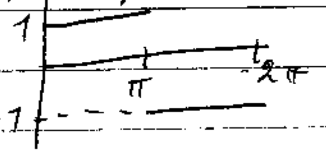
Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

$$f(\vartheta) = \frac{A_0}{2} + \sum \left(A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta\right),$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta$$

Άρτιες $\Rightarrow B_n = 0$, περιττές $\Rightarrow A_n = 0$

Υπάρχουν και άλλες, λιγότερο γνωστές, συμμετρίες. π.χ. αν f είναι άρτια και συμμετρική περί το $\frac{\pi}{2}$, μόνο τα άρτια A_n είναι μη μηδενικά.

<u>Παράδειγμα 1:</u> $f(\vartheta) =$  $\Rightarrow \begin{cases} A_n = 0 \\ B_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}, \; B_{2n} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\vartheta) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\vartheta + \frac{\sin 3\vartheta}{3} + \frac{\sin 5\vartheta}{5} + \cdots\right]$$

$\left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$

Φαινόμενο Gibbs.

<u>Παράδειγμα 2:</u> $f(\vartheta) = \cos k\vartheta \rightarrow A_n = \frac{(-1)^n\, 2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos k\vartheta = \frac{2k\sin k\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{\cos\vartheta}{k^2-1} + \frac{\cos 2\vartheta}{k^2-4} - + \cdots\right)$$

Γενίκευση: Έστω $x = \frac{\vartheta L}{2\pi}$. Τότε $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty \left[A_n \cos\frac{2\pi n x}{L} + B_n \sin\frac{2\pi n x}{L}\right]$, $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi n x}{L}$, $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi n x}{L}\,dx$.

Μια συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί κατά Fourier στο διάστημα $[0,\alpha)$. Η ίδια μπορεί να αναπτυχθεί μόνο σε ημιτονική (ή συνημιτονική) σειρά, αν επεκταθεί στο διάστημα $(-\alpha,0)$ ως εξής: $f(-x) = -f(x)$ ή $f(-x) = +f(x)$. Θα θεωρήσουμε ως περίοδο το 2α και $f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{2n\pi x}{2\alpha}$.

Μια χρήσιμη μορφή είναι σε μιγαδική μορφή:

$$f(\vartheta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{in\vartheta} \quad \text{ή} \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\alpha_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}}dx$

Επίσης $\frac{1}{L}\int_0^L dx\,|f(x)|^2 = \frac{1}{L}\sum_{m,n} \alpha_m^* \alpha_n \int_0^L dx\, e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} e^{+\frac{2\pi i n x}{L}} =$

$$= \frac{1}{L}\sum_{m,n} \alpha_m^* \alpha_n L \delta_{mn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2$$

Μετασχηματισμός Fourier

Όριο $L \to \infty$ των $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum \alpha_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \\ \alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \end{array} \right\}$,

Ορίζουμε $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi n}{L} = y \to dn = 1 = \frac{L}{2\pi}dy \\ L\alpha_n = g(y) \end{array} \right\}$ Τότε $\sum_n f_n = \sum f_n\, dn \to \frac{L}{2\pi}\int F(y)\,dy$,

για τυχόντα f_n

οπότε: $f(x) = \sum_n \frac{g(y_n)}{L} e^{ixy_n} \Rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)}{L} e^{ixy} dy \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy$ και

$\alpha_n = \frac{g(y)}{L} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ixy} dx$, δηλαδή:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy, \quad g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx}$$

Αντικαθιστώντας το $g(y)$ με το ίσο του βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{ixy} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') e^{-ix'y} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dy\, e^{iy(x-x')}}_{\delta(x-y)}$$

Θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, g^*(y) e^{-ixy}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\, g(y') e^{ixy'} =$$

$$= \int dy\, dy'\, \frac{1}{2\pi} g^*(y) g(y') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty} dx\, e^{ix(y'-y)} = \frac{1}{2\pi} \int dy \int dy'\, g^*(y) g(y') \cdot$$

$$\cdot\, \delta(y-y') = \frac{1}{2\pi} \int dy\, |g(y)|^2 \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, |g(y)|^2}$$

Έστω μια άρτια συνάρτηση $f(x)$. Τότε $g(y) =$

$$= \int_0^{\infty} dx\, f(x) e^{+ixy} + \int_{-\infty}^{0} dx\, f(x) e^{-ixy} =$$

$$= \int_0^{\infty} + \int_{+\infty}^{0} d(-\tilde{x})\, f(-\tilde{x}) e^{i\tilde{x}y} = \int_0^{\infty} + \int_0^{\infty} d\tilde{x}\, \underbrace{f(-\tilde{x})}_{f(\tilde{x})} e^{i\tilde{x}y} =$$

$$= \int_0^{\infty} dx\, f(x)\left(e^{-ixy} + e^{+ixy}\right) = 2\int_0^{\infty} f(x) \cos xy\, dx.$$

Η $g(y)$ είναι άρτια, οπότε $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy =$ (όμοια αρτ.) $= \frac{1}{2\pi} 2\int_0^{+\infty} g(y) \cos xy\, dy$. Τα $f(x)$, $g(y)$ λέγονται συνημιτονικοί μετασχηματισμοί Fourier το ένα του άλλου και χρειάζεται να ορισθούν μόνο για θετικά x και y.

Παρόμοια: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g(y) \sin xy\, dy$, $g(y) = 2\int_0^{\infty} f(x) \sin xy\, dx$ για περιττή συνάρτηση $f(x)$: Ημιτονικοί μετασχηματισμοί Fourier.

Παράδειγμα $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-\frac{t}{T}} \sin \omega_0 t, & t>0 \end{cases}$

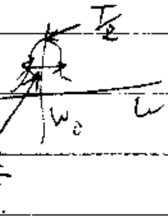
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-i\omega t} \sin \omega_0 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-i\omega t}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-\frac{1}{T} - i\omega + i\omega_0}(0-1) - \frac{1}{-\frac{1}{T} - i\omega - i\omega_0}(0-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{i}{T} - \omega + \omega_0} + \frac{1}{-\frac{i}{T} + \omega + \omega_0}\right]$$

Φυσική ερμηνεία: Αν το $f(t)$ παριστάνει ηλεκτρικό πεδίο, το $|f|^2$ είναι ανάλογο προς την μεταφερόμενη ισχύ και το $\int_0^\infty |f|^2 dt$ είναι ανάλογο προς την ενέργεια και θα ισούται με $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 d\omega$, άρα το $|g(\omega)|^2$ είναι ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας.

Αν $\omega_0 T \gg 1$, το $g(\omega)$ έχει κεντρικό μέγιστο.

Πχ. $g(\omega) \underset{(\omega\approx\omega_0)}{\approx} -\frac{1}{2}\frac{1}{\omega-\omega_0-\frac{i}{T}} \Rightarrow |g(\omega)| \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{T^2}}}$



Τρεις διαστάσεις: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{k}) = \int d^3x\, f(x)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\varphi(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \end{array} \right\}$, $\delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

Πχ. $f(\vec{r}) = \left(\frac{2}{\pi\alpha^2}\right)^{3/4} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} = N e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \Rightarrow \int d^3x |f|^2 = 1$

Ο μετασχηματισμός θα είναι: $\varphi(\vec{k}) = N\int d^3x\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} =$

$$= 2\pi N \int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \int_{-1}^{1} dx\, e^{-ikrx} = 2\pi N \int dr\, r^2 e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \frac{1}{-ikr}\left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{ik} N \int_0^\infty dr\, r\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) = \frac{2\pi}{ik} N \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, r\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}+ikr} =$$

$$= \frac{2\pi}{ik} N \int_{-\infty}^{\infty} dr\, r\, e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(r^2 - ik\alpha^2 r + \left(\frac{ik\alpha^2}{2}\right)^2\right)} e^{-\frac{k^2\alpha^4}{4\alpha^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{ik} N \int_{-\infty}^{\infty} dr\, r\, e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(r - \frac{ik\alpha^2}{2}\right)^2} e^{-\left(\frac{k\alpha}{2}\right)^2} =$$

Σχόλιο: $\int_{-\infty}^{+\infty} dr\, e^{-\lambda(r-i\mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, e^{-\lambda r^2}$

$$= \frac{2\pi}{ik} N e^{-\frac{k^2\alpha^2}{4}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dr \left(r - \frac{ik\alpha^2}{2}\right) e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(r - \frac{ik\alpha^2}{2}\right)^2} + \frac{ik\alpha^2}{2} \int dr\, e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(r - \frac{ik\alpha^2}{2}\right)^2} \right]$$

$$= N \frac{2\pi}{ik} \frac{ik\alpha^2}{2} e^{-\frac{k^2\alpha^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{1/\alpha^2}} = \pi\sqrt{\pi}\,\alpha^3 e^{-\frac{k^2\alpha^2}{4}} N = \pi\sqrt{\pi}\,\alpha^3 \left(\frac{2}{\pi\alpha^2}\right)^{3/4} e^{-\frac{k^2\alpha^2}{4}}$$

Δηλαδή η Gauss γίνεται Gauss. Το Δx είναι περίπου α, ενώ το Δk είναι $\frac{1}{\alpha}$, οπότε $\Delta x \Delta k \approx 1 \rightarrow$ $\rightarrow \Delta x \Delta p \approx \hbar$. Ο μετασχηματισμός της $f(\vec{r}) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$ έχει κέντρο το $\vec{k}_0$. Ο Fourier δεν υπάρχει πάντα.

