Διαφορικές εξισώσεις.

Χωριζομένων μεταβλητών.

$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 \rightsquigarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightsquigarrow$$

$$\to \arcsin y + \arcsin x = \tilde{C} \to \sin(\arcsin y + \arcsin x) =$$

$= \sin\tilde{C} = C$. Αλλά $\begin{cases} a \equiv \arcsin y \Leftrightarrow \sin a = y \to \cos a = \sqrt{1-y^2} \\ b \equiv \arcsin x \Leftrightarrow \sin b = x \to \cos b = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

Τότε $C = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b =$

$= y\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}\,x$

Γενικότερα: ακριβής Δ.Ε. $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0$, αν $\exists u$: $du = A\,dx + B\,dy$. Τότε η λύση είναι $u = C$. Αν είναι ακριβής $\to \left\{A = \frac{\partial u}{\partial x},\ B = \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \to$

$$\to \boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}$$

Ισχύει και το αντίστροφο. (αναγκαία και ικανή συνθήκη).

Π.χ. $\underbrace{(x+y)}_{A}\,dx + \underbrace{x}_{B}\,dy = 0$ $\quad \left.\begin{matrix}\frac{\partial A}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial B}{\partial x} = 1\end{matrix}\right\} \rightsquigarrow$ ακριβής.

I (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A = x+y \to u = \frac{x^2}{2} + xy + K_1(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = B = x \to u = xy + K_2(x).$$

→ Μοναδικά επιλέγουμε $u = \frac{x^2}{2} + xy$

→ η λύση είναι: $\frac{x^2}{2} + xy = c$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες: Η αρχική εξίσωση ... είναι ακριβής, αλλά μπορεί να βρεθεί λ: $\lambda(A\,dx + B\,dy)$ να είναι (ακριβής) (γραμμική)

Πχ. $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x) \to dy + f(x)y\,dx = g(x)\,dx$

Ψάχνουμε $\lambda(x)$: $\lambda(x)dy + \lambda(x) f y\,dx = \lambda g\,dx$ να είναι ακριβής, δηλαδή $\underbrace{(\lambda f y - \lambda g)}_{A} dx + \underbrace{\lambda}_{B} dy$ να είναι ακριβής, δηλαδή $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \to \lambda f = \frac{d\lambda}{dx} \to \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int f\,dx$

$$\to \lambda = c\, e^{\int f(x)\,dx} \to e^{\int f\,dx}$$

Πχ. $x y' + (1+x)y = e^x \to y' + \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{f} y = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{g}$

Όπως δείξαμε μαζί σας, $I = e^{\int f dx} = e^{\int \frac{1+x}{x} dx} = e^{\ln x + x} = xe^x$. Η εξίσωση γίνεται:

$$\underbrace{xe^x}_{B} y' + \underbrace{\cancel{x}e^x \frac{1+x}{\cancel{x}}}_{A = \frac{dB}{dx}} y = \cancel{x}e^x \frac{e^x}{\cancel{x}} \to \frac{d}{dx}(xe^x y) = e^{2x} \to$$

$$\to xe^x y = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c \to y = \frac{e^x}{2x} + \frac{c}{xe^x}$$

Αλλαγή μεταβλητών Π.χ. 1 $y' = f(\alpha x + by + \gamma)$.

$v = \alpha x + by + \gamma \to v' = \alpha + by'$, ώστε

$$y' = \frac{v' - \alpha}{b} \to \frac{v' - \alpha}{b} = f(v) \to \frac{dv}{dx} = bf(v) + \alpha \to$$

$$\to \int \frac{dv}{\alpha + bf(v)} = \int dx.$$

Π.χ. 2 Bernoulli: $y' + f(x) y = g(x) y^n \to$

$$\to \frac{y'}{y^n} + f(x) \frac{1}{y^{n-1}} = g(x). \text{ Αλλαγή: } v = \frac{1}{y^{n-1}} \to$$

$$\to v' = (y^{1-n})' = (1-n) y^{-n} y' = \frac{(1-n)y'}{y^n}, \text{ άρα η εξίσωση}$$

γράφεται $\frac{v'}{1-n} + fv = g$, γραμμική.

I (4)

Ομογενείς ΔΕ: $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$, αν οι A και B είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού. Συνταγή: $y = vx \to$ χωρίζονται μεταβλητών.
"αδιάκριτη" μεταβλητή.

Πχ. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$, $y = vx \to dy = x\,dv + v\,dx$ $\Big\} \to (vx)\cdot dx + (2\sqrt{x\cdot vx} - x)(x\,dv + v\,dx)$

$= 0 \to \cancel{xv\,dx} + 2x\sqrt{v}\,x\,dv + 2x\sqrt{v}\,v\,dx - x\cdot x\,dv - \cancel{xv\,dx} = 0$

$\to 2x v^{3/2}dx + (2\sqrt{v} - 1)x^2 dv = 0 \to \int \frac{2dx}{x} + \int\left(\frac{2v^{1/2}}{v^{3/2}} - \frac{1}{v^{3/2}}\right)dv$

$= 0 \to 2\ln x + \int (2v^{-1} - v^{-3/2})\,dv = 0 \to \ldots$

Ισοβαρείς ΔΕ. Γενίκευση της ομογενούς. Έστω ότι
$$\left\{\begin{aligned} A(\alpha x, \alpha^m y) &= \alpha^r A(x,y) \\ B(\alpha x, \alpha^m y) &= \alpha^{r-m+1} B(x,y) \end{aligned}\right\}.$$
Συνταγή: $y = vx^m$ "αδιάκριτη"

$A(\alpha x, \alpha^m y)\,d(\alpha x) + B(\alpha x, \alpha^m y)\,d(\alpha^m y) = \alpha^r \alpha (A\,dx) +$

$+ \alpha^{r-m+1}\alpha^m B\,dy = \alpha^{r+1}(A\,dx + B\,dy) \Rightarrow$ {Το "α" βγαίνει και διαιρούμε την αρχική ...

Πχ. $xy^2(3y\,dx + x\,dy) - (2y\,dx - x\,dy) = 0 \to$

$\left.\begin{aligned} x &\to \alpha x \\ y &\to \alpha^m y \end{aligned}\right\} \to \alpha x\cdot\alpha^{2m}y^2(3\alpha^m y\,\alpha\,dx + \alpha x\,\alpha^m dy) - (2\alpha^m y\,\alpha\,dx - \alpha x\,\alpha^m dy)$

$$\cancel{\to \alpha^{3m+2}\left(3xy^2dx+x^2dy\right)}$$

$$3xy^3dx+x^2y^2dy-2y\,dx+x\,dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to\alpha x \\ y\to\alpha^m y\end{array}\right\}\to 3(\alpha x)(\alpha^m y)^3 d(\alpha x)+(\alpha x)^2(\alpha^m y)^2\alpha^m dy-$$

$$-2\alpha^m y\, d(\alpha x)+(\alpha x)\,d(\alpha^m y)=0\to$$

$$\to 3xy^3dx\,\alpha^{1+3m+1}+x^2y^2dy\,\alpha^{2+2m+m}-$$

$$-2y\,dx\,\alpha^{m+1}+x\,dy\,\alpha^{1+m}=0\to$$

$$\to \alpha^{3m+2}\left(3xy^3dx+x^2y^2dy\right)+\alpha^{m+1}\left(-2y\,dx+x\,dy\right)=0$$

Αν $3m+2=m+1\to 2m=-1\to m=-\frac{1}{2}$ θεωρώντας ότι "φεύγει" το α, άρα ισοβαρής $\to y=vx^{-1/2}$ είναι ο κατάλληλος μετασχηματισμός: $v=y^2x\to$

$\to x=\frac{v}{y^2}\to dx=\frac{dv}{y^2}-\frac{2v\,dy}{y^3}$. Αντικαθιστώντας:

$$3\frac{v}{y^2}y^3\left(\frac{dv}{y^2}-\frac{2v}{y^3}dy\right)+\frac{v^2}{y^4}y^2dy-2y\left(\frac{dv}{y^2}-\frac{2v}{y^3}dy\right)+$$

$$+\frac{v}{y^2}dy=0\to\frac{3v\,dv}{y}-\frac{6v^2dy}{y^2}+\frac{v^2dy}{y^2}-\frac{2dv}{y}+\frac{4v\,dy}{y^2}+\frac{v\,dy}{y^2}=0$$

$$\rightarrow \frac{(3v-2)\,dv}{y}+\frac{5v-5v^2}{y^2}\,dy=0 \rightarrow (3v-2)y\,dv+5v(v-1)\,dy=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3v-2}{v(v-1)}\,dv+5\frac{dy}{y}=0.$$

$$\frac{3v-2}{v(v-1)}=\frac{\alpha_1}{v}+\frac{\alpha_2}{v-1}=\frac{\alpha_1 v-\alpha_1+\alpha_2 v}{v(v-1)} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2=3\\ -\alpha_1=-2\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1=2\\ \alpha_2=1\end{array}\right\} \rightarrow \int\left(\frac{2}{v}+\frac{1}{v-1}\right)dv+5\int\frac{dy}{y}=0 \rightarrow 2\ln v+\ln|v-1|+$$

$$+5\ln y=0 \rightarrow y=K\exp\left[-\frac{2}{5}\ln v-\frac{1}{5}\ln|v-1|\right]=$$

$$=K\left(v^{-2/5}\cdot|v-1|^{-1/5}\right)=K\frac{1}{\left(v^2|v-1|\right)^{1/5}},\quad x=\frac{v}{y^2}=\frac{v}{K^2\frac{1}{\left(v^2|v-1|\right)^{2/5}}}=$$

$$=\frac{v\left(v^2|v-1|\right)^{2/5}}{K^2}$$ Παραμετρική λύση.

Ειδικές περιπτώσεις: $(\alpha x+\beta y+\gamma)\,dx+(\varepsilon x+\zeta y+\eta)\,dy=0$

Η αντικατάσταση $x=\tilde{x}+C$, $y=\tilde{y}+D$ δίνει:

$$\left(\alpha\tilde{x}+\alpha C+\beta\tilde{y}+\beta D+\gamma\right)d\tilde{x}+\left(\varepsilon\tilde{x}+\varepsilon C+\zeta\tilde{y}+\zeta D+\eta\right)d\tilde{y}=0$$

Διαλέγουμε C και D ώστε $\left\{\begin{array}{l}\alpha C+\beta D+\gamma=0\\ \varepsilon C+\zeta D+\eta=0\end{array}\right\}$ οπότε

$(\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y})\,d\tilde{x}+(\varepsilon\tilde{x}+\zeta\tilde{y})\,d\tilde{y}=0$. (ομογενής) άρα $\tilde{y}=v\tilde{x}$ κ.λ.π.

