eta-\zeta)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}=0$, $\tilde\eta=\dfrac{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}{(\eta-\eta)(\xi-\zeta)}=\infty$, $\tilde\zeta=\dfrac{(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}{(\zeta-\eta)(\xi-\zeta)}=1$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, αν $\tilde{\eta}=\infty$, το $z-\tilde{\eta}$ στους παρονομαστές της (1) είναι σταθερό, οπότε το παραλείψαμε και καταλήξαμε στην

$$\underbrace{(\tilde{z}-\tilde{\xi})^p}_{\tilde{\xi}\to 0}\underbrace{(\tilde{z}-\tilde{\zeta})^q}_{\tilde{\zeta}\to 1} P\begin{Bmatrix} \tilde{\xi} & \tilde{\eta} & \tilde{\zeta} & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \tilde{z} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \tilde{\xi} & \tilde{\eta} & \tilde{\zeta} & \\ \alpha_1+p & \beta_1-p-q & \gamma_1+q & \tilde{z} \\ \alpha_2+p & \beta_2-p-q & \gamma_2+q & \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{z}^p(\tilde{z}-1)^q P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \tilde{z} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha_1+p & \beta_1-p-q & \gamma_1+q & \tilde{z} \\ \alpha_2+p & \beta_2-p-q & \gamma_2+q & \end{Bmatrix}$$

Ο παράγοντας $(\tilde{z}-1)^q$ μπορεί να γραφτεί με την πιο συνήθη μορφή του $(1-\tilde{z})^q$, γιατί ο παράγοντας $(-1)^q$ δεν επηρεάζει τη λύση της (ομογενούς) ΔΕ. Εφαρμόζοντας αυτόν το μετασχηματισμό, βρίσκουμε ότι η διαδικασία αναγωγής της ΔΕ σε τυπική μορφή μπορεί να συνεχιστεί ως εξής:

$$P\begin{Bmatrix} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = \tilde{z}^{-p}(1-\tilde{z})^{-q} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha_1+p & \beta_1-p-q & \gamma_1+q & \tilde{z} \\ \alpha_2+p & \beta_2-p-q & \gamma_2+q & \end{Bmatrix}.$$

Επιλέγουμε $\begin{cases} p=-\alpha_1 \\ q=-\gamma_1 \end{cases}$ οπότε:

$$\boxed{P\begin{Bmatrix} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = \tilde{z}^{\alpha_1}(1-\tilde{z})^{\gamma_1} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & 0 & \tilde{z} \\ \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_1+\beta_2+\gamma_1 & \gamma_2-\gamma_1 & \end{Bmatrix}}$$

Αναλυτικά οι λύσεις οποιασδήποτε υπεργεωμετρικής εξίσωσης μπορούν να γραφτούν συναρτήσει λύσεων της μορφής: $P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & \tilde{z} \\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}$, όπου θέσαμε $\left(\begin{array}{l}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=a\\ \alpha_2-\alpha_1=1-c\\ \alpha_1+\beta_2+\gamma_1=b\\ \gamma_2-\gamma_1=c-a-b\end{array}\right)$ θεωρώντας να ικανοποιείται η $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=1$. Αντικαθιστώντας τα $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$: $\left|\begin{array}{l}\alpha_1=0\\ \alpha_2=1-c\end{array}\right|\begin{array}{l}\beta_1=a\\ \beta_2=b\end{array}\left|\begin{array}{l}\gamma_1=0\\ \gamma_2=c-a-b\end{array}\right|$, η τελική μορφή της εξίσωσης γίνεται:

$$\cancel{\frac{d^2W}{d\tilde{z}^2}+\left[\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\tilde{z}-0}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{\tilde{z}-\infty}+\frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{\tilde{z}-1}\right]\frac{dW}{d\tilde{z}}-\left[\alpha_1\alpha_2\right.}$$

$$\frac{d^2W}{d\tilde{z}^2}+\frac{c-(a+b+1)\tilde{z}}{\tilde{z}(1-\tilde{z})}\frac{dW}{d\tilde{z}}-\frac{ab}{\tilde{z}(1-\tilde{z})}W=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tilde{z}(1-\tilde{z})W''+\left[c-(a+b+1)\tilde{z}\right]W'-abW=0.}$$

(Για επαλήθευση: $\frac{d^2W}{d\tilde{z}^2}+\left(\frac{1-\overset{0}{\alpha_1}-\overset{1-c}{\alpha_2}}{\tilde{z}-\zeta}+\frac{1-\overset{a}{\beta_1}-\overset{b}{\beta_2}}{\tilde{z}-\underset{\to\infty}{\eta}}+\frac{1-\overset{0}{\gamma_1}-\overset{c-a-b}{\gamma_2}}{\tilde{z}-\xi}\right)\frac{dW}{d\tilde{z}}-$

$$-\left(\frac{\overset{0}{\alpha_1}\overset{1-c}{\alpha_2}}{(\tilde{z}-\zeta)(\eta-\xi)}+\frac{\overset{a}{\beta_1}\overset{b}{\beta_2}}{(\tilde{z}-\underset{\to\infty}{\eta})(\xi-\zeta)}+\frac{\overset{0}{\gamma_1}\overset{c-a-b}{\gamma_2}}{(\tilde{z}-\xi)(\zeta-\eta)}\right)\frac{(\zeta-\eta)(\eta-\xi)(\xi-\zeta)}{(\tilde{z}-\zeta)(\tilde{z}-\underset{\to\infty}{\eta})(\tilde{z}-\xi)}W=0$$

$$\Rightarrow W''+\left(\frac{c}{z}+\cancel{\frac{1-a-b}{-\infty}}+\frac{1-c+a+b}{z-1}\right)W'-\left(\frac{ab}{(-\infty)(1)}\right)\frac{(-\infty)(\infty)(1)}{(z)(\infty)(z-1)}W=0\Big)$$

