Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χωρισμός μεταβλητών

1.1 Εισαγωγή

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε μια από τις πιο σημαντικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ), το χωρισμό μεταβλητών. Η μέθοδος στηρίζεται στη βασική ιδιότητα της υπέρθεσης, γι΄ αυτό πρώτα θα κάνουμε ένα σχόλιο για την ιδιότητα αυτή.

1.1.1 Γραμμικότητα και αρχή της Υπέρθεσης

Τα φυσικά φαινόμενα διέπονται γενικά από ΜΔΕ, οι οποίες συνοδεύονται από τις οριακές και αρχικές συνθήκες που προσδιορίζουν το πρόβλημα και καθιστούν τη λύση του μονοσήμαντη. Συνεπώς τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε αποτελούνται από δύο συνιστώσες, άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους: τη διαφορική εξίσωση που τα διέπει και τις οριακές και αρχικές συνθήκες που τα προσδιορίζουν. Για να ορίσει, λοιπόν, κανείς τη γραμμικότητα (αλλά και οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα) ενός προβλήματος, πρέπει να ελέγξει τη γραμμικότητα και των δύο στοιχείων του προβλήματος.

1. Οι εξισώσεις εμφανίζονται συνήθως υπό τη μορφή:

$$\hat{L}\psi = f,$$

όπου το $\hat{L}$ είναι μια παράσταση που περιλαμβάνει συναρτήσεις και τελεστές παραγώγισης ως προς τις διάφορες ανεξάρτητες μεταβλητές, ψ είναι η άγνωστη συνάρτηση και f είναι κάποια γνωστή συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών που δεν εξαρτάται από την ψ και που αναφέρεται συνήθως ως "δεύτερο μέλος". Αν $f = 0$, η εξίσωση λέγεται ομογενής. Η παράσταση $\hat{L}$ λέγεται <u>διαφορικός τελεστής</u>. Πολύ σημαντική κατηγορία διαφορικών τελεστών είναι οι <u>γραμμικοί</u> διαφορικοί τελεστές, με τους οποίους θα ασχοληθούμε λεπτομερειακά. Ενας διαφορικός τελεστής $\hat{L}$ λέγεται γραμμικός αν, για οποιεσδήποτε (μιγαδικές) σταθερές $c_1, \quad c_2$ και οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\psi_1, \quad \psi_2$ των ανεξάρτητων μεταβλητών ισχύει η ισότητα:

$$\hat{L}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{L}\psi_1 + c_2\hat{L}\psi_2. \tag{1.1}$$

Δηλαδή η γραμμικότητα είναι σχεδόν συνώνυμη με την αρχή της υπέρθεσης. Οι ΜΔΕ που γράφονται συναρτήσει γραμμικών διαφορικών τελεστών λέγονται γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας (που θα είναι η πρώτη που θα εξετάσουμε) είναι η εξής:

$$\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t},$$

που μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} - \kappa\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa\frac{\partial}{\partial t}\right]\Theta(x,t) = 0. \quad (1.2)$$

Από πλευράς Φυσικής, η άγνωστη ζητούμενη συνάρτηση $\psi \equiv \Theta(x,t)$ παριστάνει τη θερμοκρασία μιας μονοδιάστατης ράβδου (που εξαρτάται από τη θέση και το χρόνο), ενώ κ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού της ράβδου, όπως η θερμοχωρητικότητα και η θερμική αγωγιμότητα. Η εξίσωση (1.2) είναι ομογενής, αφού δεν έχει δεύτερο μέλος και είναι επί πλέον γραμμική: μπορεί κανείς πολύ εύκολα να ελέγξει ότι ικανοποιείται η συνθήκη της γραμμικότητας (1.1).

Οι γραμμικοί τελεστές έχουν την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της στην πρώτη δύναμη. Αν είτε η ψ είτε οι παράγωγοί της βρίσκονται σε ανώτερες δυνάμεις είτε είναι ορίσματα συναρτήσεων όπως το ημίτονο (που περιλαμβάνει ανώτερες δυνάμεις στο ανάπτυγμά του κατά Taylor) η συνθήκη δεν ισχύει και η εξίσωση δεν είναι γραμμική. Επί παραδείγματι, οι εξισώσεις $\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} - \kappa(\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t})^2 = 0$, $\Theta_x = \nu\sin(b\Theta)$ δεν είναι γραμμικές.

2. Οπως εξηγήσαμε, οι οριακές και αρχικές συνθήκες είναι αναπόσπαστο κομμάτι ενός φυσικού προβλήματος. Επομένως, για να χαρακτηριστεί ένα πρόβλημα ως γραμμικό, πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι και οι συνθήκες αυτές είναι γραμμικές. Θα περιοριστούμε στις ομογενείς οριακές συνθήκες, δηλαδή εκείνες που, αν είναι σεβαστές από τις συναρτήσεις ψ_1, ψ_2, είναι σεβαστές και από την $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Για παράδειγμα, η συνθήκη $\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \mu_1\psi|_{x=0}$ είναι γραμμική, ενώ η $\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \mu_2(\psi|_{x=0})^2$ δεν είναι.

   Σημειώνουμε ότι οι αρχικές συνθήκες συνήθως δεν είναι ομογενείς. Ενα τυπικό παράδειγμα αρχικής συνθήκης είναι να δίνεται η αρχική μετατόπιση μιας χορδής: $\psi(x,t)|_{t=0} = f(x)$, που προφανώς δεν είναι ομογενής.

Ο λόγος για τον οποίο επιμένουμε στη γραμμικότητα είναι η αρχή της υπέρθεσης (1.1), η οποία λέει ότι: αν οι ψ_1, ψ_2 ικανοποιούν μια γραμμική ΜΔΕ και τις ομογενείς οριακές συνθήκες, τότε και η συνάρτηση $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ θα τις ικανοποιεί επίσης. Αυτή η αρχή μας επιτρέπει να "συνθέσουμε" τη λύση ενός προβλήματος από απλούστερες λύσεις του ίδιου προβλήματος.

1.1.2 Διάδοση θερμότητας σε ράβδο με τα άκρα σε μηδενική θερμοκρασία

Θα λύσουμε το πρόβλημα της εξέλιξης της θερμοκρασίας μιας ράβδου, η οποία ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ με δεδομένη θερμοκρασία

$$\Theta(x, t = 0) = f(x) \quad (1.3)$$

και διέπεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

που έχουμε ήδη αναφέρει. Σ' αυτό το πρώτο παράδειγμα θα περιοριστούμε σε όσο το δυνατόν πιο απλές οριακές συνθήκες, δηλαδή τις ομογενείς:

$$\Theta(x=0,t)=0, \quad \Theta(x=L,t)=0. \tag{1.5}$$

Αυτές οι συνθήκες σημαίνουν ότι στο αριστερό άκρο της ράβδου $x=0$ και στο δεξιό της άκρο $x=L$ η θερμοκρασία διατηρείται μηδενική σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε συναρτήσεις που να ικανοποιούν την εξίσωση (1.4) και τις ομογενείς οριακές συνθήκες (1.5). Αγνοούμε προς το παρόν την μη ομογενή αρχική συνθήκη (1.3). Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις της μορφής:

$$\Theta(x,t)=X(x)T(t), \tag{1.6}$$

δηλαδή λύσεις που θα είναι γινόμενο μιας συνάρτησης $X(x)$ που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x και μιας συνάρτησης $T(t)$ που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή t. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.4) τη δοκιμαστική μορφή (1.6):

$$X''(x)T(t)=\kappa X(x)T'(t)\rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\kappa\frac{T'(t)}{T(t)}. \tag{1.7}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ το δεξιό μέλος μόνο του t. Ο μόνος τρόπος, λοιπόν, για να ισχύει η ισότητα είναι και τα δύο μέλη να είναι ίσα με μια σταθερά, ανεξάρτητη και από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x και t. Επομένως έχουμε τις δύο εξισώσεις:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda, \quad \kappa\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda. \tag{1.8}$$

(Το μείον εισήχθη για λόγους ευκολίας στη συνέχεια και δεν έχει κάποια ιδιαίτερη βαρύτητα). Οι οριακές συνθήκες (για τη συνάρτηση $\Theta(x,t)$) μετατρέπονται στις συνθήκες $X(0)=0,\ X(L)=0$, που αναφέρονται μόνο στη συνάρτηση $X(x)$. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι μετατρέπει τις ΜΔΕ σε διαφορικές εξισώσεις μιας μεταβλητής (με τις αντίστοιχες τροποποιήσεις και στις οριακές συνθήκες).

Η λύση της χρονικής εξίσωσης

$$\kappa\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda\rightarrow T'(t)=-\frac{\lambda}{\kappa}T(t) \tag{1.9}$$

είναι:

$$T(t)=c_t\exp\left[-\frac{\lambda}{\kappa}t\right]. \tag{1.10}$$

Περιμένουμε ότι το λ πρέπει να είναι θετικό (ή μηδέν), αλλιώς το φυσικό πρόβλημα της αποκατάστασης της θερμικής ισορροπίας θα έχει μια (από φυσικής πλευράς) μη αποδεκτή συμπεριφορά στο όριο $t\rightarrow\infty$.

Η τιμή του λ πάντως θα προσδιοριστεί από τη λύση της χωρικής εξίσωσης. Το χωρικό κομμάτι (εξίσωση και οριακές συνθήκες) είναι ένα σχετικά απλό δείγμα ενός προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X(L)=0. \tag{1.11}$$

Οι λύσεις του προβλήματος θα δώσουν αριθμούς λ (που θα ονομάζονται ιδιοτιμές του προβλήματος) και συναρτήσεις $X(x)$ (τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος, που θα εξαρτώνται από τα λ). Οι λύσεις, γενικά, είναι τα εκθετικά $e^{\mu x}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση μια τέτοια δοκιμαστική λύση βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\mu^2e^{\mu x}+\lambda e^{\mu x}=0$, η οποία δίνει τη σχέση $\mu^2=-\lambda$. Οι τιμές του λ χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των λύσεων.

1. Αν $\lambda > 0$ τα $\mu = \pm i\sqrt{\lambda}$ είναι φανταστικοί αριθμοί, επομένως έχουμε φανταστικά εκθετικά ως λύσεις, τα οποία μπορούν να γραφτούν και με τη μορφή: $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Η οριακή συνθήκη $X(0) = 0$ δίνει $c_1 = 0$, ενώ η δεύτερη συνθήκη $X(L) = 0$, θεωρώντας ως δεδομένο το $c_1 = 0$, δίνει: $\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \to \lambda = (\frac{n\pi}{L})^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ και $X(x) = c_2 \sin\frac{n\pi x}{L}$.

2. Αν η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή, έχουμε διπλή ρίζα και η λύση της εξίσωσης είναι $X(x) = c_1 + c_2 x$. Είναι τετριμένο να δεί κανείς ότι οι οριακές συνθήκες επιβάλλουν $c_1 = c_2 = 0 \to X(x) = 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η τιμή $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Επί παραδείγματι, δεν θα μπορούσαμε να ικανοποιήσουμε την (1.3).

3. Οι αρνητικές τιμές του λ δίνουν (με αντικατάσταση στην εξίσωση) την εξίσωση $\mu^2 = -\lambda > 0$, οπότε προκύπτουν δύο τιμές για το μ με αντίθετο πρόσημο, οι $\pm\sqrt{-\lambda}$ με την αντίστοιχη λύση $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η επιβολή των οριακών συνθηκών δίνει πάλι $c_1 = c_2 = 0 \to X(x) = 0$, άρα δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές γι΄ αυτό το πρόβλημα. Είναι παρατήρηση γενικότερου ενδιαφέροντος ότι, αν πρέπει κανείς να βρεί μια συνάρτηση που να μηδενίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία (όπως εδώ, στα σημεία 0 και L) πρέπει να διαλέγει τις τριγωνομετρικές λύσεις και όχι τις εκθετικές (αν η επιλογή είναι μεταξύ αυτών των δύο μορφών λύσης).

Συνοψίζοντας, η λύση του προβλήματος (1.11) είναι

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = c_x \sin\frac{n\pi x}{L},$$

όπου έχουμε εισαγάγει κι έναν δείκτη n για να δείξουμε ότι τόσο η ιδιοτιμή όσο και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση εξαρτώνται από αυτόν τον ακέραιο αριθμό. Αν πολλαπλασιάσουμε την $X_n(x)$ με την αντίστοιχη χωρική συνάρτηση $T_n(t) = c_t \exp[-\frac{\lambda_n}{\kappa}t]$ και συμβολίσουμε τη σταθερά $c_x c_t$ με B_n, η συνάρτηση

$$B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \exp\left[-\frac{\lambda_n}{\kappa}t\right] = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{\kappa L^2}t\right] \tag{1.12}$$

είναι λύση της εξίσωσης (1.4) και ικανοποιεί και τις δύο ομογενείς οριακές συνθήκες (1.5). Εκείνη που δεν ικανοποιείται από αυτές τις λύσεις είναι η αρχική συνθήκη (1.3).

Λόγω της αρχής της υπέρθεσης, αφού οι λύσεις για τα διάφορα n είναι λύσεις του προβλήματος, το ίδιο θα ισχύει και για το άθροισμά τους:

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{\kappa L^2}t\right]. \tag{1.13}$$

Αυτή η εξίσωση υποβάλλει την ιδέα ότι ενδεχομένως να μπορεί να βρεθεί λύση που να ικανοποιεί <u>και</u> την (1.3), αν κατορθώσουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ να ρυθμίσουμε τους μέχρι τώρα αυθαίρετους συντελεστές B_n, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Theta(x, t = 0) \equiv f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{1.14}$$

Αυτό όμως είναι απόλυτα εφικτό και εξασφαλίζεται από τη θεωρία των σειρών Fourier. Από τη θεωρία, λοιπόν, των μετασχηματισμών Fourier μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές B_n και να έχουμε την πλήρη λύση.

Εύρεση των συντελεστών της σειράς

Παρ΄ όλ΄ αυτά, το καλύτερο είναι να μην επικαλείται κανείς τους έτοιμους τύπους, αλλά να βρίσκει (ή τουλάχιστον να μπορεί να βρει) τους συντελεστές ξεκινώντας από την αρχή. Γενικά μιλώντας, η εύρεση των συντελεστών B_n της εξίσωσης (1.14) είναι ειδική περίπτωση άλλου προβλήματος: πρόκειται για την εύρεση των συντελεστών a_n της ανάπτυξης

$$\vec{v} = \sum_n a_n \vec{x}_n \tag{1.15}$$

ενός διανύσματος $\vec{v}$ ως προς μία ορθογώνια βάση $\vec{x}_n$. Επίτηδες δεν έχουμε προσδιορίσει με ακρίβεια τα όρια της άθροισης πάνω στα n. Συνήθως η βάση έχει άπειρα (αριθμήσιμα) στοιχεία, οπότε στην πραγματικότητα το άθροισμα έχει άπειρους όρους, είναι δηλαδή μια σειρά. Για να βρεί κανείς τους συντελεστές σχηματίζει το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της εξίσωσης (1.15) με ένα συγκεκριμένο διάνυσμα βάσης, έστω το $\vec{x}_N$:

$$(\vec{x}_N, \vec{v}) = \sum_n a_n (\vec{x}_N, \vec{x}_n). \tag{1.16}$$

Η βάση $\vec{x}_n$ εξ άλλου, είναι ορθογώνια, δηλαδή μέσα στο άθροισμα μόνο ο όρος με $n = N$ θα είναι διαφορετικός από το μηδέν και θα συνεισφέρει. Επομένως η εξίσωση (1.16) θα απλοποιηθεί στην:

$$(\vec{x}_N, \vec{v}) = a_N (\vec{x}_N, \vec{x}_N) \to a_N = \frac{(\vec{x}_N, \vec{v})}{(\vec{x}_N, \vec{x}_N)}. \tag{1.17}$$

Οπως βλέπουμε, έχουμε κατορθώσει να απομονώσουμε τον (τυχαίο) συντελεστή με αυτή τη διαδικασία του εσωτερικού γινομένου. Το μόνο που χρειαστήκαμε ήταν η ορθογωνιότητα των διανυσμάτων βάσης (δεν υποθέσαμε ότι είναι υποχρεωτικά κανονικοποιημένα, δηλαδή ο παρονομαστής $(\vec{x}_N, \vec{x}_N)$ στο κλάσμα της (1.17) που δίνει τον συντελεστή δεν είναι υποχρεωτικά μονάδα). Η διαδικασία αυτή μπορεί να ακολουθηθεί για οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, όπως για παράδειγμα ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται στα σημεία 0 και L, που εμφανίζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα με τη χορδή. Μια τέτοια συνάρτηση $f(x)$ (που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{v}$) αποδεικνύεται ότι μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των συναρτήσεων $\sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \ldots.$ (που αντιστοιχούν στα $\vec{x}_n$) σύμφωνα με την ανάπτυξη:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.18}$$

Το μόνο στοιχείο που δεν έχουμε ακόμα ορίσει είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσης. Σύμφωνα με πάγια τακτική, το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων ορίζεται ως ένα ορισμένο ολοκλήρωμα της μορφής:

$$(g_1, g_2) \equiv \int_a^b dx w(x) [g_1(x)]^* g_2(x). \tag{1.19}$$

Ο αστερίσκος συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές μιας δεδομένης παράστασης. Το $w(x)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση βάρους, που όμως στην προκειμένη περίπτωση δεν θα μας απασχολήσει, αφού στην περίπτωσή μας αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι ίση με 1. Τα όρια a και b εξαρτώνται κάθε φορά από το πεδίο ορισμού του συγκεκριμένου προβλήματος. Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, προφανώς $a = 0$ και $b = L$. Δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

$$(\sin \frac{n_1 \pi x}{L}, \sin \frac{n_2 \pi x}{L}) \equiv \int_0^L dx \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi x}{L}.$$

Από αυτό το σημείο μπορεί κανείς να ακολουθήσει τη διαδικασία του εσωτερικού γινομένου και να γράψει την εξίσωση που αντιστοιχεί στην (1.17), δηλαδή την:

$$B_N = \frac{\int_0^L dx \sin\frac{N\pi x}{L} f(x)}{\int_0^L dx (\sin\frac{N\pi x}{L})^2}$$

Διαπιστώνουμε ότι ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο βρίσκουμε τους συντελεστές χωρίς να χρησιμοποιούμε έτοιμους τύπους, αρκεί να ελέγξουμε ότι η βάση που διαλέξαμε είναι ορθογώνια. Αποδεικνύεται με στοιχειώδεις μεθόδους ότι:

$$\int_0^L dx \sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{n_2\pi x}{L} = \frac{L}{2}\delta_{n_1 n_2},$$

όπου το λεγόμενο δέλτα του Kronecker ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{n_1 n_2} = \begin{cases} 1, n_1 = n_2 \\ 0, n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Οι συντελεστές γράφονται τελικά με τη μορφή:

$$B_N = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\frac{N\pi x}{L} f(x),$$

που μπορεί κανείς να βεβαιωθεί ότι ταυτίζεται με την έκφραση που δίνει ο μετασχηματισμός Fourier.

Συνοψίζοντας, η λύση του προβλήματος της εξέλιξης της θερμοκρασίας με το χρόνο για μια ράβδο με αρχική θερμοκρασία $f(x)$ και τα άκρα της σε μηδενική θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση:

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{\kappa L^2}t\right], \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L} f(x). \tag{1.20}$$

Οταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο, προφανώς η θερμοκρασία τείνει στο μηδέν. Η λύση μάς προσφέρει και μια εκτίμηση για το πώς το σύστημα θα πλησιάζει αυτήν την τελική μηδενική θερμοκρασία. Παρατηρούμε ότι για "μεγάλους" (αλλά όχι υπερβολικά μεγάλους) χρόνους (δηλαδή $t >> \frac{\pi^2}{\kappa L^2}$) μόνο η συνιστώσα με $n = 1$ θα συνεισφέρει, επομένως οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατανομή θερμοκρασίας, η κατανομή μετά από αρκετό χρονικό διάστημα θα έχει τη μορφή: $B_1 \sin\frac{\pi x}{L}\exp[-\frac{\pi^2}{\kappa L^2}t]$. Επομένως, όσο περνάει ο χρόνος, σε πρώτη φάση αποδυναμώνονται οι συνεισφορές των ανώτερων τρόπων (μεγάλων n) με συνέπεια να συνεισφέρουν μόνο οι πρώτες συνιστώσες, κάποια στιγμή μόνο η πρώτη είναι σημαντική και στο τέλος χάνεται και αυτή.

