Συνηθισμένες σειρές: ~~ως μέχρι n, αν το n είναι~~ ακέραιος. δεκτικές

$$(1+x)^n = \sum_0^n \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{x^k}{k!}\,,\qquad e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$$

Η πρώτη συνεχίζεται:

$$\cancel{(1+x)^{-1} = \sum \frac{(-1)!}{(-1-k)!}\,\frac{x^k}{k!}} = \cancel{\left(1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2!}+\dots\right)} =$$

$$\left(\cancel{\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots(n-k)}} = (n-k+1)\cdots n\right)$$

$$\cancel{= 1 - x + (-2)\frac{x^2}{2!} + (-1-3+1)\frac{x^3}{3!}}$$

$$(1+x)^n = \sum_0^\infty \frac{1\cdots n}{1\cdots(n-k)}\,\frac{x^k}{k!} = \sum_0^\infty \underbrace{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}_{c_k}\,\frac{x^k}{k!}$$

Έστω $n=-1$. Τότε:

$c_0 = (n+1)\dots n \Rightarrow 1$

$c_1 = (n-1+1)\dots n \Rightarrow n$ ← ένας όρος

$c_2 = (n-2+1)\dots n \Rightarrow (n-1)\,n$ ← δύο όροι

$c_3 = (n-3+1)\dots n \Rightarrow (n-2)(n-1)\,n$ ← τρείς όροι

$c_4 = (n-4+1)\dots n \Rightarrow (n-3)(n-2)(n-1)\,n$ ← τέσσερις όροι

Δηλαδή: $(1+x)^{-1} = 1 + n\frac{x}{1!} + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$

$= 1 - x + (-1)(-2)\frac{x^2}{2!} + (-1)(-2)(-3)\frac{x^3}{3!} \dots$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Αν θέσουμε στη θέση του x το x^2 στην ίδια σειρά (για $n=-1$) θα βρούμε

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = \int dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

Χρήσιμα αναπτύγματα είναι οι αριθμοί Bernoulli και Euler.

Για τους αριθμούς Bernoulli ξεκινάμε από τη συνάρτηση $\frac{x}{e^x-1} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Αναδιατάσσοντας: $x = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$

$\to 1 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right)$

Ορισμός: $\boxed{c_n = \frac{B_n}{n!}}$

$\to 1 = \left(B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right)$

$$\to \begin{cases} 1 = B_0 \\ 0 = B_1 + \frac{B_0}{2!} \to 2B_1 + 1 = 0 \\ 0 = \frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_0}{3!} \to 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0 \\ 0 = \frac{B_3}{3!} + \frac{B_2}{2!\,2!} + \frac{B_1}{3!} + \frac{B_0}{4!} \to 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $(B+1)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} B^k \to$

$(B+1)^2 = B_2 + 2B_1 + 1$

$(B+1)^3 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1$

$(B+1)^4 = B_4 + 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1$

Άρα (1) η $B_1 + \frac{B_0}{2} = 0$ γράφεται $2B_1 + 1 = 0 \to (B+1)^2 = B_2$

2) η $3B_2 + 3B_1 + 1 = 0$ γράφεται: $(B+1)^3 = B_3$ και η

$4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 = 0$ γράφεται: $(B+1)^4 = B_4$. Από

1) $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = -B_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $B_3 = -\frac{1}{4}\left(6\frac{1}{6} + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 0$

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sin x\cos x \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = 2\sin x\cos x\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} - 2\cdot\cancel{\sin 2x}\frac{\cos 2x}{\cancel{\sin 2x}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 2\cos 2x \quad \checkmark$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \rightarrow 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 2\cos 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sin x\cdot\cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x\cos x\frac{\cos x}{\sin x} - 2\sin 2x\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan x = \cot x - 2\cot 2x$$

ισχύει γενικά: $\left\{ \begin{matrix} B_0 = 1 \\ (B+1)^n = B_n \end{matrix} \right\}$, όπου $B^n \to B_n$

Εφαρμογή: $\cot x = i \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} \xrightarrow[ix = \frac{y}{2}]{} i \dfrac{e^{\frac{y}{2}}+e^{-\frac{y}{2}}}{e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}} =$

$$= i \frac{e^y+1}{e^y-1} = i \frac{(e^y-1)+2}{e^y-1} = i\left(1+\frac{2}{e^y-1}\right) = \frac{2i}{y}\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{e^y-1}\right).$$

Αλλά $\dfrac{y}{e^y-1} = \sum_0^\infty \dfrac{B_n y^n}{n!}$, οπότε

$\cot x = \dfrac{2i}{y}\left(\dfrac{y}{2} + \sum_0^\infty \dfrac{B_n y^n}{n!}\right)$. Σημειώνουμε ότι $B_1 = -\frac{1}{2}$ και ότι οι υπόλοιποι περιττοί όροι της σειράς μηδενίζονται, οπότε: $\cot x = \dfrac{2i}{y}\left(\cancel{\dfrac{y}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{2}y} + \sum_{\text{άρτια}} \dfrac{B_n y^n}{n!}\right) =$

$$= \frac{2i}{y} \sum_{\text{άρτια}} \frac{B_n y^n}{n!} = \frac{\cancel{2i}}{\cancel{2i}x} \sum_{\text{άρτια}} \frac{B_n (2ix)^n}{n!} \underset{n=2m}{=}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{B_{2m}(2x)^{2m}}{(2m)!}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$, οπότε μπορούμε να ελέγξουμε ότι παίρνουμε το σωστό ανάπτυγμα για την $\tan x$:

$$\tan x = \frac{1}{x} \sum_0^\infty (-1)^m \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left[(2x)^{2m} - \frac{2}{2}(4x)^{2m}\right] =$$

$\# \ (4)$

$$= \frac{1}{x}\left[(-1)^0 \frac{B_0 \to 1}{0!}\left(\cancel{1-1}\right) + (-1)^1 \frac{B_2 \to \frac{1}{6}}{2!}\left[(2x)^2 - (4x)^2\right] + \right.$$

$$\left. + (-1)^2 \frac{B_4 \to -\frac{1}{30}}{4!}\left[(2x)^4 - (4x)^4\right] + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[- \frac{1}{12}\left(4x^2 - 16x^2\right) - \frac{1}{30}\frac{1}{24}\left(16x^4 - 256x^4\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[[illegible]\, x^2 + [illegible]\, x^4 \right].$$

$$\simeq \frac{1}{x}\left[x^2 + \frac{x^4}{3} + \dots\right] = x + \frac{x^3}{3} + \dots,$$ που είναι

το ανάπτυγμα που θα βρίσκαμε και από Taylor.

Μετασχηματισμοί σειρών.

Έστω $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ Ολοκληρώνοντας:

$\int_0^x f(x)\,dx = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$, οπότε διαφορίζοντας

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - (-1)\,x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2) Έστω $f(x) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} + \frac{x^3}{4\cdot 5} + \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 f(x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{4\cdot 5} + \dots$, οπότε η

δεύτερη παράγωγος είναι: $(x^2 f)'' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$

$$\to (x^2 f)' = \int dx \, \frac{1}{1-x} = -\ln|1-x| + \tilde{c}_1 \to$$

$$\to x^2 f = \tilde{c}_1 x - \int \ln|1-x| \, dx + c_2$$

$$\left[(1-x)\ln(1-x)\right]' = (-1)\ln(1-x) + (1-x)\frac{1}{1-x}(-1) \to$$

$$\to -\int \ln(1-x)\, dx = (1-x)\ln(1-x) + x$$

Άρα $f = \dfrac{1}{x^2}\Big[\underbrace{(\tilde{c}_1+1)}_{c_1} x + c_2 + (1-x)\ln(1-x)\Big] =$

$= \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2} + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}$. Υπολογίζουμε

ρητά: $f(0) = \dfrac{1}{2}$,

Εξάγουμε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2} + \dfrac{-x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2} =$

$$= \frac{c_1 - 1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{1}{2} + O(x) = \frac{1}{2} \to \left\{ \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \right\} \to$$

$$\to f = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^2}.$$

Πχ. $f = 1 + a\cos\vartheta + a^2\cos 2\vartheta + \dots = \mathrm{Re}\big(1 + ae^{i\vartheta} +$
$a \in \mathbb{R}$, $|a|<1$

$$+ (ae^{i\vartheta})^2 + \dots\big) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-ae^{i\vartheta}} = \mathrm{Re}\left[\frac{1 - a\cos\vartheta + ia\sin\vartheta}{(1-a\cos\vartheta)^2 + (a\sin\vartheta)^2}\right]$$

Πχ, αν $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$ ορίζουμε $f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots \to f'(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots =$

$= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = xe^x \to f(x) = \int x\, d(e^x) =$

$= xe^x - e^x + C$ Αλλά εξ ορισμού $f(0) = 0 \to$

$\to -1 + C = 0 \to C = 1 \to f = xe^x - e^x + 1$ και

$S = f(1) = e - e + 1 = 1$.

Πχ, αν $S = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \dots = \sum_k \frac{m!}{k!(m-k)!}$

ορίζουμε $f(x) = \sum_k \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k = (1+x)^m \to$

$\to S = f(1) = 2^m$.