Οι δύο λύσεις είναι: η $F(a,b;c;\tilde{z}) = 1+\frac{ab}{c}\frac{\tilde{z}}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{\tilde{z}^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{\tilde{z}^n}{n!}$

και η $\tilde{z}^{1-c}F(1+a-c,1+b-c;2-c;\tilde{z})$. Τη δεύτερη μπορούμε να την βρούμε εναλλάσσοντας τα α_1 και α_2 στην αρχική: $P\left\{\begin{matrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & \end{matrix}\right\} \to P\left\{\begin{matrix}\xi & \eta & \zeta & \\ \alpha_2 & b_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_1 & b_2 & \gamma_2 & \end{matrix}\right\}$

και κάνοντας όλη τη διαδικασία αναγωγής:

$$P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 1-c & a & 0 & \tilde{z} \\ 0 & b & c-a-b & \end{matrix}\right\} = \tilde{z}^{1-c}P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & a+1-c & 0 & \tilde{z} \\ -1+c & b+1-c & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

$$F(a,b;c;\tilde{z}) = P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & \tilde{z} \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}$$

$$F(1+a-c,1+b-c;2-c;\tilde{z}) = P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & 1+a-c & 0 & \tilde{z} \\ -1+c & 1+b-c & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

$1-(-1+c)$

Μπορούμε να μετατρέψουμε τα $(0\ \infty\ 1)$ σε $(\infty\ 0\ 1)$, $(\infty\ 1\ 0)$, κτλ έξι φορές και για κάθε μία να βρούμε τους τέσσερις συνδυασμούς $\begin{pmatrix}\alpha_1 & b_1\\ \alpha_2 & b_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_2 & b_1\\ \alpha_1 & b_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1 & b_2\\ \alpha_2 & b_1\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}\alpha_2 & b_2\\ \alpha_1 & b_1\end{pmatrix}$ (γιατί όχι $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$;) κι έτσι

καθορίζουμε 24 λύσεις της υπεργεωμετρικής εξίσωσης, εκ των οποίων μόνο δύο είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-xt)^{-\alpha}\right] = (-\alpha)(1-xt)^{-\alpha-1}(-$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\left[(1-xt)^{-\alpha}\right] = (-\alpha)(-\alpha$$

$$= \alpha(\alpha+1)\,t^2(1-xt)^{-\alpha-2}$$

Ομογαφωτική αναπαράσταση:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_0^\infty \Gamma(a+n) \underbrace{B(c-b, b+n)}_{\int_0^1 dt(1-t)^{c-b-1} t^{b+n-1}} \frac{x^n}{n!} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt\, (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{(xt)^n}{n!} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt\, (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} (1-xt)^{-a} \cdot (X) $$

Φαίνεται ότι η ${}_2F_1(a,b;c;x)$ σχετίζεται με την $f(x) = \int dt (1-t)^{c-b-1} t^{b-1}(1-tx)^{-a}$. Εφαρμόζουμε τον τελεστή στην $f(x)$: $x(1-x)f'' + [c-(a+b+1)x] f' - abf =$

$$ = \int dt (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} \left[x(1-x)(+a)(+a+1) \cdot t^2 (1-xt)^{-a-2} + [c-(a+b+1)x]\, a t (1-xt)^{-a-1} - ab (1-xt)^{-a} \right] = $$

(Παρατήρηση: $\frac{d}{dt}\left[t^b(1-t)^{c-b}(1-tx)^{-a-1}\right] = b\, t^{b-1}(1-t)^{c-b}(1-tx)^{-a-1} +$

$+ t^b (1-t)^{c-b-1}(c-b)(-1)(1-tx)^{-a-1} + t^b(1-t)^{c-b}(-a-1)(1-tx)^{-a-2}(-x) =$

$= t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a-2}\left[b(1-t)(1-tx) - (c-b)t(1-tx) + (a+1)xt(1-t)\right.$

$\left. - b(-1+tx) + t(c(-1-tx) + (a+1)(-1+t)x)\right]$

$$= a\int dt\, t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a-2}\Big[(a+1)x(1-x)t^2+(c-(a+b+1)x)t(1-xt)-b(1-xt)^2\Big]=\int\cdots\big[b\,\cancel{(\cdots)(1-xt)}+\cancel{b(1-xt)}\big]$$

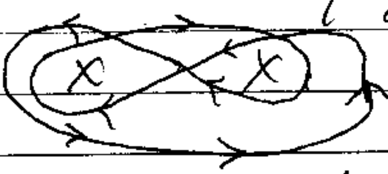
$$= a\int\cdots\Big[b(1-xt)(-xt-1+xt)+(a+1)xt(t-xt-1+xt)+ct(1-xt)\Big]$$

$$= a\int dt\, t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a-2}\Big[-b(1-xt)+t\big(c(1-xt)+(a+1)x(-1+t)\big)\Big]$$

Συγκρίνοντας με την παράσταση στο τέλος της προηγούμενης σελίδας συμπεραίνουμε ότι:

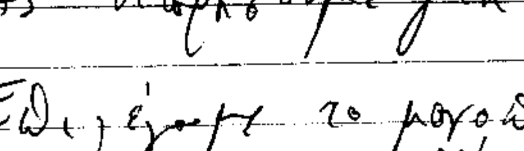
$$x(1-x)f''+\big[c-(a+b+1)x\big]f'-abf=-a\int dt\,\frac{d}{dt}\Big[t^b(1-t)^{c-b}(1-tx)^{-a-1}\Big]$$

Άρα, αν η έκφραση σε αγκύλες επιστρέφει στην αρχική της τιμή μετά τη διαδρομή, η f θα είναι λύση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης. Μια τέτοια περίπτωση είναι η διαδρομή να είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 ως το 1, οπότε επιστρέφουμε στην έκφραση ⊛ (αν $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0$). Η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει ανωμαλίες στα σημεία $0, 1, 1/x$. Αν το μονοπάτι περικυκλώνει κάποια ανωμαλία, η συνάρτηση $[\cdots]$ δεν θα επιστρέψει στην αρχική της τιμή. Άρα, η διαδρομή πρέπει να μην περικυκλώνει ανωμαλία, ή φροντίζουμε να τις θεωρήσουμε σε γενικότητα.