1.2 Ανακεφαλαίωση

Για να λύσουμε λοιπόν μια εξίσωση με χωρισμό μεταβλητών ακολουθούμε τα βήματα που κάναμε στο παράδειγμα που μόλις λύσαμε:

1. Σε πρώτη φάση αγνοούμε την αρχική συνθήκη (τη σχέση (1.3) στο παράδειγμά μας).

2. Χωρίζουμε τις μεταβλητές και προσδιορίζουμε τη σταθερά με την οποία θα είναι ίσες οι διάφορες συναρτήσεις. Για τον προσδιορισμό του προσήμου της σταθεράς καίριο ρόλο θα παίξουν οι (ομογενείς) οριακές συνθήκες. Συνήθως, για να ικανοποιηθούν ομογενείς οριακές συνθήκες, το πρόσημο πρέπει να είναι εκείνο που θα δίνει περιοδικές λύσεις (π.χ. ημίτονα

και συνημίτονα). Μέσω αυτής της διαδικασίας προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (όπως επί παραδείγματι στην εξίσωση (1.12)). Αποδεικνύεται ότι (εκτός της περίπτωσης του εκφυλισμού, που δε μας απασχολεί ακόμη) οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους ως προς το εκάστοτε εσωτερικό γινόμενο.

3. Σχηματίζουμε την υπέρθεση όλων αυτών των λύσεων που ικανοποιούν την εξίσωση και τις ομογενείς οριακές συνθήκες (π.χ. εξίσωση (1.13)).

4. Προσπαθούμε τώρα να ικανοποιήσουμε την αρχική συνθήκη, οπότε προκύπτει μια σειρά με προσδιοριστέους συντελεστές. Βρίσκουμε αυτούς τους συντελεστές χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων (π.χ. εξίσωση (1.20)).

1.3 Θερμοκρασία ράβδου με μονωμένα άκρα

Το πρόβλημα είναι παρόμοιο με το πρώτο που επεξεργαστήκαμε. Η διαφορά είναι ότι, ενώ πριν τα άκρα της ράβδου βρίσκονταν σε συγκεκριμένη θερμοκρασία, τώρα θεωρούνται μονωμένα. Δηλαδή οι ομογενείς οριακές συνθήκες δεν είναι πια οι $\Theta(x=0,t)=0, \quad \Theta(x=L,t)=0$, αλλά οι

$$\left.\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

Κατά τ΄ άλλα, η εξίσωση είναι η $\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2}=\kappa\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}$ και η αρχική συνθήκη η $\Theta(x,t=0)=f(x)$, όπως και προηγουμένως. Τα βήματα χωρισμού μεταβλητών και η χρονική εξάρτηση είναι η ίδια. Εκείνο που διαφέρει είναι το αντίστοιχο χωρικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Είναι το εξής:

$$X''(x)=-\lambda X(x), \quad X'(x)|_{x=0}=0, \quad X'(x)|_{x=L}=0.$$

Με την εμπειρία του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να καταλάβουμε ότι το λ δεν μπορεί να είναι αρνητικό, γιατί αυτό θα έδινε ως λύσεις εκθετικά, που δε θα μπορούσαν να ικανοποιήσουν τις ομογενείς οριακές συνθήκες. Η ιδιαιτερότητα αυτού του παραδείγματος είναι ότι το λ μπορεί να πάρει και την τιμή 0. Πράγματι, τότε η αντίστοιχη λύση της εξίσωσης είναι η $X(x)=c_1+c_2x \to X'(x)=c_2$. Η $X'(x)$ πρέπει να μηδενίζεται και στα δύο άκρα, οπότε $c_2=0 \to X(x)=c_1$. Η χρονική εξάρτηση $T_n(t)=c_t\exp[-\frac{\lambda}{\kappa}t]$ είναι επίσης τετριμμένη, αφού $\lambda=0$. Αρα αυτή η περίπτωση απλά προσθέτει μια σταθερά στη σειρά, που θα τη συμβολίσουμε στη συνέχεια με A_0. Η περίπτωση $\lambda>0$ δίνει τις αντίστοιχες λύσεις:

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x \to X'(x)=-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Εφαρμόζοντας τις ομογενείς οριακές συνθήκες βρίσκουμε:

$$c_2=0, \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n=c_1\cos\frac{n\pi x}{L},$$

όπου έχουμε προσθέσει τον δείκτη n, για να δείξουμε ρητά την εξάρτηση από αυτόν τον ακέραιο. Τελικά η σειρά που προκύπτει από την υπέρθεση είναι η:

$$\Theta(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{t}{\kappa}\right]. \tag{1.21}$$

Το μόνο που μένει είναι να προσδιοριστούν οι συντελεστές $A_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, με τρόπο που να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$$f(x) \equiv \Theta(x, t = 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.22}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\int_0^L dx \cos \frac{n_1 \pi x}{L} \cos \frac{n_2 \pi x}{L} = \frac{L}{2} \delta_{n_1 n_2}$ (εξαίρεση: $\int_0^L \cos^2 \frac{0 \pi x}{L} = L$) βρίσκουμε τους συντελεστές:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x), \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.23}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν ο χρόνος είναι πολύ μεγάλος, μόνο το A_0 επιζεί, γιατί είναι ο μόνος όρος της σειράς που δεν έχει (καθόλου) χρονική εξάρτηση. Μάλιστα, η λύση μάς δείχνει ότι η τελική θερμοκρασία θα είναι ίση με A_0, που είναι η "μέση τιμή" της αρχικής θερμοκρασίας $f(x)$. Το γεγονός αυτό σχετίζεται με τη διατήρηση της ενέργειας.

1.4 Διάδοση θερμότητας σε κυκλικό δακτύλιο

Το καινούργιο χαρακτηριστικό εδώ είναι ότι οι οριακές συνθήκες είναι μικτές. Στα προηγούμενα παραδείγματα οι ομογενείς οριακές συνθήκες αφορούσαν τις τιμές της συνάρτησης ή της παραγώγου της σε ένα μόνο οριακό σημείο τη φορά. Στην πρώτη εφαρμογή, επί παραδείγματι, είχαμε τη συνθήκη $\Theta(x = 0, t) = 0$ γιά το αριστερό άκρο της ράβδου και την $\Theta(x = L, t) = 0$ για το δεξιό. Δηλαδή οι οριακές συνθήκες δεν συνέδεαν το αριστερό άκρο με το δεξιό. Στη δεύτερη είχαμε μια παρόμοιου τύπου συνθήκη, αλλά με τις παραγώγους.

Τα πράγματα αλλάζουν στο παράδειγμα του κυκλικού δακτυλίου. Υποθέτουμε ότι κάμπτουμε την ευθύγραμμη ράβδο (μήκους L) ώστε να σχηματίσουμε περιφέρεια κύκλου. Εφόσον δεν υπάρχει κάποιο σημείο με ιδιαίτερη σημασία στην περιφέρεια, οι οριακές συνθήκες που θα επιβάλουμε θα είναι ότι η θερμοκρασία και η ροή θερμότητας πρέπει ταυτίζονται στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, τα οποία αναπαριστούν ένα και το αυτό σημείο στον δακτύλιο. Δηλαδή:

$$\Theta(x = 0, t) = \Theta(x = L, t), \quad \left.\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}\right|_{x=L}. \tag{1.24}$$

Επομένως οι οριακές συνθήκες συνδέουν σ′ αυτήν την περίπτωση την τιμή ενός μεγέθους στο $x = 0$ με την αντίστοιχη τιμή στο $x = L$. Οι σχέσεις της μορφής (1.24) λέγονται *περιοδικές οριακές συνθήκες*, γιατί εξισώνουν την τιμή των συναρτήσεων σε οποιοδήποτε σημείο με την τιμή που βρίσκεται σε κάποια σταθερή απόσταση από αυτό κι έτσι επιβάλλουν μια περιοδικότητα στη λύση.

Δηλαδή το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι το εξής:

$$\frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t},$$

$$\Theta(x = 0, t) = \Theta(x = L, t), \quad \left.\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}\right|_{x=L}, \tag{1.25}$$

$$\Theta(x, t = 0) = f(x) \tag{1.26}$$

Προχωρούμε στο χωρισμό μεταβλητών κατά τα γνωστά (επιλέγουμε το πρόσημο της ιδιοτιμής που δίνει περιοδικές λύσεις) και καταλήγουμε στη γενική λύση:

$$\Theta(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{\kappa}\right] \tag{1.27}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2n\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{\kappa}\right] \tag{1.28}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\int_0^L dx \sin\frac{2n_1\pi x}{L} \sin\frac{2n_2\pi x}{L} = \int_0^L dx \cos\frac{2n_1\pi x}{L} \cos\frac{2n_2\pi x}{L} = \frac{L}{2}\delta_{n_1 n_2},$$

$$\int_0^L dx \sin\frac{2n_1\pi x}{L} \cos\frac{2n_2\pi x}{L} = 0$$

και την ειδική περίπτωση όπου $n_1 = n_2 = 0$: $\int_0^L dx(\cos(0\frac{2\pi x}{L}))^2 = L$, προσδιορίζουμε τους συντελεστές:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx f(x), \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L},$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}.$$

Παρατηρούμε ότι στη σειρά έχουμε τώρα και ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους, που μάλιστα αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Το φαινόμενο κατά το οποίο δύο ή περισσότερες ιδιοσυναρτήσεις αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λέγεται εκφυλισμός. Στην περίπτωση που εξετάζουμε ο εκφυλισμός οφείλεται στις περιοδικές οριακές συνθήκες που επιβάλαμε. Παρατηρούμε ότι η λύση είναι περιοδική με περίοδο L, όπως θα περίμενε κανείς για την περίπτωση κυκλικού δακτυλίου.

1.5 Στάσιμη κατάσταση θερμοκρασίας σε ορθογώνια πλάκα

Η επόμενη εφαρμογή είναι τό πρόβλημα μιας πλάκας που η θερμοκρασία της έχει σταθεροποιηθεί ως προς το χρόνο και που δίνονται οι θερμοκρασίες των τεσσάρων πλευρών της. Αφού η χρονική παράγωγος είναι μηδέν, η εξίσωση που ικανοποιεί η θερμοκρασία μεταπίπτει από την μορφή:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = \kappa\frac{\partial\Theta}{\partial t}$$

στην

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0. \tag{1.29}$$

Το πρόβλημα συμπληρώνεται από τις τέσσερεις οριακές συνθήκες:

$$\Theta(x, y=0) = X_0(x), \quad \Theta(x, y=b) = X_b(x),$$

$$\Theta(x=0, y) = Y_0(y), \quad \Theta(x=a, y) = Y_a(y), \tag{1.30}$$

όπου οι X_0, X_b, Y_0, Y_a είναι γνωστές συναρτήσεις. Η δυσκολία έγκειται στο ότι αυτές οι οριακές συνθήκες δεν είναι ομογενείς. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα προϋποθέτει ομογενείς οριακές συνθήκες. Μια απλή ιδέα για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι να το αναλύσουμε σε τέσσερα επί μέρους (απλούστερα) προβλήματα και να συνθέσουμε μετά τη λύση από τις απλούστερες λύσεις.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα προβλήματα A, B, C, D, των οποίων οι άγνωστες συναρτήσεις $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C, \Theta_D$ διέπονται από την ίδια εξίσωση, την (1.29), αλλά οι οριακές συνθήκες έχουν ως εξής:

$$\Theta_A(x, y=0) = X_0(x), \Theta_A(x, y=b) = 0, \Theta_A(x=0, y) = 0, \Theta_A(x=a, y) = 0,$$

$$\Theta_B(x, y=0) = 0, \Theta_B(x, y=b) = X_b(x), \Theta_B(x=0, y) = 0, \Theta_B(x=a, y) = 0,$$

$$\Theta_C(x, y=0) = 0, \Theta_C(x, y=b) = 0, \Theta_C(x=0, y) = Y_0(y), \Theta_C(x=a, y) = 0,$$

$$\Theta_D(x, y=0) = 0, \Theta_D(x, y=b) = 0, \Theta_D(x=0, y) = 0, \Theta_D(x=a, y) = Y_a(y).$$

Είναι απλό να δεί κανείς ότι το άθροισμα $\Theta_A + \Theta_B + \Theta_C + \Theta_D$ ικανοποιεί και την εξίσωση (1.29) και τις οριακές συνθήκες (1.30), άρα είναι η λύση του αρχικού προβλήματος.

Η λύση των επί μέρους προβλημάτων είναι παρεμφερής και θα παρουσιάσουμε μόνο τη λύση του υποπροβλήματος A. Χωρίζουμε τις μεταβλητές:

$$\Theta_A(x, y) = X(x)Y(y) \to \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \to \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι ως προς την κατεύθυνση x οι οριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Η ιδιοτιμή λ πρέπει επομένως να είναι θετική για να δίνει περιοδικές λύσεις ως προς $x : X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. Εφαρμόζοντας τις ομογενείς οριακές συνθήκες προκύπτει ότι: $X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$. Ξέροντας την ιδιοτιμή ξέρουμε και τη λύση ως προς $y : C_n \exp[\frac{n\pi y}{a}] + D_n \exp[-\frac{n\pi y}{a}]$. Η λύση πρέπει να μηδενίζεται στο $y = b$, επομένως: $C_n \exp[\frac{n\pi b}{a}] + D_n \exp[-\frac{n\pi b}{a}] = 0 \to D_n = -C_n \exp[\frac{2n\pi b}{a}]$. Δηλαδή η λύση γράφεται:

$$C_n \left\{ \exp\left[\frac{n\pi y}{a}\right] - \left(\exp\left[\frac{2n\pi b}{a}\right] \exp\left[-\frac{n\pi y}{a}\right] \right) \right\},$$

που είναι πολλαπλάσιο της παράστασης $\sinh[\frac{n\pi(b-y)}{a}]$. Η γενική λύση είναι η υπέρθεση:

$$\sum_n E_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh[\frac{n\pi(b-y)}{a}].$$

Μένει να ικανοποιήσουμε τη μόνη μη ομογενή συνθήκη:

$$\Theta_A(x, y=0) = X_0(x) = \sum_n E_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\left[\frac{n\pi b}{a}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των ημιτόνων βρίσκουμε ότι:

$$E_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a dx X_0(x) \sin\frac{n\pi x}{a} \to$$

$$\to E_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a dx X_0(x) \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

και το υποπρόβλημα έχει λυθεί. Παρόμοια λύνονται και τα υπόλοιπα υποπροβλήματα και επομένως καταλήγουμε στη λύση του αρχικού προβλήματος.

1.6 Κυκλικός δίσκος

Εστω θερμικά αγώγιμος κυκλικός δίσκος με ακτίνα r. Η θερμική ισορροπία έχει αποκατασταθεί και η θερμοκρασία στην περιφέρεια είναι δεδομένη και περιγράφεται από τη συνάρτηση $g(\phi)$. Ζητείται η θερμοκρασία για $\rho \leq r$ και $0 \leq \phi < 2\pi$.

Φυσικά η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας σε θερμική ισορροπία θα αναχθεί στη (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace, που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\phi^2} = 0$. Οι οριακές συνθήκες είναι: $\Theta(\rho = r, \phi) = g(\phi)$ εξ υποθέσεως και $\Theta(\rho, \phi = 2\pi) = \Theta(\rho, \phi = 0)$, $\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi} = \left.\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}$, λόγω του ότι κανένα σημείο της περιφέρειας δεν έχει κάποια ιδιάζουσα θέση (βλέπε το προηγούμενο παράδειγμα με τον δακτύλιο). Ο χωρισμός μεταβλητών δίνει: $\Theta(\rho, \phi) = R(\rho)F(\phi) \to \frac{\rho}{R}(\rho R')' = -\frac{F''}{F} = \lambda$ (σημειώνουμε ότι οι τόνοι σημαίνουν παραγώγιση ως προς το αντίστοιχο όρισμα). Το πρόβλημα ιδιοτιμών από το οποίο θα ξεκινήσουμε είναι το:

$$F'' + \lambda F = 0, \quad F(\phi = 2\pi) = F(\phi = 0), \quad F'|_{\phi=2\pi} = F'|_{\phi=0}.$$

Η λύση του είναι απλή και δίνει τις ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2$ και τις (εκφυλισμένες) ιδιοσυναρτήσεις $\sin n\phi$ και $\cos n\phi$. (Σημειώνουμε ότι για τη λύση που αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή ισχύει ότι: $F'' = 0 \to F = c_0 + c_1\phi$. Η λύση με $c_1 \neq 0$ δεν είναι περιοδική και δεν έχει θέση εδώ, όμως σε άλλα προβλήματα, όπως π.χ. αν προσδιορίζεται η συνάρτηση για $\phi = \alpha$ και $\phi = \beta$ αντί να είναι περιοδική, αυτή η λύση μπορεί να παίξει ρόλο.) Γνωρίζοντας την ιδιοτιμή επιστρέφουμε στην ακτινική εξίσωση: $\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0$. Η λύση της εξίσωσης είναι απλή: $R_n = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}$ για $n \neq 0$ και $R_0 = A_0 + B_0 \ln\rho$ για $n = 0$. Δηλαδή η γενική λύση είναι:

$$\Theta(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})(C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi).$$

Σημειώνουμε ότι δεν χάνουμε σε γενικότητα περιορίζοντας την άθροιση σε θετικούς μόνο ακεραίους (γιατί;). Παρατηρούμε ότι υπάρχουν όροι (ο λογάριθμος και οι αρνητικές δυνάμεις του ρ) που απειρίζονται για $\rho = 0$, άρα δεν είναι φυσικά παραδεκτοί. Δηλαδή πρέπει να απαιτήσουμε για τους αντίστοιχους συντελεστές τις σχέσεις: $B_0 = 0, B_n = 0$. Τώρα επιβάλλουμε την μη ομογενή συνθήκη:

$$g(\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_nC_nr^n \cos n\phi + A_nD_nr^n \sin n\phi).$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τους συντελεστές εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi g(\phi),$$

$$A_nC_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} d\phi g(\phi)\cos n\phi,$$

$$A_nD_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} d\phi g(\phi)\sin n\phi.$$

Το πρόβλημα έχει λυθεί πλήρως. Δεν χρειάζεται (ούτε είναι δυνατόν) να προσδιοριστούν χωριστά τα A_n, C_n, D_n, αφού εμφανίζονται μόνο στους συνδυασμούς A_nC_n και A_nD_n.

1.7 Ασκήσεις προς λύση

1. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών στις ακόλουθες εξισώσεις και να γραφτούν οι συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση.
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - A\frac{\partial \psi}{\partial x} = \kappa\frac{\partial \psi}{\partial t},$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right) = \kappa\frac{\partial \Theta}{\partial t}.$$

2. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:
$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad \Theta(0,t) = 0, \quad \Theta(L,t) = 0,$$
με την αρχική συνθήκη:
$$\Theta(x,0) = 7\sin\frac{2\pi x}{L}.$$

3. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:
$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,$$
με την αρχική συνθήκη:
$$\Theta(x,0) = f(x).$$

4. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:
$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \Theta(L,t) = 0,$$
με την αρχική συνθήκη:
$$\Theta(x,0) = f(x).$$

5. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace στο εσωτερικό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές a και b, με τις εξής οριακές συνθήκες:
$$V(0,y) = 0, \quad V(a,y) = 0, \quad V(x,0) = b\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad V(x,b) = f(x).$$

6. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace στο εσωτερικό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές a και b, με τις εξής οριακές συνθήκες:
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a} = V_a(y), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=b} = V_b(x).$$
Υπάρχει πάντοτε λύση;

7. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace για το εξωτερικό ενός κυλίνδρου με ακτίνα R και γραμμική πυκνότητα φορτίου μ και με την οριακή συνθήκη $V(\rho = R, \phi, z) = f(\phi)$.

8. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace για το εσωτερικό ενός κυλίνδρου με ακτίνα R με την οριακή συνθήκη $V(\rho = R, \phi, z) = f(\phi)$. Να αποδειχθεί ότι το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\phi' f(\phi') \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \cos[n(\phi - \phi')] \right\}.$$

   Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς.

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση Fourier

2.1 Σειρές Fourier

Είναι γνωστό ότι μια περιοδική συνάρτηση $y(x)$ με περίοδο $2L$: $y(x+2L) = y(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί (υπό μάλλον χαλαρές προϋποθέσεις) από τη σειρά:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.1}$$

Αυτή η έκφραση είναι η σειρά Fourier. Οι συντελεστές Fourier a_n και b_n μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με βάση τα στοιχειώδη ολοκληρώματα

$$\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{n_1\pi x}{L} \sin\frac{n_2\pi x}{L} =$$

$$= \int_{-L}^{+L} dx \cos\frac{n_1\pi x}{L} \cos\frac{n_2\pi x}{L} = L\delta_{n_1 n_2},\ n_1, n_2 = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

$$\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{n_1\pi x}{L} \cos\frac{n_2\pi x}{L} = 0.$$

Εξαιρέσεις:

$$\int_{-L}^{+L} dx \cos^2\frac{0\pi x}{L} = 2L, \quad \int_{-L}^{+L} dx \sin^2\frac{0\pi x}{L} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2.1) επί παραδείγματι με $\sin\frac{N\pi x}{L}$ και ολοκληρώνοντας από $-L$ μέχρι $+L$, παίρνουμε τη σχέση:

$$\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{N\pi x}{L} y(x) = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{N\pi x}{L}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{N\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{N\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ολοκληρώματα που αναφέραμε η πιο πάνω σχέση δίνει:

$$\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{N\pi x}{L} y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n L \delta_{Nn} = b_N L,$$

οπότε είναι εύκολο να βρούμε τον συντελεστή b_N. Οι τελικοί τύποι γράφονται:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx \cos\frac{n\pi x}{L} y(x),\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx \sin\frac{n\pi x}{L} y(x),\ n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.4}$$

Μια εναλλακτική μορφή της σειράς είναι δυνατόν να παραχθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left[\exp(i\frac{n\pi x}{L}) + \exp(-i\frac{n\pi x}{L})\right],$$

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2i}\left[\exp(i\frac{n\pi x}{L}) - \exp(-i\frac{n\pi x}{L})\right].$$

Αντικαθιστώντας στη σειρά Fourier τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις βάσει των ανωτέρω σχέσεων και αναδιατάσσοντας τη σειρά βρίσκουμε την εξής μορφή:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2}\left[\exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right) + \exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right) - \exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right]\exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right]\exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2}, \quad c_n \equiv \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}, \quad c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}$$

η νέα μορφή της σειράς γράφεται:

$$y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right),$$

ή, ακόμα πιο συνοπτικά:

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = -\infty, \dots, +\infty. \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των c_n και τις εκφράσεις για τα a_n και b_n που αναφέραμε πιο πάνω, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα c_n :

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx y(x)\exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = -\infty, \dots, +\infty. \tag{2.6}$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα, που λέγεται θεώρημα του Parseval για σειρές Fourier, προκύπτει εύκολα από την τελευταία διατύπωση της σειράς. Ισχύει ότι:

$$\int_{-L}^{+L} dx y^*(x) y(x) = \sum_{m,n} c_m^* c_n \int_{-L}^{+L} dx \exp\left(-i\frac{m\pi x}{L}\right)\exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Το ολοκλήρωμα αποδεικνύεται στοιχειωδώς ότι ισούται με $2L\delta_{mn}$, οπότε

$$\int_{-L}^{+L} dx y^*(x) y(x) = \sum_{m,n} c_m^* c_n 2L\delta_{mn} = 2L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* c_n \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx y^*(x) y(x) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* c_n.$$

Αν θυμηθούμε την έκφραση των c_n συναρτήσει των a_n και b_n, η προηγούμενη σχέση γράφεται και με τη μορφή:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx y^*(x) y(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{2.7}$$

Αυτές οι ισότητες έχουν φυσική ερμηνεία. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η $y(x)$ παριστάνει την απομάκρυνση μιας χορδής από τη θέση ισορροπίας της. Τότε το $\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx y^*(x)y(x)$ παριστάνει τη δυναμική ενέργεια της χορδής, ενώ το άθροισμα είναι η έκφραση του ίδιου φυσικού μεγέθους συναρτήσει των πλατών των επί μέρους κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
Εστω τώρα ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που διαρρέεται από ένα ρεύμα $I(t)$ με περίοδο $2L = T \rightarrow L = \frac{T}{2}$. Η εξίσωση (2.1) γράφεται:

$$I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}. \tag{2.8}$$

Η ενεργός τιμή του ρεύματος ορίζεται με τη σχέση:

$$I_{\epsilon\nu} \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T dt[I(t)]^2}.$$

Εξ άλλου η ισότητα (2.7) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt[I(t)]^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T dt[I(t)]^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{2.9}$$

Δηλαδή η ενεργός ένταση του ρεύματος εκφράζεται συναρτήσει των συντελεστών Fourier.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα **ειδική περίπτωση** της σειράς Fourier έχουμε όταν $L = \pi$, οπότε η περίοδος της συνάρτησης είναι 2π. Τότε οι προηγούμενες σχέσεις της σειράς Fourier απλοποιούνται στις:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx y(x)\cos nx, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx y(x)\sin nx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(inx), n = -\infty, \ldots, +\infty,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dx y(x) \exp(-inx), n = -\infty, \ldots, +\infty.$$

2.1.1 Παρατηρήσεις

1. Αν η συνάρτηση $y(x)$ είναι συνεχής παντού, η σειρά συγκλίνει σημείο προς σημείο στην τιμή της συνάρτησης.

2. Η σειρά μπορεί να υπάρχει και όταν η σειρά παρουσιάζει μία ή περισσότερες ασυνέχειες, όταν δηλαδή σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων δεν είναι συνεχής. Στα σημεία ασυνέχειας, όπου $y(x_{0+}) \neq y(x_{0-})$, η σειρά θα συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{2}[y(x_{0+}) + y(x_{0-})]$.

3. Φαινόμενο Gibbs: Στην πράξη ποτέ δε χρησιμοποιούμε ολόκληρη τη σειρά Fourier, αλλά σταματάμε την άθροιση σε κάποιον όρο. Κοντά σε ασυνέχειες αυτό το πεπερασμένο άθροισμα μπορεί να δίνει τιμές πολύ διαφορετικές από την αρχική συνάρτηση. Η τιμή της διαφοράς δεν μειώνεται με το να πάρουμε περισσότερους όρους της σειράς. Η βελτίωση που επέρχεται συνίσταται στο ότι το διάστημα του x γύρω από την ασυνέχεια όπου παρατηρούνται οι διαφορές γίνεται όλο και μικρότερου εύρους και εντοπίζεται εγγύτερα στην ασυνέχεια.

4. Η τριγωνομετρική μορφή (2.1) της σειράς Fourier μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right),$$

όπου $a_n = d_n \sin\phi_n, b_n = d_n \cos\phi_n$. Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή αυτής της έκφρασης είναι η εύρεση της μέσης τιμής της ισχύος σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα όπου το ρεύμα και η τάση δίνονται από τις σχέσεις:

$$I(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \phi_n\right),$$

$$V(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \chi_n\right).$$

Η μέση τιμή της ισχύος είναι:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T dt V(t) I(t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \phi_n\right)\right]$$

$$\left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \chi_n\right)\right]$$

Το ολοκλήρωμα είναι το άθροισμα (άπειρων) απλών ολοκληρωμάτων και το αποτέλεσμα είναι:

$$P = V_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos\psi_n,$$

όπου $\psi_n \equiv \phi_n - \chi_n$. Στην περίπτωση του συνεχούς ρεύματος, μόνο τα V_0 και I_0 δεν μηδενίζονται και η σχέση γίνεται η γνωστή $P = V_0 I_0$. Για ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα, μόνο τα V_1 και I_1 επιζούν, οπότε $P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos\psi_n$. Υπενθυμίζουμε ότι $V_{\epsilon\nu} = \frac{V_1}{\sqrt{2}}, I_{\epsilon\nu} = \frac{I_1}{\sqrt{2}}$, οπότε $P = V_{\epsilon\nu} I_{\epsilon\nu} \cos\psi_n$, που είναι η συνηθισμένη σχέση για την ισχύ του εναλλασσομένου ρεύματος.

5. Αν η συνάρτηση $y(x)$ είναι άρτια, δηλαδή $y(-x) = +y(x)$, στη σειρά (2.2) θα επιζήσουν μόνο τα a_n. Αν η $y(x)$ είναι περιττή, δηλαδή $y(-x) = -y(x)$, θα επιζήσουν μόνο τα b_n.

6. Αν η συνάρτηση $y(x)$ δίδεται στο διάστημα $[0, L]$, μπορούμε να την αναπτύξουμε σε μια σειρά σαν την προηγούμενη που έχει περίοδο την $2L$, που είναι διπλάσια από το διάστημα ορισμού. Αυτό γίνεται σε δύο βήματα. Πρώτα " επεκτείνει" κανείς τη συνάρτηση, ώστε να ορίζεται και στο διάστημα $(-L, 0]$, και αποκτά μια συνάρτηση $\hat{y}(x)$ που είναι ορισμένη σε διάστημα με μήκος $2L$, όσο δηλαδή και η περίοδος που επιδιώκουμε. Κατόπιν αναπτύσσει κανείς αυτήν την καινούρια συνάρτηση σε σειρά Fourier κατά τα γνωστά. Ας θεωρήσουμε για απλότητα την περίπτωση που η συνάρτηση $\hat{y}(x)$ είναι συνεχής. Τότε η σειρά που θα βρούμε θα αναπαριστά πιστά την αρχική συνάρτηση $y(x)$ στο διάστημα $[0, L]$. Φυσικά, έξω από αυτό το διάστημα θα παριστάνει το υπόλοιπο μέρος της $\hat{y}(x)$, που σε μεγάλο βαθμό είναι δική μας επινόηση, αλλά αυτό δεν μας ενοχλεί.

7. Σε συνέχεια των προηγουμένων αναφέρουμε ότι οι συνηθισμένες επεκτάσεις της $y(x)$ είναι δύο. Επεκτείνεται με τρόπο που η $\hat{y}(x)$ να είναι είτε άρτια είτε περιττή.

   Πιο συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να επιλέξει τη συνάρτηση:

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} y(x), x \in [0, L] \\ y(-x), x \in (-L, 0] \end{cases}$$

   Είναι προφανές ότι αυτή η συνάρτηση είναι άρτια, θα επιζήσουν, όπως είπαμε ήδη, μόνο οι όροι με τα συνημίτονα. Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε ακριβώς τις σχέσεις. Σύμφωνα με τις γενικές σχέσεις: $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \hat{y}(x) \cos\frac{n\pi x}{L}$. Ομως, λόγω των ιδιοτήτων ομοτιμίας της $\hat{y}(x)$ και του συνημιτόνου, αυτό το ολοκλήρωμα είναι δύο φορές εκείνο που θα παίρναμε αν περιορίζαμε την ολοκλήρωση από το 0 ως το L. Αλλά σ' αυτό το διάστημα η συνάρτηση $\hat{y}(x)$ ταυτίζεται με την $y(x)$. Αρα μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές συναρτήσει της αρχικής συνάρτησης:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx y(x) \cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.10}$$

   Αυτή η σχέση είναι ιδιαίτερα εύχρηστη και εμφανίζεται συχνότατα.

   Μια άλλη δυνατή επιλογή είναι η:

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} y(x), x \in [0, L] \\ -y(-x), x \in (-L, 0] \end{cases}$$

   Αυτή η συνάρτηση είναι περιττή, άρα θα επιζήσουν μόνο οι όροι με τα ημίτονα. Με τρόπο ανάλογο με την προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx y(x) \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.11}$$

8. Διαφόριση και ολοκλήρωση μιας σειράς Fourier. Θεωρούμε ότι η ανάπτυξη Fourier μιας συνάρτησης είναι γνωστή. Εστω ότι:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Ας ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της ανάπτυξης θα πάρουμε:

$$\int dx y(x) = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx.$$

Στο δεξιό μέλος η σύγκλιση της σειράς γενικά βελτιώνεται σε σύγκριση με τη σύγκλιση της αρχικής σειράς, γιατί ο όρος τάξης n διαιρείται με το n. Τώρα ας παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη:

$$y'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (na_n) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n) \cos nx.$$

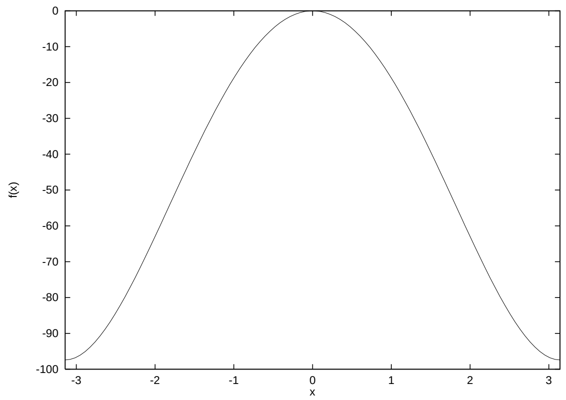
Σ' αυτήν την περίπτωση ο όρος τάξης n πολλαπλασιάζεται με το n και αυτό ενδεχομένως να καταστρέψει τη σύγκλιση της σειράς. Υπενθυμίζουμε ότι για να συγκλίνει μια σειρά είναι απαραίτητο οι όροι της να τείνουν στο μηδέν αρκετά γρήγορα, καθώς η τάξη τους τείνει προς το άπειρο. Αν αυτό είναι εξασφαλισμένο για τους όρους a_n, b_n, δεν συμβαίνει υποχρεωτικά το ίδιο για τους όρους $(na_n), (nb_n)$. Γενικά λοιπόν ισχύουν τα εξής: Η ολοκλήρωση όρο προς όρο μιας σειράς Fourier γενικά θα συγκλίνει και θα δίνει το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης. Η παραγώγιση, αντιθέτως, μιας σειράς Fourier όρο προς όρο, πιθανόν να συγκλίνει (οπότε θα δίνει την παράγωγο της αρχικής συνάρτησης), υπάρχει όμως σοβαρός κίνδυνος να μη συγκλίνει. Για παράδειγμα, θεωρούμε την ανάπτυξη της συνάρτησης $y(x) = x, x \in [-\pi, +\pi]$: $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη βρίσκουμε φορμαλιστικά την ισότητα $1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$. Η σειρά όμως στο δεξιό μέλος δεν συγκλίνει (θεωρήστε, επί παραδείγματι, την τιμή $x = 0$), οπότε η ισότητα δεν έχει νόημα.

9. Η τελευταία παρατήρηση έχει να κάνει και με την ταχύτητα σύγκλισης της σειράς Fourier που θα προκύψει για κάθε δεδομένη συνάρτηση. Μπορεί κανείς να έχει μια ποιοτική αίσθηση της συμπεριφοράς των συντελεστών των $\sin \frac{n\pi x}{L}$ και $\cos \frac{n\pi x}{L}$ συναρτήσει του n. Αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ασυνέχειες, η σειρά θα συγκλίνει σχετικά αργά: οι συντελεστές θα είναι ανάλογοι του $\frac{1}{n}$. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής, αλλά η πρώτη παράγωγος έχει ασυνέχειες, η σύγκλιση είναι κάπως καλύτερη: οι συντελεστές θα είναι ανάλογοι του $\frac{1}{n^2}$. Η συνέχεια είναι παρόμοια. Αν η συνάρτηση και η πρώτη παράγωγος είναι συνεχείς, αλλά η δεύτερη παράγωγος παρουσιάζει ασυνέχειες, οι συντελεστές θα είναι ανάλογοι του $\frac{1}{n^3}$. Οι διαπιστώσεις αυτές συνεχίζονται με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή έχουμε μια ημιποσοτική έκφραση του σχεδόν αυτονόητου συμπεράσματος ότι όσο πιο ομαλή είναι η συνάρτηση, τόσο καλύτερα συγκλίνει η αντίστοιχη σειρά.

2.1.2 Παράδειγμα από τη Στατιστική Φυσική

Να βρεθεί η σειρά Fourier που αναπαριστά τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί στο διάστημα $[-\pi, +\pi]$, έτσι ώστε να γίνει είτε άρτια είτε περιττή. Επιλέγουμε να την επεκτείνουμε σε άρτια συνάρτηση (βλέπε σχήμα), οπότε, σύμφωνα με



τις σχέσεις (2.10), θα αναπτύσσεται σε σειρά συνημιτόνων με συντελεστές:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx f(x)\cos nx = -\frac{48}{n^4}\cos n\pi, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx f(x) = -\frac{14\pi^4}{15}.$$

Το ανάπτυγμα της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos n\pi\cos nx,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Παραθέτουμε τις μη μηδενικές παραγώγους της συνάρτησης:

$$f'(x) = 4x^3 - 4\pi^2 x, \quad f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2, \quad f^{(3)}(x) = 24x, \quad f^{(4)}(x) = 24.$$

Αν συγκρίνουμε τις τιμές στα $\pm\pi$ διαπιστώνουμε ότι:

$$f(+\pi) = f(-\pi), f'(+\pi) = f'(-\pi), f''(+\pi) = f''(-\pi), f^{(3)}(+\pi) \neq f^{(3)}(-\pi).$$

Αρα η αρχική συνάρτηση και οι παράγωγοι τάξης 1 και 2 είναι συνεχείς, ενώ η τρίτη παράγωγος έχει ασυνέχεια. Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση περιμένουμε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier πρέπει να συμπεριφέρονται όπως το $\frac{1}{n^4}$. Αυτό είναι που μας δίνει και ο απ΄ ευθείας υπολογισμός.

Μια από τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των σειρών Fourier είναι ότι μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ειδικές τιμές του x και να βρει την ανάπτυξη διαφόρων εκφράσεων σε σειρά. Στο παράδειγμά μας μπορούμε να θεωρήσουμε την ειδική τιμή $x = \pi$. Η (επεκτεταμένη) συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ αυτήν την τιμή, άρα περιμένουμε ότι η σειρά θα συγκλίνει. Θα ισχύει λοιπόν:

$$f(x=\pi) = -\pi^4 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos^2 n\pi.$$

Λύνοντας βρίσκουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Εχουμε επομένως έναν τρόπο άθροισης μιας σειράς (πρέπει βέβαια να είναι κανείς πολύ διορατικός για να επινοήσει τη συνάρτηση $f(x)$ που είναι κατάλληλη για τη σειρά που τον ενδιαφέρει κάθε φορά). Το άθροισμα που μόλις υπολογίσαμε εμφανίζεται στη Στατιστική Φυσική κατά την εξέταση της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Εμφανίζεται το ολοκλήρωμα

$$I \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp[x]-1} = \int_0^\infty dx \frac{x^3 \exp[-x]}{1-\exp[-x]} =$$

$$= \int_0^\infty dx \sum_{m=0}^\infty x^3 \exp[-x] \exp[-mx] = \int_0^\infty dx \sum_{n=1}^\infty x^3 \exp[-nx] =$$

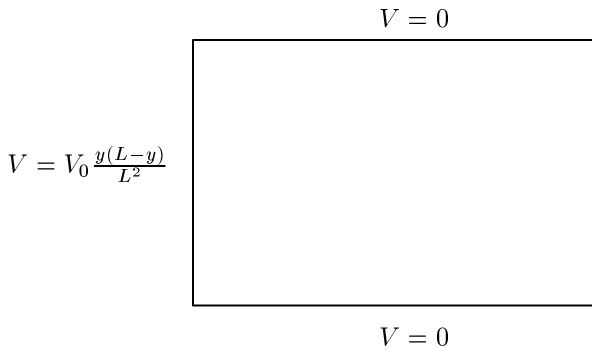
$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty dy y^3 \exp[-y] = 6 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}.$$

Με βάση το αποτέλεσμα που βρήκαμε προηγουμένως για τη σειρά καταλήγουμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με

$$I = \frac{\pi^4}{15}.$$

2.1.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την τομή ενός αγωγού κατά το επίπεδο xy. Ο περικλειόμενος χώρος είναι κενός, είναι απεριόριστος προς τα δεξιά, οι δύο οριζόντιες πλευρές είναι γειωμένες και απέχουν μεταξύ τους απόσταση L, ενώ το δυναμικό της κατακόρυφης πλευράς δίνεται από τη σχέση: $V_0 \frac{y(L-y)}{L^2}$. Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε καμμιά μεταβολή κατά μήκος του άξονα των z. Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό.