Πχ $S = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$. Μπορούν να μας βοηθήσουν οι αριθμοί του Bernoulli. Ξεκινάμε από

τη σειρά Fourier της συνάρτησης $\boxed{\cos kx} = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos nx$ ορίζεται [illegible] μετά με την περιοδικότητα

$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx \cos nx \cos kx = (-1)^n \frac{2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)}$. Δηλαδή

$\cos kx = \frac{2k \sin k\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2k^2} - \frac{\cos x}{k^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{k^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{k^2 - 9} + \dots\right] \to$

π (7)

$$\rightsquigarrow \cos k\pi = \frac{2k\sin k\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2k^2} - \frac{\cos\pi}{k^2-1} + \frac{\cos 2\pi}{k^2-4} - \frac{\cos 3\pi}{k^2-9} + \cdots\right] \to$$

$$\to k\pi \cot k\pi = 2k^2\left[\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2-4} + \frac{1}{k^2-9} + \cdots\right] =$$

$$= 1 + 2k^2\left[\frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2-4} + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{k^2-1} = -\frac{1}{1-k^2} = -\left[1+k^2+k^4+k^6+\cdots\right]$$

$$\frac{1}{k^2-4} = -\frac{1}{2^2\left(1-\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)} = -\frac{1}{2^2}\left[1+\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^4+\cdots\right]$$

$$\frac{1}{k^2-9} = -\frac{1}{3^2\left(1-\left(\frac{k}{3}\right)^2\right)} = -\frac{1}{3^2}\left[1+\left(\frac{k}{3}\right)^2+\left(\frac{k}{3}\right)^4+\cdots\right].$$

Άρα $k\pi\cot k\pi = 1 - 2k^2\left[1+k^2+k^4+\cdots\right] - \frac{2k^2}{2^2}\left[1+\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^4+\cdots\right] -$

$$-2k^2\frac{1}{3^2}\left[1+\left(\frac{k}{3}\right)^2+\left(\frac{k}{3}\right)^4+\cdots\right] \cdots =$$

$$= 1 - 2k^2\underbrace{\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right]}_{\zeta(2)} - 2k^4\underbrace{\left[1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right]}_{\zeta(4)} - \cdots$$

(Υπενθυμίζουμε τον ορισμό $\zeta(s) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$)

Τελικά $\boxed{k\pi\cot k\pi = 1 - 2\sum_{1}^{\infty}\zeta(2m)k^{2m}}$ Εξάλλου ξέρουμε

δείξει ότι $\cot x = \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{B_{2m}(2x)^{2m}}{(2m)!} \longrightarrow$

$$\to x\cot x = \sum_0^\infty (-1)^m \frac{B_{2m}(2x)^{2m}}{(2m)!} \to$$

$$\to k\pi\cot k\pi = \sum_0^\infty (-1)^m \frac{B_{2m}(2k\pi)^{2m}}{(2m)!} = \sum (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m} k^{2m} B_{2m}}{(2m)!}$$

Συγκρίνοντας τα δύο αναπτύγματα του $k\pi\cot k\pi$ βρίσκουμε ότι $-2\zeta(2m) = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m} \to$

$$\to \boxed{\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}}$$

Έχουμε υπολογίσει άπειρα αθροίσματα:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots \equiv \zeta(2) = (-1)^2 \frac{\overset{1/6}{B_2}(2\pi)^2}{2\cdot 2!} = \frac{\frac{1}{6}4\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\dots \equiv \zeta(4) = (-1)^3 \frac{\overset{-1/30}{B_4}(2\pi)^4}{2\cdot 4!} = -\frac{\left(-\frac{1}{30}\right)16\pi^4}{2\cdot 24} = \frac{\pi^4}{90}$$

κ.λ.π.

<u>Μετασχηματισμοί σειρών.</u>

Σύγκριση της ζητούμενης σειράς $f(z)=\sum_0^\infty c_n b_n z^n$ με τη γνωστή $g(z)=\sum_0^\infty b_n z^n$. Η ιδέα είναι να απαλείψουμε τα b_n από την $f(z)$, δηλαδή να τα αντικαταστήσουμε συναρτήσει της $g(z)$ και των παραγώγων της:

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots$$

$$g' = b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + 4b_4 z^3 + \dots$$

$$g'' = 2b_2 + 6b_3 z + 12 b_4 z^2 + \dots$$

$$g''' = 6b_3 + 24 b_4 z + \dots$$

$$z g' = b_1 z + 2b_2 z^2 + 3b_3 z^3 + 4b_4 z^4 + \dots$$

$$z^2 g'' = 2b_2 z^2 + 6b_3 z^3 + 12 b_4 z^4 + \dots$$

$$z^3 g''' = 6b_3 z^3 + 24 b_4 z^4 + \dots$$

$$f(z) = \cancel{c_0 b_0} + c_1 b_1 z + c_2 b_2 z^2 + \dots + \left\{ c_0 g - \cancel{c_0 b_0} - c_0 b_1 z - \right.$$

$$\left. - c_0 b_2 z^2 - \dots \right\} = c_0 g + (c_1 - c_0) b_1 z + (c_2 - c_0) b_2 z^2 + \dots =$$

$$= c_0 g + \cancel{(c_1 - c_0) b_1 z} + (c_2 - c_0) b_2 z^2 + (c_3 - c_0) b_3 z^3 + \dots + \left\{ (c_1 - c_0) z g' - \cancel{(c_1 - c_0) b_1 z} \right.$$

$$\left. - 2(c_1 - c_0) b_2 z^2 - 3(c_1 - c_0) b_3 z^3 - 4(c_1 - c_0) b_4 z^4 - \dots \right\} =$$

$$= c_0 g + (c_1 - c_0) z g' + (c_2 - c_0 - 2c_1 + 2c_0) b_2 z^2 +$$

$$+ (c_3 - c_0 - 3c_1 + 3c_0) b_3 z^3 + \dots =$$

$$= c_0 g + (c_1 - c_0) z g' + (c_2 - 2c_1 + c_0) b_2 z^2 + (c_3 - 3c_1 + 2c_0) b_3 z^3 + \dots$$

$$= c_0 g + (c_1 - c_0) z g' + \cancel{(c_2 - 2c_1 + c_0) b_2 z^2} + (c_3 - 3c_1 + 2c_0) b_3 z^3 + \left\{ (c_2 - 2c_1 + \right.$$

$$\left. + c_0) \frac{z^2 g''}{2!} - \frac{(c_2 - 2c_1 + c_0)}{2!} \left[\cancel{2 b_2 z^2} + 6 b_3 z^3 + 12 b_4 z^4 + \dots \right] \right\} =$$

$$= c_0 g + (c_1 - c_0) z g' + (c_2 - 2c_1 + c_0) \frac{z^2 g''}{2!} + \dots$$

οι διαδοχικοί συντελεστές είναι εύκολο να βρεθούν:

μόνο αυτά!

c_0			
	$c_1 - c_0$		
c_1		$c_2 - 2c_1 + c_0$	
c_2	$c_2 - c_1$		$c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0$
		$c_3 - 2c_2 + c_1$	
c_3	$c_3 - c_2$		$c_4 - 3c_3 + 3c_2 - c_1$
		$c_4 - 2c_3 + c_2$	
c_4	$c_4 - c_3$		

ὅ.ἔ.δ.

Μια (γνωστή) σειρά που χρησιμοποιείται συχνά δίνει το μετασχηματισμό του Euler:

$g(z)=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\dots$, οπότε $b_n=(-1)^n$

και $zg'(z)=\frac{-z}{(1+z)^2}$, $\frac{z^2g''(z)}{2!}=\frac{z^2}{(1+z)^3}$, ...

Για την σειρά $f=\sum(-1)^n c_n z^n$ οι παραπάνω σχέσεις δίνουν: $f(z)=c_0\,g(z)+(c_1-c_0)\,zg'+(c_2-2c_1+c_0)\frac{z^2g''}{2!}+\dots=\frac{c_0}{1+z}+(c_1-c_0)\frac{-z}{(1+z)^2}+(c_2-2c_1+c_0)\frac{z^2}{(1+z)^3}+\dots=\frac{1}{1+z}\left[c_0-(c_1-c_0)\frac{z}{1+z}+(c_2-2c_1+c_0)\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\dots\right]$. Για παράδειγμα, θεωρούμε την σειρά $f(z)=\frac{1}{z}\ln(1+z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots\right)=$

$c_1b_1=-\frac{1}{2}\to c_1=\frac{1}{2}$, $c_2b_2=\frac{1}{3}\to c_2=\frac{1}{3}$

$=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\dots$ Η σειρά συγκλίνει αργά (για $|z|>1$ αποκλίνει). Ο πίνακας διαφορών είναι:

1			
	$-\frac{1}{2}$		
$+\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	
	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$	
	$-\frac{1}{12}$		
$+\frac{1}{4}$			