Clairaut: $y - xy' = f(y') \to \cancel{y'} - \cancel{y'} - xy'' = f'(y')y'' \to [x + f'(y')]\,y'' = 0 \to \begin{cases} y'' = 0 \to y = \alpha x + \beta \to y' = \alpha \to \alpha x + \beta - x\alpha = f(\alpha) \to \beta = f(\alpha) \quad \text{ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ} \\ f' + x = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} f' + x = 0 \\ y - xy' = f(y') \end{matrix}\right\}$ Απαλείφοντας το y' βρίσκουμε την ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΛΥΣΗ

Παράδειγμα: $y = xy' + y'^2 \to$

$\to \cancel{y'} = \cancel{y'} + xy'' + 2y'y'' \to (x + 2y')\,y'' = 0 \to$

$\to \begin{cases} y = \alpha x + \alpha^2 \quad (\text{γενική λύση}) \\ x + 2y' = 0 \to y' = -\frac{x}{2} \to y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}. \end{cases}$

Γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

Λύσεις $y = e^{mx} \to \alpha_n m^n + \alpha_{n-1} m^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \to$

$\to y = c_1 e^{m_1 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$. Αν $m_1 = m_2$ θεωρούμε το συνδυασμό $\frac{e^{m_2 x} - e^{m_1 x}}{m_2 - m_1}$, του οποίου το όριο καθώς $m_2 \to m_1 \equiv m$ είναι: $\frac{d}{dm}(e^{mx}) = xe^{mx}$ (ανεξάρτητη λύση).

Παρόμοια, αν $m_1 = m_2 = m_3 = m$, οι ανεξάρτητες λύσεις θα είναι: $e^{mx}, xe^{mx}, x^2 e^{mx}$.

Ειδικές λύσεις: (1) Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών: ανάλογα με τη μορφή της $f(x)$ ή μέρος (αν όχι σταθερών δεξιό γραμμικών ανεξάρτητων διαφορικών), σχηματίζουμε ένα γραμμικό συνδυασμό του f και των ανεξάρτητων διαφορικών.

Πχ1 $y''+3y'+2y=e^{x}$ → $m^2+3m+2=0 \to m=-1,-2$ → $y_{o\mu}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

$y_{ειδ}=Ae^{x} \to A(1+3+2)e^{x}=e^{x} \to A=\frac{1}{6} \to y_{ειδ}=\frac{e^{x}}{6}$

Άρα $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{x}$.

Πχ2 $y''+3y'+2y=e^{-x}$ $\quad y_{ειδ}=Ax^{\mu}e^{-x}$

$\to y'_{ειδ}=\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}-Ax^{\mu}e^{-x} \to y''_{ειδ}=\mu(\mu-1)Ax^{\mu-2}e^{-x}-$

$-\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}-\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}+Ax^{\mu}e^{-x}=\mu(\mu-1)Ax^{\mu-2}e^{-x}-$

$-2\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}+Ax^{\mu}e^{-x} \to (\mu^2-\mu)Ax^{\mu-2}e^{-x}-2\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}+\cancel{Ax^{\mu}e^{-x}}\cancel{-3Ax^{\mu}e^{-x}}+$

$+3\mu Ax^{\mu-1}e^{-x}+\cancel{2Ax^{\mu}e^{-x}}=e^{-x} \to A(\mu^2-\mu)x^{\mu-2}+\mu Ax^{\mu-1}=1$

Αν διαλέξουμε $\mu=1 \Rightarrow A=1 \Rightarrow y_{ειδ}=xe^{-x}$.

Έστω ότι θέλουμε ~~μια~~ γραμμική εξίσωση με τη μορφή: $(D-m_1)(D-m_2)\dots(D-m_n)y=f(x)$.

Τότε: $y=\frac{f(x)}{(D-m_1)\dots(D-m_n)}=A_1\frac{f(x)}{D-m_1}+\dots+A_n\frac{f(x)}{D-m_n}$

Πχ. για την ~~δοσμένη~~ εξίσωση $y''+3y'+2y=e^x$, βρίσκουμε: $(D+1)(D+2)y=e^x \to y=\frac{e^x}{(D+1)(D+2)}$

$$\frac{1}{(D+1)(D+2)}=\frac{\alpha_1}{D+1}+\frac{\alpha_2}{D+2}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)D+2\alpha_1+\alpha_2}{(D+1)(D+2)}\to\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ 2\alpha_1+\alpha_2=1\end{cases}\to\begin{cases}\alpha_2=-\alpha_1=-1\\ \alpha_1=1\end{cases}\to$$

$\to y=\frac{e^x}{D+1}-\frac{e^x}{D+2}$. Τι σημαίνει $\tilde{y}_1=\frac{e^x}{D+1}$; είναι η λύση $\tilde{y}$ της $(D+1)\tilde{y}_1=e^x \to \frac{d\tilde{y}_1}{dx}+\tilde{y}_1=e^x$, άρα είναι γραμμική με λύση $(e^x\tilde{y}_1)'=e^{2x}\to e^x\tilde{y}_1=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\to\tilde{y}_1=\frac{c_1}{e^x}+\frac{e^x}{2}$

Παρόμοια, $(D+2)\tilde{y}_2=e^x\to(e^{2x}\tilde{y}_2)'=e^{3x}\to e^{2x}\tilde{y}_2=\frac{e^{3x}}{3}+c_2\to$
$\to\tilde{y}_2=\frac{e^x}{3}+\frac{c_2}{e^{2x}}$,

οπότε $y=\tilde{y}_1-\tilde{y}_2=\frac{c_1}{e^x}+\frac{e^x}{2}-\frac{e^x}{3}-\frac{c_2}{e^{2x}}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{e^x}{6}$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να ξεχωρίσει την εξίσωση: $(D-m_2)y=\frac{f}{D-m_1}=\tilde{y}_1$ ← λύνουμε θεωρώντας ως δοσμένο $\tilde{y}_1$

Στην [illegible] μας: $\tilde{y}_1 = \frac{c_1}{e^x} + \frac{e^x}{2} \to$

$\to (D+2)y = \frac{c_1}{e^x} + \frac{e^x}{2} \to$ (γραμμική) $\to$

$\to (e^{2x}y)' = c_1 e^x + \frac{e^{3x}}{2} \to e^{2x}y = c_1 e^x + \frac{e^{3x}}{6} + c_2 \to$

$\to y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{6}.$

<u>Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων</u>

$py'' + qy' + ry = s$

$py_k'' + qy_k' + ry_k = 0,\ k = 1,2.$

$y = u_1y_1 + u_2y_2 \to y' = u_1y_1' + u_2y_2' + \underbrace{u_1'y_1 + u_2'y_2}_{\to 0} \to u_1y_1' + u_2y_2'$

$\boxed{u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0}$ (A)

$y'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$

$p(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + q(u_1y_1' + u_2y_2') + r(u_1y_1 + u_2y_2) = s \to$

$\to \boxed{pu_1'y_1' + pu_2'y_2' = s}$ (B) (A),(B) $\to u_1', u_2'$

<u>Πχ</u> $x^2y'' - 2y = x$ $\left.\begin{array}{l} x^2y'' - 2y = 0 \\ y = x^\mu \end{array}\right\} \to x^2\mu(\mu-1)x^{\mu-2} - 2x^\mu = 0$

$\to \mu^2 - \mu - 2 = 0 \to \mu = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$

$$y = u_1 x^2 + \frac{u_2}{x} \to y' = 2xu_1 - \frac{u_2}{x^2} + \underbrace{u_1' x^2 + \frac{u_2'}{x}}_{0} \to$$

$$\to y'' = 2u_1 + \frac{2u_2}{x^3} + 2xu_1' - \frac{u_2'}{x^2}$$

$$x^2 y'' - 2y = x \to x^2\left(2u_1 + \frac{2u_2}{x^3}\right) + x^2\left(2xu_1' - \frac{u_2'}{x^2}\right) - 2u_1x^2 -$$

$$- 2\frac{u_2}{x} = x \to \left.\begin{array}{l} 2x^3u_1' - u_2' = x \\ u_1'x^3 + u_2' = 0. \end{array}\right\} \to 3x^3u_1' = x \to u_1' = \frac{1}{3x^2}$$

$$\Rightarrow u_2' = -x^3\frac{1}{3x^2} = -\frac{x}{3}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\int x^{-2}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) + C_1 = -\frac{1}{3x} + C_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{3}\int x\,dx = -\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + C_2 = -\frac{x^2}{6} + C_2.$$

$$y = \left(-\frac{1}{3x} + C_1\right)x^2 + \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + C_2\right) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} =$$

$$= C_1x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{x}{2}$$

Αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής

$$\left.\begin{array}{l} y'' + fy' + gy = 0 \\ y = pv,\ y' = pv' + p'v \to \\ \to y'' = pv'' + 2p'v' + p''v \end{array}\right\} \to pv'' + 2p'v' + p''v + fpv' + fp'v + gpv = 0 \to$$

$$\to p v'' + (2p' + fp) v' + (p'' + fp' + gp) v = 0 \Rightarrow$$

$$\to v'' + \left(\frac{2p'}{p} + f\right) v' + \left(\frac{p'' + fp' + gp}{p}\right) v = 0$$

Μπορεί κανείς να μηδενίσει οποιονδήποτε από τους δύο συντελεστές. (1) Είτε $\frac{2p'}{p} + f = 0 \Rightarrow$

$$\to \frac{2}{p}\frac{dp}{dx} = -f \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{f\,dx}{2} \Rightarrow p = e^{-\frac{1}{2}\int f\,dx}$$

Αυτή η μορφή είναι χρήσιμη στην ανάπτυξη προσεγγιστικών λύσεων, π.χ. WKB

Π.χ. $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$. Διαλέγοντας $p = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2}dx} =$

$= e^{-\frac{1}{2}\ln x} = x^{-1/2}$ βρίσκουμε: $\frac{p'' + fp' + gp}{p} = \frac{3}{4}\frac{1}{x^{5/2}} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}\right) + \frac{x^2-n^2}{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\left(p' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \Rightarrow p'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}\right)$

$$= \left(\frac{3}{4}\frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Big/ x^{-1/2} =$$

$= \frac{1}{4x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2}$. Η εξίσωση γράφεται: $y = pv = \frac{v}{\sqrt{x}}$,

$v'' + \underbrace{\left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)}_{f_v} v = 0$. Από WKB: $v \sim \frac{c}{f^{1/4}} e^{i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} + \frac{d}{f^{1/4}} e^{-i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}$, $x \gg x_0$

$\boxed{\text{Λύνουμε για μεγάλα } x.}$

$f\big|_{x_0} = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2} = 0 \xrightarrow{n \gg \frac{1}{2}} x_0 \simeq n$ $\quad f^{-1/4} \simeq \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)^{-1/4} \simeq 1 + \frac{n^2}{4x^2} \longrightarrow 1$

$$\sqrt{f} \simeq \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{n^2}{2x^2} \longrightarrow 1$$

$$\cancel{v \simeq c\left(1+\frac{n^2}{4x^2}\right)e^{i\int_n^x\left(1-\frac{n^2}{2x^2}\right)dx} + d\left(1+\frac{n^2}{4x^2}\right)e^{-i\int_n^x\left(1-\frac{n^2}{2x^2}\right)dx} =}$$

$$\cancel{=\left(1+\frac{n^2}{4x^2}\right)\left(c\, e^{i\left[(x-n)+\frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right)\right]}+d\,e^{-i[\dots]}\right)}$$

~~Πραγματική λύση~~ $\cancel{\to d = c^* \to v = K\left(1+\frac{n^2}{4x^2}\right)\cos\left[(x-n)+\frac{n^2}{2}\frac{n-x}{nx}+\varphi\right]}$

Καλύτερα να μην προσεγγίσουμε το $f^{-1/4} \simeq$ σταθερό

$x \to n \; x_0$

$$v \simeq K\frac{1}{\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)^{1/4}}\cos\left(x-n-\frac{n(x-n)}{2x}+\varphi\right) \simeq K\cos(x+\varphi) \to$$

$$\cancel{(x-n)\left(1-\frac{n}{2x}\right)}$$

$\to y = \frac{v}{\sqrt{x}} \sim \frac{K}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi)$. ([illegible]) [illegible] για $n' N_m$) ανεξάρτητα του ς

άρα η p είναι λύση!