Λύση: Η εξίσωση μπορεί να λυθεί με τον χωρισμό μεταβλητών $V(x,y) = X(x)Y(y)$:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \to \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \to$$

$$\to [X = A \exp[kx] + B \exp[-kx], Y = C \cos ky + D \sin ky].$$

Εχουμε συμβολίσει τη σταθερά χωρισμού μεταβλητών με k^2. Για να έχουμε $V = 0$ στο $y = 0$ πρέπει $C = 0 \to Y \simeq \sin kx$. Τώρα για να έχουμε $V = 0$ στο $y = L$ πρέπει να μηδενίζεται το $\sin kL$, δηλαδή το k περιορίζεται να παίρνει τις τιμές $k_n = \frac{n\pi}{L}$. Εξ άλλου στα δεξιά ($x \to +\infty$) το δυναμικό δεν πρέπει να απειρίζεται, οπότε πρέπει $A = 0$. Τελικά η γενική λύση θα είναι μια υπέρθεση της μορφής:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^\infty F_n \exp\left[-\frac{n\pi x}{L}\right] \sin \frac{n\pi y}{L}.$$

Απομένει να επιβάλλουμε την οριακή συνθήκη $V(x=0,y)=V_0\frac{y(L-y)}{L^2}$:

$$V_0\frac{y(L-y)}{L^2}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sin\frac{n\pi y}{L}.$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι τα F_n είναι οι συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν στη συνάρτηση του αριστερού μέλους, άρα μπορούμε να τα προσδιορίσουμε από τους σχετικούς τύπους:

$$F_n=\frac{2}{L}\int_0^L dyV_0\frac{y(L-y)}{L^2}\sin\frac{n\pi y}{L}.$$

Με κατά παράγοντες ολοκληρώσεις βρίσκουμε τελικά:

$$F_n=\frac{4V_0}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi), n=1,2,3,\ldots$$

Παράδειγμα 2. Ζητείται η κίνηση χορδής με σταθερά άκρα και με γνωστές την αρχική παραμόρφωση $y(x,t=0)=y_0(x)$ και την αρχική ταχύτητα $y_t(x,t=0)=v_0(x)$.

Λύση: Η κίνηση της χορδής διέπεται από την κυματική εξίσωση

$$y_{xx}=\frac{1}{c^2}y_{tt}.$$

Ο χωρισμός μεταβλητών $y(x,t)=X(x)T(t)$ δίνει τις δύο εξισώσεις

$$c^2\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\omega^2,$$

όπου με ω^2 συμβολίζουμε τη σταθερά του χωρισμού των μεταβλητών. Η λύση ως προς x είναι γραμμικός συνδυασμός των $\sin kx$ και $\cos kx$, όπου $k\equiv\frac{\omega}{c}$. Οπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η συνθήκη για ακλόνητα άκρα συνεπάγεται ότι η σταθερά παίρνει μόνο τις τιμές $k_n=\frac{n\pi}{L}$ και ότι η λύση θα έχει την ειδική μορφή $\sin\frac{n\pi x}{L}$. Οι λύσεις ως προς το χρόνο θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\sin\frac{n\pi ct}{L}$ και $\cos\frac{n\pi ct}{L}$. Η γενική λύση θα είναι λοιπόν:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+B_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right],$$

που δίνει για την ταχύτητα την έκφραση

$$v(x,t)\equiv\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[-\frac{n\pi c}{L}A_n\sin\frac{n\pi ct}{L}+\frac{n\pi c}{L}B_n\cos\frac{n\pi ct}{L}\right].$$

Αυτές οι σχέσεις συνεπάγονται για την αρχική απομάκρυνση και την αρχική ταχύτητα τα αναπτύγματα:

$$y(x,t=0)=y_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$v(x,t=0)=v_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Δηλαδή οι σταθερές A_n και $\frac{n\pi c}{L}B_n$ δεν είναι παρά οι συντελεστές Fourier των γνωστών συναρτήσεων $y_0(x)$ και $v_0(x)$ αντίστοιχα. Μπορούμε, λοιπόν να τις προσδιορίσουμε εύκολα:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L dxy_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L},\quad \frac{n\pi c}{L}B_n=\frac{2}{L}\int_0^L dxv_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

2.2 Ολοκλήρωμα Fourier

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier μιας συνάρτησης:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right), \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx f(x) \exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ειδαμε ότι τέτοιου είδους αναπτύγματα μπορούν να περιγράψουν μια πολύ ευρεία κατηγορία συναρτήσεων αλλά υπάρχει πάντα η περιοριστική προϋπόθεση ότι η συνάρτηση πρέπει να είναι περιοδική. Ο τρόπος για να ξεπεράσουμε και αυτόν τον περιορισμό, δηλαδή να αναπτύξουμε μια **μη** περιοδική συνάρτηση είναι να θεωρήσουμε ότι είναι μεν περιοδική, όπως η $f(x)$ πιο πάνω, αλλά ότι η περίοδός της $2L$ τείνει στο άπειρο. Δηλαδή η ιδέα είναι να πάρουμε το όριο καθώς $L \to \infty$ των προηγούμενων σχέσεων για την περιοδική συνάρτηση. Ας κάνουμε μερικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις. Αν πάμε στο όριο, τα πηλίκα $\frac{n\pi}{L}$ που εμφανίζονται στους εκθέτες θα τείνουν στο μηδέν, για κάθε συγκεκριμένο (σταθερό) n. Παρ᾽ όλ᾽ αυτά, αν παρακολουθήσουμε τη διαδικασία μετάβασης στο όριο, θα δούμε ότι, αν θεωρήσουμε μια οσοδήποτε μεγάλη τιμή του L, θα υπάρχει πάντα κάποιο n ώστε τα πηλίκα που είπαμε να έχουν μια πεπερασμένη, προκαθορισμένη, τιμή. Επίσης είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών τέτοιων πηλίκων είναι: $\frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$, δηλαδή γίνεται απειροστή στο όριο $L \to \infty$.

Εχοντας υπόψη τις παρατηρήσεις που κάναμε, ορίζουμε νέες μεταβλητές:

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L}, \quad c_n \equiv \frac{\pi}{L}\tilde{f}(k_n).$$

Συναρτήσει των νέων μεταβλητών οι σχέσεις για τη σειρά Fourier γίνονται:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{L}\tilde{f}(k_n)\exp(ik_n x), \quad \frac{\pi}{L}\tilde{f}(k_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx f(x)\exp(-ik_n x).$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις που μόλις γράψαμε είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις της ανάπτυξης Fourier από τις οποίες αρχίσαμε. Το μόνο που κάναμε ήταν οι αλλαγές μεταβλητών. Τώρα θα κάνουμε το βήμα να πάμε στο όριο που περιγράψαμε προηγουμένως. Οταν το L τείνει στο άπειρο, ο παράγοντας $\frac{\pi}{L}$, που εμφανίζεται στο άθροισμα και όπως είπαμε ισούται με τη διαφορά $\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n$ θα γίνει το διαφορικό dk. Αντίστοιχα, αφού οι k_n πλησιάζουν μεταξύ τους όλο και περισσότερο, θα μεταπέσουν σε μια συνεχή μεταβλητή k και οι διακριτοί συντελεστές $\tilde{f}(k_n)$ θα μετατραπούν στη συνάρτηση $\tilde{f}(k)$ του k. Φυσικά, το άθροισμα θα μετατραπεί σε ολοκλήρωμα. Η πρώτη σχέση, λοιπόν, θα γίνει:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k)\exp(ikx). \tag{2.12}$$

Εντελώς αντίστοιχα βλέπουμε ότι η δεύτερη σχέση (για τους συντελεστές) θα δώσει:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\exp(-ikx). \tag{2.13}$$

Το ζευγάρι σχέσεων (2.12, 2.13) λέγεται μετασχηματισμός ή ολοκλήρωμα Fourier και αναλύει σε φανταστικά εκθετικά συναρτήσεις που δεν είναι περιοδικές. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\tilde{f}(k)$ λέγονται μετασχηματισμένες Fourier η μία της άλλης. Αναφέρουμε επίσης έναν εναλλακτικό συμβολισμό, που αποδεικνύεται χρήσιμος σε ορισμένες περιπτώσεις. Αντί για $\tilde{f}(k)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο $F_k[f(x)]$.

2.2.1 Παρατηρήσεις

1. Ομολογουμένως η “ανακάλυψη” του μετασχηματισμού Fourier που πραγματοποιήσαμε έγινε “ελαφρά τη καρδία”. Δεν δώσαμε την απαιτούμενη προσοχή σε θέματα σύγκλισης, ύπαρξης διαφόρων παραστάσεων κλπ. Παρ΄ όλ΄ αυτά δεν κάναμε βασικά λάθη. Χρειάζεται όμως, τουλάχιστον εκ των υστέρων, να πούμε ότι για να υπάρχουν τα ολοκληρώματα, πρέπει η συναρτηση $f(x)$ να μηδενίζεται “αρκετά γρήγορα” (ο,τιδήποτε κι αν σημαίνει αυτό) καθώς το x τείνει στα όρια $+\infty$ και $-\infty$. Παρόμοια συμπεριφορά πρέπει να έχει η συνάρτηση $\tilde{f}(k)$ για $k \to \pm\infty$. Δεν θα ασχοληθούμε με τον ακριβέστερο προσδιορισμό της απαιτούμενης συμπεριφοράς των συναρτήσεων που μόλις αναφέραμε. Θα δώσουμε μόνο μερικά παραδείγματα συναρτήσεων που εμφανώς δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier. Η συνάρτηση $f(x) = 1$ προφανώς δεν μηδενίζεται στο άπειρο, οπότε δεν έχει μετασχηματισμό Fourier. Βέβαια, αναφέρεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac (βλέπε το αντίστοιχο παράρτημα):

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[ikx].$$

Ομως η συνάρτηση δέλτα δεν είναι συνάρτηση, αλλά κατανομή. Αρα η συνάρτηση 1 (ή γενικότερα μια σταθερή συνάρτηση) αυστηρά μιλώντας δεν έχει μετασχηματισμό Fourier με την έννοια της συνηθισμένης συνάρτησης (χωρίς απειρισμούς και λοιπά). Εκφραζόμενοι κάπως πιο τεχνικά μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση δέλτα δεν ανήκει στον χώρο Hilbert των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Μια άλλη κατηγορία συναρτήσεων που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier είναι οι περιοδικές συναρτήσεις, αφού ούτε αυτές μηδενίζονται στο άπειρο. Εχουν ανάπτυγμα σε <u>σειρά</u> Fourier, αλλά δεν έχουν <u>ολοκλήρωμα</u> Fourier. Φυσικά δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier ούτε συναρτήσεις που απειρίζονται σε ένα τουλάχιστον από τα όρια $\pm\infty$, όπως τα πολυώνυμα, τα εκθετικά κλπ.

2. Με την πορεία που ακολουθήσαμε, η έκφραση της $f(x)$ συναρτήσει της $\tilde{f}(k)$ είναι το σχετικό ολοκλήρωμα επί τον συντελεστή μονάδα, ενώ η έκφραση της $\tilde{f}(k)$ συναρτήσει της $f(x)$ περιλαμβάνει, εκτός από το ολοκλήρωμα, έναν παράγοντα $\frac{1}{2\pi}$. Για λόγους συμμετρίας, πολλές φορές ο μετασχηματισμός Fourier εκφράζεται με τις σχέσεις:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{f}(k)\exp(ikx),$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dxf(x)\exp(-ikx).$$

Είναι δυνατές και άπειρες άλλες ισοδύναμες εκφράσεις του μετασχηματισμού Fourier. Θα ξεκινήσουμε από τις σχέσεις

$$f(x) = A\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{f}(k)\exp(ikx), \quad \tilde{f}(k) = B\int_{-\infty}^{+\infty} dxf(x)\exp(-ikx)$$

και θα βρούμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα A και B ώστε αυτές οι σχέσεις να είναι συμβιβαστές:

$$f(x) = A\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{f}(k)\exp(ikx) =$$

$$= A\int_{-\infty}^{+\infty} dk \quad B\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \exp(-ikx') \exp(ikx).$$

Αντικαταστήσαμε, δηλαδή, το $\tilde{f}(k)$ με το ίσο του, συμβολίζοντας τη βουβή μεταβλητή με x', ώστε να μη συγχέεται με την x. Στη συνέχεια:

$$f(x) = AB\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x')\{\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ik(x-x')]\} =$$

$$= AB\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') 2\pi\delta(x-x') = 2\pi AB f(x).$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη είναι $f(x) = 2\pi AB f(x)$, άρα:

$$AB = \frac{1}{2\pi}.$$

Δηλαδή είναι επιτρεπτό να διαλέξει κανείς οποιονδήποτε συνδυασμό A και B με τη μοναδική προϋπόθεση το γινόμενο AB να ισούται με $\frac{1}{2\pi}$.

3. Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)] \equiv \tilde{f}(k)$ μιας συνάρτησης $f(x)$, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον μετασχηματισμό Fourier $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)\exp(-ikx)$ της μιγαδικής συζυγούς συνάρτησης $f^*(x)$. Πράγματι:

$$\mathcal{F}_k[f^*(x)] \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)\exp[-ikx] =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\exp[-i(-k)x]\right)^* = (\mathcal{F}_{-k}[f(x)])^*.$$

Δηλαδή:

$$\mathcal{F}_k[f^*(x)] = (\mathcal{F}_{-k}[f(x)])^*.$$

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια αυτής της σχέσης είναι η λεγόμενη "συνθήκη πραγματικότητας". Αν απαιτηθεί η αρχική συνάρτηση να είναι πραγματική, δηλαδή $f^*(x) = f(x)$, τότε η σχέση που μόλις αποδείξαμε δείχνει ότι $\mathcal{F}_k[f(x)] = (\mathcal{F}_{-k}[f(x)])^* \to \tilde{f}(k) = \tilde{f}^*(-k)$. Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και αντιστρόφως, ότι δηλαδή η σχέση $\tilde{f}(k) = \tilde{f}^*(-k)$ μεταξύ των συνιστωσών Fourier μιας συνάρτησης είναι συνθήκη ώστε αυτή η συνάρτηση να είναι πραγματική.

4. Αν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)] \equiv \tilde{f}(k)$ μιας συνάρτησης $f(x)$, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον μετασχηματισμό Fourier

$$\mathcal{F}_k[f'(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f'(x)\exp(-ikx)$$

της παραγώγου $f'(x)$ της συνάρτησης. Κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\mathcal{F}_k[f'(x)] = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\exp[-ikx]|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d[\exp(-ikx)]\right].$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος μηδενίζεται στα $\pm\infty$ λόγω των υποθέσεων σχετικά με τη συμπεριφορά της $f(x)$ στο άπειρο και μένει ο δεύτερος όρος, ο οποίος καταλήγει στην

$$\mathcal{F}_k[f'(x)] = ik\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\exp(-ikx)\right] = ik\mathcal{F}_k[f(x)].$$

Τελικά:

$$\mathcal{F}_k[f'(x)] = ik\mathcal{F}_k[f(x)].$$

Οπως και στην περίπτωση της σειράς Fourier, δεν είναι προφανές ότι, αν συγκλίνουν τα ολοκληρώματα πάνω στο k για την αρχική συνάρτηση, θα συγκλίνουν και για την παράγωγό της.

5. Η σχέση που δίνει τον μετασχηματισμό της παραγώγου μπορεί να γενικευτεί εύκολα ώστε να περιλάβει και παραγώγους ανώτερης τάξης:

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f(x)]. \tag{2.14}$$

2.3 Θεώρημα του Fourier

Θεωρούμε το ζεύγος των μετασχηματισμών Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{f}(k)\exp(ikx), \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x')\exp(-ikx').$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό x' για τη βουβή μεταβλητή για λόγους που θα γίνουν σαφείς αμέσως. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση το $\tilde{f}(k)$ με το ίσο του από τη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[-ik(x-x')]. \tag{2.15}$$

Τώρα επικαλούμαστε τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[-ik(x-x')] = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cos[k(x-x')] = 2\int_{0}^{+\infty} dk \cos[k(x-x')]$$

και καταλήγουμε στην ισότητα:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \cos[k(x-x')]. \tag{2.16}$$

Οποιαδήποτε από τις ισότητες (2.15) ή (2.16) εκφράζει το λεγόμενο θεώρημα του Fourier.

2.4 Ημιτονικός και συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier

Η έκφραση (2.16) γίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι είτε άρτια είτε περιττή.

Αν η $f(x)$ είναι άρτια, η εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dk \left\{\int_{-\infty}^{0} dx' f(x')\cos[k(x-x')] + \int_{0}^{+\infty} dx' f(x')\cos[k(x-x')]\right\}$$

και μια αλλαγή στη μεταβλητή του πρώτου ολοκληρώματος δίνει:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dk \int_{0}^{+\infty} dx' f(x') \left\{\cos[k(x+x')] + \cos[k(x-x')]\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} dk \cos kx \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx' f(x') \cos kx' \right],$$

αφού $\cos[k(x+x')] + \cos[k(x-x') = 2\cos kx \cos kx'$. Αν συμβολίσουμε με $\tilde{f}_c(k) \equiv \mathcal{F}_c[f]$ την έκφραση στην τελευταία σειρά που είναι μέσα στις αγκύλες, παίρνουμε τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} dk \tilde{f}_c(k) \cos kx, \quad \tilde{f}_c(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx f(x) \cos kx.$$

Αν η $f(x)$ είναι περιττή, με αντίστοιχα βήματα φτάνουμε στη σχέση:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} dk \sin kx \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx' f(x') \sin kx' \right]$$

και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\tilde{f}_s(k) \equiv \mathcal{F}_s[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx f(x) \sin kx$ έχουμε τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} dk \tilde{f}_s(k) \sin kx, \quad \tilde{f}_s(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx f(x) \sin kx.$$

Για μια συνάρτηση που δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή έχουμε τη σχέση (2.16) η οποία γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') [\cos kx \cos kx' + \sin kx \sin kx'] =$$
$$= \int_0^{+\infty} dk \cos kx \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \cos kx' \right] +$$
$$+ \int_0^{+\infty} dk \sin kx \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \sin kx' \right].$$

Δηλαδή

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dk \tilde{f}_c(k) \cos kx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dk \tilde{f}_s(k) \sin kx.$$

Είναι φανερό από τη σχέση αυτή ότι για να αναπαραγάγουμε μια συνάρτηση που δεν έχει καθορισμένη ομοτιμία χρειάζονται οι συνεισφορές και από τον ημιτονικό και από τον συνημιτονικό μετασχηματισμό της κατά Fourier. Συνήθως αυτοί οι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που μπορεί κανείς να υποθέσει με κάποιο σκεπτικό ότι η συνάρτηση έχει συγκεκριμένη ομοτιμία, οπότε νομιμοποιείται κανείς να χρησιμοποιήσει μόνο τον ένα μετασχηματισμό.

Αναφέρουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα, που έχει να κάνει με τον ημιτονικό ή συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier της παραγώγου μιας συνάρτησης όταν είναι γνωστός ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της ίδιας της συνάρτησης. Ξεκινώντας από τον ορισμό του συνημιτονικού μετασχηματισμού βρίσκουμε:

$$\mathcal{F}_c \left[\frac{df}{dx} \right] \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dx \frac{df}{dx} \cos kx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d[f(x)] \cos kx =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[f(x) \cos kx |_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)(-k \sin kx) \right] = -\frac{2}{\pi} f(0) + k \mathcal{F}_s[f].$$

Δηλαδή ο συνημιτονικός μετασχηματισμός της παραγώγου εκφράζεται συναρτήσει του ημιτονικού μετασχηματισμού της αρχικής συνάρτησης. Παρόμοια μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\mathcal{F}_s \left[\frac{df}{dx} \right] = -k \mathcal{F}_c[f],$$

άρα ο ημιτονικός μετασχηματισμός της παραγώγου εκφράζεται με τον συνημιτονικό της αρχικής συνάρτησης. Το γεγονός αυτό καθιστά τους μετασχηματισμούς αυτούς κάπως δύσχρηστους. Εκείνο που τους σώζει είναι ότι σε πολλά προβλήματα δεν εμφανίζονται οι πρώτες παράγωγοι, αλλά μόνο οι δεύτερες παράγωγοι και οι αρχικές συναρτήσεις. Για τις δεύτερες παραγώγους μπορεί κανείς εύκολα να δει ότι:

$$\mathcal{F}_s\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -k\mathcal{F}_c\left[\frac{df}{dx}\right] = -k\left[-\frac{2}{\pi}f(0)+k\mathcal{F}_s[f]\right] = \frac{2k}{\pi}f(0)-k^2\mathcal{F}_s[f],$$

$$\mathcal{F}_c\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -\frac{2}{\pi}f'(0)+k\mathcal{F}_s\left[\frac{df}{dx}\right] = -\frac{2}{\pi}f'(0)+k[-k\mathcal{F}_c[f]],$$

δηλαδή συνοπτικά:

$$\mathcal{F}_s\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = \frac{2k}{\pi}f(0)-k^2\mathcal{F}_s[f],$$

$$\mathcal{F}_c\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -\frac{2}{\pi}f'(0)-k^2\mathcal{F}_c[f].$$

Αρα οι μετασχηματισμοί των δεύτερων παραγώγων εκφράζονται με μετασχηματισμούς του ίδιου είδους (ημιτονικούς ή συνημιτονικούς) της αρχικής συνάρτησης. Ενα σημαντικό χαρακτηριστικό είναι η εμφάνιση στο δεύτερο μέλος των όρων που περιλαμβάνουν την τιμή της συνάρτησης (ή της παραγώγου της) στο μηδέν. Αυτοί οι όροι δεν υπάρχουν στις αντίστοιχες σχέσεις (2.14) του αρχικού πλήρους μετασχηματισμού Fourier και ο λόγος είναι ότι εκεί το ολοκλήρωμα πάνω στα k εκτείνεται σ′ όλον τον πραγματικό άξονα, ενώ εδώ ξεκινάει από το μηδέν. Κάτι ανάλογο (για τον ίδιο ακριβώς λόγο) θα συμβεί στον μετασχηματισμό Laplace, όπως θα δούμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

2.5 Χρήση των μετασχηματισμών Fourier

Οι μετασχηματισμοί Fourier είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών. Οπως είναι γνωστό, ένας βασικός τρόπος λύσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Οταν κάποια μεταβλητή εκτείνεται σ′ ένα πεπερασμένο διάστημα οι οριακές συνθήκες στα άκρα αυτού του διαστήματος αναγκάζουν την αντίστοιχη σταθερά να παίρνει διακριτές τιμές. Αν επί παραδείγματι το φυσικό σύστημα είναι μια μονοδιάστατη χορδή με ακλόνητα άκρα στο $x = 0$ και στο $x = L$, η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών δίνει σε πρώτη φάση τη λύση $A\sin kx$, όπου k η σταθερά του χωρισμού των μεταβλητών. Η απαίτηση η απομάκρυνση να μηδενίζεται για $x = L$ δίνει τη συνθήκη $kL = n\pi$, οπότε η σταθερά k μπορεί να παίρνει μόνο τις διακριτές τιμές $\frac{n\pi}{L}$. Λόγω του ότι η γενική λύση είναι το άθροισμα πάνω σ′ όλες τις δυνατές τιμές του k, παίρνουμε τελικά μια σειρά, και το αποτέλεσμα εκφράζεται με τη μορφή της σειράς Fourier στη συγκεκριμένη περίπτωση ή με τη μορφή άλλων σειρών σε άλλες περιπτώσεις. Αν, όμως, το διάστημα μεταβολής του x ήταν άπειρο (ή ημιάπειρο), δεν θα είχαμε κανένα λόγο για να περιορίσουμε τη σταθερά k σε ένα σύνολο διακριτών τιμών. Αυτό που αποκαλέσαμε προηγουμένως "άθροισμα" θα μεταπέσει σ′ ένα ολοκλήρωμα σ′ όλες τις δυνατές τιμές του k, που θα είναι συνεχείς. Εχοντας υπόψη αυτή τη συλλογιστική, μπορούμε να τη διατυπώσουμε με τη μορφή κανόνα: **Οι μετασχηματισμοί Fourier χρησιμοποιούνται για τη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών όταν μία τουλάχιστον μεταβλητή εκτείνεται σε άπειρο ή ημιάπειρο διάστημα.** Η πορεία που ακολουθεί κανείς στην πράξη δεν είναι αυτή που μόλις (για λόγους αρχής) περιγράψαμε. Οταν έχουμε να κάνουμε με άπειρα διαστήματα απλούστατα μετασχηματίζουμε κατά Fourier ολόκληρη την εξίσωση ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή (ή μεταβλητές). Οι λεπτομέρειες θα γίνουν σαφείς στα παραδείγματα.

Το επόμενο θέμα είναι ποιά μορφή του μετασχηματισμού πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει σε μια δεδομένη περίπτωση. Γενικά, όταν το διάστημα είναι το $(-\infty, +\infty)$, χρησιμοποιούμε τη γενική μορφή του μετασχηματισμού (2.12, 2.13). Οταν το διάστημα είναι ημιάπειρο, δηλαδή το $(0, +\infty)$ είτε το $(-\infty, 0)$ και εμφανίζεται μόνο η δεύτερη παράγωγος ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή, επιλέγουμε μεταξύ του ημιτονικού και του συνημιτονικού μετασχηματισμού. Το κριτήριο επιλογής υπαγορεύεται από τις εκφράσεις για το μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης παραγώγου. Οπως έχουμε δει, η σχετική έκφραση για τον ημιτονικό μετασχηματισμό εμπλέκει την τιμή της συνάρτησης στο μηδέν, ενώ στον συνημιτονικό μετασχηματισμό εμπλέκεται η τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης στο μηδέν. Αν, λοιπόν, δίδεται η τιμή της συνάρτησης στο μηδέν, θα επιλεγεί ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier, ενώ, αν δίδεται η τιμή της πρώτης παραγώγου στο μηδέν, θα επιλεγεί ο συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier. Ακολουθούν παραδείγματα σε χώρους <u>δύο διαστάσεων</u> για απλότητα. Δηλαδή υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει μεταβολή κανενός μεγέθους στην κατεύθυνση z, οπότε οι σχετικές παράγωγοι στις εξισώσεις κίνησης μηδενίζονται και δεν παίζουν ρόλο.

Παράδειγμα 1: Χρήση του πλήρους μετασχηματισμού.

Θεωρούμε κενό χώρο, στον οποίο το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. Στον άξονα των x το δυναμικό είναι γνωστή συνάρτηση $f(x)$ και ζητείται το δυναμικό στον ημιχώρο που περιλαμβάνει τον θετικό ημιάξονα των y.

Λύση: Το x εκτείνεται κατά μήκος ολόκληρου του άξονα, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη γενική μορφή του μετασχηματισμού (2.12, 2.13). Μετασχηματίζουμε ως προς x την εξίσωση $V_{xx} + V_{yy} = 0$:

$$\mathcal{F}_k[V_{xx}] + \mathcal{F}_k[V_{yy}] = 0 \to -k^2\tilde{V} + \tilde{V}_{yy} = 0 \to \tilde{V} = A_k \exp[ky] + B_k \exp[-ky],$$

όπου

$$\mathcal{F}_k[V] \equiv \tilde{V}(k,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx V(x,y)\exp[-ikx].$$

Επειδή το δυναμικό πρέπει να είναι πεπερασμένο παντού, επομένως και στο όριο $y \to +\infty$, περιορίζουμε τη λύση που βρήκαμε στην έκφραση $\tilde{V}(k,y) = C(k)\exp[-|k|y]$. Τώρα πρέπει να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό, ώστε να βρούμε το $V(x,y)$.

$$V(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{V}(k,y)\exp[ikx] = \int_{-\infty}^{+\infty} dkC(k)\exp[-|k|y]\exp[ikx].$$

Εχουμε επί πλέον την πληροφορία ότι το δυναμικό είναι γνωστό για $y = 0$:

$$V(x,y)|_{y=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dkC(k)\exp[ikx].$$

Αυτή η σχέση μας δείχνει ότι το $C(k)$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο μετασχηματισμός Fourier $\tilde{f}(k)$ της γνωστής συνάρτησης $f(x)$. Δηλαδή

$$C(k) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x')\exp[-ikx'].$$

και

$$V(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}dk\tilde{f}(k)\exp[-|k|y]\exp[ikx]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}dx'f(x')\exp[-ikx']\exp[-|k|y]\exp[ikx]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'f(x')\left[\int_{-\infty}^{+\infty}dk\exp[-|k|y]\right]\exp[ik(x-x')].$$

Η ολοκλήρωση στη μεταβλητή k μπορεί να γίνει εύκολα και το αποτέλεσμα είναι:

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'f(x')\frac{y}{(x-x')^2+y^2}. \tag{2.17}$$

Το πρόβλημα έχει λυθεί κατ΄ αρχήν. Μια σημαντική παρατήρηση είναι η εξής: το θεώρημα του Fourier, που αναπτύξαμε σε προηγούμενη παράγραφο, ισχύει ανεξαρτήτως του αν υπάρχει ο μετασχηματισμός του Fourier! Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο παρόν παράδειγμα. Το τελικό αποτέλεσμα (2.17) είναι μια έκφραση του θεωρήματος Fourier: εκφράζει τη λύση μέσω ενός ολοκληρώματος στη μεταβλητή x', χωρίς να εμπλέκει τη συζυγή μεταβλητή k. Για να υπολογίσει κανείς το $V(x,y)$, αρκεί να του δοθεί η συνάρτηση $f(x')$. Εστω ότι $f(x')=0, x<0$ και $f(x')=V_0, x\geq 0$. Το ολοκλήρωμα θα δώσει:

$$V(x,y)=\frac{V_0 y}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dx'\frac{y}{(x-x')^2+y^2}=\frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right].$$

Βρίσκουμε δηλαδή ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα, χωρίς προβλήματα σύγκλισης. Παρ΄ ολ΄ αυτά, η συνάρτηση που δώσαμε είναι σταθερή στο $+\infty$, άρα δεν έχει μετασχηματισμό Fourier. Είναι λοιπόν φανερό ότι το θεώρημα του Fourier είναι γενικότερης ισχύος.

Παράδειγμα 2: Χρήση ημιτονικού μετασχηματισμού.

Ζητείται η θερμοκρασία μιας ημιάπειρης ράβδου συναρτήσει του χρόνου αν το άκρο στο $x=0$ βρίσκεται μόνιμα σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ τη χρονική στιγμή $t=0$ η θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση $\Theta(x,t=0)=f(x), 0\leq x<+\infty$.

Λύση: Το πρόβλημα έχει να κάνει με ημιάπειρο διάστημα. Επί πλέον, είναι γνωστή η ίδια η συνάρτηση (όχι, για παράδειγμα, η παράγωγός της) για $x=0$. Τα στοιχεία, λοιπόν, συνηγορούν για τη χρήση του ημιτονικού μετασχηματισμού Fourier. Μετασχηματίζουμε την εξίσωση:

$$\Theta_{xx}=\kappa\Theta_t\rightarrow\mathcal{F}_s[\Theta_{xx}]=\kappa\mathcal{F}_s[\Theta_t]\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{2k}{\pi}\Theta(x=0,t)-k^2\mathcal{F}_s[\Theta]=\kappa\frac{\partial\mathcal{F}_s[\Theta]}{\partial t},$$

όπου

$$\mathcal{F}_s[\Theta]\equiv\tilde{\Theta}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dx\Theta(x,t)\sin kx.$$

Ομως, από τις οριακές συνθήκες ξέρουμε ότι $\Theta(x=0,t)=0$, οπότε:

$$-k^2\tilde{\Theta}=\kappa\tilde{\Theta}_t(k,t)\rightarrow\tilde{\Theta}_t=-\frac{k^2}{\kappa}\tilde{\Theta}\rightarrow$$

$$\rightarrow\tilde{\Theta}(k,t)=A(k)\exp[-\frac{k^2t}{\kappa}]\rightarrow\Theta(x,t)=\int_0^{\infty}dkA(k)\exp\left[-\frac{k^2t}{\kappa}\right]\sin kx.$$

Η άλλη οριακή συνθήκη λέει ότι

$$f(x) = \Theta(x, t = 0) = \int_0^\infty dk A(k) \sin kx,$$

δηλαδή ότι οι συντελεστές $A(k)$ συναποτελούν τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)$:

$$A(k) = \tilde{f}(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx' f(x') \sin kx'.$$

Η λύση μπορεί λοιπόν να γραφτεί με τη μορφή:

$$\Theta(x,t) = \int_0^\infty dk \exp\left[-\frac{k^2 t}{\kappa}\right] \tilde{f}(k) \sin kx =$$

$$= \int_0^\infty dk \exp\left[-\frac{k^2 t}{\kappa}\right] \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx' f(x') \sin kx' \sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx' f(x') \int_0^\infty dk \exp\left[-\frac{k^2 t}{\kappa}\right] [\cos k(x - x') - \cos k(x + x')].$$

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι

$$\int_0^{+\infty} dq \exp[aq^2] \cos(qb) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} a \exp[-\frac{b^2}{4a}],$$

οπότε:

$$\Theta(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx' f(x') \sqrt{\frac{\pi\kappa}{4t}} \left[\exp\left[-\frac{\kappa(x-x')^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{\kappa(x+x')^2}{4t}\right]\right].$$

Τέλος οι αλλαγές μεταβλητών $z_1 \equiv \frac{\kappa(x-x')^2}{4t}$, $\quad z_2 \equiv \frac{\kappa(x+x')^2}{4t}$ δίνουν το αποτέλεσμα:

$$\Theta(x,t) = \sqrt{\frac{\kappa T_0}{4\pi^3 t}} \left[\int_{-x\sqrt{\frac{k}{4t}}}^\infty dz_1 \exp[-z_1^2] f\left(x + z_1\sqrt{\frac{4t}{k}}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_{x\sqrt{\frac{k}{4t}}}^\infty dz_2 \exp[-z_2^2] f\left(z_2\sqrt{\frac{4t}{k}} - x\right)\right].$$

Παράδειγμα 3: Χρήση του συνημιτονικού μετασχηματισμού

Ζητείται η θερμοκρασία μιας ημιάπειρης ράβδου συναρτήσει του χρόνου αν το άκρο στο $x = 0$ είναι θερμικά μονωμένο ($\Theta_x|_{x=0} = 0$), ενώ τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση $\Theta(x, t = 0) = f(x), 0 \le x < +\infty$.

Λύση: Πρόκειται για το πρόβλημα του παραδείγματος 2, με τη διαφορά ότι άλλαξε η οριακή συνθήκη: τώρα είναι γνωστή η παράγωγος της συνάρτησης, οπότε θα καταφύγουμε στον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier. Ακολουθώντας παρόμοια βήματα βρίσκουμε:

$$\Theta_{xx} = \kappa\Theta_t \to \mathcal{F}_c[\Theta_{xx}] = \kappa\mathcal{F}_c[\Theta_t] \to -\frac{2}{\pi}\Theta_x(x = 0, t) - k^2 \mathcal{F}_c[\Theta] = \kappa\frac{\partial \mathcal{F}_c[\Theta]}{\partial t},$$

όπου

$$\mathcal{F}_c[\Theta] = \tilde{\Theta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \Theta(x,t) \cos kx.$$

Ομως $\Theta_x(x=0,t)=0$, άρα:

$$-k^2\mathcal{F}_c[\Theta]=\kappa\tilde{\Theta}_t(k,t)\rightarrow\tilde{\Theta}_t=-\frac{k^2}{\kappa}\tilde{\Theta}\rightarrow$$

$$\rightarrow\tilde{\Theta}(k,t)=A(k)\exp[-\frac{k^2t}{\kappa}]\rightarrow\Theta(x,t)=\int_0^\infty dkA(k)\exp[-\frac{k^2t}{\kappa}]\cos kx.$$

Από την άλλη οριακή συνθήκη:

$$f(x)=\Theta(x,t)=\int_0^\infty dkA(k)\cos kx,$$

δηλαδή ότι οι συντελεστές $A(k)$ συναποτελούν τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)$:

$$A(k)=\tilde{f}(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx'f(x')\cos kx'.$$

Η λύση μπορεί συνεπώς να γραφτεί με τη μορφή:

$$\Theta(x,t)=\int_0^\infty dk\exp\left[-\frac{k^2t}{\kappa}\right]\tilde{f}(k)\cos kx=$$

$$=\int_0^\infty dk\exp\left[-\frac{k^2t}{\kappa}\right]\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx'f(x')\cos kx'\cos kx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx'f(x')\int_0^\infty dk\exp\left[-\frac{k^2t}{\kappa}\right][\cos k(x-x')+\cos k(x+x')]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx'f(x')\sqrt{\frac{\pi\kappa}{4t}}\left[\exp\left[-\frac{\kappa(x-x')^2}{4t}\right]+\exp\left[-\frac{\kappa(x+x')^2}{4t}\right]\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{\kappa T_0}{4\pi^3t}}\left[\int_{-x\sqrt{\frac{k}{4t}}}^\infty dz_1\exp[-z_1^2]f\left(x+z_1\sqrt{\frac{4t}{k}}\right)+\int_{x\sqrt{\frac{k}{4t}}}^\infty dz_2\exp[-z_2^2]f\left(z_2\sqrt{\frac{4t}{k}}-x\right)\right].$$

Τα τελευταία βήματα είναι ουσιαστικά επανάληψη των αντίστοιχων βημάτων του προηγουμένου παραδείγματος.

2.6 Η συνέλιξη και το θεώρημα της συνέλιξης

Η συνέλιξη $f\equiv g*h$ δύο συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$ ορίζεται με τη σχέση:

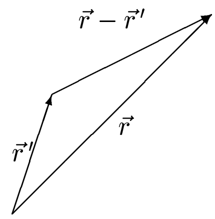
$$f\equiv g*h\Leftrightarrow f(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}dx'g(x-x')h(x').$$

Η συνέλιξη είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο με εξαιρετικό ενδιαφέρον για τη Φυσική. Μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι υπάρχει κάποιου είδους "πηγή" (ας πούμε ακτινοβολίας) με μέγεθος $h(x')$ στα σημεία που χαρακτηρίζονται από τη μεταβλητή x' και ότι η συνάρτηση $g(x-x')$ παρέχει την πληροφορία ποιό κλάσμα ενός σήματος θα φτάσει από τη θέση x' της πηγής στη θέση x του σημείου παρατήρησης. Το άθροισμα των γινομένων $g(x-x')h(x')$ σ' όλον το χώρο των πηγών x' θα δώσει το σήμα στο σημείο παρατήρησης. Ενα οικείο φυσικό παράδειγμα είναι η περίθλαση, όπως την καταλαβαίνουμε με βάση την αρχή του Huygens. Η συνάρτηση $h(x')$ θα δίνει την ένταση του πεδίου στο άνοιγμα, ενώ στη συνάρτηση $g(x-x')$ θα περιλαμβάνεται η πληροφορία που θα περιέχει το μήκος της διαδρομής από το κάθε σημείο x' του ανοίγματος μέχρι το σημείο παρατήρησης x.

Οσοι έχουν συναντήσει την έννοια της συνάρτησης Green θα έχουν ήδη εντοπίσει τη στενή σχέση της συνάρτησης Green με τη συνάρτηση $g(x-x')$. Για παράδειγμα, αν θέλει κανείς το δυναμικό Coulomb στο σημείο παρατήρησης $\vec{r}$ που προέρχεται από μια στατική κατανομή με πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{r}')$, όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορεί να το υπολογίσει ως εξής:

$$V(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho(\vec{r}'),$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σ΄ όλον το χώρο των "πηγών". Σ΄ αυτήν την εξίσωση η συνάρτηση $\rho(\vec{r}')$ παίζει το ρόλο της $h(x')$ και η $\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$ τον ρόλο της $g(x-x')$. Δηλαδή κατά κάποιον τρόπο "συνθέτουμε" τη λύση της εξίσωσης από τις λύσεις απλούστερων κατανομών φορτίου.