Μετασχηματισμός Laplace.

Μπορεί κανείς να ρεγουλάρει μια συνάρτηση $f(x)$ που απειρίζεται στο $+\infty$ πολλαπλασιάζοντας με e^{-cx}. Σ' αυτήν την περίπτωση είναι (ίσως) καθοριστικό να "κόψουμε" τη συνάρτηση στο μηδέν. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x) e^{-cx} H(x)$ είναι: $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-cx} H(x) e^{-ixy} dx =$ $= \int_0^{\infty} f(x) e^{-cx} e^{-ixy} dx$ και $f(x) e^{-cx} H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy$.

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $s = c + iy$, ορίζουμε $F(s) \equiv g(y)$, και τα δύο ολοκληρώματα γράφονται:

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) e^{sx} ds,}$$

όπου το μονοπάτι C είναι η ευθεία $Re(s) = c$. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός Laplace. Το c αρκεί να είναι μεγαλύτερο από μια ελάχιστη τιμή α και ο μετασχηματισμός ορίζεται μόνο για $Re(s) > \alpha$. Η $F(s)$ είναι αναλυτική και μπορεί να επεκταθεί στο "αριστερό" ημιεπίπεδο αναλυτικά. Το δεύτερο ολοκλήρωμα δίνει αυτόματα μηδέν για $x < 0$, γιατί το μονοπάτι ~~μπορεί~~ θα πρέπει να συμπληρωθεί με ημικύκλιο στα δεξιά, όπου η $F(s)$ είναι αναλυτική, άρα το αποτέλεσμα είναι μηδέν. (Συνήθως το $H(x)$ παραλείπεται)

Π.χ. $f(x) = 1 \Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$.

Έλεγχος: $f(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{sx} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s} ds \;\; \overset{x>0}{\underset{\square}{=}} \frac{1}{2\pi i} 2\pi i e^{0} = 1 \; \checkmark$

$\overset{x<0}{\underset{D}{=}} \frac{1}{2\pi i} \cdot 0 = 0 \; \checkmark$

Άλλοι μετασχηματισμοί:

$$g(k)=\int_0^\infty f(x)\,J_m(kx)\,x\,dx,\quad f(x)=\int_0^\infty g(k)\,J_m(kx)\,k\,dk$$ (Hankel)

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)\,dt,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} t^{-z}\varphi(z)\,dz$$ (Mellin).

$$g(y)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-y},\quad f(x)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(y)\,dy}{y-x}$$ (Hilbert)

~~Εφαρμογές~~

Ιδιότητες

(1) Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί

(2) $$\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)\,dx = e^{-sx}f(x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[f'] = s\,\mathcal{L}[f]-f(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f]-s f(0)-f'(0)$$ κλπ

Επίσης: $F[f'] = iy\,F[f]$.

(3) $$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]=\int_0^\infty dx\,e^{-sx}\int_0^x f(t)\,dt=$$

$= \int_0^\infty dt\, f(t) \int_t^\infty dx\, e^{-sx} =$

$= \frac{1}{s}\int dt\, f(t)\, e^{-st} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left[\int_0 f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]}$

Για Fourier: Αν $g = \int f dx \Leftrightarrow g' = f$ η σχέση $g = \int f(x)dx + C$,

$\mathcal{F}[g'] = iy\mathcal{F}[g]$ γίνεται $\mathcal{F}[f] = iy\mathcal{F}[g]$. Όμως $\boxed{\mathcal{F}[g] = \frac{\mathcal{F}[f]}{iy} + C\delta(y)}$ και

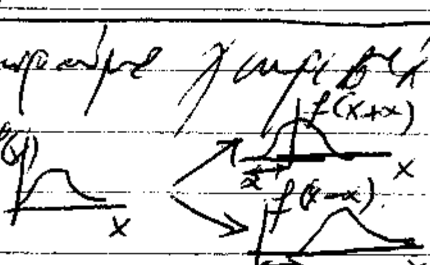
όχι αθροιστικά $\frac{\mathcal{F}[f]}{iy}$. Πράγματι, $\mathcal{F}[g] = \mathcal{F}\left[\int f(x)dx + \tilde{C}\right]$

$= \frac{\mathcal{F}[f]}{iy} + \mathcal{F}[\tilde{C}] = \frac{\mathcal{F}[f]}{iy} + \overset{C}{\tilde{C}\, 2\pi}\delta(y)$

(4) $\mathcal{F}[f(x+\alpha)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\alpha)\, e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(x-\alpha)y} dx =$

$= e^{i\alpha y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy} dy \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[f(x+\alpha)] = e^{i\alpha y}\mathcal{F}[f(x)]}$

Για τον Laplace θεωρούμε γνωστές τις ιδιότητες θετικής και αρνητικής μετατόπισης:



Για θετική μετατόπιση, ο μετασχηματισμός

αφού αγνοεί τι γίνεται για $-\alpha < x < 0$, άρα

$\mathcal{L}[f(x+\alpha)] = \int_0^\infty dx\, e^{-sx} f(x+\alpha) \overset{\tilde{x} = x+\alpha}{=} \int_{\tilde{x}=\alpha}^\infty d\tilde{x}\, e^{-s(\tilde{x}-\alpha)} f(\tilde{x}) =$

$\underline{\underline{\tilde{x}\to x}}\ \left\{\left[\int_0^\infty - \int_\alpha^\infty\right] e^{-sx} dx\, f(x)\right\} e^{\alpha s} \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{L}[f(x+\alpha)] = e^{\alpha s}\left\{\mathcal{L}[f(x)] - \int_0^\alpha dx\, f(x) e^{-sx}\right\}}$$

$\alpha > 0$

Εξ άλλου, για α ~~...~~ ορισμένη μεταβλητή: $\mathcal{L}[f(x-\alpha)] = \int_0^\infty dx e^{-sx} f(x-\alpha) =$

$\underline{\underline{\tilde{x} \equiv x-\alpha}}\ \int_{-\alpha}^{+\infty} d\tilde{x}\, e^{-s(\tilde{x}+\alpha)} f(\tilde{x}) \underline{\underline{\tilde{x}\to x}}\ e^{-\alpha s}\left[\int_{-\alpha}^{0} dx\, f(x) e^{-sx} + \int_0^{+\infty} dx f(x) e^{-sx}\right]$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{L}[f(x-\alpha)] = e^{-\alpha s}\mathcal{L}[f(x)],\ \alpha > 0}$$

(5) $\mathcal{F}[e^{\alpha x} f(x); y] = \mathcal{F}[f(x); y + i\alpha]$

$\mathcal{L}[e^{\alpha x} f(x); s] = \mathcal{L}[f(x); s-\alpha]$.

(6) $\mathcal{F}[x f(x)] = i \dfrac{d}{dy}\mathcal{F}[f(x)]$

$\mathcal{L}[x f(x)] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(x)]$.

(7) Συνέλιξη $g(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}\, f_1(\tilde{x}) f_2(x-\tilde{x})$.

$\mathcal{F}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x) e^{-ixy} = \int_{-\infty} dx \int_{-\infty} d\tilde{x}\, f_1(\tilde{x}) f_2(x-\tilde{x}) e^{-ixy} =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1\, e^{i\tilde{x}y_1} \tilde{f}_1(y_1)\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_2\, e^{i(x-\tilde{x})y_2} \tilde{f}_2(y_2)\right] e^{-ixy} =$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2\, \tilde f_1(y_1)\tilde f_2(y_2)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ix(y_2-y)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde x\, e^{i\tilde x(y_1-y_2)} =$$

$$= \int dy_1 \int dy_2\, \tilde f(y_1)\tilde f(y_2)\,\delta(y_2-y)\,\delta(y_1-y_2) =$$

$$= \tilde f_1(y)\tilde f_2(y) \to \boxed{\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)]\,\mathcal{F}[f_2(x)]}.$$

Όμοια: Αν $\boxed{g(x) = \int_0^x dt\, f_1(t) f_2(x-t)}$, θα ισχύει

$$\boxed{\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[f_1(x)]\,\mathcal{L}[f_2(x)]}.$$

Ισχύει και μια αντίστροφη σχέση.