(2) Είπε τον όρο $p''+fp'+gp$, ώστε να πάρει τη μορφή $v''+\left(2\frac{p'}{p}+f\right)v'=0 \to \int\frac{dv'}{v'}+\int\left(2\frac{p'}{p}+f\right)dx=0 \to$

$\to \ln v'+\int\left(f+\frac{2p'}{p}\right)dx=\tilde{K} \to v'=K e^{\int dx\left(\frac{2p'}{p}+f\right)} \to$

$\to v = K\int dx\, e^{\int dx\left(\frac{2p'}{p}+f\right)}$. Σ' αυτήν την περίπτωση η p είναι λύση της εξίσωσης. Επομένως, αν ξέραμε τη μία λύση, αυτή η διαδικασία μας δίνει τη δεύτερη.

Για εξισώσεις δεύτερης τάξης της α' τάξης τύπου I

Διάφορα: (α) Αν λείπει το y, θέτουμε $y' = p$.

(β) Αν λείπει το x θεωρούμε το $p = y'$ ως συνάρτηση του y.

~~Π.χ. $y'' + y' + y = 0 \xrightarrow{p = y'} p' + p + y = 0 \to (e^y p)' = e^y y \to$~~

~~$\to e^y p = \int dy\, y e^y = e^y(y-1) + c_1 \to p = y - 1 + c_1 e^{-y} \to \frac{dy}{dx} = y - 1 + c_1 e^{-y}$~~

~~$\to (e^{-x} y)' = -e^{-x} \to e^{-x} y = e^{-x} \to y = 1$~~

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \to y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \text{ κλπ.}$$

Π.χ. $y(y-1)y'' + y'^2 = 0 \to y(y-1)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \to \int\frac{dp}{p} + \int\frac{dy}{y(y-1)} = 0 \to$

$\to \ln p + \int\frac{dy}{y-1} - \int\frac{dy}{y} = 0 \to \ln p + \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \tilde{C}_1 \to$

$\to p \cdot \left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{\tilde{C}_1} = C_1 \to p = C_1\left|\frac{y}{y-1}\right| \to C_1\frac{y}{y-1} \to$

$\to \frac{dy}{dx} = C_1\frac{y}{y-1} \to \int dy\frac{(y-1)}{y} = C_1 x \to \int dy\left(1 - \frac{1}{y}\right) = C_1 x \to$

$\to y - \ln y = C_1 x + C_2$

(γ) Ομογενής στο y: $v = \ln y$ και η εξίσωση ως προς v δεν θα έχει το $v \to v' = p \ldots$

(δ) Ισοβαρής: $\left.\begin{array}{l} y = v x^m \\ t = \ln x \end{array}\right\} \to$ λείπει το t.

(ε) Φυσικός ολοκλ. παράγων: $y'' = f(y) \to 2y'y'' = 2y'f(y) \to (y'^2)' = 2\frac{df}{dx} \ldots$

Λύση με σειρές

Θεωρούμε την $\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_0(x)\, y = 0$.

Αν οι $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$ είναι ομαλές στο x_0, το x_0 λέγεται συνηθισμένο σημείο για τη ΔΕ. Μια λύση μπορεί να αναπτυχθεί περί ένα συνηθισμένο σημείο με τη μορφή:

$$y = \sum_0^\infty C_m (x-x_0)^m.$$

Αν το x_0 δεν είναι συνηθισμένο σημείο, αλλά τα $(x-x_0)f_{n-1}, (x-x_0)^2 f_{n-2}, \dots, (x-x_0)^n f_0$ είναι ομαλά στο x_0, έχουμε ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Τότε η ανάπτυξη έχει έναν παράγοντα $(x-x_0)^s$ μαζί με τη σειρά:

$$y = (x-x_0)^s \sum_0^\infty C_m (x-x_0)^m$$

Το s δεν είναι υποχρεωτικά ακέραιος και η σειρά συγκλίνει σ' ολόκληρο κύκλο δεν περιλαμβάνει όλα τα ανώμαλα(!).

Αν δεν ισχύει όπως το παραπάνω, έχουμε ένα ουσιωδώς ανώμαλο σημείο και δεν υπάρχει ανάπτυγμα περί αυτό.

Παρ. 1 Legendre: $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$. Τα $x=\pm 1$ είναι κανονικά ανώμαλα σημεία. Αναπτύσσουμε περί το συνηθισμένο σημείο $x=0$:

$$y=\sum_0^\infty c_m x^m \rightarrow (1-x^2)\sum c_m m(m-1)x^{m-2}-2x\sum c_m m x^{m-1}+$$

$$+n(n+1)\sum c_m x^m=0 \rightsquigarrow \underbrace{\sum c_m m(m-1)x^{m-2}}_{\sum c_{m+2}(m+2)(m+1)x^{m+2-2}}-\sum c_m m(m-1)x^m-$$

$$-2\sum m c_m x^m+n(n+1)\sum c_m x^m=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum x^m\left[(m+1)(m+2)c_{m+2}-m(m-1)c_m-2mc_m+n(n+1)c_m\right]=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow c_{m+2}(m+1)(m+2)=c_m\left\{m^2-m+2m-n(n+1)\right\}\rightarrow$$

$$\rightsquigarrow c_{m+2}=\frac{m^2+m-n(n+1)}{(m+1)(m+2)}c_m=\frac{(m+n+1)(m-n)}{(m+1)(m+2)}$$

Άρα είναι δύο ανεξάρτητες σειρές, θα δίνουν:

$$y=c_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2}x^2+\frac{(2+n+1)(2-n)}{3\cdot 4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}x^4-\dots\right]+$$

$$+c_1\left[x-(n-1)(n+2)\frac{x^3}{3!}+\dots\right]$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+2}}{c_m}=1 \Rightarrow \sum c_m x^m \sim \sum x^{2k}\sim\frac{1}{1-x^2}$, που αθροίζεται καθώς $x^2 \to 1$. Η μόνη ~~θεραπεία~~ περίπτωση να είναι πεπερασμένο το όριο είναι να κόβεται η σειρά, δηλαδή το n να είναι ακέραιος. Το αποτέλεσμα είναι ένα πολυώνυμο Legendre και ορίζεται πλήρως με τη συνθήκη $y(1)=1$.

<u>Παρ. 2</u> Bessel: $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$ $(m\geq 0)$. Το $x=0$ είναι κανονικό ανώμαλο σημείο (τα $x\cdot\frac{1}{x}$ και $x^2\cdot\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)$ είναι ομαλά εκεί). Άρα υπάρχει η $y=x^s\sum_0^\infty c_n x^n$ $(c_0\neq 0)$. Αντικαθιστούμε: $x^2\sum_0^\infty (n+s)(n+s-1)\cdot$

$$c_n x^{n+s-2}+x\sum (n+s)c_n x^{n+s-1}+(x^2-m^2)\sum c_n x^{n+s}=0 \to$$

$$\to\left\{(0+s)(0+s-1)c_0x^{0+s}+(1+s)(1+s-1)c_1x^{1+s}+\dots\right\}$$

$$+\left\{(0+s)c_0x^{0+s}+(1+s)c_1x^{1+s}+\dots\right\}+\left\{c_0x^{0+s+2}+c_1x^{1+s+2}+\dots\right\}-$$

$$-\left\{m^2c_0x^{0+s}+m^2c_1x^{1+s}+\dots\right\}=0.$$

Θεωρούμε τους συντελεστές των πιο χαμηλών δυνάμεων του x:

x^s: $s(s-1)c_0+sc_0-m^2c_0=0 \to c_0(s^2-m^2)=0 \to s=\pm m$

x^{s+1}: $(1+s)(1+s-1)c_1+(1+s)c_1-m^2c_1=0 \to c_1\left(s(s+1)+(s+1)-m^2\right)=0 \to$

$\to c_1\left((s+1)^2-m^2\right)=0.$

Η δεύτερη εξίσωση ~~γίνεται~~ δίνει: $c_1=0$ ή $(s+1)^2-m^2=0$

$$\to \left\{\begin{matrix}(m+1)^2-m^2=0\\ (-m+1)^2-m^2=0\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}m=-\frac{1}{2}\\ m=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Άρα $c_1=0$ εκτός από τις ειδικές θεωρήσεις $m=\pm\frac{1}{2}$ (στην πραγματικότητα είναι μία θεώρηση γιατί το m εμφανίζεται μόνο με τη μορφή m^2). Αν $\{m=\frac{1}{2}, s=+\frac{1}{2}\}$, τότε

$y=x^{+\frac{1}{2}}\sum_0^\infty c_n x^n = c_0x^{\frac{1}{2}}+c_1x^{\frac{3}{2}}+\dots$ Αν $\{m=\frac{1}{2}, s=-\frac{1}{2}\}$, τότε

$y=x^{-\frac{1}{2}}\sum_0^\infty c_n x^n = c_0x^{-\frac{1}{2}}+c_1x^{\frac{1}{2}}+\dots$ ← θεωρείται εδώ, άρα μπορούμε να θέσουμε $c_1=0$.

Δηλαδή, διαλέγουμε σταθερά $c_1=0$, οπότε μόνο άρτια n επιζούν. $\frac{c_{n+2}}{c_n}=-\frac{1}{(n+2)(2s+n+2)}$ →

$$\to y=c_0x^s\left[1-\frac{x^2}{4(s+1)}+\frac{x^4}{4\cdot 8\cdot(s+1)(s+2)}-\dots\right]$$

Συναρτήσεις Bessel. $\frac{c_2}{c_0}=-\frac{1}{2\cdot(2s+2)}=-\frac{1}{4(s+1)}$

$\frac{c_4}{c_2}=-\frac{1}{4(2s+4)} \to c_4=+\frac{1}{8(s+2)}\frac{1}{4(s+1)}$

Αν το m δεν είναι ακέραιος, θέτουμε

δύο ανεξάρτητες λύσεις. Αν είναι, δεν μπορούμε να εισηγάγουμε το $s=-m$, γιατί μηδενίζονται παρονομαστές. Άρα έχουμε μία μόνο λύση και ψάχνουμε για δεύτερη.

Έστω $L \equiv x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+x^2-m^2$. Τότε ~~(αφού ο τελεστής δεν εξαρτάται από το s)~~

$L\left[(s+m)y(x,s)\right]=(s+m)\,Ly(x,s)=(s+m)\cdot(s^2-m^2)x^s \rightsquigarrow$

Το $Ly(x,s)$ θα έχει μόνο τον όρο $(s^2-m^2)x^s$ γιατί οι υπόλοιποι όροι θα φεύγουν λόγω των αναδρομικών σχέσεων.