Για τη συνέλιξη ισχύει το λεγόμενο <u>θεώρημα της συνέλιξης</u>, το οποίο λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}_k(g*h)$ της συνέλιξης $f(x)$ δύο συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$ ισούται με (2π επί) το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier $\mathcal{F}_k(g)$ και $\mathcal{F}_k(h)$ των δύο συναρτήσεων:

$$\mathcal{F}_k(g*h) = 2\pi\mathcal{F}_k(g)\mathcal{F}_k(h).$$

Η απόδειξή του είναι πολύ απλή:

$$\mathcal{F}_k(g*h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\exp[-ikx] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g(x-x')h(x')\exp[-ikx] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g(x-x')\exp[-ik(x-x')]h(x')\exp[-ikx'].$$

Συμβολίζοντας με x'' τη διαφορά $x-x'$ (οπότε και $dx = dx''$) βρίσκουμε ότι:

$$\mathcal{F}_k(g*h) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'' g(x'')\exp[-ikx'']\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' h(x')\exp[-ikx']\right] =$$

$$= 2\pi\mathcal{F}_k(g)\mathcal{F}_k(h).$$

Το θεώρημα της συνέλιξης είναι εξαιρετικά μεγάλης σημασίας. Οπως είναι φανερό, με τη βοήθειά του, μια σχετικά περίπλοκη μαθηματική διεργασία, όπως είναι η συνέλιξη δύο συναρτήσεων, απεικονίζεται σε κάτι πολύ απλό, όπως το γινόμενο. Καμμιά φορά το θεώρημα χρησιμοποιείται και αντίστροφα, δηλαδή ευρίσκεται κάποια συνάρτηση με τη μορφή ενός γινομένου δύο άλλων συναρτήσεων και από αυτό βγάζει κανείς το συμπέρασμα ότι ο μετασχηματισμός της κατά Fourier θα δίνεται από τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier των δύο συνιστωσών συναρτήσεων.

2.7 Θεώρημα του Parseval

Η διατύπωση του θεωρήματος του Parseval είναι η εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)f(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}^*(k)\tilde{f}(k).$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα του τετραγώνου του μέτρου μιας συνάρτησης ισούται με (2π επί) το ολοκλήρωμα του τετραγώνου του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης. Η απόδειξή του είναι απλή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)f(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk' \tilde{f}(k') \exp[-ik'x]\right]^* \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk'' \tilde{f}(k'') \exp[-ik''x]\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \int_{-\infty}^{+\infty} dk'' \tilde{f}^*(k')\tilde{f}(k'') \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i(k'-k'')x] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \int_{-\infty}^{+\infty} dk'' \tilde{f}^*(k')\tilde{f}(k'') 2\pi\delta(k'-k'') =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}^*(k)\tilde{f}(k).$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\delta(k'-k'') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i(k'-k'')x]$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} dk''\delta(k'-k'')\tilde{f}(k'') = \tilde{f}(k')$. Στο τελευταίο βήμα παραλείψαμε τον τόνο στη "βουβή" μεταβλητή.

2.8 Ανάλυση Fourier σε περισσότερες διαστάσεις

Οι τύποι που συναντήσαμε στη μονοδιάστατη περίπτωση γενικεύονται εύκολα. Εστω συνάρτηση $f(\vec{r})$ που είναι περιοδική ως προς τις κατευθύνσεις x, y, z με αντίστοιχες περιόδους $2L_x, 2L_y, 2L_z$:

$$f(x+2L_x, y, z) = f(x,y,z),$$

$$f(x, y+2L_y, z) = f(x,y,z),$$

$$f(x, y, z+2L_z) = f(x,y,z).$$

Τότε:

$$f(\vec{r}) = \sum_{n_x,n_y,n_z} C_{n_x,n_y,n_z} \exp\left[i\frac{n_x\pi x}{L_x}\right] \exp\left[i\frac{n_y\pi y}{L_y}\right] \exp\left[i\frac{n_z\pi z}{L_z}\right],$$

$$C_{n_x,n_y,n_z} = \frac{1}{2L_x}\frac{1}{2L_y}\frac{1}{2L_z} \int_{-L_x}^{+L_x} dx \int_{-L_y}^{+L_y} dy \int_{-L_z}^{+L_z} dz f(\vec{r})$$

$$\exp\left[-i\frac{n_x\pi x}{L_x}\right] \exp\left[-i\frac{n_y\pi y}{L_y}\right] \exp\left[-i\frac{n_z\pi z}{L_z}\right].$$

Παρόμοια γενικεύονται οι τύποι για τον μετασχηματισμό Fourier:

$$f(\vec{r}) = \int d^3k \tilde{f}(\vec{k}) \exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}],$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) \equiv \mathcal{F}_{\vec{k}}[f(\vec{r})] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r f(\vec{r})\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{r}],$$

όπου $\vec{k}\cdot\vec{r} \equiv k_x x + k_y y + k_z z$. Επίσης, απλά γενικεύονται οι τύποι που δίνουν τους μετασχηματισμούς των παραγώγων:

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[\nabla f(\vec{r})] = i\vec{k}\mathcal{F}_{\vec{k}}[f(\vec{r})], \quad \mathcal{F}_{\vec{k}}[\nabla^2 f(\vec{r})] = -k^2\mathcal{F}_{\vec{k}}[f(\vec{r})].$$

Η συνέλιξη $f \equiv g * h$ των g και h σε τρεις διαστάσεις ορίζεται με τη σχέση:

$$f(\vec{r}) \equiv \int d^3r' g(\vec{r}-\vec{r}')h(\vec{r}').$$

Αποδεικνύεται, όπως και στη μία διάσταση, το σχετικό θεώρημα:

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}[g * h] = (2\pi)^3\mathcal{F}_{\vec{k}}[g]\mathcal{F}_{\vec{k}}[h].$$

2.8.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Ζητείται να προσδιοριστεί η κίνηση μεμβράνης με τα άκρα ακλόνητα κατά μήκος ορθογώνιου οδηγού με πλευρές L_x και L_y αν είναι γνωστή η αρχική απομάκρυνση $\psi_0(x,y)$ και η αρχική ταχύτητα $v_0(x,y)$.

Λύση: Το πρόβλημα είναι κατ΄ ευθείαν γενίκευση του αντίστοιχου προβλήματος για τη χορδή με ακλόνητα άκρα. Η λύση ακολουθεί τα ίδια βήματα, μόνο που έχουμε διπλή σειρά Fourier. Χωρίζουμε τις μεταβλητές στην κυματική εξίσωση ($\psi(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$) :

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{1}{c^2}\psi_{tt} \to \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \equiv -k^2.$$

Η μεν χρονική εξάρτηση θα δίνεται από τον γραμμικό συνδυασμό των $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$ με $\omega \equiv kc$. Εξ άλλου, για να έχουν σταθερό άθροισμα οι δύο όροι $\frac{X''}{X}$ και $\frac{Y''}{Y}$, πρέπει να είναι ίσοι με σταθερές: $\frac{X''}{X} = -k_x^2$, $\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$, όπου $k_x^2 + k_y^2 = k^2$. Ας θεωρήσουμε την κατεύθυνση x : Για να μηδενίζεται η $X(x)$ για $x = 0$ και για $x = L_x$, όπως υπαγορεύει η οριακή συνθήκη, πρέπει να έχει τη μορφή $\sin\frac{n_x\pi x}{L_x}$ και η σταθερά k_x να ισούται με $\frac{n_x\pi}{L_x}, n_x = 1,2,3,\ldots$ Για την κατεύθυνση y αντίστοιχα: $Y \simeq \sin\frac{n_y\pi y}{L_y}, k_y = \frac{n_y\pi}{L_y}, n_y = 1,2,3,\ldots$ Αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$k = k_{n_x n_y} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2} \to$$

$$\to \omega = \omega_{n_x n_y} \equiv k_{n_x n_y}c = \pi c\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2}.$$

Εχουμε δηλαδή διακριτές ιδιοτιμές. Η γενική λύση θα είναι:

$$\psi = \sum_{n_x,n_y}\sin\frac{n_x\pi x}{L_x}\sin\frac{n_y\pi y}{L_y}(A_{n_x n_y}\cos\omega_{n_x n_y}t + B_{n_x n_y}\sin\omega_{n_x n_y}t),$$

που συνεπάγεται για την ταχύτητα κάθε σημείου της μεμβράνης τη σχέση:

$$\psi_t = \sum_{n_x,n_y}\sin\frac{n_x\pi x}{L_x}\sin\frac{n_y\pi y}{L_y}(-\omega_{n_x n_y}A_{n_x n_y}\sin\omega_{n_x n_y}t + \omega_{n_x n_y}B_{n_x n_y}\cos\omega_{n_x n_y}t).$$

Μένει να επιβάλλει κανείς τις αρχικές συνθήκες:

$$\psi_0(x,y) = \sum_{n_x,n_y} A_{n_x n_y} \sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \sin\frac{n_y \pi y}{L_y},$$

$$v_0(x,y) = \sum_{n_x,n_y} \omega_{n_x n_y} B_{n_x n_y} \sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \sin\frac{n_y \pi y}{L_y}.$$

Δηλαδή καταλήγουμε στα αναπτύγματα κατά Fourier των γνωστών συναρτήσεων, άρα μπορούμε να αντιστρέψουμε και να προσδιορίσουμε τους συντελεστές:

$$A_{n_x n_y} = \frac{2}{L_x}\frac{2}{L_y}\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \psi_0(x,y) \sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \sin\frac{n_y \pi y}{L_y},$$

$$\omega_{n_x n_y} B_{n_x n_y} = \frac{2}{L_x}\frac{2}{L_y}\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy v_0(x,y) \sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \sin\frac{n_y \pi y}{L_y}.$$

Ενα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο συμβαίνει όταν οι δύο διαστάσεις της μεμβράνης βρίσκονται σε απλή σχέση μεταξύ τους. Για απλότητα έστω $L_x = L_y \equiv L$. Τότε $\omega_{n_x n_y} = \frac{\pi c}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2}$. Μπορούμε λοιπόν να έχουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις (διαφορετικό ζεύγος n_x και n_y) που αντιστοιχούν στο ίδιο $\omega_{n_x n_y}$, αρκεί το άθροισμα των τετραγώνων των ακεραίων να είναι το ίδιο. Εμφανίζεται δηλαδή ένα φαινόμενο εκφυλισμού. Εστω ότι η μεμβράνη περιγράφεται από το ζευγάρι των ακεραίων 1 και 2. Μια πιθανή μορφή της απομάκρυνσης θα είναι

$$\left[F \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L} + G \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L}\right] \sin\omega t,$$

$\omega \equiv \omega_{12} = \omega_{21}$. Παρατηρούμε ότι, αφού η χρονική εξάρτηση είναι η ίδια, μπορούμε να έχουμε για διάφορες επιλογές των F και G λύσεις των οποίων βασικά χαρακτηριστικά θα μένουν αναλλοίωτα στο χρόνο. Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση μηδενίζεται κατά μήκος μιας γραμμής στο επίπεδο xy, αυτός ο μηδενισμός θα παραμείνει αναλλοίωτος με το χρόνο. Ας δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Αν $G = 0$, η συνάρτηση μηδενίζεται (εκτός από τα άκρα και) κατά μήκος της γραμμής $y = \frac{L}{2}$. Αν $F = 0$, η συνάρτηση μηδενίζεται (εκτός από τα άκρα και) κατά μήκος της γραμμής $x = \frac{L}{2}$. Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τους συντελεστές, ώστε αυτός ο μηδενισμός να συμβαίνει κατά μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος (δηλαδή με οποιονδήποτε προσανατολισμό) στο επίπεδο xy! Τέτοιες γραμμές είναι γνωστές στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία με το όνομα nodal lines.

Παράδειγμα 2: Ζητείται να βρεθεί το δυναμικό σ' έναν κενό χώρο που περικλείεται μεταξύ δύο πλακών στα επίπεδα $z = 0$ και $z = L$. Η πλάκες βρίσκονται σε γνωστά δυναμικά: $V(x,y,z=0) = f(x,y), V(x,y,z=L) = g(x,y)$.

Λύση: Μετασχηματίζουμε κατά Fourier την εξίσωση $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$ ως προς τις συντεταγμένες x και y :

$$V(x,y,z) = \int dk_x dk_y \tilde{V}(k_x,k_y,z) \exp[ik_x x + ik_y y] \to$$

$$\to -k_x^2 \tilde{V} - k_y^2 \tilde{V} + \tilde{V}_{zz} = 0 \to$$

$$\to \tilde{V}_{zz} = \kappa^2 \tilde{V},$$

όπου $\kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Η λύση της απλής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\tilde{V} = A(k_x,k_y)\exp[\kappa z] + B(k_x,k_y)\exp[-\kappa z] \to$$

$$\to V(x,y,z) = \int dk_x dk_y [A(k_x,k_y)\exp[\kappa z] + B(k_x,k_y)\exp[-\kappa z]]\exp[ik_x x + ik_y y].$$

Οι δύο οριακές συνθήκες συνδυαζόμενες με αυτήν τη λύση συνεπάγονται ότι:

$$f(x,y) = \int dk_x dk_y [A(k_x,k_y) + B(k_x,k_y)]\exp[ik_x x + ik_y y],$$

$$g(x,y) = \int dk_x dk_y [A(k_x,k_y)\exp[\kappa L] + B(k_x,k_y)\exp[-\kappa L]]\exp[ik_x x + ik_y y].$$

Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών είναι οι διπλοί μετασχηματισμοί Fourier των γνωστών συναρτήσεων αριστερά. Συμπεραίνουμε ότι

$$A(k_x,k_y) + B(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dxdy f(x,y)\exp[-ik_x x - ik_y y],$$

$$A(k_x,k_y)\exp[\kappa L] + B(k_x,k_y)\exp[-\kappa L] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dxdy g(x,y)\exp[-ik_x x - ik_y y].$$

Δεξιά έχουμε ολοκληρώματα γνωστών συναρτήσεων, άρα μπορούμε να λύσουμε ως προς τα $A(k_x,k_y)$ και $B(k_x,k_y)$. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δεδομένες συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ πρέπει να μηδενίζονται αρκετά γρήγορα σε μεγάλες αποστάσεις x και y ώστε να υπάρχουν τα ολοκληρώματα.

2.9 Εφαρμογές

2.9.1 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

Θεωρούμε αρμονικό ταλαντωτή που κινείται υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης και υφίσταται δύναμη τριβής (και φυσικά τη δύναμη επαναφοράς). Η διαφορική εξίσωση που τον διέπει είναι η εξής:

$$my'' + 2\Gamma y' + ky = F(t).$$

Συνήθως διαιρούμε την εξίσωση με m και καταλήγουμε στην πιο εύχρηστη μορφή:

$$y'' + 2\frac{\Gamma}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}.$$

Με τους συμβολισμούς $\gamma \equiv \frac{\Gamma}{m}, \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}$ η εξίσωση τελικά γράφεται:

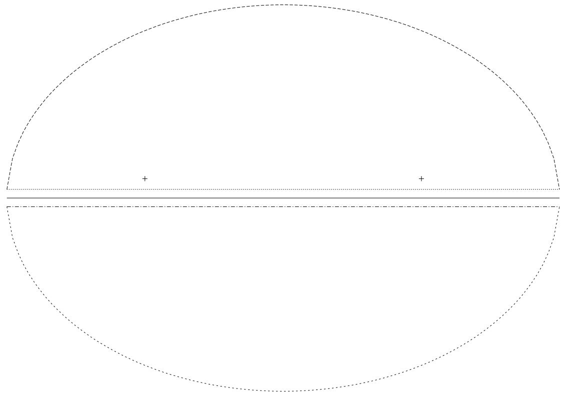
$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = f(t).$$

Για να βρούμε την ειδική λύση, θα μετασχηματίσουμε κατά Fourier και τα δύο μέλη. Οι μετασχηματισμοί Fourier των y' και y'' είναι ίσοι με $(i\omega)\tilde{y}(\omega)$ και $(i\omega)^2\tilde{y}(\omega) = -\omega^2\tilde{y}(\omega)$ αντίστοιχα, σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη πεί για τους μετασχηματισμούς παραγώγων. (Σημειώνουμε ότι προηγουμένως θεωρούσαμε χωρική εξάρτηση, οπότε η συζυγής μεταβλητή του x είχε συμβολιστεί με k. Τώρα που η εξάρτηση είναι χρονική, συμβολίζουμε με ω τη συζυγή μεταβλητή του χρόνου t). Τελικά ο μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης είναι ο εξής:

$$-\omega^2\tilde{y}(\omega) + 2i\gamma\omega\tilde{y}(\omega) + \omega_0^2\tilde{y}(\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

Γίνεται αμέσως φανερή η μεγάλη δύναμη του μετασχηματισμού Fourier: με τη χρήση του η διαφορική εξίσωση μετατράπηκε σε μια απλή αλγεβρική εξίσωση που η λύση της είναι απλό να βρεθεί:

$$\tilde{y}(\omega) = 2\pi\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2}\right]\left[\tilde{f}(\omega)\right].$$



Η λύση θα μπορούσε να γραφτεί και κάπως απλούστερα, αλλά γράφτηκε έτσι επειδή έχουμε υπόψη να εκμεταλλευτούμε το θεώρημα της συνέλιξης. Πιο συγκεκριμένα, αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\tilde{G}(\omega) \equiv -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega^2-2i\gamma\omega-\omega_0^2}$, η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης γράφεται

$$\tilde{y}(\omega) = 2\pi\tilde{G}(\omega)\tilde{f}(\omega).$$

Το δεξιό μέλος έχει τη μορφή γινομένου δύο μετασχηματισμών επί 2π, πράγμα που παραπέμπει απευθείας στο θεώρημα της συνέλιξης, που λέει ότι μια τέτοια έκφραση έχει προέλθει από την ακόλουθη σχέση για τις αρχικές συναρτήσεις:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t')f(t').$$

Διαπιστώνουμε ότι έχει βρεθεί ουσιαστικά η ειδική λύση και το μόνο που μένει είναι να προσδιορισθεί η συνάρτηση

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}(\omega) \exp[i\omega(t-t')].$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση στον παρονομαστή της $\tilde{G}(\omega)$ μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = (\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-), \quad \omega_\pm = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}.$$

(Υποθέτουμε ότι το γ είναι μικρότερο του ω_0, οπότε το υπόρριζο είναι πραγματικό.) Τότε το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογιστεί γράφεται ως εξής:

$$G(t-t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)} \exp[i\omega(t-t')].$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ευχέρεια με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Θεωρούμε ένα δρόμο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο ω που περικλείεται από τον πραγματικό άξονα και ημικύκλιο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και στο τέλος αφήνουμε την ακτίνα R να πάει στο άπειρο. Για τέτοιου είδους ολοκληρώματα υπάρχει το λήμμα του Jordan που στη συγκεκριμένη περίπτωση λέει ότι: για $t-t' > 0$ το ημικύκλιο πρέπει να κλείνει "από πάνω", ενώ γιά $t-t' < 0$, "από κάτω". Οι ρίζες έχουν θετικό φανταστικό μέρος (το γ είναι θετικό), οπότε βρίσκονται πάντοτε μέσα στο "πάνω" ημικύκλιο, όπως σημειώνεται στο σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι το "κάτω" ημικύκλιο δεν περιέχει πόλους, επομένως για $t-t' < 0$, που πρέπει να κλείσουμε "από κάτω", το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν:

$$G(t-t') = 0, \quad t-t' < 0. \tag{2.18}$$

Στην περίπτωση $t - t' > 0$ προχωράμε κανονικά στον υπολογισμό:

$$G(t-t') = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi i}{\omega_+ - \omega_-}\exp[i\omega_+(t-t')] + \frac{2\pi i}{\omega_- - \omega_+}\exp[i\omega_-(t-t')]\right].$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_+ και ω_- βρίσκουμε τελικά ότι:

$$G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\exp[-\gamma(t-t')]\sin[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')], \quad t - t' > 0. \tag{2.19}$$

Οι εξισώσεις (2.18) και (2.19) δίνουν τη λύση για τη συνάρτηση Green $G(t-t')$. Παρατηρούμε ότι μηδενίζεται όταν $t - t' < 0$, δηλαδή όταν ο χρόνος t', κατά τον οποίον εξασκήθηκε η εξωτερική δύναμη, είναι μεταγενέστερος του χρόνου t της παρατήρησης του αποτελέσματός της, δηλαδή της απομάκρυνσης $y(t)$.