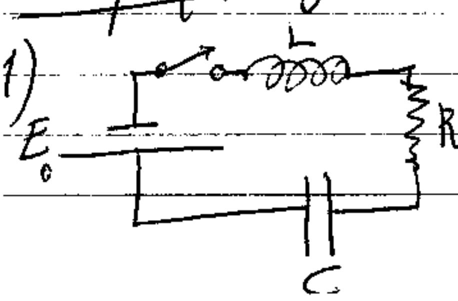
Αν $\mathcal{L}[f_1] = g_1(s)$ $(\mathrm{Re}\,s > \alpha_1)$, $\mathcal{L}[f_2] = g_2(s)$ $(\mathrm{Re}\,s > \alpha_2)$, θα ισχύει:

$$\boxed{\mathcal{L}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz\, g_1(z)\, g_2(s-z)}.$$

$\mathrm{Re}\,z > \alpha_1$
$\mathrm{Re}(s-z) > \alpha_2 \to \mathrm{Re}(s) - \alpha_2 > \mathrm{Re}\,z$
Δηλαδή (αν $\mathrm{Re}(z) = c$): $\left.\begin{matrix} c > \alpha_1 \\ \mathrm{Re}(s) - \alpha_2 > c \end{matrix}\right\} \to \boxed{\mathrm{Re}(s) - \alpha_2 > c > \alpha_1}$

Επίσης: $\boxed{\mathcal{F}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, g_1(z)\, g_2(y-z)}$

Εφαρμογές

1) 

Το κύκλωμα κλείνει για $t=0$, οπότε $Q(0) \equiv Q_0$, $I(0) = 0$

Η εξίσωση είναι: $RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\left[Q_0 + \int_0^t I(t')\,dt'\right] = E_0 \xRightarrow{\mathcal{L}[I(t)]=\tilde{I}(s)}$$

Προσοχή: $I(0)$, όχι $\tilde{I}(0)$.

$$\Rightarrow R\tilde{I} + L\left(s\tilde{I} - I(0)\right) + \frac{1}{C}\left[\frac{Q_0}{s} + \frac{\tilde{I}}{s}\right] = \frac{E_0}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{I}\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) = \frac{E_0}{s} + LI(0) - \frac{Q_0}{sC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{\frac{E_0}{s} + \cancelto{0}{LI(0)} - \frac{Q_0}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{E_0 - \frac{Q_0}{C}}{L}\;\frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

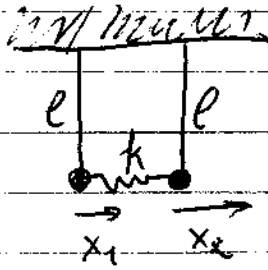
$$s^2 + 2\frac{R}{2L}s + \frac{1}{LC} = s^2 + 2\frac{R}{2L}s + \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} =$$

$$= \left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$ έστω >0.

Όμως $\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\sin bt\right] = \frac{b}{(s+\alpha)^2 + b^2}$, άρα

$$I(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\;t\right]\frac{E_0 - \frac{Q_0}{C}}{L}.$$

(2)



Αρχικές συνθήκες: $\left\{\begin{matrix} x_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_1 = v,\ \dot{x}_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Εξισώσεις: $\left.\begin{matrix} m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{\ell}x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{\ell}x_2 - k(x_2 - x_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

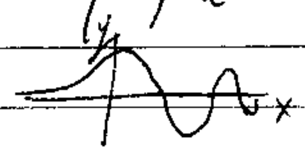
$$\xrightarrow{\mathcal{L}[x_1]\equiv F_1,\ \mathcal{L}[x_2]\equiv F_2} \left\{\begin{array}{l} m\left(s^2F_1 - s\cancel{x_1(0)}^{\,0} - \cancel{\dot{x}_1(0)}^{\,v}\right) = -\frac{mg}{L}F_1 + k(F_2-F_1) \\ m\left(s^2F_2 - s\cancel{x_2(0)}^{\,0} - \cancel{\dot{x}_2(0)}^{\,0}\right) = -\frac{mg}{L}F_2 - k(F_2-F_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\left(s^2F_1 - v\right) = -\frac{mg}{L}F_1 + k(F_2-F_1) \\ m\left(s^2F_2\right) = -\frac{mg}{L}F_2 - k(F_2-F_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{\left(s^2+\frac{g}{L}+\frac{k}{m}\right)v}{\left(s^2+\frac{g}{L}+\frac{k}{m}\right)\left(s^2+\frac{g}{L}\right)} = \frac{v}{2}\,\frac{1}{s^2+\frac{g}{L}+2\frac{k}{m}} + \frac{v}{2}\,\frac{1}{s^2+\frac{g}{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{v}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}+2\frac{k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{2k}{m}}\,t\right) +$$

$$+\frac{v}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right).$$

(3) $\boxed{\text{WKB}}$. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0$ και τη λύση της  . Έστω $g(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, y(x)e^{-i\omega x}$.

Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-\omega^2 g(\omega) + i\frac{dg}{d\omega} = 0 \Rightarrow g(\omega) = Ae^{-\frac{i\omega^3}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\left(\omega x-\frac{\omega^3}{3}\right)}}$$ Ολοκλήρωμα Airy.

α) Ασυμπτωτικά, για $x \to +\infty$, τα σαγματικά σημεία της $f(w) = i\left(w - \frac{w^3}{3x}\right)$ βρίσκονται στον πραγματικό άξονα. Αναπαράγουμε τη συνταγή:

$f''(w_0) = \rho e^{i\vartheta}$, $w - w_0 = s e^{i\varphi}$, $I(x) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{x\rho}}\, e^{x f(w_0)} e^{i\varphi}$.

Στην περίπτωσή μας: $f'(w) = i\left(1 - \frac{w^2}{x}\right) \Rightarrow 1 - \frac{w_0^2}{x} = 0 \Rightarrow w_0 = \pm\sqrt{x}$,

$f''(w) = i\frac{2w}{x} \Rightarrow f''(w_0) = i\frac{2w_0}{x} = \pm\frac{2i\sqrt{x}}{x} = \rho e^{i\vartheta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\varphi = -\frac{\vartheta}{2} \pm \frac{\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{4}$, $f(w_0) = i\left(\pm\sqrt{x} \mp \frac{x\sqrt{x}}{3x}\right) =$

$= \pm i\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \pm\frac{2i\sqrt{x}}{3}$. Άρα

$$y(x) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{x\frac{2}{\sqrt{x}}}}\, e^{x\left(\pm\frac{2i\sqrt{x}}{3}\right)} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \simeq \frac{2\sqrt{\pi}}{x^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

β) Για $\underset{(-x>0)}{x \to -\infty}$: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} dw\, e^{i\underbrace{(-x)}_{\to+\infty}\left(-w + \frac{w^3}{3x}\right)} \to$

$\to f(w) = -i\left(w - \frac{w^3}{3x}\right) \to f'(w) = -i\left(1 - \frac{w^2}{x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(w) = \frac{2iw}{x}$. $f'(w_0) = 0 \Rightarrow w_0 = \pm i\sqrt{-x}$

$\rho e^{i\vartheta} = \frac{2iw_0}{x} = \pm\frac{2i\cdot i\sqrt{-x}}{x} = \pm\frac{2}{\sqrt{-x}} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{2}{\sqrt{-x}} \\ \vartheta = 0, \pi \end{cases}$ $\varphi = \begin{cases} 0 \pm \frac{\pi}{2} \to \pm\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \to -\pi, 0 \end{cases}$

Θεωρούμε μόνο το σημείο $w_0 = -i\sqrt{-x}$, διότι το u γίνεται μέγιστο (στο $w_0 = +i\sqrt{-x}$ γίνεται ελάχιστο, Για $w_0 = -i\sqrt{-x}$: $f = -i\left(-i\sqrt{|x|} + \frac{(-i)^3\sqrt{|x|^3}}{3|x|}\right) = -\sqrt{|x|} + \frac{1}{3}\sqrt{|x|} =$

$= -\frac{2}{3}\sqrt{|x|}$, πραγματικός μεγάλος αρνητικός αριθμός.

$f' = 0$, $f'' = -\frac{2i(-i\sqrt{|x|})}{|x|} = -2\sqrt{|x|} < 0 \Rightarrow$ μέγιστο.