$\rightarrow L\left[\frac{\partial}{\partial s}\{(s+m)y(x,s)\}\right]=\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+m)^2(s-m)x^s\right]=$

$=2(s+m)(s-m)x^s+(s+m)^2x^s+x^s\ln x\,(s+m)^2(s-m)$.

Άρα, για $s=-m$: $L\left[\frac{\partial}{\partial s}\{(s+m)y(x,s)\}\Big|_{s=-m}\right]=0$,

οπότε βρήκαμε δεύτερη λύση. $\boxed{\frac{d}{ds}x^s=x^s\ln x}$

Π.χ. για $m=2$: $y(x,s)=x^s\left[1-\frac{x^2}{s(s+4)}+\frac{x^4}{s(s+2)(s+4)(s+6)}-\dots\right] \rightsquigarrow$

$\rightarrow (s+2)y(x,s)=x^s\left[s+2-\frac{(s+2)x^2}{s(s+4)}+\frac{x^4}{s(s+4)(s+6)}-\dots\right] \rightsquigarrow$

($s(s+4)(s+6) = s(s^2+10s+24)$)

$\rightsquigarrow \frac{d}{ds}\left[(s+2)y(x,s)\right]=(s+2)\ln x\,y(x,s)+x^s\left[1-x^2\frac{s(s+4)-(s+2)(2s+4)}{s^2(s+4)^2}+\right.$

$\left.+x^4\frac{-1}{s^2(s+4)^2(s+6)^2}(3s^2+20s+24)+\dots\right]$. Για να θέσουμε $s=-2$

παρατηρούμε ότι $(s+2)y(x,s)\Big|_{s=-2}=x^{-2}\left[0+0+\frac{x^4}{(-2)(2)(4)}+\dots\right]=-\frac{x^2}{16}+\dots=-\frac{1}{16}y(x,2)$, οπότε η δεύτερη λύση είναι: $-\frac{1}{16}y(x,2)\ln x + x^{-2}\Big[1 - x^2\frac{1}{(-2)(-2+4)} - x^4\frac{3\cdot 4-20\cdot 2+21}{(-2)^2(-2+4)^2(-2+6)^2}+\dots\Big] = -\frac{1}{16}y(x,2)\ln x +$

$$+x^{-2}\left[1+\frac{x^2}{4}+x^4\frac{\cancel{4}}{\cancel{64}_{16}}+\dots\right]$$

Ιδιομορφίες στο άπειρο.

Έστω ότι $y''+Py'+Qy=0$ και θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά στο άπειρο. Η μέθοδος είναι να αλλάξουμε μεταβλητή $\left(z=\frac{1}{x}\right)$ και να εξετάσουμε τη συμπεριφορά για $z\to 0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}=-z^2\frac{dy}{dz},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx}=\left[\frac{d}{dz}\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right)\right]\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=z^2\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dy}{dz}\right)=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}.\quad \text{Άρα:}$$

$$\left(z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}\right)+p(z)\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right)+q(z)\,y=0\to$$

$$\big(p(z)=P(x),\ q(z)=Q(x)\big)$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} - \frac{p(z)}{z^2}\right]\frac{dy}{dz} + \frac{q(z)}{z^4}\, y = 0.$$

Το $x=\infty$ είναι ~~...~~ συνηθισμένο ή κανονικό ανώμαλο σημείο της αρχικής εξίσωσης, ανάλογα με το αν το $z=0$ είναι συνηθισμένο ή κανονικό ανώμαλο σημείο της μετασχηματισμένης εξίσωσης.

Δηλαδή, έχουμε συνηθισμένο σημείο, αν οι παραστάσεις $\frac{2}{z} - \frac{p(z)}{z^2} = 2x - x^2P(x)$, $\frac{q(z)}{z^4} = x^4Q(x)$, είναι ομαλές στο $x=\infty$, και (θεωρημένες) κανονικό ανώμαλο σημείο, αν οι $z\left[\frac{2}{z} - \frac{p(z)}{z^2}\right] = 2 - \frac{p(z)}{z} = 2 - xP(x)$ και $z^2\left(\frac{q(z)}{z^4}\right) = \frac{q(z)}{z^2} = x^2Q(x)$ είναι ομαλές στο $x=\infty$.

Π.χ. αρμονικός ταλαντωτής: $y'' + (E-x^2)y = 0$

$P(x)=0$, $Q(x)=E-x^2$. Ούτε η $x^4Q(x)=(E-x^2)x^4$ (για συνηθισμένο σημείο) ούτε η $x^2Q(x)=x^2(E-x^2)$ (για κανονικό ανώμαλο σημείο) είναι ομαλές στο $x=\infty$.

Προσπαθούμε να "αφαιρέσουμε" την ανωμαλία.

Θεωρούμε το όριο των μεγάλων x, οπότε η εξίσωση γράφεται προσεγγιστικά:

$$\psi'' - x^2\psi \simeq 0 \to \psi \sim e^{\pm\frac{x^2}{2}}$$

Αναιρεθίσταμε: $\psi = e^{\pm\frac{x^2}{2}} \to \psi' = \pm x e^{\pm\frac{x^2}{2}} \to \psi'' = x^2 e^{\pm\frac{x^2}{2}} \pm e^{\pm\frac{x^2}{2}} \simeq x^2 e^{\pm\frac{x^2}{2}}$ και οι κυρίαρχοι όροι αθαλείφονται. $\Big(\psi = e^f \to \psi' = f'e^f \to \psi'' = f''e^f + f'^2 e^f \to (f'^2 e^f + \cancel{f''e^f}) - x^2 e^f = 0 \to f'^2 + \cancel{f''} - x^2 = 0 \to$ $\to f' = \pm x \to f = \pm\frac{x^2}{2}\Big)$. Για ωραϊσμένα Κ.Μ. διαλέγουμε την $e^{-\frac{x^2}{2}}$ και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών: $\psi = y e^{-\frac{x^2}{2}} \to \psi' = y'e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{2x}{2} y e^{-\frac{x^2}{2}} =$ $= y'e^{-\frac{x^2}{2}} - xye^{-\frac{x^2}{2}} \to \psi'' = y''e^{-\frac{x^2}{2}} - 2xy'e^{-\frac{x^2}{2}} - ye^{-\frac{x^2}{2}} + x^2ye^{-\frac{x^2}{2}}$.

Άρα η $\psi'' + (E - x^2)\psi = 0$ γράφεται: $y''e^{-\frac{x^2}{2}} - 2xy'e^{-\frac{x^2}{2}}$ $- ye^{-\frac{x^2}{2}} + \cancel{x^2ye^{-\frac{x^2}{2}}} + Eye^{-\frac{x^2}{2}} - \cancel{x^2ye^{-\frac{x^2}{2}}} = 0 \to \boxed{y'' - 2xy' + (E-1)y = 0}$

Η αναδρομική σχέση είναι: $\frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{2m+1-E}{(m+1)(m+2)}$ και η λύση: $y = c_0\left[1 + (1-E)\frac{x^2}{2!} + (1-E)(5-E)\frac{x^4}{4!} + \dots\right] +$

$$+ c_1\left[x + (3-E)\frac{x^3}{3!} + (3-E)(7-E)\frac{x^5}{5!} + \dots\right].$$

Η αναδρομική σχέση δίνει: $\frac{c_{m+2}}{c_m} \to \frac{2}{m}$ ασυμπτωτικά και $\psi = e^{-\frac{x^2}{2}} y = e^{-\frac{x^2}{2}} c_0 \left(1 + \frac{c_2}{c_0}x^2 + \frac{c_4}{c_0}x^4 + \dots\right)$

$\sim c_0 e^{-\frac{x^2}{2}} \sum \frac{x^{2m}}{m!}$

$c_{m+4} = c_{(m+2)+2} \approx \frac{2}{m+2} c_{m+2} \approx \frac{2}{m+2}\,\frac{2}{m}\, c_m \to \frac{c_{m+2k}}{c_m} \approx \frac{2^k}{(2k)!!} \approx \frac{2^k}{2^k k!}$

$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2k) = 2^k\, 1\cdot 2\cdot 3\cdots(k) = 2^k k!$

Άρα $\psi \approx c_0 e^{-\frac{x^2}{2}} \sum \frac{(x^2)^k}{k!} = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{+x^2} = c_0 e^{+\frac{x^2}{2}}$ απειρίζεται

Αν το E είναι ακέραιος, τότε η μία σειρά γίνεται πολυώνυμο (Hermite) και μπορούμε να θέσουμε το συντελεστή της άλλης ίσο με μηδέν, οπότε δεν θα έχουμε πρόβλημα.

Κβάντωση: $E = 2n+1$.

Συναφής εξίσωση Legendre:

$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$. Το $x=0$ είναι συνηθισμένο σημείο, ενώ τα $x=\pm 1$ είναι κανονικά ανώμαλα σημεία.

Θέτουμε $x=\pm 1+z$ για να απομονώσουμε την ιδιομορφία. Η εξίσωση γράφεται, προσεγγιστικά, περί το $x=+1$ (το $x=-1$ είναι ανάλογο).

$$x=1+z \rightarrow \left(1-(1+z)^2\right)\frac{d^2y}{dz^2}-2(1+z)\frac{dy}{dz}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-(1+z)^2}\right]y=0 \rightarrow \left(-2z-z^2\right)y''-2(1+z)y'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{-2z-z^2}\right]y=0 \underset{(z\ll 1)}{\rightarrow} -2zy''-2y'+\left[n(n+1)+\frac{m^2}{+2z}\right]y=0 \sim$$

$$\sim zy''+y'-\Big[\underbrace{\frac{n(n+1)}{4}}_{\text{αμελητέο}}+\frac{m^2}{4z}\Big]y=0 \rightarrow zy''+y'-\frac{m^2}{4z}y=0 \sim$$

$$\rightarrow z^2y''+zy'-\left(\frac{m}{2}\right)^2y=0.$$

Δοκιμάζουμε εις λύσεις

$$y=z^{\mu} \Rightarrow y'=\mu z^{\mu-1} \Rightarrow y''=\mu(\mu-1)z^{\mu-2},$$ άρα

$$z^2\left[\mu(\mu-1)z^{\mu-2}\right]+z\left[\mu z^{\mu-1}\right]-\left(\frac{m}{2}\right)^2 z^{\mu}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu^2\cancel{-\mu}\cancel{+\mu}-\left(\frac{m}{2}\right)^2=0 \rightarrow \mu=\pm\frac{m}{2} \sim y=z^{\pm\frac{m}{2}}.$$

Αλλαγή μεταβλητών: $y=vz^{\frac{m}{2}}$. Καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε την $y=v(1-x^2)^{m/2}$, για να απομονώσουμε και τις δύο ιδιομορφίες.