Pochhammer: 

Ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι το c είναι ακέραιος.

Εδώ έχουμε το μονοπάτι και τις τομές (αντιστοιχία) στο



μιγαδικό επίπεδο t.

Αναπτύσσουμε το ολοκλήρωμα σε δυνάμεις του x:

$I=\oint dt\, t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}=\oint dt\, t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}\cdot\left(1+atx+a(a+1)\frac{t^2x^2}{2!}+\dots\right)$, άρα για τον υπολογισμό χρειαζόμαστε βασικά το (βοηθητικό) ολοκλήρωμα $I'\equiv$

$\equiv\oint t^a(t-1)^{n-a}dt$, όπου το n είναι ακέραιος.

Παραμορφώνουμε το μονοπάτι, ώστε να περνάει από μεγάλα t. Τότε: $I'=\oint t^a\, t^{n-a}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{n-a}dt=$

$$=\oint t^n\left(1-\frac{1}{t}\right)^{n-a}=\oint t^n\sum_0^\infty(-1)^k\frac{(n-a)(n-a-1)\dots(n-a-k+1)}{k!}\frac{dt}{t^k}=$$

$$=\sum_0^\infty\oint dt\, t^{n-k}(-1)^k\frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a-k+1)\,k!}.$$ Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται (ολοκληρωτικά υπόλοιπα...), εκτός της τιμής $n-k=-1\Rightarrow k=n+1$. Αν $n<-1$ δεν υπάρχει κατάλληλο k, ενώ για $n\geq-1$ βρίσκουμε: $\boxed{I'=2\pi i(-1)^{n+1}\frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(-a)(n+1)!}}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

$$\Gamma(n-a+1)\Gamma(\cancel{1}-n+a-\cancel{1})=\frac{\pi}{\sin\pi(n-a+1)}\Rightarrow$$

$$\sin(\pi n-\theta)=(-1)^{n+1}\sin\theta$$

$$\Rightarrow\Gamma(n-a+1)=\frac{\pi}{(-1)^{n+1}\sin\pi(a-1)\,\Gamma(a-n)}=\frac{\pi}{(-1)^{n+1}\sin\pi a\,\Gamma(a-n)}$$

$$\Gamma(-a)\Gamma(1+a)=\frac{\pi}{-\sin\pi a}\Rightarrow\Gamma(-a)=-\frac{\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1)}$$

$$\Gamma(-a+N)\Gamma(1-N+a)=\frac{\pi}{\sin\pi(N-a)}=(-1)^{N+1}\frac{\pi}{\sin\pi a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Gamma(-a+N)=\frac{(-1)^{N+1}\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1-N)},\quad\Gamma(-a-N)=\frac{(-1)^{N+1}\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1+N)}$$

Αποδεικνύεται (βλ. σελίδα θέτα) ότι

$$\Gamma(n-a+1)=\frac{-\pi}{(-1)^{n+1}\sin\pi a\,\Gamma(a-n)},\quad \Gamma(-a)=-\frac{\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1)},\ \text{συνεπώς:}$$

$$I'=2\pi i(-1)^{n+1}\frac{\dfrac{-\pi}{(-1)^{n+1}\sin\pi a\,\Gamma(a-n)}}{\dfrac{-\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1)}(n+1)!}=+2\pi i\,\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n)(n+1)!}.$$

Επιστρέφουμε στο ολοκλήρωμα I: $I=\int dt\, t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}\cdot$

$$\cdot\left[1+atx+a(a+1)t^2\frac{x^2}{2}+\dots\right]=\int dt\, t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}+$$

$$+ax\int dt\, t^{b}(t-1)^{c-b-1}+\frac{a(a+1)x^2}{2!}\int dt\, t^{b+1}(t-1)^{c-b-1}+\dots$$

$= 2\pi i \oint$ Χρειάζεται και το ολοκλήρωμα $J_{\pm N}\equiv$

$$\equiv\oint dt\, t^{a\pm N}(t-1)^{n-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\oint dt\, t^{n\pm N-k}(-1)^k\frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a-k+1)k!}$$

Μη μηδενική είναι η συνεισφορά για $n\pm N-k=-1\Longrightarrow$

$\Longrightarrow k=n+1\pm N$. Για $n\pm N\geq -1$ θα βρούμε: $J_{\pm N}=2\pi i(-1)^{n+1\pm N}\cdot$

$$\cdot\frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a+1-n-1\mp N)(n+1\pm N)!}\Rightarrow \boxed{J_{\pm N}=2\pi i\,\frac{(-1)^{n+1\pm N}\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(-a\mp N)(n\pm N+1)!}}$$

Επίσης έχουμε: $\Gamma(-a\mp N)=\dfrac{(-1)^{N+1}\pi}{\Gamma(a+1\pm N)\sin\pi a}$ (βλ. θέτα σελίδα),