Για $\omega_0 = +i\sqrt{|x|}$: $f = -i\left(+i\sqrt{|x|} + \frac{(+i)^3\sqrt{|x|^3}}{3|x|}\right) = \sqrt{x} - \frac{|x|\sqrt{|x|}}{3|x|} = \frac{2}{3}\sqrt{|x|}$

Μεγάλο θετικό, $f' = 0$, $f'' = -\frac{2i(+i\sqrt{|x|})}{|x|} = +2\sqrt{|x|} > 0 \to$ ελάχιστο

Η τοπογραφία δείχνει ότι $\varphi = 0$, άρα

$$y(x) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{-x\,\frac{2}{\sqrt{-x}}}}\; e^{-x f(-i\sqrt{-x})}\, e^{i\cdot 0} = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{-x}}}\; e^{-x\left[-i\left(-i\sqrt{-x} - \frac{1}{3x}(-i)^3\sqrt{-x}^3\right)\right]} =$$

$$= \frac{\pi}{(-x)^{1/4}}\, e^{-x\left[-\sqrt{-x} - \frac{1}{3x}(-x)\sqrt{-x}\right]} = \cancel{\frac{\pi}{(-x)^{1/4}} (-x)^{3/2} \left(-1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{(-x)^{1/4}}\, e^{(-x)^{3/2}\left(-1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{\pi}{(-x)^{1/4}}\, e^{-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}}.$$

Γραμμικοί τελεστές

$\boxed{\varphi(\hat{e}_k) = \sum_k A_{lk}\hat{e}_l}$, άρα $\vec{y} = \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \sum_l y_k \hat{e}_k =$

$$= \varphi\left(\sum x_l \hat{e}_l\right) = \sum_l x_l \sum_k A_{kl}\hat{e}_k \Rightarrow \boxed{y_k = \sum A_{kl} x_l}$$

Το $\varphi(\vec{x})$ μπορεί να πηγαίνει και σε χώρο διαφορετικό από τον αρχικό: $\varphi(\hat{e}_k) = \sum A_{lk}\hat{f}_l$.

Πίνακες

$$(AB)x = A(Bx) \Rightarrow \sum (AB)_{kl} x_l = \sum A_{km}(Bx)_m = \sum A_{km} B_{ml} x_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml}.$$

$(-1)^{k+l}$ "det" "μικρή"

$$(A^{-1})_{kl} = \frac{\text{"συντελεστής" του } A_{lk}}{\det A}$$

$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, $\widetilde{ABC} = \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}$, $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$, $\det(AB) = \det A \det B$

Blocks:

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array}\right]$$

Τότε $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ και $AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$

Αυτή η διαίρεση είναι χρήσιμη για το πολλαπλασιασμό AB, επειδή η διαίρεση των στηλών του A $(2+3)$ είναι η ίδια με τη διαίρεση των γραμμών του B. $(2+3)$, ώστε να γίνονται οι πολλαπλασιασμοί των μικρών πινάκων. Για τον πολλαπλασιασμό BA, μια χρήσιμη διαίρεση θα ήταν η:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|ccc} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων.

$y_\ell = \sum A_{\ell k} x_k$ Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων:

$\hat{e}'_\ell = \sum_k \gamma_{k\ell} \hat{e}_k$. Τυχαίο διάνυσμα $\vec{x}$ θα γράφεται

ως $\vec{x} = \sum_k x_k \hat{e}_k = \sum_\ell x'_\ell \hat{e}'_\ell = \sum_\ell x'_\ell \sum_k \gamma_{k\ell} \hat{e}_k \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = \sum_\ell \gamma_{k\ell} x'_\ell \Rightarrow \boxed{x = \gamma x'} \Rightarrow x' = \gamma^{-1} x$ υπάρχει επειδή τα $\hat{e}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Σύνοψη: $\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}'_\ell = \sum_k \gamma_{k\ell} \hat{e}_k \\ x'_\ell = \sum (\gamma^{-1})_{\ell k} x_k \end{array} \right\}$

Η εξίσωση $\vec{y} = A\vec{x}$ γράφεται: $\left\{ \begin{array}{l} y = Ax \\ y' = A'x' \end{array} \right\}$

$y = Ax \Rightarrow \gamma y' = A\gamma x' \Rightarrow y' = \underbrace{\gamma^{-1} A \gamma}_{A'} x' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A' = \gamma^{-1} A \gamma \\ A = \gamma A' \gamma^{-1} \end{array} \right\}$

Οι εξισώσεις πινάκων είναι αναλλοίωτες κάτω από ισοδύναμους μετασχηματισμούς ομοιότητας: $A' = S^{-1} A S$.

Π.χ. $ABC + \lambda D = 0 \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}BSS^{-1}CS + \lambda S^{-1}DS = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A'B'C' + \lambda D' = 0$.

Έστω (γραμμική) βαθμωτή συνάρτηση διανύσματος: $\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_k x_k \hat{e}_k\right) = \sum_k x_k \varphi(\hat{e}_k) = \sum_k \alpha_k x_k \equiv \alpha \cdot x$. Σ' ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων: $\alpha' x' = \underline{\alpha' \gamma^{-1}} x = \alpha x \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = \alpha' \gamma^{-1} \Rightarrow \alpha' = \alpha \gamma$. Σύγκριση: $\begin{cases} \alpha'_k = \sum_l \alpha_l \gamma_{lk} \equiv \alpha\gamma \\ x'_k = \sum (\gamma^{-1})_{kl} x_l \equiv \gamma^{-1} x \end{cases}$

Δυϊκός χώρος. $(\alpha_k \equiv \varphi(\hat{e}_k))$.

Εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ή $(\vec{a},\vec{b})$. $\vec{a}\vec{b} = (\vec{b}\vec{a})^*$, $\vec{a}(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}) = \lambda\vec{a}\vec{b}+\mu\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a} \geq 0$ και $\vec{a}\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Αντιγραμμικό στο πρώτο όρισμα: $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\vec{c} = \lambda^*\vec{a}\cdot\vec{c}+\mu^*\vec{b}\vec{c}$. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_k a_k^* b_k$. Ειδικά $\hat{e}_k \hat{e}_l = \delta_{kl}$. Έστω ότι αλλάζουμε σύστημα συντεταγμένων και θέλουμε τα νέα διανύσματα βάσης να είναι επίσης ορθοκανονικά:

$$\delta_{kl} = \hat{e}'_k \hat{e}'_l = \left(\sum_m \gamma_{mk}\hat{e}_m\right)\cdot\left(\sum_n \gamma_{nl}\hat{e}_n\right) = \sum_{m,n} \gamma^*_{mk}\gamma_{nl}\delta_{mn} =$$

$$= \sum_m \gamma^*_{mk}\gamma_{ml} = (\gamma^\dagger\gamma)_{kl} \Rightarrow \boxed{\gamma^\dagger\gamma = 1}$$ unitary (ορθογώνιος)

Επίσης, το $\gamma^{-1}A\gamma$ είναι: ερμιτειανός, αν ο A είναι ερμιτειανός, unitary, αν ο A είναι unitary.

Τέλος, αν $\varphi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x}$, $\varphi_{\vec{a}}(\hat{e}_k) = a_k^*$, δηλαδή βρίσκουμε μια ρητή αντιστοιχία μεταξύ του αρχικού διανυσματικού χώρου και του δυϊκού του.

Προβλήματα ιδιοτιμών

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ $\quad \sum_{\ell} A_{k\ell}x_{\ell}=\lambda x_k \Rightarrow Ax=\lambda x$

Έστω $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1-\lambda&2&3\\4&5-\lambda&6\\7&8&9-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\4&5-\lambda&6\\7&8&9-\lambda\end{vmatrix}=0$ και γενικά $\det(A-\lambda E)=0$

Αν ο H είναι ερμιτειανός θα έχουμε

$\left.\begin{array}{l}Hx_1=\lambda_1x_1\\Hx_2=\lambda_2x_2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_2^+Hx_1=\lambda_1x_2^+x_1\\x_1^+Hx_2=\lambda_2x_1^+x_2 \Rightarrow (x_1^+Hx_2)^*=\lambda_2^*x_2^+x_1\end{array}$

Αλλά $(x_1^+Hx_2)^*=\left(\sum_{\alpha\ell}x_{1\alpha}^*H_{\alpha\ell}x_{2\ell}\right)^*=\sum_{\alpha\ell}x_{1\alpha}H_{\alpha\ell}^*x_{2\ell}^*=$

$=\sum x_{2\ell}^*H_{\ell\alpha}x_{1\alpha}=x_2^+Hx_1$, ώστε

$(\lambda_1-\lambda_2^*)x_2^+x_1=0$. Αν $\lambda_1=\lambda_2$ και $x_1=x_2\neq0$, θα ισχύει $x_2^+x_1>0$, άρα $\lambda_1=\lambda_1^*$, δηλαδή οι ιδιοτιμές θα είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $\lambda_1\neq\lambda_2$ θα είναι $x_2^+x_1=0$, δηλαδή τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια. Ευχρησιμεύει Gram-Schmidt.