Άρα $f(z)=\frac{1}{1+z}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{z}{1+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\dots\right]$, δηλαδή παίρνουμε μία σειρά που συγκλίνει ταχύτερα.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \xRightarrow{t=u\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-\alpha u^2}d(u\sqrt{\alpha})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \to$$

$$\to \int_0^\infty e^{-\alpha u^2}du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \xRightarrow{t=u^2} \int_0^\infty e^{-u^4}2u\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-u^4}u\,du=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

$$I_\alpha \equiv \int_0^\infty e^{-t^\alpha}dt \xrightarrow[\substack{t=u^{1/\alpha} \\ dt=\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du}]{u=t^\alpha} \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du \equiv \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\Gamma(z)\equiv\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du\right) \qquad \alpha=2 \to \int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\cos\lambda x\,dx=\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty e^{i\lambda x}e^{-\alpha x}dx\right]=\mathrm{Re}\frac{1}{\alpha-i\lambda}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}$$

$$\mathrm{Im}[\ ]=\int_0^\infty e^{\alpha x}\sin\lambda x\,dx=\mathrm{Im}\frac{1}{\alpha-i\lambda}=\frac{\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}$$

$$I(\alpha)=\int e^{-\alpha x}\cos\lambda x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} \Rightarrow \frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=-\int e^{-\alpha x}x\cos\lambda x\,dx=$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\right)=\frac{\alpha^2-\lambda^2}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}.$$

$$py'' + qy' + ry = s \qquad y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\left.\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= \frac{s}{p} \end{aligned}\right\} \quad u_2' = -\frac{y_1}{y_2} u_1'$$

$$u_1' y_1' - \frac{y_1}{y_2} u_1' y_2' = \frac{s}{p} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_1'\left(y_1' - \frac{y_1 y_2'}{y_2}\right) = \frac{s}{p} \rightarrow \boxed{u_1' = \frac{s}{p} \frac{y_2}{y_1' y_2 - y_1 y_2'}} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2' = -\frac{s}{p} \frac{y_1}{y_2} \frac{y_2}{y_1' y_2 - y_1 y_2'} \Rightarrow \boxed{u_2' = -\frac{s}{p} \frac{y_1}{y_1' y_2 - y_1 y_2'}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \cos\alpha \rightarrow y_1' = -\sin\alpha \\ y_2 &= \sin\alpha \rightarrow y_2' = \cos\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow y_1' y_2 - y_1 y_2' = (-\sin\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha$$

$$= -1$$

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \left(\begin{aligned} u_1' &= \frac{1}{\alpha} \frac{\sin\alpha}{-1} = -\frac{\sin\alpha}{\alpha} \\ u_2' &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\cos\alpha}{-1} = +\frac{\cos\alpha}{\alpha} \end{aligned}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \cos\alpha \cdot \left(-\int^{\alpha} \frac{\sin t}{t} dt\right) + \sin\alpha \left(\int^{\alpha} \frac{\cos t}{t} dt\right)$$

II 12

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}dx \Rightarrow \frac{dI}{d\alpha}=-\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=$$

$$=\frac{-1}{\alpha^2+1} \Rightarrow I(\alpha)=-\int\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=C-\arctan\alpha$$

$$I(\infty)=0 \Rightarrow C=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}.$$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha \Rightarrow I(0)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx \Rightarrow I''(\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^2e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{I''+I}_{\cos\alpha,\ \sin\alpha}=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$$

Μεταβολή των σταθερών: $I(\alpha)=\sin\alpha\int^\alpha\frac{\cos t}{t}dt-$
$-\cos\alpha\int^\alpha\frac{\sin t}{t}dt$ Αλλά $I(\infty)=I'(\infty)=I''(\infty)=\ldots=0$

Άρα $I'(\alpha)=\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\cos\alpha\int^\alpha\frac{\cos t}{t}dt$
$+\sin\alpha\int^\alpha\frac{\sin t}{t}dt \Rightarrow I''(\alpha)=\frac{\cos^2\alpha}{\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}-$
$-\sin\alpha\int^\alpha\frac{\cos t}{t}dt+\cos\alpha\int^\alpha\frac{\sin t}{t}dt$

Αν θέλω το κάτω όριο ίσο με ∞, οι ισότητες ικανοποιούνται άρα

$$I(\alpha) = \sin\alpha \underbrace{\boxed{\int_{\infty}^{\alpha} \frac{\cos t}{t}\,dt}}_{Ci\,\alpha} - \cos\alpha \underbrace{\boxed{\int_{\infty}^{\alpha} \frac{\sin t}{t}\,dt}}_{\frac{\pi}{2} - Si\,\alpha}$$

$$Ci\,x \equiv \int_{\infty}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt, \quad Si\,x \equiv \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt \Rightarrow \int_{\infty}^{\alpha} = \int_{\infty}^{0} + \int_{0}^{\alpha} = -\frac{\pi}{2} + Si\,\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{\infty}^{\alpha} = Si\,\alpha - \frac{\pi}{2}$$

Άρα $I(\alpha) = \sin\alpha\; Ci\,\alpha - \cos\alpha \left(Si\,\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Συνεχείς διαφορίσεις του $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ και $\int_0^\infty dx\, x e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$ δίνουν τα $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx$.

$$\boxed{\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx + \frac{db}{d\alpha} f(b(\alpha),\alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a(\alpha),\alpha)}$$

Συμμετρία.

$$I_1(\vec{k}) = \int \frac{d\Omega}{1+\vec{k}\cdot\hat{r}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{1}{1+\vec{k}\cdot\hat{r}}$$

Υποθέτουμε ότι $k \equiv |\vec{k}| < 1$ και προσανατολίζουμε τον άξονα των z κατά μήκος του $\vec{k}$. Τότε:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{1}{1+k\cos\vartheta} = \frac{2\pi}{k} \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1}{x+\frac{1}{k}} = \frac{2\pi}{k}\left(\ln\left|1+\frac{1}{k}\right| - \ln\left|-1+\frac{1}{k}\right|\right) = \frac{2\pi}{k} \ln\frac{1+k}{1-k}$$

$$I_m(\vec{k}) = \int \frac{d\Omega}{(1+\vec{k}\cdot\hat{r})^m}$$ #14

Τα $I_m(\vec{k})$ μπορούν να βρεθούν με παραγώγιση του

$$I_1(\alpha) = \int \frac{d\Omega}{\alpha+\vec{k}\hat{r}} = 2\pi\int_{-1}^{1} dx\,\frac{1}{\alpha+kx} = \frac{2\pi}{k}\int_{-1}^{1} dx\,\frac{1}{x+\frac{\alpha}{k}} =$$

$$= \frac{2\pi}{k}\ln\left|\frac{1+\frac{\alpha}{k}}{1-\frac{\alpha}{k}}\right| = \frac{2\pi}{k}\ln\frac{\alpha+k}{\alpha-k} \Rightarrow \frac{dI_1}{d\alpha} = \frac{2\pi}{k}\,\frac{\alpha-k}{\alpha+k}\,\frac{1(\alpha-k)-1(\alpha+k)}{(\alpha-k)^2}$$

$$= \frac{2\pi}{k}\,\frac{(\alpha-k)(-2k)}{(\alpha+k)(\alpha-k)^2} = -\frac{4\pi}{\alpha^2-k^2}. \quad I_2 = -\frac{dI_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=1} =$$

$$= +\frac{4\pi}{1-k^2}$$

$$I_1 = \int\frac{\vec{a}\cdot\hat{r}\,d\Omega}{1+\vec{k}\hat{r}} = \vec{a}\int\frac{\hat{r}\,d\Omega}{1+\vec{k}\hat{r}} = \vec{a}\cdot(A\vec{k}). \quad \int\frac{\vec{k}\hat{r}\,d\Omega}{1+\vec{k}\hat{r}} = A(\vec{k}\cdot\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{k^2}\int\frac{\vec{k}\hat{r}\,d\Omega}{1+\vec{k}\hat{r}} = \frac{1}{k^2}\int d\Omega\left(1-\frac{1}{1+\vec{k}\hat{r}}\right) = \frac{1}{k^2}\left(4\pi-\frac{2\pi}{k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)$$

$$\Rightarrow I_1 = \vec{a}\cdot\vec{K}\,\frac{4\pi}{k^2}\left(1-\frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right).$$

$$I_2 = \int\frac{\vec{a}\hat{r}\,d\Omega}{(1+\vec{k}\cdot\hat{r})^2} = ;$$

$$I_1 = \int\frac{d\Omega}{1+\vec{k}\hat{r}} \to \frac{\partial I_1}{\partial k_x} = -\int\frac{d\Omega}{(1+\vec{k}\hat{r})^2}\hat{r}_x \to \frac{\partial I_1}{\partial\vec{k}} = -\int\frac{\hat{r}\,d\Omega}{(1+\vec{k}\hat{r})^2}$$

Αλλά $I_1 = \frac{2\pi}{k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) \to \frac{\partial I_1}{\partial k_x} = -\frac{2\pi}{k^2}\frac{k_x}{k}\ln\frac{1+k}{1-k} + \frac{2\pi}{k}\,\frac{1-k}{1+k}\,\frac{(1-k)+(1+k)}{(1-k)^2}$

$$= -\frac{2\pi}{k^3}\ln\frac{1+k}{1-k}\,k_x + \frac{2\pi}{k^2}\,k_x\,\frac{\cancel{(1-k)}\,2}{(1+k)(1-k)^{\cancel{2}}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \vec k} = \vec k\,\frac{2\pi}{k^3}\left(\frac{2k}{1-k^2} - \ln\frac{1+k}{1-k}\right).$$ Εξισώνοντας:

$$-\int \frac{\hat r\, d\Omega}{(1+\vec k\hat r)^2} = \frac{2\pi \vec k}{k^3}\left(\frac{2k}{1-k^2}-\ln\frac{1+k}{1-k}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\frac{\vec a\,\hat r\, d\Omega}{(1+\vec k\cdot\hat r)^2} = \frac{2\pi\, \vec k\cdot\vec a}{k^2}\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1+k}{1-k} - \frac{2}{1-k^2}\right).$$

• Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να βρεί παραγωγίζοντας το $\int\frac{\vec a\,\hat r\, d\Omega}{\alpha+\vec k\hat r}$ ως προς α

$\Phi_1 = \int d\Omega\,(\hat r\vec a)(\hat r\vec b)$. Είναι βαθμωτό, γραμμικό ως προς $\vec a$ και $\vec b$, άρα $\Phi_1 = A\,\vec a\cdot\vec b$. Αν $\vec a=\vec b=\hat z$:

$\Phi_1 = A = \int d\Omega\,(\hat r\hat z)^2 = \int d\Omega\cos^2\vartheta = 2\pi\int_{-1}^{1}\cos^2\vartheta\, d\cos\vartheta = 2\pi\cdot 2\,\frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

άρα $\Phi_1 = \frac{4\pi}{3}\vec a\cdot\vec b$. Με ανάλογα επιχειρήματα:

$\Phi_2 = \int d\Omega\,(\hat r\vec a)(\hat r\vec b)(\hat r\vec c)(\hat r\vec d) = B\left((\vec a\vec b)(\vec c\vec d)+(\vec a\vec c)(\vec b\vec d)+(\vec a\vec d)(\vec b\vec c)\right)$,

επειδή πρέπει επί πλέον να είναι αναλλοίωτο σε εναλλαγές των $\vec a,\vec b,\vec c,\vec d$. Η επιλογή

$\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{d}=\hat{z}$ θα δώσει $\Phi_2(\hat{z},\hat{z},\hat{z},\hat{z})=3B=$

$=\int d\Omega\,(\hat{r}\cdot\hat{z})^4=2\pi\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta\,(\cos\vartheta)^4=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5}\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_2=\frac{4\pi}{15}\left((\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\right)$

Συνταγή του Feynman: $\frac{1}{ab}=\int_0^1\frac{du}{[au+b(1-u)]^2}$

Πράγματι: $\int_0^1\frac{du}{((a-b)u+b)^2}=\frac{1}{a-b}\int_{t=(a-b)0}^{(a-b)1}\frac{d(t+b)}{(t+b)^2}=\frac{1}{a-b}\left(-\frac{1}{t+b}\Big|_0^{a-b}\right)=$

$=-\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{a-\cancel{b}+\cancel{b}}-\frac{1}{b}\right]=-\frac{1}{a-b}\,\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{ab}.$

$\psi(\vec{k},\vec{l})=\int\frac{d\Omega}{(1+\vec{k}\hat{r})(1+\vec{l}\hat{r})}=\int_0^1 du\int\frac{d\Omega}{[(1+\vec{k}\hat{r})u+(1+\vec{l}\hat{r})(1-u)]^2}$

$=\int_0^1 du\int\frac{d\Omega}{[1+(u\vec{k}+(1-u)\vec{l})\cdot\hat{r}]^2}$. Αλλά αυτό έχει

ήδη υπολογιστεί: $\int\frac{d\Omega}{[1+\vec{m}\cdot\hat{r}]^2}=\frac{4\pi}{1-m^2}$, άρα

Από δώ και κάτω οι πράξεις

$\psi(\vec{k},\vec{l})=\int_0^1\frac{4\pi\,du}{1-[u\vec{k}+(1-u)\vec{l}]^2}=4\pi\int_0^1\frac{du}{1-(u^2k^2+(1-u)^2l^2+2u(1-u)\vec{k}\vec{l})}$

$=4\pi\int_0^1\frac{du}{-u^2(k^2+l^2-2\vec{k}\vec{l})+u(2l^2-2\vec{k}\vec{l})+1-l^2}=$

$$x = \cosh y \iff y = \ln\left[x \pm \sqrt{x^2-1}\right] = \operatorname{arccosh} x$$

$$A = 1 - \vec{k}\vec{\ell}$$

$$B = \sqrt{(1-k^2)(1-\ell^2)}$$

$$\operatorname{arccosh}\frac{A}{B} = \ln\left[\frac{A}{B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{B^2}-1}\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{A}{B} \pm \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{B}\right]$$

$$= -\frac{4\pi}{(\vec{K}-\vec{l})^2}\int_0^1 \frac{du}{(u-\tau_1)(u-\tau_2)} = -\frac{4\pi}{(\vec{K}-\vec{l})^2}\int_0^1 du\left[\frac{1}{u-\tau_1}-\frac{1}{u-\tau_2}\right]\frac{1}{\tau_1-\tau_2}$$

$$\tau_{1,2} = \frac{+\vec{l}\cdot(\vec{K}-\vec{l}) \pm \sqrt{(1-\vec{K}\vec{l})^2-(1-K^2)(1-l^2)}}{(\vec{K}-\vec{l})^2} = \frac{+\vec{l}\cdot(\vec{K}-\vec{l}) \pm \sqrt{A^2-B^2}}{(\vec{K}-\vec{l})^2}$$

$$\Psi(\vec{K},\vec{l}) = -\frac{4\pi}{(\vec{K}-\vec{l})^2}\left[\ln\left|\frac{1-\tau_1}{0-\tau_1}\right| - \ln\left|\frac{1-\tau_2}{0-\tau_2}\right|\right]\frac{1}{\tau_1-\tau_2} =$$

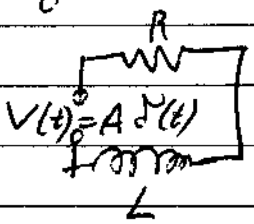
$$= -\frac{4\pi}{\cancel{(\vec{K}-\vec{l})^2}}\,\frac{\cancel{(\vec{K}-\vec{l})^2}}{2\sqrt{A^2-B^2}}\ln\left|\frac{1-\vec{l}(\vec{K}-\vec{l})-\sqrt{}}{+l(K-l)+\sqrt{}}\;\frac{+l(K-l)-\sqrt{}}{1-l(K-l)+\sqrt{}}\right| =$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}\ln\left|\frac{(1-l(K-l)-\sqrt{})(1-l(K-l)-\sqrt{})(l(K-l)-\sqrt{})^2}{[l(K-l)^2-(1-Kl)^2+(1-K^2)(1-l^2)][1+l(K-l)]^2+}\right|$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα:

1) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\, 2\pi i\, \cancel{(z-i)} \frac{1}{(z+i)\cancel{(z-i)}}\Big|_{z=i} =$

$= \pi i \frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}$ (Στο ημικύκλιο: $z = Re^{i\vartheta} \Rightarrow dz =$
$= iRe^{i\vartheta}d\vartheta$, $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+R^2e^{2i\vartheta}} \simeq \frac{1}{R^2}e^{-2i\vartheta}$, $\int \frac{dz}{1+z^2} \simeq$
$\simeq \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\vartheta}d\vartheta}{R^2} e^{-2i\vartheta} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$).

2) 

$V = A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}$

$V = RI + L\frac{dI}{dt} \xRightarrow[\text{λύση}]{\text{ειδική}} \frac{A}{2\pi}e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t} + Li\omega I_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_0 = \frac{A}{2\pi(R+i\omega L)} \Rightarrow I(t) = \int \frac{A}{2\pi(R+i\omega L)} e^{i\omega t} d\omega$ $\begin{cases} \text{Για } t<0 \Rightarrow \text{κλείνω κάτω} \Rightarrow \text{μηδέν} \\ \text{"} \quad t>0 \Rightarrow \text{"} \quad \text{πάνω} \Rightarrow \end{cases}$

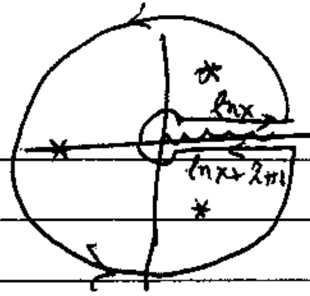
$(z-z_0)$ Προσοχή: η ολοκληρωτέα μεταβλητή να έχει συντελεστή μονάδα! (όχι iL)

$\Rightarrow I(t) = 2\pi i\left(\omega + \frac{R}{iL}\right)\frac{A}{2\pi(R+i\omega L)}e^{i\omega t}\Big|_{\omega = -\frac{R}{iL}}$

$= i\frac{A}{iL}e^{i\left(-\frac{R}{iL}\right)t} = \frac{A}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$.