οπότε:
$$J_{\pm N}=2\pi i\,\frac{(-1)^{n+1}(-1)^N\dfrac{-\pi}{(-1)^{n+1}\sin\pi a\,\Gamma(a-n)}}{\dfrac{-(-1)^N\pi}{\sin\pi a\,\Gamma(a+1\pm N)}(n\pm N+1)!}=2\pi i\,\frac{\Gamma(a+1\pm N)}{\Gamma(a-n)(n\pm N+1)!}$$

Χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα και:

$$I = \int dt\, t^{(b+1)-(2)} (t-1)^{c-b-1} + ax \int dt\, t^{b+1-1} (t-1)^{c-b-1} +$$

$$+ \frac{a(a+1)}{2!} x^2 \int dt\, t^{b+1+0} (t-1)^{c-b-1} + \cdots =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\Gamma(b+2-2)}{\Gamma(b+1-c)(c-2+1)!} + ax \frac{\Gamma(b+2-1)}{\Gamma(b+1-c)(c-1+1)!} + \frac{a(a+1)}{2!} x^2 \frac{\Gamma(b+2-0)}{\Gamma(b+1-c)(c+1)} + \cdots \right]$$

Υπενθύμιση: $_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} =$

$$= 1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Επομένως:

$$I = \frac{2\pi i}{(c-1)!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+1-c)} \underbrace{\left[1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right]}_{_2F_1(a,b;c;x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{_2F_1(a,b;c;x) = (c-1)! \frac{\Gamma(b+1-c)}{\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \oint dt\, t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}}$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση (αποδείχθηκε για ακέραια c)

Συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση

Θεωρούμε την υπεργεωμετρική εξίσωση

$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0$ και θέτουμε $x = \frac{z}{b}$, $b \to \infty$, οπότε οι ιδιομορφίες μετατίθενται στα σημεία 0, b, ∞. Το κανονικό ανώμαλο σημείο στο $x=\infty$ να γίνει ουσιώδης ανωμαλία στο $z=\infty$.

Η αλλαγή μεταβλητών αναγομικά είναι:

$$\frac{z}{b}\left(1-\frac{z}{b}\right)\frac{d^2y}{d\left(\frac{z}{b}\right)^2}+\left[c-(a+b+1)\frac{z}{b}\right]\frac{dy}{d\left(\frac{z}{b}\right)}-aby=0$$

$$\Rightarrow b^2\frac{z}{\cancel{b}}\frac{d^2y}{dz^2}+\cancel{b}\left[c-z-\cancel{\frac{a+1}{b}z}\right]\frac{dy}{dz}-a\cancel{b}y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{zy''+(c-z)y'-ay=0}$$

Η λύση ${}_2F_1$ με την αλλαγή μεταβλητής και τη διαδι-
κασία ορίων δίνει: ${}_2F_1=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\dots=$

$$=1+\frac{a}{c}\cancel{b}\frac{z}{\cancel{b}}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{\cancel{b(b+1)}^{1}}{\cancel{b^2}}\frac{z^2}{2!}+\dots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{{}_1F_1(a;c;z)=1+\frac{a}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\dots}$$

Συμφωνα με γεωμετρική συνάρ... η συνάρτηση Kummer

Η δεύτερη λύση δίνει:

$$y_2=x^{1-c}{}_2F_1(1+a-c,1+b-c;2-c;x)=\frac{z^{1-c}}{b^{1-c}}\left[1+\frac{(1+a-c)(1+b-c)}{2-c}\frac{z}{b}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+a-c)(2+a-c)(1+b-c)(2+b-c)}{(2-c)(3-c)}\frac{z^2}{2!b^2}+\dots\right]\Rightarrow\frac{1}{b^{1-c}}z^{1-c}\left[1+\frac{(1+a-c)}{2-c}z+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+a-c)(2+a-c)}{(2-c)(3-c)}\frac{z^2}{2!}+\dots\right]=\frac{1}{b^{1-c}}\,z^{1-c}\,{}_1F_1(1+a-c;2-c;z).$$

το αγνοούμε

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{tz}{b}\right)^b = e^{-tz} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{tz}{b}\right)^{-b} = e^{tz}$$

Η διαδικασία του ορίου μπορεί να εφαρμοσθεί και στην ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$ {}_2F_1(b,a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \left(x=\frac{z}{b}\right) \Rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{tz}{b}\right)^{-b} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 dt\, z^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, e^{tz} \Longrightarrow $$

$$ \Longrightarrow \boxed{{}_1F_1(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{tz} \quad (\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0)} $$

Για ακέραιο c είχαμε αποδείξει ότι

$$ {}_2F_1 = (c-1)!\,\frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(a)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint dt\, t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}\left(1-\frac{tz}{b}\right)^{-b}, $$ οπότε

στο όριο: $$ \boxed{{}_1F_1(a;c;z) = (c-1)!\,\frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(a)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint dt\, t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}e^{tz}} $$

για ακέραιο c

Άλλη ολοκληρωτική αναπαράσταση για ακέραιο c:

$$ \boxed{{}_1F_1(a;c;z) = (c-1)!\, z^{1-c}\,\frac{1}{2\pi i}\oint dt\,(t-1)^{-a}\, t^{a-c}\, e^{tz}} $$