Πχ. έστω ότι: $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ ανήκουν στην λ

Ορίζουμε $\vec{y}_1=\vec{x}_1$, $\vec{y}_2=\vec{x}_2+\alpha\vec{y}_1$ και επιλέγουμε το α, ώστε $\vec{y}_1\perp\vec{y}_2$, δηλαδή $\vec{y}_1\vec{y}_2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow(\vec{x}_2+\alpha\vec{y}_1)\vec{y}_1=0\Rightarrow\alpha=-\dfrac{\vec{y}_1\cdot\vec{x}_2}{\vec{y}_1\cdot\vec{y}_1}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε τα β και γ ώστε το $\vec{y}_3=\vec{x}_3+\beta\vec{y}_1+\gamma\vec{y}_2$ να είναι ορθογώνιο στα $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$0=\vec{y}_1\vec{y}_3=\vec{y}_1\vec{x}_3+\beta\vec{y}_1\vec{y}_1+\overset{0}{\cancel{\gamma\vec{y}_1\vec{y}_2}}\Rightarrow\beta=-\frac{\vec{y}_1\cdot\vec{x}_3}{\vec{y}_1\cdot\vec{y}_1}$$

$$0=\vec{y}_2\vec{y}_3=\vec{y}_2\vec{x}_3+\overset{0}{\cancel{\beta\vec{y}_2\vec{y}_1}}+\gamma\vec{y}_2\vec{y}_2\Rightarrow\gamma=-\frac{\vec{y}_2\cdot\vec{x}_3}{\vec{y}_2\cdot\vec{y}_2}$$

Το $Ax=\lambda x$ μετασχηματίζεται σε

$\gamma^{-1}A\gamma\gamma^{-1}x=\lambda\gamma^{-1}x\Rightarrow A'x'=\lambda x'$, δηλαδή αν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A, το $x'=\gamma^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A' με την ίδια ιδιοτιμή.

Έστω ότι μετασχηματίζουμε σ' ένα σύστημα, στο οποίο τα διανύσματα βάσης $\hat{e}_k'$ είναι ιδιοανύσματα ενός γραμμικού τελεστή A: $A\hat{e}_k'=\lambda_k\hat{e}_k'\Rightarrow A'_{kl}=\lambda_k\delta_{kl}$, οπότε ο πίνακας είναι διαγώνιος και θεωέχω τις ιδιοτιμές

Σημειώνουμε ότι $\hat{e}'_k = \sum \gamma_{\ell k}\hat{e}_\ell$, οπότε

$$\gamma = \begin{bmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \cdots & \hat{e}'_N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

, δηλαδή ο πίνακας γ έχει στήλες αυτά τα διανύσματα, αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα.

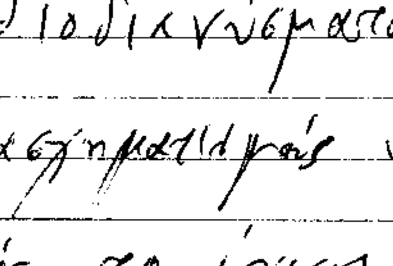
Στους μετασχηματισμούς υπάρχουν αναλλοίωτα, όπως οι ιδιοτιμές, το ίχνος και η ορίζουσα:

$\mathrm{Tr}\,A' = \mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(SS^{-1}A) = \mathrm{Tr}\,A$, $\det A' =$

$= \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det A$

Μάλιστα, $\mathrm{Tr}\,A = \sum_k \lambda_k$, $\det A = \prod_k \lambda_k$.

Παράδειγμα



Κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9} m_k \dot{x}_k^2 = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}} M \dot{x},$$

$M_{k\ell} = m_k \delta_{k\ell}$, $m_1 = m_2 = m_3 =$ μάζα του 1ου ν.θ. Δυναμική ενέργεια:

$$V = \cancel{V_0}^{\,0} + \cancel{\sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\Big|_0 x_k}^{\,0} + \frac{1}{2}\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_\ell}\Big|_0 x_k x_\ell + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k,\ell} V_{k\ell}x_k x_\ell = \frac{1}{2}\tilde{x} V x$$

Μετασχηματισμός: $\hat{e}'_k = \frac{1}{\sqrt{m_k}}\hat{e}_k \equiv \gamma \hat{e}$

Τότε: $\dot{x} = \gamma \dot{x}'$, $\tilde{x} = \tilde{x}'\tilde{\gamma}$ και $T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}'\tilde{\gamma}M\gamma\dot{x}' = \frac{1}{2}\tilde{\dot{x}}'\dot{x}'$, $V = \frac{1}{2}\tilde{x}'\underbrace{\tilde{\gamma}V\gamma}_{A}x' = \frac{1}{2}\tilde{x}'Ax'$

Ο A είναι ερμιτειανός $\Rightarrow$ N πραγματικές ιδιοτιμές με ιδιοανύσματα $\hat{u}_k$: $A\hat{u}_k = \lambda_k \hat{u}_k$. Μετασχηματίζουμε λοιπόν το $\hat{e}_k$ στο $\hat{u}_k$ και θέτουμε:

$\vec{x}' = q_k \hat{u}_k$. Τότε: $T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{q}}\dot{q}$, $V = \frac{1}{2}\tilde{x}'A(q_k\hat{u}_k) =$

$= \frac{1}{2}\tilde{x}' q_k \lambda_k \hat{u}_k = \frac{1}{2}\sum q_l q_k \lambda_k \underbrace{(\hat{u}_l, \hat{u}_k)}_{\delta_{lk}} = \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k q_k^2 =$

$= \frac{1}{2}\tilde{q}\Lambda q$, $\Lambda_{kl} = \lambda_k \delta_{kl}$. Είναι γνωστό ότι τα λ_k είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Οι εξισώσεις του Lagrange είναι: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \Rightarrow \ddot{q}_k = -\lambda_k q_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} q_k = a_k \sin(\overset{\omega_k}{\sqrt{\lambda_k}}\, t + \delta_k), & \lambda_k > 0 \\ q_k = b_k t + c_k, & \lambda_k = 0 \end{array} \right\}$$

Γυρίζουμε τώρα στις αρχικές συντεταγμένες:

$x' = U'q$, $x = \gamma x' = \gamma U' q$, όπου $U'_{kl} = \hat{e}'_k \hat{u}_l \equiv$ η συνιστώσα k του ιδιοδιανύσματος $\hat{u}_l$.

$$x_k = \sum \gamma_{kl} U'_{lm} q_m = \sum \frac{1}{\sqrt{m_k}} U'_{km} q_m = \sum \overset{u_{km}}{\left(\frac{1}{\sqrt{m_k}} U'_{km}\right)} a_m \sin(\omega_m t + \delta_m)$$

~~[illegible]~~ Σημειώναμε ότι: $\delta_{kl} = \hat{u}_k \hat{u}_l = \sum u_{jk} u'_{jl} =$

$= \sum_j u^*_{jk} u_{jl}$

Διαγωνοποίηση πινάκων.

Είδαμε ότι ένας πίνακας μπορεί να διαγωνοποιηθεί με έναν ~~unitary~~ πίνακα που κατασκευάζεται από τα ιδιοδιανύσματα. Πρώτα, βλέπουμε ότι τα κανονικά [illegible] ορθοκανονικό σύνολο. Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει για ερμιτιανούς πίνακες. Υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίο $H\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$. Επιλέγουμε την κατασκευή ενός ανάλογου παράλληλο το $\hat{e}'_1$ με το $\vec{u}_1$ ~~[illegible]~~. Θα ισχύει:

$$H\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \hat{e}'_k \cdot H\vec{u}_1 = \lambda_1 \hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_1 = \lambda_1 \delta_{k1} \equiv H'_{k1} \rightarrow$$

$$\rightarrow H' = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0\ 0\ 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & G \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right]$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, αυτή τη φορά με τον G, βρίσκουμε ότι ο H μπορεί να διαγωνοποιηθεί και βρίσκουμε με την αντίστοιχη βάση.

Μπορούν δύο πίνακες να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα; Αν οι $\left\{\begin{matrix} D_1 = u^{-1} H_1 u \\ D_2 = u^{-1} H_2 u \end{matrix}\right\}$ είναι διαγώνιοι, θα ισχύει έτσι $D_1 D_2 - D_2 D_1 = 0 \Rightarrow u^{-1}(H_1 H_2 - H_2 H_1) u = 0 \Rightarrow$ $H_1 H_2 = H_2 H_1$ (αναγκαία συνθήκη). Αν οι H_1 και H_2 μετατίθενται, και $\left\{\begin{matrix} u^{-1} H_1 u = D \text{ (διαγώνιος)} \\ u^{-1} H_2 u = M \text{ (άγνωστον αν είναι διαγώνιος)} \end{matrix}\right\}$, τότε θα ισχύει $DM = MD \Rightarrow D_{kk} M_{kl} = M_{kl} D_{ll}$. Αν $D_{kk} \neq D_{ll}$, οφείλει $M_{kl} = 0$. Υπάρχει, βέβαια, και η περίπτωση $D_{kk} = D_{ll}$, οπότε θα μπορούσε ν' έχουμε στην περίπτωση:

$$D = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ \hline 0 & & & \lambda_4 \ldots \end{array}\right], \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ d & e & f & \\ g & h & i & \\ \hline & 0 & & N \end{array}\right].$$

Μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε τον (ερμιτιανό) πίνακα $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, ενώ ο $\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$ δεν θα επηρεάζεται (πολλαπλάσιο του μοναδιαίου), άρα μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε ταυτόχρονα τους D και M.