I (25)

$$y = v(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \rightsquigarrow y' = v'(1-x^2)^{m/2} + v\frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x) =$$

$$= v'(1-x^2)^{\frac{m}{2}} - mxv(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \to y'' = v''(1-x^2)^{\frac{m}{2}} + v'\frac{m}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} -$$

$$- mxv'(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - mv(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - mxv\left(\frac{m}{2}-1\right)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}(-2x) =$$

$$= v''(1-x^2)^{\frac{m}{2}} - 2mxv'(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - mv(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} + 2x^2vm\left(\frac{m}{2}-1\right)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}.$$

Άρα: $(1-x^2)\cdot\left[v''(1-x^2)^{\frac{m}{2}} - 2mxv'(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - mv(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} +\right.$

$$\left. + 2vx^2m\left(\frac{m}{2}-1\right)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}\right] - 2x\left[v'(1-x^2)^{\frac{m}{2}} - mxv(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\right] +$$

$$+ \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] v(1-x^2)^{\frac{m}{2}} = 0 \rightsquigarrow \underline{\underline{(1-x^2)v''}} - \underline{2mxv'} - mv +$$

$$+ 2vx^2m\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{1}{1-x^2} - \underline{2xv'} + \frac{2mx^2v}{1-x^2} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + \frac{v}{1-x^2}\left(\cancel{(m^2-2m)x^2 + 2mx^2 - m^2}\right) +$$

$$m^2x^2 - \cancel{2mx^2} + \cancel{2mx^2} - m^2$$

$$+ n(n+1)v - mv = 0 \rightsquigarrow (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' - m^2v + n(n+1)v -$$

$$- mv = 0 \to (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]v = 0.$$

Η αναδρομική σχέση είναι $\frac{c_{r+2}}{c_r} = \frac{(r+m-n)(r+m+n+1)}{(r+1)(r+2)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1$,

οπότε ~~$v \sim \sum x^{2k} \sim \frac{1}{1-x^2}$ $(1+x\sum x^2)$~~ η v απειρίζεται στα ± 1,

αν δεν θερματίνεται.

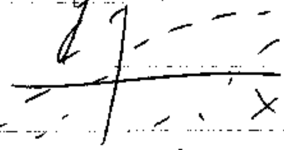
Γενικά αποδεικνύεται: $n-m = r$ ~~(ακέραιος)~~ ≥ 0

Τότε αποδεικνύεται ότι $y \sim (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$.

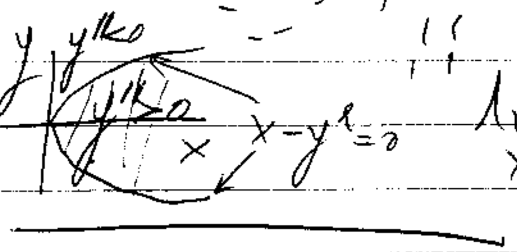
(συναφή πολυώνυμα Legendre).

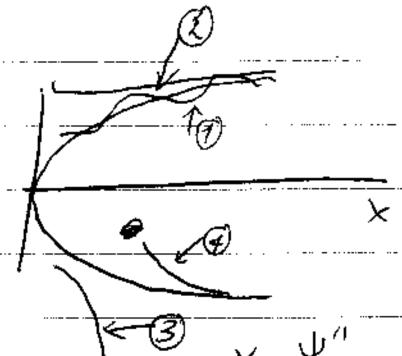
Διάφορες μέθοδοι.

Γραφικά: $\frac{dy}{dx} = e^{-2xy}$



$y'' = x - y^2$

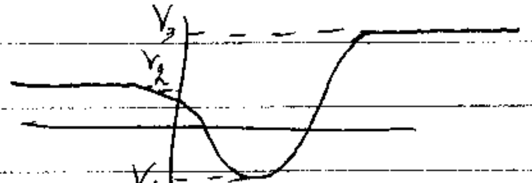




$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi \rightsquigarrow \frac{\psi''}{\psi} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)$$

$E > V$: $\frac{\psi''}{\psi} < 0$

$E < V$: $\frac{\psi''}{\psi} > 0$



$E > V_3 \rightsquigarrow$ ..., θετικά

$V_3 > E > V_2 \rightarrow$ μία μοναδική κυματοσυνάρτηση. Δεν αθροίζεται στο $+\infty$

$V_2 > E > V_1$: ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις

$E < V_1$: τίποτε.

Πειραματισμοί: $\frac{dy}{dx} = e^{-2xy}$. Έστω $x \to \infty$ και $y > 0$.

Δοκιμάζουμε $\frac{dy}{dx} \approx 0 \rightsquigarrow y = \alpha \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = e^{-2\alpha x} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow y = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x} + C \rightsquigarrow y = \alpha - \frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha} \rightsquigarrow$

$$\to \frac{dy}{dx} = e^{-2x\left(\alpha - \frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\right)} = e^{-2\alpha x}\, e^{\frac{x}{\alpha} e^{-2\alpha x}} \simeq$$

$$\simeq e^{-2\alpha x}\left(1 + \frac{x}{\alpha} e^{-2\alpha x}\right) = e^{-2\alpha x} + \frac{x}{\alpha} e^{-4\alpha x} \to$$

$$\to y = \alpha - \frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \underbrace{\int dx\, x e^{-4\alpha x}}$$

$$-\frac{1}{4\alpha}\int x\, d\left(e^{-4\alpha x}\right) = -\frac{1}{4\alpha}\left[x e^{-4\alpha x} - \int e^{-4\alpha x} dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\alpha}\left[x e^{-4\alpha x} + \frac{1}{4\alpha} e^{-4\alpha x}\right].$$

$$y \approx \alpha - \frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}\left(x + \frac{1}{4\alpha}\right) e^{-4\alpha x} + \dots \quad (\text{αν συγκλίνει}).$$

Πχ. $y'' = x - y^2$. Αν δοκιμάσουμε $y \simeq \sqrt{x}$ και αντικαταστήσουμε στο δεξιό μέλος, θα βρούμε άλλα αντ' άλλων: $y'' \simeq 0 \to y = \alpha x + \beta$. Μπορούμε όμως ν' αντικαταστήσουμε στο "μικρό" y'':

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to y'' = -\frac{1}{4x^{3/2}} \to y^2 = x - y'' = x + \frac{1}{4x\sqrt{x}} \to$$

$$\to y = \left(x + \frac{1}{4x\sqrt{x}}\right)^{1/2} = x^{1/2}\left(1 + \frac{1}{4x^{5/2}}\right)^{1/2} \simeq \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{8x^{5/2}}\right) =$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{8x^2}. \quad \text{κλπ}$$

(για δεύτερη λύση) I (28)

Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε $y=\sqrt{x}+\eta$, οπότε η εξίσωση γίνεται:
$\eta''=\frac{1}{4x^{3/2}}-2\eta\sqrt{x}-\eta^2$. Αν παραλείψουμε τα $\frac{1}{4x^{3/2}}$ και το η^2 βρίσκουμε: $\eta''+2\sqrt{x}\,\eta=0$. Η WKB θα δώσει: $\eta\simeq\frac{A}{x^{1/8}}\sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{5/4}+\delta\right)$

WKB

$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)y=0$. Το $f(x)$ μεταβάλλεται «αργά». Δοκιμάζουμε λύση της μορφής:

$y=e^{i\varphi(x)}\to y'=i\varphi'e^{i\varphi}\to y''=-\varphi'^2e^{i\varphi}+i\varphi''e^{i\varphi}\to$

$\to -\varphi'^2e^{i\varphi}+i\varphi''e^{i\varphi}+fe^{i\varphi}=0\to\boxed{-\varphi'^2+i\varphi''+f=0}$

Λύνουμε την εξίσωση επαναληπτικά.

Πρώτη προσέγγιση: $\varphi''\approx0\to\varphi'=\pm\sqrt{f}\to\varphi=\pm\int\sqrt{f}\,dx$

Τα $\varphi,\varphi',\varphi''$ έχουν τα ίδια πρόσημα $\pm$

$\varphi''=\pm\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

«Αργή» μεταβολή σημαίνει: $|\varphi''|\ll|f|\to$

$\to\left|\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right|\ll|f|$ ← Το $\sqrt{f}$ είναι σαν κυματαριθμός, οπότε ... σημαίνει ότι η μεταβολή του f σε ένα μήκος νόμενος είναι μικρή συγκρινόμενη με το $|f|$.

Δεύτερη προσέγγιση: Αντί για $\varphi'' \simeq 0$ δέχτουμε $\varphi'' \simeq \pm \frac{f'}{2\sqrt{f}}$, οπότε η $-\varphi'^2 + i\varphi'' + f = 0$ δίνει:

$$-\varphi'^2 \pm \frac{if'}{2\sqrt{f}} + f = 0 \rightsquigarrow \varphi' = \pm\left(f \pm \frac{if'}{2\sqrt{f}}\right)^{1/2} = \pm\sqrt{f}\left(1 \pm \frac{if'}{2f^{3/2}}\right)^{1/2} =$$

$$\simeq \pm\sqrt{f}\left(1 \pm \frac{i}{4}\frac{f'}{f^{3/2}}\right) = \pm\sqrt{f} + \frac{i}{4}\frac{f'}{f} \rightsquigarrow$$

χωρά τα πρόσημα πάνε μαζί: είναι τα ίδια, οπότε εδώ επιζεί μόνο το "+":

$$\rightsquigarrow i\varphi = \pm i\int\sqrt{f}\,dx \pm i\frac{i}{4}\int\frac{f'}{f}\,dx \rightsquigarrow e^{i\varphi} = e^{\pm i\int\sqrt{f}\,dx} \cdot e^{\mp\frac{1}{4}\ln f} = \frac{1}{f^{\pm\frac{1}{4}}}\, e^{\pm i\int\sqrt{f}\,dx}$$

τι διαγράφουμε; το "+".

~~Πιο προσεκτικά:~~ $\varphi = \varphi_R + i\varphi_I \rightarrow \varphi_R'^2 - \varphi_I'^2 + 2i\varphi_R'\varphi_I' = f \pm \frac{if'}{2\sqrt{f}} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi_R'^2 - \varphi_I'^2 = f, \\ 2\varphi_R'\varphi_I' = \pm\frac{f'}{2\sqrt{f}} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi_I' \simeq 0 \rightsquigarrow \varphi_R' = \pm\sqrt{f} \\ 2(\pm\sqrt{f})\varphi_I' = \pm\frac{f'}{2\sqrt{f}} \rightsquigarrow \varphi_I' = \frac{f'}{4f} \end{array}\right\}$$

Τα $\varphi_R'\varphi_I'$ και $\pm\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ είναι ομόσημα. Έστω f, f' θετικά. Τότε, αν $\varphi_R' = +\sqrt{f}$, θα είναι $2\varphi_R'\varphi_I' = +\frac{f'}{2\sqrt{f}}$. Άρα τα πρόσημα πάνε μαζί. Δηλαδή $\varphi' = \pm\sqrt{f} + \frac{i}{4}\frac{f'}{f} \rightsquigarrow$

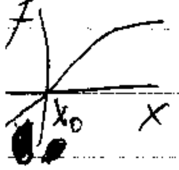
$$\rightsquigarrow i\varphi = \pm i\int\sqrt{f}\,dx - \frac{1}{4}\ln f \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow y = e^{i\varphi} \approx \frac{1}{f^{1/4}}\, e^{\pm i\int\sqrt{f}\,dx} \rightsquigarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y \approx \frac{1}{f^{1/4}}\left[c_+ e^{+i\int\sqrt{f}\,dx} + c_- e^{-i\int\sqrt{f}\,dx}\right]}$$

Πού παύει να ισχύει; Η συνθήκη είναι:

$\frac{1}{2}\left|\frac{f'}{\sqrt{f}}\right| \ll |f|$, οπότε το αριστερό μέλος μπορεί να γίνει μεγάλο αν το f' γίνει μεγάλο ή, το σπουδαιότερο, αν το f μηδενίζεται κάπου. Μεγάλης σημασίας για προβλήματα Κβαντικής Μηχανικής Εξίσωσης Σρέντιγκερ. Έστω ότι το $f(x)$ είναι της μορφής:



Τότε:
$$y(x) \approx \begin{cases} \dfrac{a}{(-f)^{1/4}}\, e^{\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx} + \dfrac{b}{(-f)^{1/4}}\, e^{-\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx}, & x \ll x_0\ (f<0) \\[2mm] \dfrac{c}{f^{1/4}}\, e^{+i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} + \dfrac{d}{f^{1/4}}\, e^{-i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}, & x \gg x_0\ (f>0) \end{cases}$$

Αν a, b πραγματικά, θα είναι $d = c^*$.