Αναπτύσσοντας, ένας τυπικός όρος είναι:

$$\oint dt\,(t-1)^{-a}\,t^{a-c}\,\frac{t^n z^n}{n!} = \frac{z^n}{n!}\oint dt\; t^{a+n-c}(t-1)^{-a} =$$

$$= \frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\oint dt\; t^{a+n-c}\,(-1)^k\,\frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a-k+1)\,k!}\,t^k =$$

$$= \frac{z^n}{n!}\sum_{0}^{\infty}\oint dt\; t^{n+k-c}\,\frac{\Gamma(1-a)\,(-1)^k}{\Gamma(1-a-k)\,k!}.$$ Μόνο το $n+k-c=-1 \Rightarrow k=c-1-n$ δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα: $\oint = \frac{z^n}{n!}\,2\pi i\,\frac{\Gamma(1-a)\,(-1)^{c-1-n}}{\Gamma(1-a-c+1+n)\,(c-1-n)!}$, άρα:

$${}_1F_1 = (c-1)!\,z^{1-c}\,\frac{1}{2\pi i}\sum \frac{z^n}{n!}\,2\pi i\,\frac{\Gamma(1-a)\,(-1)^{c-1-n}}{\Gamma(2-a-c+n)\,(c-1-n)!}$$

Πολλές γνωστές συναρτήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις της υπεργεωμετρικής συνάρτησης: $e^z = {}_1F_1(a;a;z)$, $J_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^n e^{iz}\cdot {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;-2iz\right)$, $\mathrm{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)$,

$$H_n(z) = 2^n\left[\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{n}{2})}\,z\,{}_1F_1\left(\frac{1-n}{2};\frac{3}{2};z^2\right) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n}{2})}\,{}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};z^2\right)\right]$$

$$L_n^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;z)$$

Γενική λύση

$y_1 = {}_1F_1(a;c;z)$, $y_2 = z^{1-c}\,{}_1F_1(1+a-c;2-c;z)$. Τα αρνητικά c είναι προβληματικά. Για $c=0,-1,-2,\dots$ το y_1 απειρίζει. Ισχύει: $\lim_{c\to -n}\frac{{}_1F_1(a;c;z)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)}\,\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\,{}_1F_1(a+n+1;n+2;z)$.

Για $c=1$ $y_2=y_1$, ενώ για $c=2,3,4,\dots$ η y_2 [illegible] γίνει. Σε αναλογία με τις συναρτήσεις Bessel ορίζουμε την $\frac{1}{\sin\pi c}\left[\frac{{}_1F_1(a;c;z)}{\Gamma(c)}\frac{1}{\Gamma(1+a-c)}-\frac{z^{1-c}{}_1F_1(1+a-c;2-c;z)}{\Gamma(2-c)}\frac{1}{\Gamma(a)}\right]$ η οποία είναι θεωρημένη για ακέραια c και δίνει μια θεωρημένη δεύτερη λύση.

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή προκύπτει με την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής $y=z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u$.

$zy''+(c-z)y'-ay=0$, $y'=-\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{1}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u+z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'$, $y''=\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)z^{-\frac{c}{2}-2}e^{\frac{z}{2}}u-\frac{c}{4}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u-\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u'-\frac{c}{4}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{1}{4}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{1}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'-\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u'+\frac{1}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'+z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u''=$

$=z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u''-cz^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u'+z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'-\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)e^{-\frac{c}{2}-2}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{1}{4}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u$. Η εξίσωση γράφεται:

$z^{1-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u''-cz^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'+z^{1-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'-\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{1}{4}z^{1-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u-\frac{c^2}{2}z^{-\frac{c}{2}-1}e^{\frac{z}{2}}u+\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u+cz^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'+\frac{c}{2}z^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}-\frac{1}{2}z^{1-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u-z^{1-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u'-az^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{z}{2}}u=0\Rightarrow u''-\frac{cu'}{z}+u'-\frac{c}{2}\frac{u}{z}+\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)\frac{u}{z^2}+\frac{1}{4}u-\frac{c^2}{2z^2}u+\frac{c}{2}\frac{u}{z}+\frac{cu'}{z}+\frac{cu}{2z}-\frac{u}{2}-u'-\frac{au}{z}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow u'' + \left[\frac{c}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{c^2}{4z^2} + \frac{c}{2z^2} - \frac{a}{z}\right] u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{c}{2} - a}{z} - \frac{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} - 1\right)}{z^2}\right] u = 0.}$$

(Υπενθυμίζουμε όπως για την εξίσωση $y'' + fy' + gy = 0$ η αντικατάσταση $y = up$ με $p = e^{-\frac{1}{2}\int f dx}$ δίνει μία εξίσωση για το u χωρίς πρώτη παράγωγο. Στην περίπτωσή μας $f = \frac{c-z}{z} \Rightarrow \int f dz = c \ln z - z \Rightarrow$
$\Rightarrow p = e^{-\frac{c}{2}\ln z + \frac{z}{2}} = z^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{z}{2}} \Rightarrow y = z^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{z}{2}} u$, που είναι η αντικατάσταση κατά την οποία ξεκινήσαμε.)

Εισάγουμε τώρα τους συμβολισμούς $k = \frac{c}{2} - a$, $m = \frac{1}{2}(c-1)$ και γράφουμε την παραπάνω εξίσωση στη συμβολική μορφή της: $\boxed{u'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right] u = 0}$ Εξίσωση του Whittaker.

Οι λύσεις της είναι οι: $u_1 = z^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1\left(m + \frac{1}{2} - k; 2m+1; z\right)$,
$u_2 = z^{-m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} {}_1F_1\left(-m + \frac{1}{2} - k; -2m+1; z\right)$. Είναι προβληματικές όταν το c είναι ακέραιος, δηλαδή το $2m$ είναι ακέραιος. Γι' αυτό ορίζαμε τα λεγόμενα

συνάρτηση του Whittaker:

$$W_{k,m} \equiv \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}\, u_1 + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\, u_2 .$$

Οι συναρτήσεις $W_{k,m}(z)$ και $W_{-k,m}(-z)$ είναι δύο ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Whittaker για όλες τις τιμές των k και m.