3) $I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ (α) Ένας τρόπος είναι να ζητήσεις κανείς από το $\int \frac{\ln z\, dz}{1+z^3}$ και

II 19



να βρω την ολοκλήρωση ως εξής:

Οι πόλοι βρίσκονται στις ρίζες του

-1: $e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{\frac{5i\pi}{3}}$ Τότε:

$$\int \frac{\ln z}{1+z^3}dz = \int_{0+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \cancel{\frac{\ln x}{1+x^3}}dx + \int_{\text{κύκλοι}} + \int_{+\infty-i\varepsilon}^{0-i\varepsilon} \cancel{\frac{\ln x}{1+x^3}}dx +$$

$$+\int_{+\infty-i\varepsilon}^{0-i\varepsilon}\frac{2\pi i}{1+x^3}dx = \int_{\text{κύκλοι}} + 2\pi i\int_{+\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^3} = \int_{\text{κύκλοι}} - 2\pi i\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3} =$$

$$= \int_{\text{κύκλοι}} - 2\pi i I = (\text{από ολοκληρωτικά υπόλοιπα}) =$$

$$(z-\alpha)(z^2+\alpha z+\alpha^2) = z^3+\alpha z^2+\alpha^2 z-\alpha z^2-\alpha^2 z-\alpha^3$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\cancel{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})}\ln e^{\frac{i\pi}{3}}}{\cancel{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})}(z^2+e^{\frac{i\pi}{3}}z+e^{\frac{2i\pi}{3}})}\Bigg|_{z=e^{\frac{i\pi}{3}}} + \frac{\cancel{(z-e^{i\pi})}\ln e^{i\pi}}{\cancel{(z-e^{i\pi})}(z^2+e^{i\pi}z+e^{2i\pi})}\Bigg|_{z=e^{i\pi}} +\right.$$

$$\left.+\frac{\cancel{(z-e^{\frac{5i\pi}{3}})}\ln e^{\frac{5i\pi}{3}}}{\cancel{(z-e^{\frac{5i\pi}{3}})}(z^2+e^{\frac{5i\pi}{3}}z+e^{\frac{10i\pi}{3}})}\Bigg|_{z=e^{\frac{5i\pi}{3}}}\right] = 2\pi i\left[\frac{\frac{i\pi}{3}}{3\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}}+\frac{i\pi}{3\cdot(1)}+\right.$$

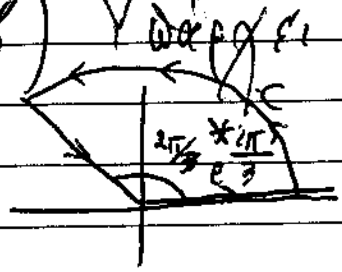
$$\left.+\frac{\frac{5i\pi}{3}}{3e^{\frac{10i\pi}{3}}}\right] = \frac{2\pi i}{9}i\pi\left[e^{-\frac{2i\pi}{3}}+3+5e^{\frac{2i\pi}{3}}\right] = -\frac{2\pi^2}{9}\left[\cos\frac{2\pi}{3}-\right.$$

$$\left.-i\sin\frac{2\pi}{3}+3+5\cos\frac{2\pi}{3}+5i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{2\pi^2}{9}\left[\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)}-\right.$$

$$\left.-i\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{+3+5\left(-\frac{1}{2}\right)}+5i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{2\pi^2}{9}\left[4i\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right] = -\frac{4i\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\int_{\text{κύκλοι}}}}_{\to 0} - 2\pi i I = -\frac{4i\pi^2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Για τον μικρό κύκλο: $\int \frac{\ln(\rho e^{i\varphi})}{1}\rho\, d\varphi \to 0$, καθώς η αντίστοιχη τείνει στο μηδέν (β) Υπάρχει και δεύτερος τρόπος:



$$J=\int_C \frac{dz}{1+z^3} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} + \cancel{\int_0^{2\pi/3} \frac{iRe^{i\vartheta}d\vartheta}{1+R^3e^{3i\vartheta}}} \to 0 + \int_\infty^0 \frac{re^{i\frac{2\pi}{3}}dr}{1+r^3e^{3\left(\frac{2\pi i}{3}\right)}} =$$

$$=\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I \quad \frac{\text{θέση πόλου}}{z=e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-e^{\frac{4\pi i}{3}}} = \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{2i\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\cdot\frac{\sqrt3}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt3} = \frac{2\pi\sqrt3}{9}.$$

(4) $I=\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{a+b\cos\vartheta}$, $a>b>0$ $\quad I=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{a+b\cos\vartheta} \Rightarrow$

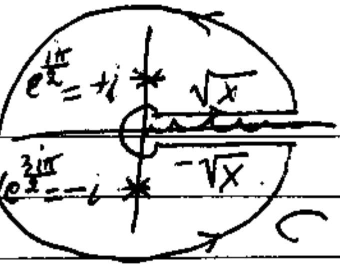
$$\xrightarrow[dz=iz\,d\vartheta]{z=e^{i\vartheta}} \frac12 \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{a+b\left(\frac{z+\frac1z}{2}\right)} = \frac{1}{2i}\int_C \frac{2\,dz}{2az+bz^2+b}$$ Πόλοι:

$z_\pm = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b} = -\frac ab \pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}.$ $\quad z_+z_- = \frac{a^2}{b^2}-\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)=1 \Rightarrow$ μόνο

το z_+ είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, άρα

$$I=\frac1i\, 2\pi i\, \cancel{(z-z_+)}\frac{1}{b(z-z_-)\cancel{(z-z_+)}}\Bigg|_{z=z_+} = \frac{2\pi}{b}\frac{1}{z_+-z_-} = \frac{2\pi}{b\,2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 \ldots}}$$

(5) $I=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \int_C \frac{\sqrt{z}\,dz}{1+z^2} =$



$= \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} + \int_{\text{κύκλοι}} \to 0 + \int_{\infty}^{0}\frac{-\sqrt{x}\,dx}{1+x^2} \;\underset{\text{υπόλοιπα}}{\overset{\text{ολοκ.}}{=}}\; 2\pi i\left[\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}\cancel{(z-e^{\frac{i\pi}{2}})}}{\cancel{(z-e^{\frac{i\pi}{2}})}(z-e^{\frac{3i\pi}{2}})}\Bigg|_{z=e^{\frac{i\pi}{2}}} +\right.$

$\left.+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}\cancel{(z-e^{\frac{3\pi i}{2}})}}{(z-e^{\frac{i\pi}{2}})\cancel{(z-e^{\frac{3\pi i}{2}})}}\Bigg|_{z=e^{-\frac{i\pi}{2}}}\right] \Rightarrow 2I = 2\pi i\, e^{\frac{i\pi}{4}}\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}+i}+\frac{i}{e^{\frac{3i\pi}{2}}-i}\right] =$

$\cancel{= 2\pi i\, e^{\frac{\pi i}{4}}\left[\frac{1-i+i-1}{2}\right]} = 2\pi i\, e^{\frac{i\pi}{4}}\left[\frac{1}{2i}+\frac{i}{-2i}\right] =$

$= 2\pi i\, e^{\frac{i\pi}{4}}\,\frac{1}{2i}\left(\overset{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}\sqrt{2}\right) = \cancel{2\pi i}\,\frac{1}{\cancel{2i}}\sqrt{2} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(6) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^{x}+1}\,dx,\quad 0<\alpha<1.$ Θεωρούμε το $\int\frac{e^{\alpha z}}{e^{z}+1}\,dz.$

(α) Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε τη διαδρομή:

$e^{z}+1=0 \Rightarrow z=\ln(-1)=\ln(e^{i\pi}) = i\pi+2n\pi = \pm i\pi, \pm 3i\pi, \dots$

Υπόλοιπα: Στο $z=i\pi$: $\frac{e^{\alpha z}}{e^{z}+1}(z-i\pi)\Big|_{z=i\pi} =$

$= \frac{e^{\alpha z}\cancel{(z-i\pi)}}{\cancel{(e^{i\pi}+1)}+e^{i\pi}\cancel{(z-i\pi)}+\dots}\Bigg|_{z=i\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{-1} = -e^{i\pi\alpha}$

Στο $z=3i\pi$: $\frac{e^{\alpha z}\cancel{(z-3i\pi)}}{\cancel{(e^{3i\pi}+1)}+e^{3i\pi}\cancel{(z-3i\pi)}+\dots}\Bigg|_{z=3i\pi} = \frac{e^{3i\alpha\pi}}{-1} = -e^{3i\alpha\pi}.$

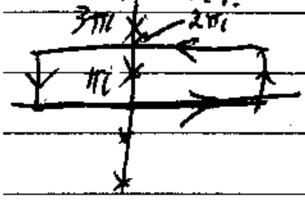
Άρα $\int\frac{e^{\alpha z}}{e^{z}+1}\,dz = 2\pi i\left[-e^{i\pi\alpha}-e^{3i\pi\alpha}-\dots\right] = -2\pi i\, e^{i\pi\alpha}\left[1+(e^{2i\pi\alpha})+\right.$

$+(e^{2\pi i\alpha})^2+$

$$+\dots\Big] = -2\pi i\, e^{i\pi\alpha}\frac{1}{1-e^{2i\pi\alpha}} = -2\pi i\,\frac{1}{e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}} = -2\pi i\,\frac{1}{-2i\sin\pi\alpha} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Για να μηδενίζεται η συνεισφορά του ημικυκλίου, θεωρούμε ότι το α έχει ένα μικρό φανταστικό μέρος που στο τέλος το στέλνουμε στο μηδέν.