Για οποιοδήποτε πίνακα $M = \frac{M + M^+}{2} + i \frac{M - M^+}{2i} = A + iB$, όπου—

προκύπτει ότι διαγωνοποιείται με την προϋπόθεση ότι οι (ερμιτιανοί) πίνακες A και B μετατίθενται, δηλαδή $[M, M^{+}]=0$ οπότε ο πίνακας M λέγεται κανονικός (normal). Οι ερμιτιανοί και οι unitary πίνακες είναι κανονικοί, άρα διαγωνοποιήσιμοι.

Απειροδιάστατοι χώροι

Παράδειγμα: 2D $\quad K_1 \; m \; K_2 \; m \; K_1 \longrightarrow \hat{x}$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \cancel{\frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2} + \frac{1}{2} K_1 x_2^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2), \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = K_2 (x_2 - x_1) + K_1 x_2$$

$$m \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 + K_2 (x_2 - x_1) = K_2 x_2 - (K_1 + K_2) x_1$$

$$m \ddot{x}_2 = -K_1 x_2 - K_2 (x_2 - x_1) = -(K_1 + K_2) x_2 + K_2 x_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \left(\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{\sqrt{m}} \\ x_2 &= \frac{y_2}{\sqrt{m}} \end{aligned} \right) \sim K = \frac{1}{2} m \frac{\dot{y}_1^2}{m} + \frac{1}{2} m \frac{\dot{y}_2^2}{m} =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{y}_2^2, \quad V = \frac{1}{2} K_1 \frac{y_1^2}{m} + \frac{1}{2} K_2 \frac{(y_2 - y_1)^2}{m} + \frac{1}{2} K_1 \frac{y_2^2}{m} =$$

$$= \frac{K_1}{2m} y_1^2 + \frac{K_2}{2m} (y_2 - y_1)^2 + \frac{K_1}{2m} y_2^2 = \frac{1}{2m} [y_1, y_2] \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_1 = x_1 \hat{x} = \left(\frac{y_1}{\sqrt{m}} \right) (\hat{x}) = y_1 \left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{m}} \right) = y_1 \hat{e}_1'$$

Πρέπει να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας της Δυναμικής ενέργειας $V = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1+K_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2m}$

$$Vz = \lambda z \Rightarrow (\mathcal{U}^{-1} V \mathcal{U})(\mathcal{U}^{-1} z) = \lambda(\mathcal{U}^{-1} z) \Rightarrow V' z' = \lambda z'$$

$$\frac{1}{2m}\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1+K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (K_1+K_2-2\lambda m)y_1 - K_2 y_2 = 0 \\ -K_2 y_1 + (K_1+K_2-2\lambda m) y_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\det = 0 \Rightarrow (K_1+K_2-2\lambda m)^2 = K_2^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1+\cancel{K_2}-2\lambda_1 m = \cancel{K_2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{K_1}{2m} \\ K_1+K_2-2\lambda_2 m = -K_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{K_1+2K_2}{2m} \end{array} \right\}$$

Για $\lambda = \lambda_1$: $(K_1+K_2-2\lambda_1 m) y_1 = K_2 y_2 \Rightarrow (\cancel{K_1}+K_2-\cancel{K_1}) y_1 = K_2 y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = \lambda_2$: $(K_1+K_2-2\lambda_2 m) y_1 = K_2 y_2 \Rightarrow (\cancel{K_1}+K_2-(\cancel{K_1}+2K_2)) y_1 = K_2 y_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y_1 = y_2 \Rightarrow \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad u'_{ik} = \hat{e}'_i \cdot \hat{u}_k$

Άρα $\mathcal{U}' = [\hat{u}_1 \; \hat{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Έλεγχος: $\mathcal{U}^{-1} V \mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_1+K_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{4m}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1+\cancel{K_2}-\cancel{K_2} & K_1+K_2+K_2 \\ -\cancel{K_2}+K_1+\cancel{K_2} & -K_2-K_1-K_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4m}\begin{bmatrix} K_1+K_1 & \cancel{K_1}+\cancel{2K_2}-\cancel{K_1}-\cancel{2K_2} \\ \cancel{K_1}-\cancel{K_1} & K_1+2K_2+K_1+2K_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4m}\begin{bmatrix} 2K_1 & 0 \\ 0 & 2(K_1+2K_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{K_1+2K_2}{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} : V$$

Άρα η διγραμμική μορφή V γίνεται:

$$[y_1\ y_2]\begin{bmatrix}\frac{K_1+K_2}{2m} & -\frac{K_2}{2m}\\ -\frac{K_2}{2m} & \frac{K_1+K_2}{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = [y_1\ y_2]\,U'U'^{-1}\begin{bmatrix}\frac{K_1+K_2}{2m} & -\frac{K_2}{2m}\\ -\frac{K_2}{2m} & \frac{K_1+K_2}{2m}\end{bmatrix}U'$$

$$U'^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = [y_1\ y_2]\,U'\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}U'^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

$$U'^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y_1\ y_2]\,U' = \left(U'^{T}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\right)^T = \left(U'^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}\right)^T = [q_1\ q_2],$$

οπότε $[y_1\ y_2]\,U'\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}U'^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = [q_1\ q_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} =$

$$= [q_1\ q_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 q_1\\ \lambda_2 q_2\end{bmatrix} = \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2$$

Δηλαδή: $K = \frac{1}{2}[\dot y_1\ \dot y_2]\begin{bmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left([\dot y_1\ \dot y_2]\,U'\right)\left(U'^{-1}\begin{bmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{bmatrix}\right) =$

$= \frac{1}{2}[\dot q_1\ \dot q_2]\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2\right)$ και $V = \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2$,

συνεπώς οι εξισώσεις γίνονται: $\frac{1}{2}\ddot q_1 + 2\lambda_1 q_1 = 0$, $\frac{1}{2}\ddot q_2 + 2\lambda_2 q_2 = 0$

δηλαδή
$$\left\{\begin{aligned}&\ddot q_1 + \frac{4K_1}{2m}q_1 = 0\\ &\ddot q_2 + \frac{4(K_1+2K_2)}{2m}q_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\ddot q_1 + \frac{2K_1}{m}q_1 = 0\\ &\ddot q_2 + \frac{2(K_1+2K_2)}{m}q_2 = 0\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned}&q_1 = a_1\sin\left(\sqrt{\tfrac{2K_1}{m}}\,t + \xi_1\right)\\ &q_2 = a_2\sin\left(\sqrt{\tfrac{2(K_1+2K_2)}{m}}\,t + \xi_2\right)\end{aligned}\right.$$

Επάνοδος στις αρχικές συντεταγμένες.

$$q = U^{-1} y \Rightarrow y = U q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{q_1-q_2}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2K_1}{m}}\, t+\delta_1\right) + a_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2(K_1+2K_2)}{m}}\, t+\delta_2\right)\right] \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2K_1}{m}}\, t+\delta_1\right) + a_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2(K_1+2K_2)}{m}}\, t+\delta_2\right)\right] \end{cases}$$

$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{m}}$, $x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{m}}$, δηλαδή $y = U' q$, $x = \gamma y = \gamma U' q \equiv U q$.

Γενίκευση για n βαθμούς ελευθερίας.

$$m \ddot{x}_l = \frac{T}{a}\left(x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1}\right)$$

$$K = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{x}_l^2, \quad V = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{T}{2a}\left(x_{l+1}-x_l\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{T}{a} x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{T}{a} x_n^2$$

$$x'_k = \sqrt{m}\, x_k \rightarrow \left\{ K = \sum_1^n \frac{1}{2} \dot{x}'^2_k, \quad V = \frac{T}{2a}\left[\sum\left(\frac{x'_{l+1}}{\sqrt{m}} - \frac{x'_l}{\sqrt{m}}\right)^2 + \frac{1}{m} x'^2_1 + \frac{1}{m} x'^2_n\right]\right.$$

$$(u_k)_l \equiv U_{lk} = \sqrt{\frac{2a}{L}} \sin\frac{lk\pi}{n+1}$$

$$\sin\frac{(l+1)k\pi}{n+1} - \sin\frac{lk\pi}{n+1} = 2\cos\left(\frac{2lk\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = 2\cos\frac{(2l+1)k\pi}{2(n+1)} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$$

$$\hat{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\begin{bmatrix}\sin\frac{k\pi}{n+1}\\ \sin\frac{2k\pi}{n+1}\\ \vdots \\ \sin\frac{nk\pi}{n+1}\end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι $\hat{u}_k \cdot \hat{u}_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{2}{n+1} \sin^2\frac{lk\pi}{(n+1)} = 1$.