Μετασχηματισμός Kummer: ${}_1F_1(a;c;z) = e^{z}\,{}_1F_1(c-a;c;-z)$

Για μεγάλα $|z|$:
$${}_1F_1(a;c;z) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{z} z^{a-c}, & \text{για } \operatorname{Re} z > 0 \\[2mm] \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}, & \text{για } \operatorname{Re}(z) < 0 . \end{cases}$$

Συναρτήσεις Mathieu

$$\boxed{y'' + (\alpha + \beta\cos 2x)\, y = 0} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dz}\, 2\sin x\cos x$$

$z = \cos^2 x \to \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2z-1$

$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - 4z^2 - 1 + 4z = 4z(1-z)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-2\sin 2x \frac{dy}{dz}\right) = -4\cos 2x \frac{dy}{dz} - 2\sin 2x \frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx} =$$

$$= -4(2z-1)\frac{dy}{dz} - 2\sin 2x\,(-2\sin x\cos x)\frac{d^2y}{dz^2} = -4(2z-1)\frac{dy}{dz} +$$

$$+ 4\sin^2 2x \frac{d^2y}{dz^2} = 8z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} - 4(2z-1)\frac{dy}{dz}.$$ Άρα

$$8z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} - 4(2z-1)\frac{dy}{dz} + (\alpha + \beta(2z-1))\, y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{4z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(1-2z)\frac{dy}{dz} + [\alpha + \beta(2z-1)]\, y = 0.}$$

Τα $z=0$ και $z=1$ είναι κανονικά ανώμαλα σημεία ενώ υπάρχει ουσιώδης ανωμαλία στο $z=\infty$.

Θέλουμε η λύση να είναι περιοδική (με περίοδο 2π), όπως οι συντελεστές. Αυτό δεν είναι δυνατό για αυθαίρετα a και b. Ξέρουμε ότι, αν τα $y_1(x), y_2(x)$ είναι (ανεξάρτητες) λύσεις, και τα $y_1(x+2\pi), y_2(x+2\pi)$ θα είναι λύσεις, άρα:

$$y_1(x+2\pi) = A_{11}\, y_1(x) + A_{21}\, y_2(x)$$

$$y_2(x+2\pi) = A_{12}\, y_1(x) + A_{22}\, y_2(x).$$

Αν θεωρήσουμε τον γραμμικό συνδυασμό $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, θα ισχύει ότι: $y(x+2\pi) = (A_{11} c_1 + A_{12} c_2)\, y_1(x) + (A_{21} c_1 + A_{22} c_2)\, y_2(x)$

Εξετάζουμε αν μπορεί να βρεθεί $y(x)$ ώστε $y(x+2\pi) = k\, y(x)$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Όμως αυτό είναι πάντα δυνατό. Αυτό είναι το θεώρημα του Floquet: ότι υπάρχει πάντα λύση της εξίσωσης Mathieu, τέτοια ώστε $\boxed{y(x+2\pi) = k\, y(x).}$

Αν ορίσουμε: $k \equiv e^{2\pi\mu}$, $\varphi(x) \equiv e^{-\mu x} y(x)$, θα ισχύει:

$$\varphi(x+2\pi) = e^{-\mu(x+2\pi)}\, y(x+2\pi) = e^{-\mu x} e^{-2\pi\mu}\, y(x+2\pi) = e^{-\mu x} \frac{1}{k} \cdot k\, y(x) = \underbrace{e^{-\mu x} y(x)}_{=\varphi(x)}.$$

Δηλαδή, μπορούμε πάντα να βρούμε μια λύση της εξίσωσης Mathieu που να έχει τη μορφή

$\boxed{y(x) = e^{\mu x}\varphi(x)}$, όπου η $\varphi(x)$ είναι περιοδική (με περίοδο 2π)

Αν $\mu = n\cdot 2\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, τότε και η $y(x)$ θα έχει περίοδο 2π. Για τις υπόλοιπες φανταστικές τιμές του μ, η $y(x)$ ταλαντεύεται χωρίς συγκεκριμένη περίοδο. Αν το μ έχει και πραγματικό μέρος, θα έχουμε απειρισμούς στο $+\infty$ είτε στο $-\infty$. Θεώρημα Bloch.

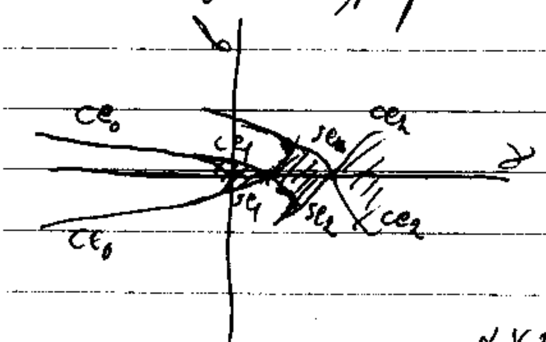
Τα συμπεράσματα ως προς την περιοδικότητα ισχύουν γενικότερα για ΔΕ δεύτερης τάξης με περιοδικές συναρτήσεις ως συντελεστές. (Η εξίσωση Hill: $y'' + fy = 0$, $f(x+2\pi) = f(x)$, $f(-x) = f(x)$ είναι ένα παράδειγμα).

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση Mathieu είναι άρτια ως προς το x, άρα και η $y(-x)$ θα είναι λύση.