2.9.2 Μιγαδική αναπαράσταση

Σ' αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε ένα κύκλωμα συντονισμού, δηλαδή (ωμική) αντίσταση, πηνίο και πυκνωτή σε σειρά μεταξύ τους και με μια γεννήτρια που παράγει ημιτονική τάση με μια καθορισμένη κυκλική συχνότητα ω. Ο σκοπός είναι να εισαγάγουμε την αναπαράσταση των διαφόρων ποσοτήτων με μιγαδικούς αριθμούς. Ο νόμος του Kirchhoff γράφεται:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V_0 \sin\omega t.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\frac{dQ}{dt} = I \to Q = Q(0) + \int_0^t dt' I(t')$ θα πάρουμε (κάνοντας την υπόθεση ότι $Q(0) = 0$) την εξίσωση:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int_0^t dt' I(t')}{C} = V_0 \sin\omega t. \tag{2.20}$$

Είναι γνωστό από τις κλασικές περιγραφές των εγχειριδίων Φυσικής ότι η λύση εκφράζεται με το άθροισμα μιας συνεισφοράς που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες (και η οποία εκλείπει καθώς περνάει ο χρόνος) και από μια συνεισφορά (τη λεγόμενη μόνιμη) η οποία εξαρτάται βασικά από την παρουσία της γεννήτριας και είναι αυτή που τελικά επιζεί για μεγάλους χρόνους. Θα ασχοληθούμε προς το παρόν μόνο με τη μόνιμη συνεισφορά. Αυτή η συνεισφορά είναι γνωστό ότι θα έχει τη μορφή $I_0 \sin(\omega t + \phi)$, δηλαδή έχει την ίδια κυκλική συχνότητα με την πηγή, κάποιο πλάτος I_0 και διαφορά φάσης ϕ από την διεγείρουσα τάση $V_0 \sin\omega t$. Η αντικατάσταση αυτής της λύσης στην αρχική εξίσωση θα μας δώσει τις άγνωστες ποσότητες I_0 και ϕ. Ομως αυτές οι πράξεις είναι αρκετά μακροσκελείς και άκομψες.

Θα εισαγάγουμε τώρα τη μιγαδική αναπαράσταση. Η χρονική εξάρτηση εκφράζεται μέσω της παράστασης $\exp[i\omega t]$. Θεωρούμε δύο μιγαδικά μεγέθη $I = I_0 \exp[i\phi]\exp[i\omega t] = I_0 \exp[i(\omega t + \phi)]$ και $V = V_0 \exp[i\omega t]$. Βλέπουμε ότι τα φανταστικά μέρη αυτών των δύο ποσοτήτων είναι ακριβώς η λύση $I_0 \sin(\omega t + \phi)$ για το ρεύμα και η τιμή $V_0 \sin\omega t$ του δυναμικού. Η ιδέα της μιγαδικής αναπαράστασης είναι να χρησιμοποιήσει κανείς τις παραπάνω μιγαδικές εκφράσεις και να βρει τη λύση για το (μιγαδικό) ρεύμα με τον τρόπο που θα εξηγήσουμε σε λίγο. Το φανταστικό μέρος του αριθμού αυτού είναι η λύση για το ρεύμα.

Προχωρούμε στην περιγραφή της μεθόδου. Εισάγουμε για το ρεύμα και την τάση τις μιγαδικές ποσότητες $I = I_M \exp[i\omega t], \quad V = V_M \exp[i\omega t]$. Για το παράδειγμα που αντιμετωπίζουμε: $I_M \equiv I_0 \exp[i\phi], \quad V_M \equiv V_0$. Στην περίπτωσή μας το V_M είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό είναι αρκετά συνηθισμένο, αλλά καλύτερα ας θεωρήσουμε τη γενικότερη περίπτωση. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.20) βρίσκουμε:

$$(i\omega)LI_M\exp[i\omega t]+RI_M\exp[i\omega t]+\frac{I_M}{i\omega C}\exp[i\omega t]=V_M\exp[i\omega t].$$

Το εκθετικό απλοποιείται και, όπως είναι προφανές, η διαφορική εξίσωση έχει αναχθεί σε μια απλή αλγεβρική εξίσωση ως προς I_M :

$$\left[i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right]I_M=V_M\rightarrow I_M=\frac{V_M}{i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}}.$$

Είναι φανερή η ευκολία με την οποία ευρίσκεται η (ειδική) λύση με τη μέθοδο αυτή. Παρατηρούμε ακόμη ότι το (μιγαδικό) ρεύμα I_M ισούται (με τρόπο που θυμίζει τον νόμο του Ohm) με τη (μιγαδική) τάση V_M διά την (μιγαδική) σύνθετη αντίσταση (ή εμπέδηση)

$$Z\equiv i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}.$$

Η εμπέδηση είναι το άθροισμα τριών όρων: της ωμικής αντίστασης R, της επαγωγικής αντίστασης $i\omega L$ και της χωρητικής αντίστασης $\frac{1}{i\omega C}$. Το Z είναι γενικά μιγαδικός αριθμός. Ανάγεται σε πραγματικό αριθμό, αν για διαφόρους λόγους η επαγωγική και η χωρητική μηδενίζονται (χωριστά η κάθε μια) ή αλληλοεξουδετερώνονται. Η ωμική αντίσταση είναι σταθερή ποσότητα, ενώ οι άλλες δύο εξαρτώνται από τη συχνότητα.

Τελικά το (μιγαδικό) ρεύμα δίνεται από τη σχέση

$$I_M\exp[i\omega t]=I_0\exp[i\phi]\exp[i\omega t]$$

και το συνηθισμένο ρεύμα είναι, όπως είπαμε, το φανταστικό μέρος αυτής της παράστασης, δηλαδή $I=I_0\sin(\omega t+\phi)$, που είναι η μορφή που παίρνει κανείς και χωρίς τη χρήση μιγαδικών αριθμών. Χρησιμοποιήσαμε την αναπαράσταση του μιγαδικού ρεύματος σε πολικές συντεταγμένες: $I_M=I_0\exp[i\phi]$. Απομένει να προσδιορίσουμε το μέτρο I_0 και τη φάση ϕ.

$$I_M=\frac{V_M}{i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{V_0}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{V_0\left[R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με το μιγαδικό συζυγές του παρονομαστή και θέσαμε $V_M=V_0$. Ο αριθμητής μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$V_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\exp[i\phi]$$

όπου

$$\tan\phi=-\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

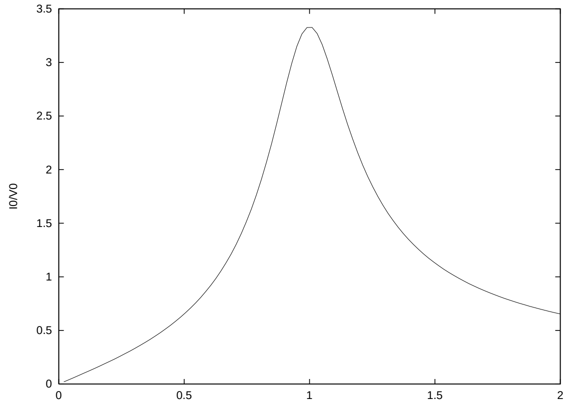
Αρα το ρεύμα παίρνει τη μορφή:

$$I_M=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\exp[i\phi].$$

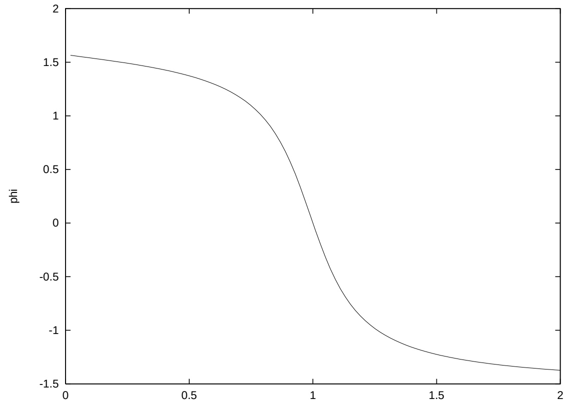
Δηλαδή πράγματι έχει τη μορφή $I_M=I_0\exp[i\phi]$, όπου

$$I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}},\tag{2.21}$$

$$\phi=-\arctan\left[\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right].\tag{2.22}$$



Σχήμα 2.1: Πλάτος συναρτήσει της συχνότητας



Σχήμα 2.2: Διαφορά φάσης συναρτήσει της συχνότητας

Συντονισμός

Μπορεί κανείς να παραστήσει γραφικά (για τυπικές τιμές των R, L, C) τις δύο εξισώσεις (2.21) και (2.22) και να δεί την εξάρτησή τους από τη συχνότητα ω. Στα σχήματα βλέπουμε το $\frac{I_0}{V_0}$ συναρτήσει της μεταβλητής $\frac{\omega}{\omega_0}$, $\quad \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$, που παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ και την αντίστοιχη συμπεριφορά της διαφοράς φάσης για τυχαίες τιμές των στοιχείων του κυκλώματος. Η μέθοδος της μιγαδικής αναπαράστασης είναι πολύ απλή και αποτελεσματική, αλλά προσδιορίζει μόνο την ειδική λύση, δηλαδή τη μόνιμη κατάσταση. Δεν είναι κατάλληλη για την εύρεση της μεταβατικής κατάστασης, όπου εμπλέκεται η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Ακριβώς για τέτοια προβλήματα είναι χρήσιμος ο μετασχηματισμός Laplace, που είναι το αντικείμενο ειδικού κεφαλαίου.

2.9.3 Φίλτρα

Τα φίλτρα είναι γενικά διατάξεις αντιστάσεων, πυκνωτών και πηνίων που αποτελούνται από ένα βασικό σχήμα που επαναλαμβάνεται περιοδικά αρκετές φορές και σχεδιάζεται έτσι ώστε αν στο ένα άκρο εφαρμοστεί μια τάση (κατά κύριο λόγο ημιτονοειδής εναλλασσόμενη), το σήμα που θα περάσει στο άλλο άκρο να εξαρτάται από τη συχνότητα αυτής της τάσης. Ετσι, υπάρχουν φίλτρα χαμηλών συχνοτήτων, που αφήνουν να περάσουν μόνο συχνότητες μικρότερες από κάποια κρίσιμη τιμή, φίλτρα υψηλών συχνοτήτων, από τα οποία διέρχονται μόνο υψηλές συχνότητες κλπ. Το φίλτρο που θα εξετάσουμε φαίνεται στο σχήμα (2.3). Τα $Z_1, \quad Z_2, \quad Z_N$ είναι σύνθετες αντιστάσεις του τύπου που εξηγήσαμε, δηλαδή γενικά μιγαδικές ποσότητες.

Στα φίλτρα ενδιαφέρει κατά κύριο λόγο η μόνιμη κατάσταση και όχι τα μεταβατικά φαινόμενα. Συνήθως το σήμα εισόδου είναι ημιτονοειδές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η εφαρμοζόμενη τάση έχει μία και μοναδική συχνότητα ω και ότι επομένως όλες οι διαφορές δυναμικού και οι εντάσεις ρεύματος μεταβάλλονται χρονικά με αυτήν τη συχνότητα. Παριστάνουμε, λοιπόν, την τάση εισόδου με τη μορφή $V_1(t) = V\exp[i\omega t]$, όπου το V είναι γενικά μια μιγαδική μεταβλητή, και τις εντάσεις των ρευμάτων με τη μορφή $i_n(t) = I_n\exp[i\omega t]$. Γράφουμε τις εξισώσεις του Kirchhoff για τους βρόχους:

$$(Z_0 + \frac{Z_1}{2})I_0 + Z_2(I_0 - I_1) = V, \tag{2.23}$$

$$...$$

$$I_n Z_1 + (I_n - I_{n-1})Z_2 + (I_n - I_{n+1})Z_2 = 0, \tag{2.24}$$

$$...$$

$$(I_N - I_{N-1})Z_2 + I_N(\frac{Z_1}{2} + Z_N) = 0. \tag{2.25}$$

Η εξίσωση για τον τυχαίο βρόχο,

$$I_n Z_1 + (I_n - I_{n-1})Z_2 + (I_n - I_{n+1})Z_2 = 0,$$

μπορεί να λυθεί εύκολα:

$$I_n = A\exp[\theta n] + B\exp[-\theta n]. \tag{2.26}$$

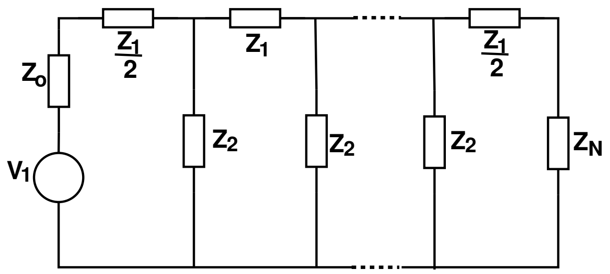
Το θ είναι προσδιοριστέα σταθερά. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση τη λύση (2.26) και απαιτώντας να ισχύει για κάθε A, B, βρίσκουμε ότι το θ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\exp[\pm\theta] = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + 4\frac{Z_1}{Z_2}},$$

επομένως την

$$\cosh\theta = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \tag{2.27}$$

Γενικά το δεύτερο μέλος είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Αν ο θ είναι φανταστικός αριθμός, η λύση για το I_n αναπαριστά το άθροισμα δύο όρων που ταλαντεύονται (είναι ημίτονα και συνημίτονα), αλλά δεν σβήνουν καθώς το n μεταβάλλεται. Ταυτόχρονα, σε αυτήν τη περίπτωση, το υπερβολικό



Σχήμα 2.3: Τυπική μορφή φίλτρου

συνημίτονο της εξίσωσης (2.27) θα μετατραπεί σε συνηθισμένο συνημίτονο, του οποίου η τιμή θα κυμαίνεται μεταξύ -1 και $+1$. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η συνθήκη $-1 \leq \cos\theta \leq +1$ θα δώσει την ανισότητα:

$$0 \leq -\frac{Z_1}{Z_2} \leq 4. \tag{2.28}$$

Αν το θ αποκτήσει πραγματικό μέρος, θα έχουμε εκθετική απόσβεση.

Παραδείγματα:

- Αν $Z_1 = i\omega L$ και $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$, η ανισότητα (2.28) δίνει την $\omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}$. Δηλαδή όλες οι συχνότητες που είναι μικρότερες από μια οριακή τιμή περνούν χωρίς εξασθένιση, ενώ οι μεγαλύτερες εξασθενούν εκθετικά, επομένως πρακτικά κόβονται. Εχουμε φτιάξει ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων.
- Αν $Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$ και $Z_2 = i\omega L$, η ανισότητα (2.28) δίνει την $\omega \geq \frac{1}{2\sqrt{LC}}$. Δηλαδή όλες οι συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από μια οριακή τιμή περνούν χωρίς εξασθένιση, ενώ οι μικρότερες εξασθενούν εκθετικά, επομένως πρακτικά κόβονται. Η διάταξη θα λειτουργεί ως φίλτρο υψηλών συχνοτήτων.

Θα δούμε τώρα μερικά ακόμα χαρακτηριστικά των φίλτρων. Ορίζουμε την χαρακτηριστική εμπέδηση Z_χ που είναι η αντίσταση εισόδου όταν το φίλτρο εκτείνεται δεξιά ως το άπειρο, απ΄ όπου παίρνουμε τη χρήσιμη σχέση:

$$(Z_\chi + Z_0)I_0 = V \to Z_\chi = \frac{V}{I_0} - Z_0.$$

Αφού το σύστημα εκτείνεται ως το άπειρο δεν υπάρχουν "ανακλάσεις" από δεξιά, άρα η έκφραση (2.26) αντικαθίσταται από την $I_n = I_0 \exp[n\theta]$. Η εξίσωση (2.23) δίνει, λοιπόν:

$$(Z_0 + \frac{Z_1}{2})I_0 + Z_2(I_0 - I_0\exp[\theta]) = V \to Z_0 + \frac{Z_1}{2} + Z_2(1 - \exp[\theta]) = \frac{V}{I_0}.$$

Τότε η σχέση $Z_\chi = \frac{V}{I_0} - Z_0$ δίνει

$$Z_\chi = \frac{Z_1}{2} + Z_2(1 - \exp[\theta]).$$

Εξ άλλου η σχέση $\cosh\theta = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ συνεπάγεται: $\frac{Z_1}{2} = Z_2(\cosh\theta - 1)$ και η χαρακτηριστική εμπέδηση γίνεται:

$$Z_\chi = -Z_2 \sinh\theta \to Z_\chi^2 = Z_2^2 \sinh^2\theta = Z_2^2(\cosh^2\theta - 1) =$$
$$= Z_2^2(1 + \frac{Z_1^2}{4Z_2^2} + \frac{Z_1}{Z_2} - 1) = \frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2.$$

Πεπερασμένο κύκλωμα

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ένα φίλτρο που εκτείνεται επ΄ άπειρον. Τώρα θα δούμε τη ρεαλιστική περίπτωση, που το κύκλωμα τερματίζεται, άρα περιμένουμε φαινόμενα ανακλάσεων στα άκρα. Στην ανάλυσή μας θα αντικαταστήσουμε τη λύση

$$I_n = A\exp[\theta n] + B\exp[-\theta n]$$

στις εξισώσεις του πρώτου βρόχου:

$$(Z_0 + \frac{Z_1}{2})I_0 + Z_2(I_0 - I_1) = V$$

και του τελευταίου βρόχου:

$$(I_N - I_{N-1})Z_2 + I_N(\frac{Z_1}{2} + Z_N) = 0.$$

Το αποτέλεσμα που βρίσκουμε είναι ένα σύστημα ως προς A και B :

$$\left[Z_0 + \frac{Z_1}{2} + Z_2 - Z_2 \exp[\theta]\right] A + \left[Z_0 + \frac{Z_1}{2} + Z_2 - Z_2 \exp[-\theta]\right] B = V$$

$$\left[Z_2(\exp[N\theta] - \exp[(N-1)\theta]) + (\frac{Z_1}{2} + Z_N)\exp[N\theta]\right] A +$$

$$+ \left[Z_2(\exp[-N\theta] - \exp[-(N-1)\theta]) + (\frac{Z_1}{2} + Z_N)\exp[-N\theta]\right] B = 0$$

Οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν να εκφραστούν μέσω της χαρακτηριστικής εμπέδησης με τη βοήθεια των σχέσεων $Z_\chi = \frac{Z_1}{2} - Z_2(\exp[\theta] - 1)$ και $-Z_\chi = \frac{Z_1}{2} - Z_2(\exp[-\theta] - 1)$ που αποδεικνύονται εύκολα απ΄ όσα είπαμε για την Z_χ. Το νέο σύστημα είναι:

$$[Z_0 + Z_\chi]A + [Z_0 - Z_\chi]B = V,$$

$$[Z_N - Z_\chi]\exp[\theta N]A + [Z_\chi + Z_N]\exp[-\theta N]B = 0.$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$A = \frac{V \exp[-\theta N]}{(Z_0 + Z_\chi)(\exp[-\theta N] - r_0 r_N \exp[\theta N]},$$

$$B = -\frac{V r_N \exp[\theta N]}{(Z_0 + Z_\chi)(\exp[-\theta N] - r_0 r_N \exp[\theta N])},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τους ορισμούς:

$$r_0 \equiv \frac{Z_0 - Z_\chi}{Z_0 + Z_\chi}, \quad r_N \equiv \frac{Z_N - Z_\chi}{Z_N + Z_\chi}.$$

Δηλαδή το ρεύμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$I_n = \frac{V}{Z_0 + Z_\chi} \frac{1}{\exp[-\theta N] - r_0 r_N \exp[\theta N])} [\exp[\theta(n-N) - r_N \exp[-\theta(n-N)]].$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα κυμάτων που πάνε προς τα δεξιά και κυμάτων που πάνε προς τα αριστερά. Αν φροντίσουμε ώστε $Z_N = Z_\chi$, το r_N θα μηδενίζεται και όλη η ισχύς που θα παρέχεται από την πηγή στο αριστερό άκρο θα φτάνει στην τελική αντίσταση Z_N και η έκφραση για το ρεύμα θα περιλαμβάνει μόνο ένα κύμα:

$$I_n = \frac{V}{Z_0 + Z_\chi} \exp[\theta n].$$

Αυτή η ρύθμιση του Z_N λέγεται προσαρμογή αντιστάσεων. Σ΄ αυτήν την περίπτωση αποφεύγονται οι (ανεπιθύμητες) ανακλάσεις.