(6) Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το



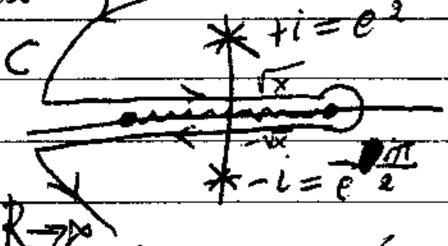
Τότε

$$\int \frac{e^{\alpha z}dz}{e^z+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}dx}{e^x+1} + \int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i}+1}dx =$$

$$= I - e^{2\pi i\alpha} I = \underset{\text{στο } z=i\pi}{\text{ολοκλ.-υπόλ.}}\; 2\pi i\left(-e^{i\pi\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i\,\frac{e^{i\pi\alpha}}{1-e^{2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha},\ \text{όπως πριν.}$$

(7) $$I = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)}$$



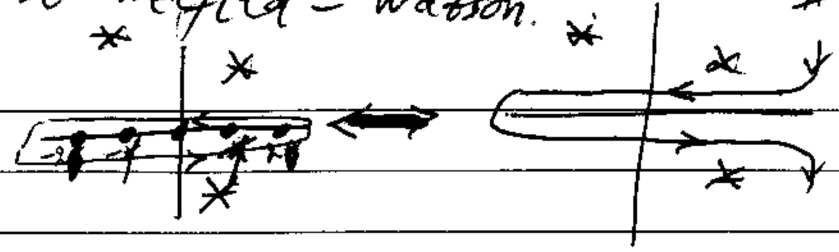
$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,(1+z^2)} = \cancel{\int_{\text{κύκλοι}}}^{\,0} + \cancel{\int_{-R}^{-1}} + 2I + \cancel{\int_{-1}^{-R}} = 2I = \text{ολοκλ. υπόλοιπα}$$

$$= 2\pi i\left[\cancel{(z-i)}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}\,(z+i)\cancel{(z-i)}}\Bigg|_{z=i} + \cancel{(z+i)}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}\,\cancel{(z+i)}(z-i)}\Bigg|_{z=-i}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2i} + \frac{1}{(-\sqrt{2})(-2i)}\right] = 2\pi i\,\frac{1}{\sqrt{2}\,i} \Rightarrow I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Μετασχηματισμός Sommerfeld - Watson.

(8) $I=\oint \frac{f(z)\,dz}{\sin\pi z}$



$I = 2\pi i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}(-1)^n f(n)$.

$\sin\pi z_n = 0 \to z_n = n$.

$\sin\pi z = \pi\cos\pi z_n (z-n)+\ldots = \pi(-1)^n(z-n)$

(Ολοκλήρωμα: $(z-n)\frac{f(z)}{\sin\pi z}\Big|_{z=n} = (z-n)\frac{f(n)}{0+[\pi\cos\pi n](z-n)+\ldots}\Big|_{z_n}$

$= \frac{f(n)}{\pi(-1)^n} = (-1)^n\frac{f(n)}{\pi}$)

Με τα άλλα μοναδικά: $I=-2\pi i \sum_k \frac{R_k}{\sin\pi z_k}$, όπου

R_k τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)$ στα z_k.

Άρα $\boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n) = -\pi\sum_k \frac{R_k}{\sin\pi z_k}}$ $\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi\sum_k \frac{R_k\cos\pi z_k}{\sin\pi z_k}$.

Π.χ. $S(x) = -\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{\alpha^2+n^2}$. Θεωρούμε

την $f(z) = -\frac{1}{2}\frac{z\sin xz}{z^2+\alpha^2}$ ($|x|<\pi$, ώστε η συνεισφορά των (μεγάλων) ημικυκλίων να μηδενίζεται)

$e^{ixz}\to e^{ix(\alpha+i\beta)} = e^{ix\alpha}e^{-x\beta}$

Έχουμε δύο πόλους: $z_1 = i\alpha$ με υπόλοιπο $R_1 = -\frac{1}{2}\frac{i\alpha\sin(i\alpha x)}{z+i\alpha} =$

$= -\frac{i\alpha\sin(i\alpha x)}{4i\alpha} = -\frac{1}{4}\frac{e^{i(i\alpha x)}-e^{-i(i\alpha x)}}{2i} = -\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)$ και

$z_2 = -i\alpha$ με υπόλοιπο: $R_2 = -\frac{1}{2}\frac{(-i\alpha)\sin(-i\alpha x)}{z-i\alpha}\Big|_{z=-i\alpha} =$

$= -\frac{1}{2}\frac{i\alpha\sin(i\alpha x)}{-2i\alpha} = \frac{1}{4}\frac{e^{i(i\alpha x)}-e^{-i(i\alpha x)}}{2i} = -\frac{i}{4}\left(-\sinh(\alpha x)\right) =$

$= +\frac{i}{4}\sinh(\alpha x).$

Άρα $S(x) = -\pi\sum_k \frac{R_k}{\sin\pi z_k} = -\pi\left(\frac{R_1}{\sin\pi z_1}+\frac{R_2}{\sin\pi z_2}\right) = \dots$

$= -\pi\Big(\cancel{\frac{-\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)}{i\alpha\sin(\pi\alpha)} + \frac{+\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)}{(-i\alpha)\sin(}}$

$= -\pi\left[\frac{-\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)}{\sin(\pi i\alpha)} + \frac{+\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)}{\sin(-\pi i\alpha)}\right] =$

$= -\pi\left[\frac{i}{4}\sinh(\alpha x)\right]\left[-\frac{1}{i\sinh(\pi\alpha)} - \frac{1}{i\sinh(\pi\alpha)}\right] =$

$= \pi\left[\frac{1}{4}\sinh(\alpha x)\right]\frac{2}{\sinh(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{2}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha\pi)}$. Για $|x|>\pi$, απλά χρησιμοποιούμε την περιοδική ιδιότητα: $S(x+2\pi)=S(x)$.

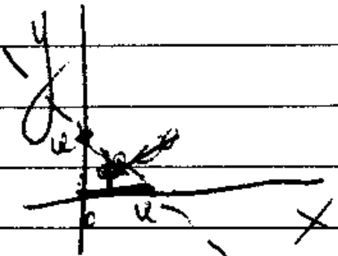
Καταχωρισμένα ολοκληρώματα

Συνάρτηση γάμμα:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$y = u_0,\ u = x + u_0 \geqslant x_0$



$y = u - x.$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες.

$$\Gamma(z) = -\int_0^\infty x^{z-1}\, d(e^{-x}) = -x^{z-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\, d(x^{z-1}) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}(z-1)x^{z-2}\,dx = (z-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{(z-1)-1}\,dx =$$

$$= \boxed{(z-1)\,\Gamma(z-1)}$$ Εξ άλλου $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma(2) = (2-1)\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(3) = (3-1)\Gamma(2) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(4) = (3-1)\Gamma(2) = 3! \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

Αναλυτική επέκταση γίνεται με βάση την $\Gamma(z-1) = \dfrac{\Gamma(z)}{z-1}$, εκτός από τις θέσεις των πόλων για $z = 0, -1, -2, \ldots$

Θεωρούμε το γινόμενο $\Gamma(r)\Gamma(s) = \int_0^\infty dx\, x^{r-1}e^{-x} \int_0^\infty dy\, y^{s-1}e^{-y}$ ~~$\int_0^\infty du \int_0^u dx\, x^{r-1}(u-x)^{s-1}e^{-u}$~~

$$= \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx\, y^{s-1}x^{r-1}e^{-(x+y)} \xrightarrow[\substack{x \leq u \\ dy = du}]{y = u-x} \int_0^\infty du \int_0^u dx\, (u-x)^{s-1}x^{r-1}e^{-u}$$

Θέτουμε $x = ut$ (διώχνουμε το x για χάρη του t), οπότε: $\Gamma(r)\Gamma(s) = \int_0^\infty du\, e^{-u} \int_{t=0}^1 u\,dt\,(u-ut)^{s-1}u^{r-1}t^{r-1} =$

$$= \int_0^\infty du\, e^{-u}u^{r+s-1}\int_0^1 dt\, t^{r-1}(1-t)^{s-1} = \Gamma(r+s)\,B(r,s),$$ όπου

η συνάρτηση βήτα ορίζεται ως:

$$B(r,s) \equiv \underbrace{\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}}_{} = \underbrace{\int_0^1 dx\, x^{r-1}(1-x)^{s-1}}_{} = B(s,r).$$

για οποιαδήποτε μιγαδικά r και s. για $[\mathrm{Re}\, r>0,\ \mathrm{Re}\, s>0]$.

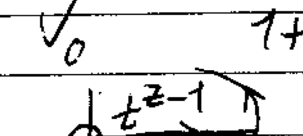
Ειδική περίπτωση: $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\Gamma(1)B(z,1-z)=$

$$=\int_0^1 dx\, x^{z-1}(1-x)^{-z}.$$ Αλλάζουμε μεταβλητή:

$$x=\frac{t}{1+t} \Rightarrow dx=\frac{1+t-t}{(1+t)^2}dt \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{z-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^{-z}=\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{z-1}(1+t)^z=\int_0^\infty dt\, t^{z-1}\frac{(1+t)^z}{(1+t)^{z+1}}=$$

$$=\int_0^\infty dt\,\frac{t^{z-1}}{1+t}.$$ Χρησιμοποιούμε τη διαδρομή:

* 

και θεωρούμε ότι $0<\mathrm{Re}(z)<1$.