Για τις ιδιοσυχνότητες αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{x}_l = \frac{T}{a}\left(x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1}\right) \\ x_l = \sin\frac{lk\pi}{n+1}\, e^{i\omega t} \end{array}\right\} \to -m\omega_k^2 \sin\frac{lk\pi}{n+1} = \frac{T}{a}\left[\sin\frac{(l+1)k\pi}{n+1} - 2\sin\frac{lk\pi}{n+1} + \sin\frac{(l-1)k\pi}{n+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\omega_k^2 \cancel{\sin\frac{lk\pi}{n+1}} = \frac{T}{a}\left[2\cancel{\sin\frac{lk\pi}{n+1}}\cos\frac{k\pi}{n+1} - 2\cancel{\sin\frac{lk\pi}{n+1}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\omega_k^2 = -\frac{2T}{a}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right) \Rightarrow \omega_k^2 = \frac{4T}{ma}\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_k = \sqrt{\frac{T}{a}}\, 2\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}}.$$ Οι κανονικές συντεταγμένες δίνονται από τη σχέση:

$$x_l = \sum u_{lk} q_k = \sum u_{lk} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k).$$

Θεωρούμε τώρα ότι $\left.\begin{array}{l} n \to \infty \\ (n+1)a = L \text{ (σταθερό)} \end{array}\right\}$ Τότε (1) Στη θέση του l χρησιμοποιούμε το $x = la$ (2) Στη θέση των x_l τα $y(x)$. (3) Το $u_{lk} \equiv (\vec{u}_k)_l = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{lk\pi a}{(n+1)a}$ γίνεται $u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{k\pi x}{L}$ (4) Το $\hat{u}_k \cdot \hat{u}_l = \delta_{kl}$ γίνεται $\int_0^L dx\, u_k(x) u_l(x) = \delta_{kl}$

(5) Αθροίσματα: $y(x) = \sum u_k(x) q_k = \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}}\, q_k \sin\frac{k\pi x}{L}$ (Fourier).

(6) Και $q = U^{-1} y \Rightarrow q_k = \int_0^L u_k^*(x) y(x)\, dx$ (αντίστροφος Fourier).

Το σύστημα $(\hat{e}_\ell)_m = \delta_{\ell m}$ θα γίνει $(e_b)_x = \delta(x-b)$

και $\hat{e}_a \cdot \hat{e}_b = \int \delta(x-a)\,\delta(x-b) = \delta(a-b)$ (μη αριθμήσιμο).

Οι συναρτήσεις ανήκουν σε πλήρεις χώρους εσωτερικού γινομένου, λέγονται χώροι Hilbert.

$$\varphi \cdot \psi \equiv \int_a^b \varphi^*(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \psi(x) = \sum a_k \varphi_k(x), \quad a_k = \varphi_k \cdot \psi$$

Αν $\psi = \hat{A}\varphi$, θα έχουμε $\psi_i = \sum K_{ij}\varphi_j \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \psi(x) = \int_a^b \underbrace{K(x,x')}_{\text{πυρήνας}} \varphi(x')\,dx'$$

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi \Longrightarrow \int_a^b K(x,x')\,\psi(x')\,dx' = \lambda\psi(x)$$

$$y = C_0\left[1 - n(n+1)\frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3)\frac{x^4}{4!} - + \cdots\right] +$$

$$+ C_1\left[x - (n-1)(n+2)\frac{x^3}{3!} + (n-1)(n+2)(n-3)(n+4)\frac{x^5}{5!} - + \cdots\right].$$

Ειδικές συναρτήσεις

Συναρτήσεις Legendre

$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$. Ως γνωστόν έχουμε ήδη δει:

$$y=c_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+k\right)!}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}-k\right)!}\frac{(n+2k)!}{n!}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+c_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}+k\right)!}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-k\right)!}\frac{(n+2k)!}{n!}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Για $n=0,2,4,\ldots$ η πρώτη σειρά τερματίζεται.

Με $r=\frac{n}{2}-k$ αυτή η σειρά μπορεί να γραφτεί

ως: $c_0\sum_{r}(-1)^r(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-r\right)!}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{r!}\frac{(n+(n-2r))!}{n!}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}=$

$$=c_0\frac{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!}(-1)^{\frac{n}{2}}\sum_{r}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{(n-r)!\,r!}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}$$

Για $n=1,3,5\ldots$, ορίζοντας $r=\frac{n-1}{2}-k$, η ωστόσο η δεύτερη σειρά γράφεται:

$$c_1\sum_{r}(-1)^{\frac{n-1}{2}+r}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}-r\right)!}\frac{1}{r!}\frac{\left(n+n-1-2r\right)!}{n!}\frac{x^{n-1-2r}}{(n-2r)!}$$

$$=c_1\frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{r}(-1)^r\frac{(2n-2r-1)!}{(n-r-1)!\,r!}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\frac{2n-2r}{2(n-r)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2r}\right) = (2n-2r)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{2n-2r-1}\right) = (2n-2r)(2n-2r-1).$$

$$\cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^{2n-2r-2}\right) = \dots = (2n-2r)(2n-2r-1)\dots(2n-2r-n+1)x^{n-2r}$$

$$= (n-2r+1)(n-2r+2)\dots(2n-2r)x^{n-2r}\frac{(n-2r)!}{(n-2r)!} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r}$$

Οι δύο εκφράσεις μπορούν να εκφραστούν με την ενιαία μορφή:

$$P_n(x) = K_n \sum_r (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)!\,r!} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!} =$$

$$= K_n \sum_r \frac{(-1)^r}{(n-r)!\,r!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2r}\right) = \frac{K_n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{2n-2r} =$$

$$= \frac{K_n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$ Η σύμβαση είναι: $P_n(1)=1$.

Οι παράγωγοι δίνουν μη μηδενικό αποτέλεσμα μόνο αν "γίνουν" στα $x-1$ ($n!$ τέτοιοι όροι με συνεισφορά $(x+1)^n \to (1+1)^n = 2^n$ έκαστος). Δηλαδή:

$$P_n(1) = \frac{K_n}{n!}\, n!\, 2^n = 1 \Rightarrow K_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$$

Rodrigues.

$P_0=1$, $P_1=x$, $P_2=\frac{3x^2-1}{2}$, $P_3=\frac{5x^3-3x}{2}$ κλπ.

Από τη σχέση του Cauchy για αναλυτικές συναρτήσεις $f(z)$: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)\,dt}{t-z}$, βρίσκομε

$$\frac{d^n}{dz^n}f(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}},$$ και για $f(t)=t^2-1$

δίνει: $$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^n\,dt}{(t-z)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(z)=\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt}$$ Ολοκληρωτική αναπαράσταση του Schläfli

Αν η διαδρομή είναι κύκλος με κέντρο το z και ακτίνα $|\sqrt{z^2-1}|$, θα ισχύει:

$t = z+\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi} \Rightarrow t^2-1 = z^2+(z^2-1)e^{2i\varphi}+2z\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi}-1$. Εξάλλου: $2(t-z)\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right) =$
$= 2\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right) = 2z\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi}+2(z^2-1)\cos\varphi\, e^{i\varphi} = 2z\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi}+(z^2-1)\left(e^{2i\varphi}+1\right) = 2z\sqrt{z^2-1}\,e^{i\varphi}+$
$+(z^2-1)e^{2i\varphi}+z^2-1 = t^2-1$. Επί πλέον, διαφορίζοντας: $dt = \sqrt{z^2-1}\,i\,e^{i\varphi}d\varphi = i(t-z)\,d\varphi$.

Αντικαθιστούμε: $P_n(z)=\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{2^n(t-z)^n\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^n}{(t-z)^{n+1}}\,i(t-z)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^n}$$ Ολοκληρωτική αναπαράσταση Laplace

Θεωρούμε τη σειρά: $F(h,z)=\sum_0^\infty h^n P_n(z)$.

Με βάση την αναπαράσταση του

Laplace:

$$F(h,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_0^\infty h^n\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-hz-h\sqrt{z^2-1}\cos\varphi} .$$ Αλλά $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a-b\cos\varphi} \overset{(a>b)}{=}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-b\cos\varphi} \underset{d\zeta=i\zeta d\varphi}{\overset{\zeta=e^{i\varphi}}{=}} \frac{1}{2}\oint \frac{\frac{d\zeta}{i\zeta}}{a-b\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}} = \frac{1}{2i}\oint\frac{2d\zeta}{2a\zeta-b\zeta^2-b} =$$

$$=-\frac{1}{ib}\oint\frac{d\zeta}{\zeta^2-\frac{2a}{b}\zeta+1} = -\frac{1}{ib}\oint\frac{d\zeta}{\Big(\zeta+\underbrace{\tfrac{a}{b}+\sqrt{\tfrac{a^2}{b^2}-1}}_{>1}\Big)\Big(\zeta+\underbrace{\tfrac{a}{b}-\sqrt{\tfrac{a^2}{b^2}-1}}_{<1}\Big)}$$

$$=-\frac{1}{ib}2\pi i\frac{1}{\left(-\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)} = \frac{2\pi}{b}\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} .$$

Άρα $F(h,z)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{(1-hz)^2-h^2(z^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2z^2-2hz-h^2z^2+h^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{F(h,z)=\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}}$$ Γεννήτρια συνάρτηση.