Ορίζουμε τις λεγόμενες συναρτήσεις WKB.

$$\boxed{W_\pm \equiv \frac{1}{f^{1/4}}\, e^{\pm i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}}$$

Τί εξίσωση δεύτερης τάξης ικανοποιούν;

$$W'_\pm = \pm i\sqrt{f}\,\frac{1}{f^{1/4}}\, e^{\pm i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f^{5/4}}\, e^{\pm i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} =$$

$$= \pm i\sqrt{f}\, W_\pm - \frac{1}{4}\frac{f'}{f} W_\pm = \left(\pm i\sqrt{f} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f}\right) W_\pm \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow W''_\pm = \left(\pm i\frac{f'}{2\sqrt{f}} - \frac{1}{4}\frac{f''f - f'^2}{f^2}\right) W_\pm + \left(\pm i\sqrt{f} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f}\right)\left(\pm i\sqrt{f} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f}\right) W_\pm = \left[\cancel{\pm i\frac{f'}{2\sqrt{f}}} - \frac{1}{4}\frac{f''}{f} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - f + \frac{1}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 \cancel{\mp 2i\sqrt{f}\,\frac{1}{4}\frac{f'}{f}}\right] W_\pm =$$

$$= \left[-f - \frac{f''}{4f} + \frac{5}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right] W_\pm \to$$

$$\to \boxed{W''_\pm + \Big[f + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{f''}{f} - \frac{5}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2}_{g}\Big] W_\pm = 0} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow W''_\pm + (f+g)\, W_\pm = 0$. Εξ άλλου $y'' + fy = 0$.

Η προσέγγιση της y από τις $W_\pm$ είναι καλή, αν $|g| \ll |f|$. Η y είναι ομαλή στο x_0, ενώ οι $W_\pm$ έχουν ανωμαλία.

Ορίζουμε τώρα τις $\alpha_\pm$ βάσει των σχέσεων:

$$\left.\begin{array}{l} y(x)=\alpha_+(x)\,W_+(x)+\alpha_-(x)\,W_-(x) \\ y'(x)=\alpha_+(x)\,W_+'(x)+\alpha_-(x)\,W_-'(x) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_+ = \dfrac{y\,W_-' - y'\,W_-}{W_+W_-' - W_+'W_-} \\ \alpha_- = -\dfrac{y\,W_+' - y'\,W_+}{W_+W_-' - W_+'W_-} \end{array}\right\}$$

Ο παρονομαστής είναι η ορίζουσα Wronski των W_+, W_-.

Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι σταθερά. Πράγματι: $(W_+W_-' - W_+'W_-)' = W_+W_-'' - W_+''W_- = -W_+(f+g)W_- + (f+g)W_+W_- = 0$. Η τιμή της σταθεράς μπορεί να προσδιοριστεί από τις ρητές εκφράσεις των W_+ και W_-: $W_\pm = \dfrac{1}{f^{1/4}}e^{\pm i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} \rightarrow W_\pm' = \left(\pm i\sqrt{f} - \dfrac{1}{4}\dfrac{f'}{f}\right)W_\pm$

$$\rightarrow W_+W_-' - W_+'W_- = W_+\left(-i\sqrt{f} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f}\right)W_- - \left(+i\sqrt{f} - \frac{1}{4}\frac{f'}{f}\right)W_+W_-$$

$$= -2i\sqrt{f}\,W_+W_- = -2i\sqrt{f}\left(\frac{1}{f^{1/4}}\cancel{e^{+i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}}\right)\left(\frac{1}{f^{1/4}}e^{-i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}\right) = -2i$$

Συνεπώς: $\left\{\begin{array}{l} \alpha_+ = \dfrac{i}{2}\left(y\,W_-' - y'\,W_-\right) \\ \alpha_- = -\dfrac{i}{2}\left(y\,W_+' - y'\,W_+\right) \end{array}\right\}$

Παραγωγίζοντας: $\frac{da_+}{dx} = \frac{i}{2}\left(y W_-'' - y'' W_-\right) =$

$= \frac{i}{2}\left(-y(\cancel{f}+g)W_- + \cancel{f} y W_-\right) = -\frac{i}{2} g y W_-$. Παρόμοια γίνεται το a_-. Συνολικά: $\boxed{\frac{da_\pm}{dx} = \mp\frac{i}{2} g y W_\mp} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \frac{da_\pm}{dx} = \mp\frac{i}{2} g \left(\alpha_+ W_+ + \alpha_- W_-\right) W_\mp = \mp\frac{i}{2} g \left(\alpha_+ W_+ W_\mp + \right.$$

$$\left. + \alpha_- W_- W_\mp\right) = \mp\frac{i}{2} g \left(\alpha_+ \frac{1}{f^{1/4}} e^{+i\int\sqrt{f}dx} \frac{1}{f^{1/4}} e^{\mp i\int\sqrt{f}dx} + \right.$$

$$\left. + \alpha_- \frac{1}{f^{1/4}} e^{-i\int\sqrt{f}dx} \frac{1}{f^{1/4}} e^{\mp i\int\sqrt{f}dx}\right) =$$

$$= \mp\frac{i}{2}\frac{g}{\sqrt{f}}\left[\alpha_+ e^{+i\int} e^{\mp i\int} + \alpha_- e^{-i\int} e^{\mp i\int}\right] \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{da_+}{dx} = -\frac{i}{2}\frac{g}{\sqrt{f}}\left[a_+ \cancel{e^{+i\int} e^{-i\int}} + a_- e^{-2i\int}\right] \\ \frac{da_-}{dx} = +\frac{i}{2}\frac{g}{\sqrt{f}}\left[a_+ e^{+i\int} e^{+i\int} + a_- \cancel{e^{-i\int} e^{+i\int}}\right] \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{da_\pm}{dx} = \mp\frac{i}{2}\frac{g}{\sqrt{f}}\left[a_\pm + a_\mp e^{\mp 2i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}\right].}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι χρήσιμες για τον υπολογισμό των σφαλμάτων που συσσωρεύονται,

~~τα~~ σταθερά εκτιμούνται καθώς τη μεταβολή των συντελεστών $a_\pm$ με το x.
(Η WKB προβλέπει σταθερά $a_\pm$).

<u>Π.χ.</u> $y'' + x y = 0$. Για $x >> 0$ η WKB δίνει: $W_\pm = \frac{1}{x^{1/4}} e^{\pm i \int_0^x \sqrt{x}\, dx} = \frac{1}{x^{1/4}} e^{\pm \frac{2i}{3} x^{3/2}}$.

($x = f(x)$)

Η g είναι: $g = \frac{1}{4}\frac{f''}{f} - \frac{5}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{0}{x} - \frac{5}{16}\left(\frac{1}{x}\right)^2 =$

$= -\frac{5}{16x^2}$ και οι $W_\pm$ ικανοποιούν την

$W_\pm'' + (f+g) W_\pm = 0 \to W_\pm'' + \left(x - \frac{5}{16x^2}\right) W_\pm = 0$

Για μεγάλα x: $y \simeq \frac{A}{x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \delta\right) =$ πραγματική λύση

$= \frac{1}{x^{1/4}} \frac{A}{2}\left(e^{+i\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)} e^{+i\delta} + e^{-i\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)} e^{-i\delta}\right) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} a_+ \to \frac{A}{2} e^{i\delta} \\ a_- \to \frac{A}{2} e^{-i\delta} \end{array}\right\}$ για $x \to \infty$.

Για να εκτιμήσουμε τα σφάλματα, θεωρούμε ότι περιορίζουμε σε σχετικά "μεγάλα" x, οπότε η μεταβολή δεν θα είναι μεγάλη. Τότε, θεωρ

εντικά: $\frac{da_\pm}{dx} \approx \mp \frac{i}{2}\frac{\left(-\frac{5}{16x^2}\right)}{\sqrt{x}}\left(a_\pm + a_\mp e^{\mp 2i\frac{2}{3}x^{3/2}}\right) \approx$

$$\approx \pm\frac{5i}{32x^2\sqrt{x}}\left(\frac{A}{2}e^{\pm i\delta} + \frac{A}{2}e^{\mp i\delta}e^{\mp\frac{4i}{3}x^{3/2}}\right).$$

Η μεταβολή των συντελεστών από το x_1 ως το άπειρο θα είναι:

$$\Delta a_\pm = \int_{x_1}^{\infty}\frac{da_\pm}{dx}dx = \pm\frac{A}{2}\frac{5i}{32}e^{\pm i\delta}\left[\int_{x_1}^{\infty}dx\, x^{-5/2} + e^{\mp 2i\delta}\int_{x_1}^{\infty}dx\, x^{-5/2}e^{-\frac{4i}{3}x^{3/2}}\right].$$

Ο δεύτερος ό έχει ταλαντευόμενο παράγοντα, συνεπώς συνεισφέρει μικρότερο, άρα $\left|\frac{\Delta a_\pm}{a_\pm}\right| \approx \frac{|\Delta a_\pm|}{\frac{A}{2}} = \frac{5}{32}\left(\frac{x^{-3/2}}{-\frac{3}{2}}\Big|_{x_1}^{\infty}\right) =$

$= \frac{5}{32}\frac{2}{3x_1^{3/2}} = \frac{5}{48x_1^{3/2}}$. Ακόμα και για $x_1 =$ το σχετικό σφάλμα είναι γύρω στο 0.