Η γενική λύση θα είναι:

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = Ae^{\mu x}\varphi(x) + Be^{-\mu x}\varphi(-x) \\ \varphi(x+2\pi) = \varphi(x). \end{gathered}}$$

Ας υποθέσουμε ότι $b=0$. Τότε θα πάρουμε περιοδικές λύσεις για $a=0$, $a=1$, $a=4$, κ.ο.κ. Η επέκταση αυτών των σημείων σε λύσεις με $b\neq 0$ φαίνεται στο σχήμα.



Οι γραμμές αντιστοιχούν σε περιοδικές συναρτήσεις που λέγονται συναρτήσεις Mathieu και μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier:

$ce_{2n} = \sum A_k \cos 2kx$, $ce_{2n+1} = \sum A_k \cos(2k+1)x$

$se_{2n} = \sum A_k \sin 2kx$, $se_{2n+1} = \sum A_k \sin(2k+1)x$.

Π.χ. για $b=0$, $a=4$: $ce_2 = \cos 2x$, $se_2 = \sin 2x$.

Οι γραμμοσκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν σε συναρτήσεις με μηδενικό πραγματικό μέρος του μ, ενώ οι υπόλοιπες είναι περιοχές αστάθειας. Πώς βρίσκουμε τις γραμμές $a(b)$; Μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα $y = \frac{A_0}{2} + \sum_n [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$ στην εξίσωση Mathieu:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

$$y'' + (\alpha + b\cos 2x)\,y = 0 \rightsquigarrow -\sum n^2 \left[A_n \cos nx + B_n \sin nx\right] +$$

$$+(\alpha + b\cos 2x)\left(\frac{A_0}{2} + \sum\left[A_n \cos nx + B_n \sin nx\right]\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sum n^2 A_n \cos nx - 2\sum n^2 B_n \sin nx + \alpha A_0 + bA_0 \cos 2x +$$

$$+2\alpha \sum A_n \cos nx + 2\alpha \sum B_n \sin nx + b\sum A_n \cos(n+2)x +$$

$$+ b\sum A_n \cos(n-2)x + b\sum B_n \sin(2-n)x + b\sum B_n \sin(2+n)x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sum n^2 A_n \cos nx + \alpha A_0 + bA_0 \cos 2x + 2\alpha \sum A_n \cos nx + b\sum A_{n-2} \cos nx +$$

$$+ b\sum A_{n+2} \cos nx + \left[-2\sum n^2 B_n + 2\alpha B_n + bB_{n+2} + bB_{n-2}\right]\sin nx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2n^2 A_n + 2\alpha A_n + bA_{n-2} + bA_{n+2} = 0 \\ -2n^2 B_n + 2\alpha B_n + bA_{n+2} + bB_{n-2} = 0 \end{cases} \text{!? } (\Sigma!$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ δέχει ιδιαίτερη μεταχείριση. Οι χαρα-

~~Για $n=0$ $(\alpha + b\cos 2x)\left(\frac{A_0}{2} + A_0 + A_1\right.$~~ μόνο της τάξης όροι γράφονται:

$$(\alpha + b\cos 2x)\left(\frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + A_4 \cos 4x +\right.$$

$$\left. + B_4 \sin 4x + \ldots\right) - 0 - A_1 \cos x - B_1 \sin x - 4A_2 \cos 2x - 4B_2 \sin 2x - \ldots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_0\alpha}{2} + \alpha A_1 \cos x + \alpha B_1 \sin x + \alpha A_2 \cos 2x + \alpha B_2 \sin 2x + \ldots + \frac{bA_0}{2}\cos 2x + \frac{bA_1}{2}\cos x + \frac{bA_1}{2}\cos 3x +$$

$$+ \frac{bB_1}{2}\sin 3x - \frac{bB_1}{2}\sin x + \frac{bA_2}{2}\cos 4x + \frac{bA_2}{2} + \frac{bB_2}{2}\sin 4x + \frac{bA_3}{2}\cos 5x + \frac{bA_3}{2}\cos x +$$

$$+ \frac{bB_3}{2}\sin 5x + \frac{bB_3}{2}\sin x + \frac{bA_4}{2}\cos 6x + \frac{bA_4}{2}\cos 2x + \frac{bB_4}{2}\sin 6x + \frac{bB_4}{2}\sin 2x$$

$$- A_1 \cos x - B_1 \sin x - 4A_2 \cos 2x - 4B_2 \sin 2x - \ldots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_0\alpha}{2} + \dfrac{bA_2}{2} = 0, \quad (\alpha-1)A_1 + \dfrac{bA_1}{2} + \dfrac{bA_3}{2} = 0, \quad (\alpha-1)B_1 - \dfrac{bB_1}{2} + \dfrac{bB_3}{2} = 0, \end{cases}$$

$\frac{bA_0}{2} + (\alpha-4)A_2 + \frac{bA_4}{2} = 0, \ (\alpha-4)B_2 + \frac{bB_4}{2} = 0, \ \ldots \}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη λύση τύπου ce_{2n}, όπου τα μόνα που δε μηδενίζονται είναι τα A_{2n}:

$\alpha A_0 + bA_2 = 0$

$bA_0 + 2(\alpha-4)A_2 + bA_4 = 0$

$bA_2 + 2(\alpha-16)A_4 + bA_6 = 0$

$\vdots$

$bA_{n-2} + 2(\alpha-n^2)A_n + bA_{\underset{\text{άρτιο}}{n+2}} = 0$

$\vdots$

Για τυχαία α, b είναι φανερό ότι $\frac{A_{n+2}}{A_n} \sim n^2$. Άρα τα α και b θα πρέπει να παίρνουν συγκεκριμένες τιμές (χαρακτηριστικές $\alpha(b)$) για να έχει νόημα η λύση.