Τότε $$\int_0^\infty dt\,\frac{t^{z-1}}{1+t}-\int_0^\infty dt\,\frac{e^{2\pi i(z-1)}t^{z-1}}{1+t}=2\pi i\cdot$$

$$\cdot\left(e^{i\pi}\right)^{z-1} \Rightarrow I\left(1-e^{2\pi i z}\right)=2\pi i\, e^{\pi i z} \Rightarrow I=-\frac{e^{-\pi i z}e^{\pi i z}}{e^{-\pi i z}-e^{\pi i z}}2\pi i=$$

$$=-2\pi i\frac{1}{-2i\sin\pi z}=\frac{\pi}{\sin\pi z} \Rightarrow \boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}}.$$ Επειδή αναλυτικές

συναρτήσεις και στα δύο μέλη, οπότε το αποτέλεσμα

που αποδείχτηκε για $0<\mathrm{Re}\,z<1$ επεκτείνεται σ' όλο το επίπεδο

$$\frac{A\sqrt{S}+BS}{C+D\sqrt{S}} = E\sqrt{S}+F \Rightarrow A\sqrt{S}+BS = CE\sqrt{S}+CF+DE+DF\sqrt{S} \Rightarrow \begin{cases} A = CE+DF \\ BS = CF+DE \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CA = C^2E+CDF \\ DBS = DCF+D^2E \end{cases} \Rightarrow CA-DBS = (C^2-D^2)E \Rightarrow E = \frac{CA-DBS}{C^2-D^2}$$

$$F = \frac{1}{D}(A-CE) = \frac{1}{D}\left(A - \frac{C^2A - CDBS}{C^2-D^2}\right) = \frac{1}{D}\,\frac{\cancel{AC^2}-AD^2-\cancel{C^2A}+CDBS}{C^2-D^2}$$

$$= \frac{CBS-AD}{C^2-D^2}$$

Άλλη συνάρτηση είναι το εκθετικό ολοκλήρωμα $Ei(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}dt}{t}$, μαζί με μιά τομή κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των x, όπου $Ei(x+i\epsilon) \neq Ei(x-i\epsilon)$ για $x>0$.

Σχετικά είναι τα ημιτονικά και συνημιτονικά ολοκληρώματα: $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$, $Ci(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos t}{t} dt$.

Η συνάρτηση σφάλματος $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ σχετίζεται με τα ολοκληρώματα Fresnel: $C(x) \equiv \int_0^x dt \cos\frac{\pi t^2}{2}$, $S(x) \equiv \int_0^x dt \sin\frac{\pi t^2}{2}$

Συχνά συναντά κανείς τα ελλειπτικά ολοκληρώματα: $\int dx \frac{A(x)+B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$ ← πολυώνυμο τρίτου ή τετάρτου βαθμού.

πολυώνυμα

Κατ' αρχήν $\frac{A+B\sqrt{S}}{C+D\sqrt{S}} = E+\frac{F}{\sqrt{S}}$. Αναλύοντας το F, που είναι ρητό πολυωνύμων, σε απλά

$$\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}\right)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}$$

$$-\frac{b}{2}=\frac{r_1+r_2}{2},\quad \frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{r_1-r_2}{2}\Rightarrow\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2.$$

Άρα $(x-r_1)(x-r_2)=\left(x-\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2-\left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2.$

Για $r_1=1,\ r_2=\frac{1}{k^2}$ έχουμε: $(u-1)\left(u-\frac{1}{k^2}\right)=\left[u-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right]^2-\left(\frac{1-\frac{1}{k^2}}{2}\right)^2.$

και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται βάσει του

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2\pm\alpha^2}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2\pm\alpha^2}\right|.$$

Έστω $S=(1-x^2)(1-k^2x^2)=k^2x^4-(1+k^2)x^2+1\Longrightarrow$

$\Longrightarrow S'=4k^2x^3-2(1+k^2)x\Rightarrow\int\frac{S'dx}{\sqrt{S}}=\int\frac{dS}{\sqrt{S}}=\int S^{-1/2}dS=$

$=\frac{S^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{S}.$ Εξ άλλου $\int\frac{S'dx}{\sqrt{S}}=4k^2J_3-2(1+k^2)J_1,$

άρα $2\sqrt{S}=4k^2J_3-2(1+k^2)J_1\Rightarrow J_3=\frac{1}{2k^2}\left(\sqrt{S}+(1+k^2)J_1\right).$

ηγέραπα, καταλήγουμε ότι μας ενδιαφέρουν τα ολοκληρώματα $J_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{S}}$ και $H_n=\int\frac{dx}{(x-c)^n\sqrt{S}}$. Αυτά δε μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των J_0, J_1, J_2 (τα J_n) και των H_1, J_0, J_1, J_2 (τα H_n). Θεωρούμε τη μορφή του Legendre για το S: $S=(1-x^2)(1-k^2x^2)$, οπότε

$$J_0=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Το ολοκλήρωμα $\boxed{F\equiv\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}$ λέγεται ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Συνήθως γίνεται η αντικατάσταση $\boxed{x=\sin\varphi}$, οπότε

$$\boxed{F(\varphi,k)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}.$$

Το επόμενο (J_1) γράφεται, θέτοντας $x^2=u$, με τη μορφή $J_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-k^2u)}}$, είναι στοιχειώδες. Το επόμενο $\left(J_2\equiv\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right)$ εκφράζεται συναρτήσει του

$$\boxed{E=\int_0^x\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx},$$

που είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους. Η αντικατάσταση $x=\sin\varphi$ δίνει: $\boxed{E(\varphi,k)=\int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}$.

Το ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους ορίζεται ως: $\Pi(\varphi,\eta,k)\equiv\int_0^x \frac{dx}{(1+\eta x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \overset{x=\sin\varphi}{=}$
$\equiv \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\eta\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Για $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ωνομάζουμε τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα: $K(k)\equiv F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$, $E(k)\equiv E\left(\frac{\pi}{2},k\right)$, $\Pi(\eta,k)\equiv\Pi\left(\frac{\pi}{2},\eta,k\right)$.

Τέλος, πολλά ολοκληρώματα σχετίζονται με μη χαρακτηρισμένες συναρτήσεις, όπως Bessel ή Legendre.

Προσεγγιστικά αναπτύγματα.

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\left[1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\dots\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\dots\right],$$ χρήσιμο για μικρά x.

Για μεγάλα x: $1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt=$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{2t}d(t^2)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\frac{1}{t}\,d\left(e^{-t^2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-t^2}}{t}\Big|_x^{\infty}-\right.$$

$$\left.-\int_x^{\infty}e^{-t^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\frac{1}{2t^3}e^{-t^2}2t\,dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\operatorname{erf}(x)\right) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{x} + \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{1}{2t^3}\, d\left(e^{-t^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{2x^3} + \frac{1}{4}\int_x^\infty e^{-t^2}\left(\frac{-3}{t^4}\right) dt =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3}{4}\int_x^\infty e^{-t^2}\frac{1}{2t^5}\, 2t\, dt =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{3}{8}\int_x^\infty \frac{1}{t^5}\, d\left(e^{-t^2}\right) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} +$$

$$+ \frac{3}{8}\frac{e^{-x^2}}{x^5} + \frac{3}{8}\int_x^\infty e^{-t^2}\frac{5}{t^6}\, dt = \dots = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n x^{2n-1}}\right] -$$

$$- (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\, dt \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n x^{2n-1}}\right] + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\, dt}$$

Ασυμπτωτική σειρά προσεγγίζει το $f(z)$ καθώς $|z|\to\infty$ για δοσμένο n. Το σφάλμα μετά από n όρους είναι μικρότερο από τον επόμενο όρο. Άρα αν σταματήσουμε έναν όρο πριν τον μικρότερο η ακρίβεια είναι η βέλτιστη.

Ακριβής ορισμός: Η $S(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ είναι ασυμπτωτική σειρά για την $f(z)$ $\left(f(z) \sim S(z)\right)$, αν $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^n\left[f(z) - S_n(z)\right] = 0$, δηλαδή αν το σφάλμα τείνει στο μηδέν πιο γρήγορα από το z^{-n} για την περιοχή "γωνιών" του z που μας ενδιαφέρει. Ασυμπτωτικές σειρές μπορούν να αθροιστούν, να διαφορισθούν ή να ολοκληρωθούν και τα αποτελέσματα θα δώσουν τα αντίστοιχα των συναρτήσεων που αναπαριστούν. Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα είναι μονοσήμαντο.

Άλλο παράδειγμα.

$$\underset{(x>0)}{Ei(-x)} = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t}\,dt \overset{\tilde{t}=-t}{=} \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-\tilde{t}}}{-\tilde{t}}\,d(-\tilde{t}) = \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-t}\,dt}{t} =$$

$$= -\int_{\infty}^{x} \frac{1}{t}\,d(e^{-t}) = -\left[\left.\frac{e^{-t}}{t}\right|_{\infty}^{x} - \int_{\infty}^{x} e^{-t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right] = -\frac{e^{-x}}{x} -$$

$$- \int_{\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,e^{-t}\,dt = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \int_{\infty}^{x} e^{-t}\left(-\frac{2}{t^3}\,dt\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{x}\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n}\right] +$$

$$+ (-1)^n (n+1)! \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και στη μορφή: $\int_{\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}Ei(-x) - \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{e^{-x}}{x}\left[1-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^2}-\frac{3!}{x^3}+\dots+\frac{(-1)^n n!}{x^n}\right]$, θα είναι χρήσιμη σχέση για τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\infty}^{x}\frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt$, αν δίνεται το $Ei(-x)$.