Γενικότερα, κινούμενοι στο μιγαδικό επίπεδο, το σφάλμα θα είναι:

$$\Delta a_\pm = \int_\Gamma \frac{da_\pm}{dx}dx = \mp\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{g}{\sqrt{f}}\, a_\pm\, dx \mp \frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{g}{\sqrt{f}}\, a_\mp \frac{W_\mp}{W_\pm}dx$$

Επιλέγουμε δρόμο Γ, τέτοιον ώστε ο πρώτος όρος να είναι μικρός. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γίνει σημαντικός, αν $\left|\frac{W_\mp}{W_\pm}\right| \gg 1$ και βέβαια το $a_\mp$ να μην είναι μηδέν ή πολύ μικρό. Δηλαδή το a_+ μπορεί ν' αλλάξει αν η "λύση" του συνάρτηση W_+ είναι μικρή (ώστε $\left|\frac{W_-}{W_+}\right| \gg 1$) και το a_- δεν είναι μικρό.

Το φαινόμενο λέγεται φαινόμενο Stokes.

Θεωρούμε μια τομή από το x_0 ως το άπειρο τέτοια ώστε τα $f^{1/2}$ και $f^{1/4}$ να είναι θετικά στο άνω μέρος της τομής.

Δηλαδή:
$$\left\{ \begin{array}{l} f^{1/2} = |f|^{1/2} e^{\frac{i\vartheta}{2}} \\ f^{1/4} = |f|^{1/4} e^{\frac{i\vartheta}{4}} \end{array} \right\}$$

Για $x > x_0$, $\vartheta = 0$ και $\left\{ \begin{array}{l} f^{1/2} = |f|^{1/2} \\ f^{1/4} = |f|^{1/4} \end{array} \right\}$

Για $x < x_0$, $\vartheta = \pi$ και $\left\{ \begin{array}{l} f^{1/2} = |f|^{1/2} e^{\frac{i\pi}{2}} = i(-f)^{1/2} \\ f^{1/4} = |f|^{1/4} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}}(-f)^{1/4} \end{array} \right.$

Δηλαδή, για $x < x_0$: $W_\pm = \frac{1}{f^{1/4}} e^{\pm i \int_{x_0}^{x} \sqrt{f}\, dx} =$

$$= \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}(-f)^{1/4}} e^{\pm i \int_{x_0}^{x} i(-f)^{1/2} dx} = e^{-\frac{i\pi}{4}}(-f)^{-1/4} e^{\mp \int_{x_0}^{x} \sqrt{-f}\, dx} =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{4}}(-f)^{-1/4} e^{\pm \int_{x}^{x_0} \sqrt{-f}\, dx}.$$

Σ' αυτήν την περιοχή:

$$y \simeq a_+ W_+ + a_- W_- = \frac{\overbrace{a_+ e^{-\frac{i\pi}{4}}}^{a}}{(-f)^{1/4}} e^{+\int_{x}^{x_0} \sqrt{-f}\, dx} + \overbrace{a_-}^{b} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{(-f)^{1/4}} e^{-\int_{x}^{x_0} \sqrt{-f}\, dx}$$

Στην περιοχή $x > x_0$:

$$y \simeq a_+ \frac{1}{f^{1/4}} e^{+i \int_{x_0}^{x} \sqrt{f}\, dx} + \overset{d}{a_-} \frac{1}{f^{1/4}} e^{-i \int_{x_0}^{x} \sqrt{f}\, dx}$$

$(k > 0)$

Κοντά στο x_0: $f(x) = k(x - x_0)$ και είναι χρήσιμο με προσεγγιστικά να βρούμε τις "περιοχές Stokes". Τα όρια βρίσκονται εκεί όπου το $\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx$ είναι πραγματικό, γιατί τότε $|W_+|=|W_-|$. Συγκεκριμένα:

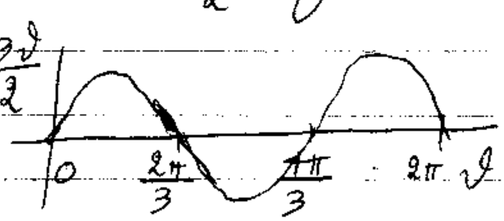
$$x-x_0 = re^{i\vartheta} \to \int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx = \int_{x_0}^{x} K^{1/2}(x-x_0)^{1/2}\,dx =$$

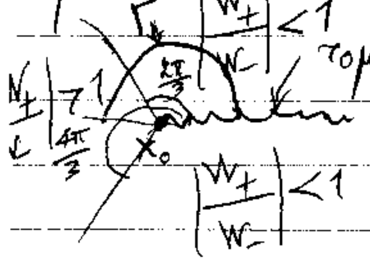
$$= K^{1/2}\frac{(x-x_0)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{2\sqrt{K}}{3}(x-x_0)^{3/2} = \frac{2\sqrt{K}}{3}r^{3/2}e^{i\frac{3\vartheta}{2}}$$

Αυτή η έκφραση είναι πραγματική για $\vartheta=0$, $\vartheta=\frac{2\pi}{3}$ και $\vartheta=\frac{4\pi}{3}$. Υπενθυμίζουμε ότι $\left|\frac{W_+}{W_-}\right| = \left|e^{2i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx}\right| =$

$$= \left|e^{2i\frac{2\sqrt{K}}{3}r^{3/2}e^{i\frac{3\vartheta}{2}}}\right| = \left|e^{\frac{4\sqrt{K}}{3}r^{3/2}\left(i\cos\frac{3\vartheta}{2}-\sin\frac{3\vartheta}{2}\right)}\right| = e^{-\frac{4\sqrt{K}}{3}r^{3/2}\sin\frac{3\vartheta}{2}}.$$

Άρα για $\vartheta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right) \to \left|\frac{W_+}{W_-}\right|<1$ (π.χ. $\vartheta=\frac{\pi}{2}$). Το ίδιο και για $\vartheta\in\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$ (π.χ. $\vartheta=\frac{3\pi}{2}$). Για $\vartheta\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ (π.χ. $\vartheta=\pi$) το $\sin\frac{3\vartheta}{2}$ γίνεται αρνητικό και $\left|\frac{W_+}{W_-}\right|>1$.





Διαλέγουμε και το μονοπάτι Γ μέσω του οποίου περικυκλώνουμε το x_0, ώστε $\int_\Gamma\left|\frac{g}{\sqrt{f}}\right|ds<<1$. Συνεχίζουμε να βρούμε τους τύπους σύνδεσης των περιοχών όπου γνωρίζονται κοντά στο x_0, αρχίζοντας από μια λύση y_1 που σβήνει εκθετικά αριστερά του x_0. Γενικά οι λύσεις για $x \ll x_0$ εκφράζονται ως:

$$y(x) \simeq \frac{a = a_+ e^{\frac{i\pi}{4}}}{(-f)^{1/4}} e^{+\int_{x}^{x_0} \sqrt{-f}\, dx} + \frac{b = a_- e^{-\frac{i\pi}{4}}}{(-f)^{1/4}} e^{-\int_{x}^{x_0} \sqrt{-f}\, dx},$$ οπότε

για την y_1 ισχύει $a=0 \to a_+=0$, οπότε το a_- μένει σταθερό κατά μήκος του Γ, έστω κι αν $\left|\frac{W_+}{W_-}\right| \gg 1$ στην περιοχή $\vartheta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Εξ άλλου, το a_+ παραμένει κοντά στο μηδέν, αν μη τι άλλο γιατί $\left|\frac{W_-}{W_+}\right| \ll 1$ σ' αυτήν την περιοχή. Το υπόλοιπο κομμάτι του Γ βρίσκεται στην περιοχή $\vartheta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, όπου $\left|\frac{W_-}{W_+}\right| \gg 1 \to \left|\frac{W_+}{W_-}\right| \ll 1 \to$ το a_- δεν αλλάζει. Δηλαδή το a_- δεν αλλάζει καθόλου κατά μήκος του Γ: στην περιοχή $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ γιατί το a_+ είναι μηδέν, στην $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ λόγω της μικρότητας του $\left|\frac{W_+}{W_-}\right|$

Άρα $a = \begin{cases} b e^{i\frac{\pi}{4}}, & x \ll x_0 \\ d, & x \gg x_0 \end{cases}$ και εφαρμόζεται: $d = b e^{\frac{i\pi}{4}}$. Αν το b είναι πραγματικό, έπεται ότι $c = d^*$, γιατί μια πραγματική λύση για $x \ll x_0$ θα είναι επίσης πραγματική για $x \gg x_0$. Κανονικοποιώντας το b στη μονάδα ο τύπος σύνδεσης γράφεται:

$$\boxed{\frac{1}{(-f)^{1/4}} e^{-\int_x^{x_0} \sqrt{-f}\, dx} \longrightarrow 2 \frac{1}{f^{1/4}} \cos\left[\int_{x_0}^{x} \sqrt{f}\, dx - \frac{\pi}{4}\right].}$$

Πράγματι: $\frac{c}{f^{1/4}} e^{+i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} + \frac{d}{f^{1/4}} e^{-i\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx} =$

$$= \frac{b e^{-\frac{i\pi}{4}}}{f^{1/4}} e^{+i\int} + \frac{b e^{+\frac{i\pi}{4}}}{f^{1/4}} e^{-i\int} = \frac{1}{f^{1/4}} 2\cos\left[\int - \frac{\pi}{4}\right].$$

Στη γενικότερη περίπτωση της λύσης y_2, όπου $a \neq 0$ οι σχέσεις $\begin{cases} c = b e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ d = b e^{+i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$ θα αντικατασταθούν από τις σχέσεις $\begin{cases} c = Aa + Bb \\ d = Ca + Db \end{cases}$. Αν τα a και b είναι πραγματικά, ισχύει $d = c^*$, δηλαδή $\begin{cases} C = A^* \\ D = B^* \end{cases}$.

Εξ άλλου γράφοντας τις δύο ανεξάρτητες λύσεις με τη μορφή $\begin{cases} y_1 = a_+^{(1)} W_+ + a_-^{(1)} W_- \\ y_2 = a_+^{(2)} W_+ + a_-^{(2)} W_- \end{cases}$, υποθέτοντας ότι

$\begin{cases} y_1' = \alpha_+^{(1)} W_+' + \alpha_-^{(1)} W_-' \\ y_2' = \alpha_+^{(2)} W_+' + \alpha_-^{(2)} W_-' \end{cases}$. Ξέρουμε ότι η Wronskian των y_1 και y_2 είναι σταθερά.