Ξεκινάμε από την $b\frac{A_{n-2}}{A_n} + 2(\alpha-n^2) + b\frac{A_{n+2}}{A_n} = 0$ όπου συνεπάγεται:

$$\frac{A_n}{A_{n-2}} = \frac{-b}{2(\alpha-n^2)+b\frac{A_{n+2}}{A_n}} = \frac{-b}{2(\alpha-n^2)+b\frac{-b}{2(\alpha-(n+2)^2)-\frac{b^2}{\cdots}}},$$

Έχουμε ένα συνεχές κλάσμα. Ξέρουμε ότι $\frac{A_2}{A_0} = -\frac{\alpha}{b}$, οπότε

$$-\frac{\alpha}{b} = \frac{-b}{2(\alpha-4)-\frac{b^2}{2(\alpha-16)-\cdots}} \Rightarrow \alpha = \frac{b^2}{2(\alpha-4)-\frac{b^2}{2(\alpha-16)-\cdots}}.$$

Ας εξειδικεύσουμε στη λύση $ce_0(x)$, που ξεκινάει με τις τιμές $\alpha = b = 0$. Επαναληπτική μέθοδος: $\alpha_0 = -\frac{b^2}{8} =$

$$= \frac{b^2}{2\left(-\frac{b^2}{8}-4\right)+\frac{b^2}{32}} \simeq -\frac{b^2}{8}\,\frac{1}{1+\frac{b^2}{32}-\frac{b^2}{256}} \simeq -\frac{b^2}{8}\,\frac{1}{1+\frac{7b^2}{256}} \simeq$$

$$\simeq -\frac{b^2}{8}\left(1-\frac{7b^2}{256}\right) = -\frac{b^2}{8}+\frac{7b^4}{2048} \ \text{κλπ.} \Rightarrow a_0(b).$$

Ως όρος στη λύση: $A_2 = -\frac{\alpha}{b}(A_0) = -\frac{2\alpha}{b} = \frac{b}{4} - \frac{7b^3}{1024} + \cdots$ (με, ώστε $\frac{A_0}{2}=1$)

~~$A_4 =$~~ $bA_4 = -bA_0 - 2(\alpha-4)A_2 \Rightarrow A_4 = -A_0 - \frac{2(\alpha-4)}{b}A_2 =$

$= -2 - \frac{2}{b}\left(-\frac{b^2}{8}+\frac{7b^4}{2048}-4\right)\left(\frac{b}{4}-\frac{7b^3}{1024}\right) =$

$= -2 - 2\left(-\frac{b^2}{8}+\frac{7b^4}{2048}-4\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{7b^2}{1024}\right) = \cancel{-2-2(-4)\left(\frac{1}{4}\right)} -$

$-2\left(-\frac{b^2}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - 2(-4)\left(-\frac{7b^2}{1024}\right) + \cdots = \frac{b^2}{16} - \frac{7b^2}{128} =$

$= \frac{(8-7)b^2}{128} = \frac{b^2}{128}$. Δηλαδή $ce_0(x) = 1 + \left(\frac{b}{4} - \frac{7b^3}{1024} + \cdots\right)\cos 2x +$

$+ \left(\frac{b^2}{128} + \cdots\right)\cos 4x + \cdots$

Ελλειπτικές συναρτήσεις.

Μπορούμε να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με βάση την εξίσωση $(y')^2 = 1 - y^2$ ($y=\sin x$) και τις αρχικές συνθ. $y(0)=0$, $y'(0)>0$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dt \Rightarrow P = 2\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 4\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Κατ' αναλογία, θεωρούμε τη ΔΕ $y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$, $(0<k<1)$ με τις αρχικές συνθήκες $y(0)=0$, $y'(0)>0$.

Η συνάρτηση που ορίζεται έτσι συμβολίζεται με $y = sn\, x$ και ανήκει στην κατηγορία των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi. Η εξίσωση δίνει: $\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^x dx = x$, δηλαδή $x = F(z,k)$, το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους.

$k=0 \Rightarrow x = \sin^{-1}\varphi$.

~~Αν~~ $\cancel{y = sn\, x \Rightarrow x = sn^{-1} y}$ $\cancel{x = \int_0^\varphi \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-ky)}} = F(k,\varphi)}$.

Το F μπορεί να γραφεί και με τη μορφή Legendre:

$$F_1(z,k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \overset{z=\sin\varphi}{\underset{t=\sin\vartheta}{=}} \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \equiv F(\varphi,k)$$

$\varphi = \sin^{-1} x$.

~~Αν~~ $\cancel{\varphi = sn\, x}$, ~~τότε~~ $\cancel{x = F(k)\sin^{-1}\varphi}$.

$F_1(0,z) = \sin^{-1} z = \varphi$ $\qquad \cancel{x = sn^{-1} z = \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}}$

$\cancel{= F_1(k,z) = sn^{-1} z = F(k,\varphi)}$, $z = sn\, x$. $\qquad \cancel{z = sn\, x}$ ~~ελλειπτική συνάρτηση.~~

Αν $x = F(z,k)$, τότε $z = sn(x,k) \Rightarrow sn(x)$: ελλειπτική συνάρτηση Jacobi. Δηλαδή $x = sn^{-1}(z,k)$ και η ελλειπτική συνάρτηση είναι η αντίστροφη του ελλειπτικού ολοκληρώματος: $\left\{\begin{matrix} x = F(z) = sn^{-1}(z) \\ z = sn(x) \end{matrix}\right\}$. Αφού $z = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \sin^{-1} z$, η $x = F(z,k)$ γράφεται και $x = F(\sin^{-1} z, k)$.

Για $k=0$: $x = F(z,0) = \sin^{-1} z = \varphi$, $x = \sin^{-1} z$, $z = \sin x$, $x = \varphi$.