Εφαρμογή: $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} \overset{(r'<r)}{=} \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\vartheta}}$

$$=\frac{1}{r}\sum\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\vartheta) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\sum_0^\infty \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\vartheta)}$$

Αναδρομικές σχέσεις

$$F=\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial h}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}\,\frac{1}{1-2hz+h^2}(-2z+2h)$$

$$=-\frac{1}{2}F\frac{1}{1-2hz+h^2}(-2z+2h)\Rightarrow\left(1-2hz+h^2\right)\frac{\partial F}{\partial h}=F(z-h)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-2hz+h^2\right)\sum n h^{n-1}P_n=\sum h^nP_n z-\sum h^{n+1}P_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\sum n h^{n-1}P_n}_{\substack{\Downarrow\, n=n'+1\\ \sum (n'+1)h^{n'}P_{n'+1}}}-2z\sum n h^nP_n+\underbrace{\sum n h^{n+1}P_n}_{\substack{\Downarrow\, n=n'-1\\ \sum (n'-1)h^{n'}P_{n'-1}}}=z\sum h^nP_n-\underbrace{\sum h^{n+1}P_n}_{\substack{\Downarrow\, n=n'-1\\ \sum h^{n'}P_{n'-1}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum\left[(n'+1)P_{n'+1}-2zn'P_{n'}+(n'-1)P_{n'-1}\right]h^{n'}=\sum\left[zP_{n'}-P_{n'-1}\right]h^{n'}\Rightarrow$$

$n'\to n$

$$\Rightarrow(n+1)P_{n+1}-2nzP_n+(n-1)P_{n-1}=zP_n-P_{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{(n+1)P_{n+1}-(2n+1)zP_n+nP_{n-1}=0}$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς z βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{2}F\frac{1}{1-2hz+h^2}(-2h)=\sum h^nP'_n\Rightarrow\left(1-2hz+h^2\right)\sum h^nP'_n$$

$$=hF\Rightarrow\sum h^{\tilde n}\left[P'_{\tilde n}-2zP'_{\tilde n-1}+P'_{\tilde n-2}\right]=\sum h^{\tilde n}P_{\tilde n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{P'_n-2zP'_{n-1}+P'_{n-2}=P_{n-1}.}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο μπορούμε να βρούμε και άλλες σχέσεις, π.χ.

$P'_{n+1} - z P'_n = (n+1) P_n, \quad P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1) P_n$ κ.λπ.

Τιμές σε ειδικά σημεία:

$$\sum h^n P_n(1) = F(h, 1) = \frac{1}{\sqrt{1-2h+h^2}} = \frac{1}{1-h} = 1+h+h^2+h^3+\ldots$$

$\Rightarrow P_n(1) = 1.$

$$\sum h^n P_n(0) = F(h, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = \sum_0^\infty \frac{(2k-1)!!(-1)^k}{2^k k!} h^{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{2k+1}(0) = 0 \\ P_{2k}(0) = (-1)^k \dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!} \end{cases}$$

Ορθογωνιότητα.

$$I_{mn} = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \frac{1}{2^{m+n}} \frac{1}{m!n!} \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right]\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right] dx$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες n φορές:

$$\underset{(m<n)}{I_{mn}} = -\frac{1}{2^{m+n}} \frac{1}{m!n!} \int_{-1}^{1} dx \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m\right]\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right] = \ldots$$

$$= \ldots = \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{1} dx \left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n = 0, \text{ αν } m<n.$$

Αν $m=n$: $I_{nn}=\int_{-1}^{1}dx\,P_n^2=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}dx\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2=$

$\Rightarrow\dots=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}dx\,(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}dx\,(x^2-1)^n=$

$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}dx\,(1-x^2)^n\xrightarrow[\substack{1+x=2u\\1-x=2-2u}]{x=2u-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}2du\,(2u)^n2^n(1-u)^n=$

$=\frac{2(2n)!\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}}(n!)^2}\int_0^1 du\,u^n(1-u)^n=\frac{2(2n)!}{(n!)^2}B(n+1,n+1)=$

$=\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}=\frac{2(2n)!}{\cancel{(n!)^2}}\frac{\cancel{(n!)^2}}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}.$

Τελικά: $\boxed{\int_{-1}^{1}dx\,P_m(x)P_n(x)=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}}$

Σειρά Legendre: $f(x)=\sum_0^\infty c_nP_n(x)$, $c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}dx\,P_n(x)f(x)$

Δεύτερη λύση: $y=vP_n(x)\rightarrow(1-x^2)(v''P_n+2v'P_n'+\underline{vP_n''})-$

$-2x(v'P_n+\underline{vP_n'})+\underline{n(n+1)vP_n}=0\Rightarrow(1-x^2)v''P_n+$

$+2v'\left(P_n'(1-x^2)-xP_n\right)=0\Rightarrow\frac{dv'}{dx}(1-x^2)P_n+v'(2P_n'(1-x^2)-$

$2xP_n)=0\Rightarrow\int\frac{dv'}{v'}+\int\left[\frac{2P_n'\cancel{(1-x^2)}}{P_n\cancel{(1-x^2)}}-\frac{2x\cancel{P_n}}{(1-x^2)\cancel{P_n}}\right]dx=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln v'+2\int\frac{dP_n}{P_n}+\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln v' + 2\ln P_n + \ln(1-x^2) = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left[v' P_n^2 (1-x^2)\right] = C_1 \to v' = \frac{e^{C_1}}{(1-x^2)P_n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{e^{C_1}}_{C}\int \frac{dx}{(1-x^2)\,P_n^2} + \underbrace{C_2}_{C'} \Rightarrow y = vP_n = P_n\left[C\int\frac{dx}{(1-x^2)\,P_n^2} + C'\right]$$

Η σύμβαση είναι:

$$\boxed{Q_n(z) = -P_n(z)\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{(z^2-1)\left[P_n(z)\right]^2}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Για}\\ C=1\\ c'=0\end{array}\right)$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\lim_{|z|\to\infty} Q_n(z) \to \frac{1}{z^{n+1}}$

Ακριβέστερα: $Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} + \underbrace{f_{n-1}(z)}$ πολυώνυμο βαθμού n-1 (αφού $z\to\infty$!) βλ. Θεραπεύτω...

Χρειάζονται τομές για να γίνει μονότιμη η $Q_n(z)$. Συμβατικά θεωρεί κανείς μιά τομή από το -1 μέχρι το $+1$ και ορίζει την $Q_n(z)$ να είναι πραγματική για πραγματικά $z>1$. Τότε, για $x\in(-1,1)$:

$$Q_n(x\pm i\epsilon) = \frac{1}{2}P_n(x)\left[\ln\frac{1+x}{1-x} \mp i\pi\right] + f_{n-1}(x).$$

Συνήθως, λέγοντας $Q_n(x)$, $x\in(-1,1)$, εννοεί κανείς τον μέσο όρο: $Q_n(x) = \frac{1}{2}\left(Q_n(x+i\epsilon)+Q_n(x-i\epsilon)\right) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} + f_{n-1}(x)$

$$f = \ln(1+x) \qquad f(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-3!)}{4!}x^4$$

$$f' = \frac{1}{1+x} \qquad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''' = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

Το $f_{n-1}(x)$ ορίζεται έτσι ώστε $Q_n(z) \sim \frac{1}{z^{n+1}}$ για $|z|\to\infty$.

Σημειώνουμε ότι $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ και

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$, άρα

$$\ln\frac{z+1}{z-1} = \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{z}\right) \overset{\left(x=\frac{1}{z}\right)}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots$$

$$Q_0(z) = P_0(z)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots$$

Συμπεριφέρεται σαν $\frac{1}{z}$, όπως θα έπρεπε, άρα δε χρειάζεται πολυώνυμο.

$$Q_1(z) = P_1(z)\cdot\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots\right) + f_0 = 1 + \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{5z^4} + \dots + f_0$$

Πρέπει να "φύγει" ο σταθερός όρος, άρα $f_0 = -1$ και

$$Q_1 = \frac{1}{2} z \ln\frac{z+1}{z-1} - 1$$

$$Q_2(z) = P_2(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots\right) + f_1 = \frac{3z^2-1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots\right) + f_1(z) = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2\cdot 3z} + \frac{3}{10z^3} + \dots - \frac{1}{2z} - \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{10z^5} - \dots + f_1(z),$$

άρα $f_1 = -\frac{3z}{2}$ και $Q_2 = \frac{3z^2-1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - \frac{3z}{2}$.