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \tilde{K} \to \left(\alpha_+^{(1)} W_+ + \alpha_-^{(1)} W_-\right)\left(\alpha_+^{(2)} W_+' + \alpha_-^{(2)} W_-'\right) -$$
$$- \left(\alpha_+^{(1)} W_+' + \alpha_-^{(1)} W_-'\right)\left(\alpha_+^{(2)} W_+ + \alpha_-^{(2)} W_-\right) = \tilde{K} \to$$
$$\to \alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} W_+ W_-' - \alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} W_+' W_- + \alpha_-^{(1)} \alpha_+^{(2)} W_- W_+' -$$
$$- \alpha_-^{(1)} W_-' \alpha_+^{(2)} W_+ = \tilde{K} \to \left(\alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)}\right)\underbrace{\left(W_+ W_-' - W_+' W_-\right)}_{-2i} =$$
$$= \tilde{K} \to \boxed{\alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{-2i} \equiv K}$$

Η σταθερά K μπορεί να υπολογιστεί, αφού

για $x \ll x_0$: $\begin{cases} a_+^{(k)} \to a_k e^{i\frac{\pi}{4}} \\ a_-^{(k)} \to b_k e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \to \alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)} \to$

$$\to a_1 e^{i\frac{\pi}{4}} b_2 e^{i\frac{\pi}{4}} - \alpha_2 e^{i\frac{\pi}{4}} b_1 e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1\right),$$ ενώ

για $x \gg x_0$: $\begin{cases} a_+^{(k)} \to c_k \\ a_-^{(k)} \to d_k \end{cases} \to \alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)} \to c_1 d_2 - c_2 d_1 =$

$$= (A\alpha_1 + Bb_1)(C\alpha_2 + Db_2) - (A\alpha_2 + Bb_2)(C\alpha_1 + Db_1) =$$

$$= \cancel{AC\alpha_1\alpha_2} + AD\alpha_1 b_2 + BCb_1\alpha_2 + \cancel{BDb_1b_2} - \cancel{AC\alpha_2\alpha_1} -$$

$$- AD\alpha_2 b_1 - BCb_2\alpha_1 - \cancel{BDb_2b_1} = (AD-BC)\alpha_1 b_2 - (AD -$$

$$- BC)\alpha_2 b_1 = (AD-BC)(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1).$$

Άρα: $K = \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{i\pi}{2}}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ (AD-BC)(a_1b_2 - a_2b_1) \end{array} \right\} \rightarrow e^{\frac{i\pi}{2}} = AD - BC \rightarrow$

$\rightarrow i = AB^* - BA^* = 2i\,\mathrm{Im}(AB^*) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathrm{Im}(AB^*) = \frac{1}{2} \\ \text{Αλλά } B = e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{array} \right\} \rightarrow$

απροσδιόριστο.

$\rightarrow \mathrm{Im}\left(Ae^{\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow Ae^{\frac{i\pi}{4}} = R + \frac{i}{2}.$

Δηλαδή, τελικά: $\left\{ \begin{array}{l} A = Re^{-\frac{i\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \\ C = A^* = Re^{\frac{i\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} B = e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ D = B^* = e^{\frac{i\pi}{4}} \end{array} \right\}$

Άρα στις σχέσεις $\left\{ \begin{array}{l} c = Aa + Bb \\ d = Ca + Db \end{array} \right\}$ υπεισέρχεται το άγνωστο R και έτσι η ασυμπτωτική μορφή του y_2 για $x < x_0$ δεν προσδιορίζει πλήρως το y_2 για $x > x_0$. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αντιστραφούν και να δώσουν.

$$a=\frac{\begin{vmatrix} c & B \\ d & D\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix}}=\frac{cD-dB}{AD-BC}=\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}c-e^{-\frac{i\pi}{4}}d}{i}=e^{-\frac{i\pi}{4}}c+e^{+\frac{i\pi}{4}}d,$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} A & c \\ C & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D\end{vmatrix}}=\frac{Ad-Cc}{AD-BC}=-i\left(Re^{-\frac{i\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)d+i\left(Re^{\frac{i\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)c=$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}-Re^{\frac{i\pi}{4}}\right)d+\left(Re^{-\frac{i\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)c.$$

$$\left(ie^{\frac{i\pi}{4}}=e^{\frac{3i\pi}{4}}=e^{i\pi}e^{-\frac{i\pi}{4}}=-e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Βλέπουμε ότι προσδιορίζεται το a, αλλά όχι το b. (το a χαρακτηρίζεται εδώ...). Εξάλλου το b πολλαπλασιάζει εκθετικό θα σβήνει μακριά η τιμή του δεν παίζει μεγάλο ρόλο. Μπορούμε να θέσουμε $b=0$ και ανάλογα διαλέγουμε πραγματική λύση, δηλαδή $\left(c=\frac{e^{i\varphi}}{2},\ d=\frac{e^{-i\varphi}}{2}\right)\to$

$$\to a=e^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{e^{i\varphi}}{2}+e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{e^{-i\varphi}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{4})}+e^{-i(\varphi-\frac{\pi}{4})}\right)=$$

$$=\cos\left(-\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

Άρα η $\frac{a}{(-f)^{1/4}}e^{\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx}+\frac{b}{(-f)^{1/4}}e^{-\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx}$, για $x\ll x_0$, $f(x)<0$,

γίνεται: $\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{(-f)^{1/4}}e^{\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx}$ ενώ η $\frac{c}{f^{1/4}}e^{i\int_{x_0}^x\sqrt{f}\,dx}+\frac{d}{f^{1/4}}e^{-i\int_{x_0}^x\sqrt{f}\,dx}$

γίνεται: $\frac{e^{i\left(\varphi+\int_{x_0}^x\sqrt{f}\,dx\right)}}{2f^{1/4}}+\frac{e^{-i\left(\varphi+\int_{x_0}^x\sqrt{f}\,dx\right)}}{2f^{1/4}}=\frac{1}{f^{1/4}}\cos\left(\int_{x_0}^x\sqrt{f}\,dx+\varphi\right).$

Επειδή ξέρουμε τα c και d και θέλουμε όλα τα a και b, η σχέση διαβάζεται:

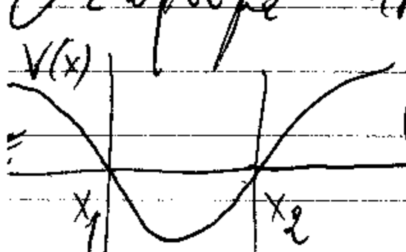
$$\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{(-f)^{1/4}}\, e^{\int_x^{x_0}\sqrt{-f}\,dx} \longleftarrow \frac{1}{f^{1/4}}\cos\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{f}\,dx+\varphi\right),$$

αρκεί βέβαια το φ να μην είναι πολύ κοντά στο $-\frac{\pi}{4}$. Το βέλος δεν μπορεί να αντιστραφεί, λόγω άγνοιας του φ.

Πιο αυστηρά:

Έστω η εξίσωση $y''+fy=0$

Θεωρούμε την περίπτωση δέσμιων καταστάσεων.



$\left(\frac{p^2}{\hbar^2}\right) f=\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$. Οι τύποι συναρμογής στο $x=x_1$ θα είναι:

$$y \approx \begin{cases} \frac{D'}{(-f)^{1/4}}\, e^{-\int_x^{x_1}\sqrt{-f}\,dx}, & x<x_1 \\ \frac{2D'}{f^{1/4}}\sin\left[\int_{x_1}^{x}\sqrt{f}\,dx+\frac{\pi}{4}\right], & x>x_1 \end{cases}$$

μεγαλύτερα $|f|$.

κοινή περιοχή, άρα τα ορίζουμε

$$y \approx \begin{cases} \frac{2D}{f^{1/4}}\sin\left[\int_x^{x_2}\sqrt{f}\,dx+\frac{\pi}{4}\right], & x<x_2 \\ \frac{D}{(-f)^{1/4}}\, e^{-\int_{x_2}^{x}\sqrt{-f}\,dx}, & x>x_2 \end{cases}$$

Θέλει να διαφέρουν κατά $n\pi$, ώστε:

$$\int_{x}^{x_2}\sqrt{f}\,dx+\frac{\pi}{4} = -\left(\int_{x_1}^{x}\sqrt{f}\,dx+\frac{\pi}{4}\right)+n\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{f}\,dx = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \quad n=1,2,\dots}$$

(1) Αγνοούμε τις σταθερές D, D'; (2) Πρόσημα μπορούν να απορροφηθούν μέσα στις σταθερές.

ΣΕΙΡΕΣ

(Απόλυτη) σύγκλιση. Σύγκριση μιας σειράς με μια γνωστή σειρά, για να διαπιστωθεί η σύγκλιση ή όχι.

Πχ. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots$, $|x|<1$. Κριτήριο [illegible]: Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} r<1$, η σειρά θα συγκλίνει. Αν $r>1$ θα αποκλίνει, ενώ για $r=1$ θέλει περαιτέρω εξέταση.

Σύγκριση με ολοκλήρωμα. Η σειρά $\sum^{\infty}_{N} f(n)$ συγκλίνει (αποκλίνει) ανάλογα με το αν το $\int^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει (αποκλίνει), αν η $f(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Πχ. Συνάρτηση ζ του Riemann: $\zeta(s) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\dots$

Πηλίκο διαδοχικών όρων:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^s} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\frac{s}{n}+\dots$$

Άρα $r \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ και το κριτήριο του πηλίκου αποτυγχάνει. Όμως $\int^{A} f(x)\,dx \sim \int^{A}_{x} \frac{dx}{x^{s}} =$

$$= \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Bigg|^{A}_{x} \overset{(s>1)}{=} \frac{1}{(1-s)A^{s-1}} - \frac{1}{(1-s)x^{s-1}}$$ Αυτό συγκλίνει, αν $s>1$. (για $A\to\infty$)

Άρα έχουμε μια επέκταση του κριτηρίου του πηλίκου: Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\frac{s}{n}$, με $s>1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Η υπεργεωμετρική σειρά:

$$F(a,b;c;x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

Το πηλίκο είναι:

$$\frac{\frac{a(a+1)\dots(a+n)\,b(b+1)\dots(b+n)}{c(c+1)\dots(c+n)}\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\,b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\,\frac{x^{n}}{n!}} =$$

$$= \frac{(a+n)(b+n)}{c+n}\,\frac{x}{n+1} = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}{\left(1+\frac{c}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,x \simeq \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)\left(1-\frac{c}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$ $(1+x)^{a} \simeq 1+ax$

$$= \left[1 + \frac{a+b-c-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]x.$$ Άρα η σειρά συγκλίνει όταν $|x|<1$, γιατί το όριο για $n\to\infty$ είναι το $|x|$. Αν $|x|=1$ η σειρά θα συγκλίνει αθροιστά: για $n\to\infty$ το πηλίκο θα είναι: $1+\frac{a+b-c-1}{n} \leftrightarrow 1-\frac{s}{n}$,

I 48

οπότε έχουμε σύγκλιση όταν $s>1 \rightarrow$

$\rightarrow -a-b+c+1>1 \rightarrow a+b-c<0$. Το κριτήριο του Raabe μπορεί να συνεχιστεί κι άλλο.

Π.χ. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$\int^{A} \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \int^{A} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^s} \overset{t=\ln x}{=} \int t^{-s}\,dt \simeq \frac{A^{-s+1}}{-s+1} = \frac{1}{1-s}\,\frac{1}{(\ln A)^{s-1}}$$

Αυτό είναι πεπερασμένο όταν $s>1$. Ας δούμε τώρα τι μας δίνει το κριτήριο:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n[\ln n]^s}{(n+1)(\ln(n+1))^s} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^s = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left[\frac{\ln n}{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^s \approx$$

$$\approx \left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\ln n}{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^s = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^{-s} \approx$$

$\ln(1+y) \approx y$

$$\approx \left(1-\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{\ln n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{-s} \approx \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n\ln n}\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n}-\frac{s}{n\ln n}+\frac{s}{n^2\ln n}.$$

Φαίνεται λοιπόν, ότι αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} 1-\frac{1}{n}-\frac{s}{n\ln n}+\dots$ η σειρά συγκλίνει αν $s>1$.