Μέθοδοι σαγματικού σημείου

Παράδειγμα: $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt$. Ποιά είναι η τιμή του για μεγάλα θετικά x; Θα αναπτύξουμε σε σειρά όχι την ολοκληρωτέα συνάρτηση, αλλά το λογάριθμό της, διότι μεταβάλλεται πιο αργά και έτσι η ανάπτυξη είναι πιο ακριβής: $t^x e^{-t} = e^{x\ln t - t} = e^{f(t)}$

$f(t) = x\ln t - t \Rightarrow f' = \frac{x}{t}-1 \Rightarrow f'' = -\frac{x}{t^2}$. Άρα $f'(t_0)=0 \Rightarrow \frac{x}{t_0}-1=0 \Rightarrow t_0=x$. Αναπτύσσουμε περί το $t_0=x$.

$$f(t) \simeq f(x) + \cancel{f'\Big|_{t=x}(t-x)}^{\,0} + \frac{f''}{2}\Big|_{t=x}(t-x)^2 = x\ln x - x + \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)}{2}(t-x)^2 =$$

$$= x\ln x - x - \frac{1}{2x}(t-x)^2$$

Άρα $\Gamma(x+1) \approx \int_0^{\infty} dt\, e^{x\ln x - x - \frac{1}{2x}(t-x)^2}$

$= e^{x\ln x - x} \int_0^{\infty} dt\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} \simeq e^{+x\ln x - x} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} =$

αφού το $t_0 = x$ είναι μεγάλο

$= e^{+x\ln x - x} \sqrt{\frac{\pi}{1/2x}} = \underline{\sqrt{2\pi x}\, e^{x\ln x - x}} = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}$ (Stirling)

Γενικότερα: $I(\alpha) = \int_C e^{\alpha f(z)} dz$, όπου το α είναι μεγάλο και θετικό. Περιμένουμε ότι η μέγιστη συνεισφορά θα προέρχεται από το μέρος του C όπου το u ($f = u + iv$) είναι μέγιστο. Η μέθοδος ανάγεται στην επιλογή ενός μονοπατιού C όπου να περιορίζει την περιοχή των μεγάλων u σε μια κατά το δυνατόν στενή περιοχή. Κατ' αρχήν ισχύουν οι σχέσεις Cauchy-Riemann: $[u_x = v_y,\ u_y = -v_x]$, οπότε και $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Δηλαδή τα u και v δεν μπορούν να έχουν μέγιστα ή ελάχιστα. Αν σε κάποιο σημείο $u_x = u_y = 0$ και $u_{xx} > 0$ θα είναι $u_{yy} < 0$, οπότε θα είναι σαγματικό σημείο. Επί πλέον (λόγω Cauchy-Riemann) θα ισχύουν και $v_y = v_x = 0$, οπότε $f'(z) = 0$. Κοντά σε ένα τέτοιο σημείο: $f(z) \simeq f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2$. Έστω ότι $f''(z_0) = \rho e^{i\vartheta}$ και $z - z_0 = s e^{i\varphi}$. Τότε

$u + iv = u_0 + iv_0 + \frac{1}{2} \rho e^{i\vartheta} s^2 e^{2i\varphi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u_0 + \frac{1}{2}\rho s^2 \cos(\vartheta + 2\varphi) \\ v = v_0 + \frac{1}{2}\rho s^2 \sin(\vartheta + 2\varphi) \end{cases}$$

Άρα τα μονοπάτια ταχύτερης κατάβασης για το $u(x,y)$ ξεκινάνε ~~προς τις~~ διευθύνσεις για τις οποίες $\cos(\vartheta + 2\varphi) = -1 \Rightarrow \vartheta + 2\varphi = \pm\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\vartheta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ (συνήθως αυτό, αλλά εξαρτάται από την τοπογραφία του $u(x,y)$).

Σ' αυτές τις διευθύνσεις τα v είναι σταθερά, ίσα με v_0, άρα τα $e^{i\alpha v}$ δεν θα έχουν έντονες διακυμάνσεις που θα καταστρέφουν τα ολοκληρώματα. Το ολοκλήρωμα θα γίνει: $I(\alpha) \simeq e^{\alpha f(z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\frac{\alpha \rho s^2}{2}(-1)} (e^{i\varphi} ds) =$

$$= e^{\alpha f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\rho}}\, e^{i\varphi}.$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο (για μεγάλα $|z|$) στο $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t + z\ln t} dt$

Αν $z = \alpha e^{i6}$: $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{\alpha \ln t\, e^{i6} - t\frac{\alpha e^{i6}}{z}} dt =$

$= \int_0^\infty e^{\alpha\left(\ln t - \frac{t}{z}\right) e^{i6}} dt$. Θεωρώ την

$f = \left(\ln t - \frac{t}{z}\right) e^{ib} \Rightarrow f' = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{z}\right) e^{ib}$, οπότε $f'(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = z$, και $f'' = -\frac{1}{t^2} e^{ib}$. Στη θέση $t = t_0 = z = \alpha e^{ib}$: $f(t_0) = \left(\ln z - \frac{z}{z}\right) e^{ib} = (\ln z - 1) e^{ib}$,

$f'(t_0) = 0$ και $f''(t_0) = -\frac{1}{z^2} e^{ib} = -\frac{1}{\alpha^2 e^{2ib}} e^{ib} = -\frac{e^{-ib}}{\alpha^2}$.

Σύγκριση με την $f''(t_0) = \rho e^{i\vartheta}$ δείχνει ότι $\rho = \frac{1}{\alpha^2}$, $\vartheta = \pi - b$.

Η συνθήκη $\varphi = -\frac{\vartheta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ δίνει

$-\frac{\pi}{2} + \frac{b}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{b}{2}$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{b}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{b}{2} - \pi$

Η τοπογραφία επιβεβαιώνει την επιλογή $\frac{b}{2}$.

Άρα $\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\rho}}\, e^{\alpha(\ln z - 1)e^{ib}} e^{i\frac{b}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\frac{1}{\alpha^2}}}\, e^{z(\ln z - 1)} e^{i\frac{b}{2}} =$

$= \sqrt{2\pi}\, \underbrace{\sqrt{\alpha}\, e^{i\frac{b}{2}}}_{\sqrt{z}}\, e^{z(\ln z - 1)} = \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z}$ (Stirling)

Ασυμπτωτική σειρά για το $\Gamma(z) \simeq \sqrt{2\pi}\,(z-1)^{(z-1)+\frac{1}{2}} e^{-(z-1)} \simeq$

$\simeq \sqrt{2\pi}\left[z\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right]^{z-\frac{1}{2}} e^{-(z-1)} = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{z-\frac{1}{2}} e^{-(z-1)} \simeq$

$\simeq \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-(z-1)} \simeq \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$. Για την ασυμπτωτική σειρά λέγαμε $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\left(1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right)$, όπου $A, B, \dots$ προσδιορίζονται αναδρομικά με βάση τη σχέση $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Παρατηρούμε ότι $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi}(z+1)^{z+\frac{1}{2}} e^{-(z+1)} \cdot$

$\cdot \left[1+\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\dots\right] = \sqrt{2\pi}\, e^{\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln(z+1)-z-1\right]} \cdot \left[1+\dots\right]$

Αλλά $\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln(z+1)-z-1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z + \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-z-1=$

$= \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z + \left(z+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{4z^4}+\frac{1}{5z^5}\dots\right]-$

$-z-1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z + \left[1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{3z^2}-\frac{1}{4z^3}+\frac{1}{5z^4}-\dots+\frac{1}{2z}-\right.$

$\left.-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{8z^4}+\frac{1}{10z^5}-\dots\right]-z-1 = \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z +$

$+\left(\frac{1}{12z^2}-\frac{1}{12z^3}+\frac{3}{40z^4}+\dots\right)$, οπότε $\Gamma(z+1) \approx$

$\approx \sqrt{2\pi}\, e^{\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \left(\frac{1}{12z^2}-\frac{1}{12z^3}+\frac{3}{40z^4}+\dots\right)}\left[1+\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\dots\right] \approx$

$\approx \sqrt{2\pi}\, z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}\left[1+\left(\frac{1}{12z^2}-\frac{1}{12z^3}+\frac{3}{40z^4}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{144z^4}+\dots\right)\right] \cdot$

$\cdot\left[1+\frac{A}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots\right)+\frac{B}{z^2}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\dots\right)+\frac{C}{z^3}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{6}{z^2}-\frac{10}{z^3}+\dots\right)\right]=$

$= \sqrt{2\pi}\, z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}\left[1+\frac{1}{12z^2}-\frac{1}{12z^3}+\frac{1}{z^4}\left(\frac{216}{2880}+\frac{10}{2880}\right)+\dots\right] \cdot$ $\frac{113}{1440}$

$\cdot\left[1+\frac{A}{z}+\frac{B-A}{z^2}+\frac{A-2B+C}{z^3}+\dots\right]$. Επ' άλλου $z\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z} \cdot$

$\cdot\left(1+\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z^3}+\dots\right)$, άρα $1+\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z^3} = 1+\frac{A}{z}+\frac{B-A}{z^2}+$ $\Rightarrow$

$$+\frac{A-2B+C}{z^3}+\frac{1}{12z^2}+\frac{A}{12z^3}-\frac{1}{12z^3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{A}{z^2}+\frac{1}{12z^2}=0 \\ \frac{12(A-2B+C)+A-1}{12z^3}=\frac{12C}{12z^3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{12} \\ B=\frac{13A-1}{24} \end{array} \right\} \Rightarrow B=\frac{1}{288}$$

Μέθοδος σταθερής φάσης:

Έχει να κάνει με ολοκληρώματα του τύπου $\int_C e^{i\lambda f(z)} dz$

Άρα έχουμε θέσεις όπου $f'(z)=0$, αφού θα έχουμε αλληλοαναιρέσεις, και θα χρησιμοποιήσουμε ότι είναι το: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Σημειώνεται ότι το μοναδικό ολοκλήρωμα εδώ είναι κατά μήκος του $v=$σταθερό για την κατάσταση καθόδου ($f=u+iv$) και κατά μήκος του $u=$σταθερό για τη σταθερή φάση.