2.9.4 Περίθλαση Fraunhofer

Η περίθλαση είναι αρκετά περίπλοκο θέμα και δεν θα το αντιμετωπίσουμε στην πλήρη γενικότητά του. Θα περιοριστούμε κατ΄ αρχήν στην λεγόμενη περίθλαση Fraunhofer, όπου υποτίθεται ότι ένα επίπεδο κύμα με κυματικό αριθμό $\vec{k}$ προσπίπτει σε πέτασμα που φέρει ανοίγματα, η εικόνα της περίθλασης γίνεται ορατή σε οθόνη σε μεγάλη (συγκριτικά με τις διαστάσεις των ανοιγμάτων) απόσταση απέναντι και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι πολύ μικρό σε σχέση και με τις διαστάσεις των ανοιγμάτων και την απόσταση πετάσματος-οθόνης. Επισημαίνουμε ότι συμβολίζουμε με E το μέγεθος που εκφράζει το πλάτος της ακτινοβολίας. Θα μπορούσε να είναι μια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Επιλέγουμε την αρχή των αξόνων κάπου μέσα στο (μοναδικό, έστω) άνοιγμα του πετάσματος και συμβολίζουμε με $\vec{r}$ τις συντεταγμένες κάποιου σημείου παρατήρησης (στο χώρο δεξιά του πετάσματος) και με $\vec{r}\,'$ τις συντεταγμένες των σημείων του ανοίγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δηλαδή η απόσταση μεταξύ του τυχαίου σημείου του ανοίγματος $\vec{r}\,'$ και του τυχαίου σημείου παρατήρησης $\vec{r}$ ισούται με $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$. Επιλέγουμε τον άξονα των z να είναι κάθετος στο πέτασμα και την οθόνη, οπότε το $\vec{r}\,'$ έχει μόνο συνιστώσες x' και y' : $\vec{r}\,' \to (x', y', 0)$. Μπορούμε επομένως να παραλείπουμε ο,τιδήποτε έχει να κάνει με τη συνιστώσα z' (όχι την z). Επικαλούμαστε την αρχή του Huygens και υποθέτουμε ότι το μέγεθος $\epsilon(\vec{r}\,')$ που χαρακτηρίζει το πλάτος της ακτινοβολίας είναι μη μηδενικό στην περιοχή των ανοιγμάτων, ενώ εκτός αυτής είναι μηδέν. Η φυσική εικόνα είναι ότι κάθε σημείο του ανοίγματος εκπέμπει σφαιρικά κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις και η εικόνα της περίθλασης είναι το αποτέλεσμα της συμβολής όλων αυτών των στοιχειωδών συνεισφορών. Τα στοιχειώδη σφαιρικά κύματα περιγράφονται από τη σχέση

$$dE(\vec{r},t) \sim dS'\epsilon(\vec{r}\,')\frac{1}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\exp[i(k|\vec{r}-\vec{r}\,'|-\omega t)].$$

Το ολικό πλάτος του κύματος σ΄ ένα δεδομένο σημείο παρατήρησης προκύπτει από την άθροιση των μερικών πλατών που προέρχονται απ΄ όλη την έκταση του ανοίγματος:

$$E(\vec{r},t) = A\int dS'\epsilon(\vec{r}\,')\frac{1}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\exp[i(k|\vec{r}-\vec{r}\,'|-\omega t)]. \tag{2.29}$$

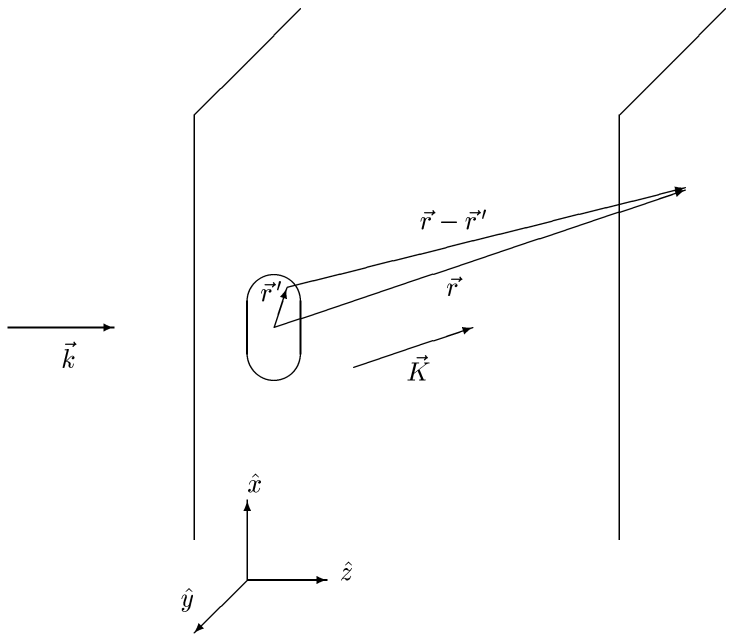
Εχουμε περιλάβει και τη σταθερά αναλογίας A. Το ολοκλήρωμα κατ΄ αρχήν εκτείνεται στο άνοιγμα. Ομως μπορεί να επεκταθεί σ΄ όλο το πέτασμα γιατί η συνεισφορά των περιοχών εκτός ανοίγματος είναι μηδέν, όπως είπαμε. Αυτό θα φανεί χρήσιμο σε λίγο.

Το επόμενο στάδιο είναι να προσεγγίσουμε το μέτρο της απόστασης που εμφανίζεται στην εξίσωση (2.29):

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}} \simeq r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right) = r - \hat{r}\cdot\vec{r}\,' \to$$

$$\to k|\vec{r}-\vec{r}\,'| = kr - k\hat{r}\cdot\vec{r}\,' \quad \left(\hat{r}\equiv\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

Θα αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στον εκθέτη, αλλά στον παρονομαστή μπορούμε να αρκεστούμε σε μικρότερη ακρίβεια, αφού μόνο στον εκθέτη μικρές διαφορές στο $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ μπορεί να προκαλέσουν μεγάλες διαφορές στο αποτέλεσμα. Αυτό μπορεί να συμβεί αν το k είναι αρκετά μεγάλο, ώστε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που περιέχονται στο εκθετικό του φανταστικού αριθμού να αλλάξουν πολλές φορές πρόσημο. Προχωρούμε στις αντικαταστάσεις:



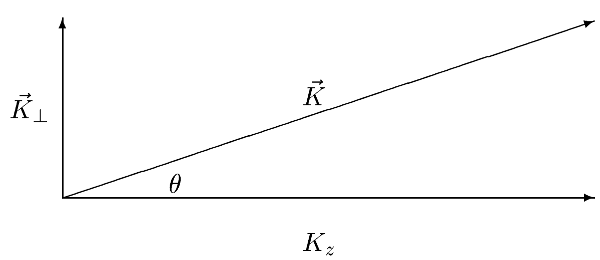
$$E(\vec{r},t) \simeq A \int dS' \epsilon(\vec{r}') \frac{1}{kr} \exp[i(kr - k\hat{r}\cdot\vec{r}' - \omega t)] =$$

$$= 4\pi^2 A \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{kr} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int dS' \epsilon(\vec{r}') \exp[-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'] \right\}.$$

Εχουμε πολλαπλασιάσει και διαιρέσει με $4\pi^2$ για να εμφανίσουμε μέσα στο άγκιστρο τον διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier της ποσότητας $\epsilon(\vec{r}')$:

$$\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int dS' \epsilon(\vec{r}') \exp[-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dS' \epsilon(\vec{r}') \exp[-i\vec{K}_\perp \cdot \vec{r}'].$$

Εδώ χρειάζεται μια σημαντική παρατήρηση. Κάνουμε την εύλογη υπόθεση ότι το μέτρο k του κυματικού αριθμού δεν αλλάζει στη διαδικασία της περίθλασης και εισάγουμε τον συμβολισμό $\vec{K} \equiv k\hat{r}$.



Εστω K_z η συνιστώσα αυτού του διανύσματος κατά μήκος του άξονα των z και $\vec{K}_\perp$ η συνιστώσα που είναι κάθετη στην προηγούμενη, συνεπώς παράλληλη προς το πέτασμα και την οθόνη. Είναι προφανές ότι: $\vec{K} = \vec{K}_\perp + K_z\hat{z}$. Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, το διάνυσμα $\vec{r}'$ δεν έχει συνιστώσα κατά τον άξονα των z, οπότε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{K}\cdot\vec{r}'$ ισούται στην πραγματικότητα με $\vec{K}_\perp\cdot\vec{r}'$. Αν το σημείο παρατήρησης περιγράφεται από το $\vec{r}$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των z ο κυματαριθμός στην περιοχή μεταξύ πετάσματος και οθόνης θα αναλύεται στις δύο συνιστώσες με μέτρα $K_z = k\cos\theta$ και $K_\perp = k\sin\theta$. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')]$ δεν εξαρτάται στην πραγματικότητα από ολόκληρο το $\vec{r}$ αλλά μόνο από τη διεύθυνσή του και πιο συγκεκριμένα από την προβολή του $\vec{K}_\perp$ πάνω στο πέτασμα! Συγκεντρώνοντας τις πιο πάνω συνεισφορές το τελικό αποτέλεσμα γράφεται:

$$E(\vec{r},t) = 4\pi^2 A \frac{\exp[i(kr-\omega t)]}{kr}\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')].$$

Αν ξεχάσουμε προς στιγμήν τον παράγοντα $4\pi^2 A\frac{\exp[i(kr-\omega t)]}{kr}$, που δίνει τη δομή ενός σφαιρικού κύματος, είναι φανερό ότι η εικόνα της περίθλασης, που περιγράφεται από το $E(\vec{r},t)$ δεν είναι τίποτ΄ άλλο από τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')]$ της πηγής $\epsilon(\vec{r}\,')$! Μάλιστα, είναι εύλογο να αγνοήσουμε τους παράγοντες αυτούς διότι, αφ΄ ενός το r δεν μεταβάλλεται ουσιωδώς υπό τις συνθήκες που περιγράφουμε, αφ΄ ετέρου η ένταση της ακτινοβολίας $I(\vec{K}_\perp)$, που είναι το πραγματικά μετρούμενο φυσικό μέγεθος, είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του $E(\vec{r},t)$. Ενσωματώνοντας όλες τις σταθερές σε μία, που θα ονομάσουμε C, η ένταση της ακτινοβολίας στην οθόνη δίνεται από τη σχέση

$$I(\vec{K}_\perp) = C|\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')]|^2. \tag{2.30}$$

Σημειώνουμε ότι η ακριβής σχέση, που θα μπορούσε να παραχθεί αν είμαστε σχολαστικότεροι, περιέχει επί πλέον τον όρο $(1+\cos\theta)^2$, αλλά το θέμα μας δεν ήταν η ακριβής μελέτη της περίθλασης. Θέλαμε μόνο μια πρώτη ημιποσοτική σκιαγράφηση μερικών βασικών στοιχείων.

Για να προχωρήσουμε πιο κάτω, χρειάζονται συγκεκριμένες πληροφορίες για το σχήμα του ανοίγματος, το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος στο άνοιγμα κλπ. Στις εφαρμογές που θα εξετάσουμε θα υποθέσουμε ότι το πλάτος του κύματος στο άνοιγμα είναι σταθερό. Δύο απλά και ενδιαφέροντα σχήματα ανοιγμάτων είναι το ορθογώνιο και το κυκλικό.

Ορθογώνιο άνοιγμα

Εστω, λοιπόν, ότι $\epsilon(\vec{r}\,') = \Lambda$, για $x' \in [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ και $y' \in [-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}]$, ενώ αλλιώς $\epsilon(\vec{r}\,') = 0$. Είναι χρήσιμο σ΄ αυτήν την περίπτωση να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνιες συντεταγμένες. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')] &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \epsilon(\vec{r}\,')\exp[-i(K_x x' + K_y y')] = \\
&= \frac{\Lambda}{4\pi^2}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx' \exp(-iK_x x')\right]\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy' \exp(-iK_y y')\right] = \\
&= -\frac{\Lambda}{4\pi^2 K_x K_y}\sin\frac{K_x a}{2}\sin\frac{K_y b}{2} = \\
&= -\frac{\Lambda ab}{16\pi^2}\frac{\sin\frac{K_x a}{2}}{\frac{K_x a}{2}}\frac{\sin\frac{K_y b}{2}}{\frac{K_y b}{2}}.
\end{aligned}$$

Τελικά, δηλαδή, η ένταση θα είναι της μορφής

$$I(K_x, K_y) = I_0\left[\frac{\sin\frac{K_x a}{2}}{\frac{K_x a}{2}}\right]^2\left[\frac{\sin\frac{K_y b}{2}}{\frac{K_y b}{2}}\right]^2.$$

Βέβαια, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι:

$$\vec{K} \equiv k\hat{r} \to \left[K_x = k\frac{x}{r}, \quad K_y = k\frac{y}{r}, \quad K_z = 0\right].$$

Βλέπουμε την εξάρτηση από την διεύθυνση (μόνο) του $\vec{r}$, μέσω των K_x, K_y. Το I_0 είναι η ένταση όταν το διάνυσμα θέσης έχει $x = y = 0$, δηλαδή όταν παρατηρούμε κατευθείαν απέναντι από το άνοιγμα.

Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση βρίσκουμε όταν $b \to \infty$. Τότε το ορθογώνιο άνοιγμα γίνεται μια σχισμή με πεπερασμένο πλάτος και άπειρο μήκος, δηλαδή η περίπτωση που εξετάζεται συνήθως πρώτη στα εγχειρίδια Οπτικής. Στη γενική λύση παρατηρούμε ότι, αν το b είναι πολύ μεγάλο, η συνεισφορά $\frac{\sin\frac{K_y b}{2}}{\frac{K_y b}{2}}$ μηδενίζεται, εκτός αν $K_y = 0$. Αρα μόνο για $K_y = 0$ έχουμε μη μηδενικό αποτέλεσμα και η εξίσωση μεταπίπτει στην

$$I(K_x) = I_0 \left[\frac{\sin\frac{K_x a}{2}}{\frac{K_x a}{2}}\right]^2 .$$

Αν συμβολίσουμε με θ τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα των z, θα ισχύει ότι $K_x = k\sin\theta$ (το $\vec{K}_\perp$ μεταπίπτει στο K_x) και το αποτέλεσμα παίρνει την πιο συνηθισμένη μορφή:

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\frac{ka\sin\theta}{2}}{\frac{ka\sin\theta}{2}}\right]^2 .$$

Βλέπουμε και πάλι ότι η ένταση εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ, δηλαδή τη διεύθυνση από την οποία παρατηρούμε.

Κυκλικό άνοιγμα

Σ' αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι $\epsilon(\vec{r}\,') = \Lambda$, για $r' \leq R$, ενώ αλλιώς $\epsilon(\vec{r}\,') = 0$. Χρήσιμες είναι τώρα οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{+\infty} dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \epsilon(\vec{r}\,') \exp[-i\vec{K}_\perp \cdot \vec{r}\,'],$$

αφού το στοιχείο εμβαδού στο επίπεδο του πετάσματος είναι $dr'r'd\phi'$. Το εσωτερικό γινόμενο που εμφανίζεται στον εκθέτη υπολογίζεται από την ισότητα $\vec{K}_\perp \cdot \vec{r}\,' = K_x x' + K_y y'$, με τις πρόσθετες πληροφορίες ότι $K_x = k\sin\theta\cos\phi, K_y = k\sin\theta\sin\phi, x' = r'\cos\phi', y' = r'\sin\phi'$, οπότε $\vec{K}_\perp \cdot \vec{r}\,' = K_x x' + K_y y' = kr'\sin\theta\cos(\phi' - \phi)$. Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω στοιχεία καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{F}_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}\,')] = \frac{\Lambda}{4\pi^2}\int_0^{R} dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[-ikr'\sin\theta\cos(\phi' - \phi)]. \qquad (2.31)$$

Η συνέχεια του υπολογισμού απαιτεί γνώση των συναρτήσεων Bessel και θα συνεχιστεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

2.9.5 Συμβολή

Αρχίζουμε με κάποιους βοηθητικούς ορισμούς. Εστω η συνάρτηση

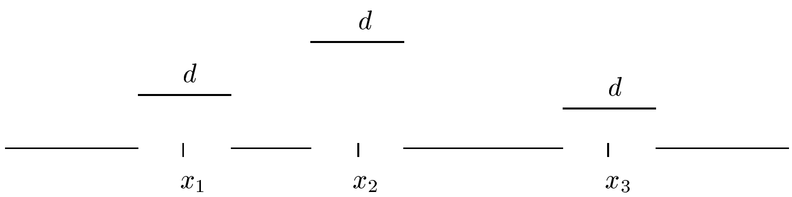
$$\Delta(x) \equiv \sum_n A_n \delta(x - x_n),$$

όπου τα A_n είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί, τα x_n τυχαίες θέσεις στον πραγματικό άξονα και το άθροισμα πάνω στα n μπορεί να εκτείνεται σε πεπερασμένο (η πιο συνηθισμένη περίπτωση) ή και άπειρο πλήθος όρων. Θεωρούμε την συνέλιξη $C \equiv \Delta * f$ της $\Delta(x)$ με μια τυχαία συνάρτηση $f(x)$:

$$C(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \Delta(x-x') f(x') = \sum_n A_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \delta(x-x'-x_n) f(x') =$$

$$= \sum_n A_n f(x-x_n).$$

Ας θεωρήσουμε για ευκολία ότι η $f(x)$ είναι εντοπισμένη σε μια περιοχή πλάτους d μικρότερου από το μικρότερο $|x_{n+1}-x_n|$, ενώ κατά τ΄ άλλα είναι σταθερή συνάρτηση, ίση έστω με 1. Τότε η συνέλιξη (για τρία x_n) θα έχει ένα γράφημα όπως του σχήματος.



Θα είναι γενικά μηδέν, εκτός από τα σημεία γύρω από τις θέσεις x_n, όπου θα έχει μέγεθος A_n. Αυτό είναι ουσιαστικά το σχήμα που μας παρουσιάζεται όποτε θελήσουμε να μελετήσουμε περίθλαση (και ταυτόχρονα συμβολή) ενός κύματος από μια σειρά σχισμών με το ίδιο πλάτος. Η μέθοδος που ακολουθούμε μας επιτρέπει να εξετάσουμε και περιπτώσεις όπου η ένταση της ακτινοβολίας (που καθορίζεται από το A_n) μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε σχισμή και οι σχισμές να μην ισαπέχουν. Η μέθοδος παρέχει τη δυνατότητα να λύσουμε προβλήματα με αυθαίρετη κατανομή του πλάτους του πεδίου στα διάφορα ανοίγματα, αρκεί να διαλέξουμε την κατάλληλη $f(x)$. Η διευκόλυνση που μας παρέχει το θεώρημα της συνέλιξης συνίσταται στο ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $C(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{C}(K) = 2\pi \mathcal{F}_K[\Delta(x)] \mathcal{F}_K[f(x)].$$

Συνεπώς, αν ξέρουμε τους μετασχηματισμούς των $\Delta(x)$ και $f(x)$ μπορούμε να βρούμε την $\tilde{C}(K)$. Η $\tilde{f}(K) \equiv \mathcal{F}_K[f(x)]$ μπορεί να υπολογιστεί άπαξ δια παντός για μια σχισμή με πλάτος d :

$$\tilde{f}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx \cdot 1 \cdot \exp[-iKx] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-iK} \left[\exp\left(-i\frac{Kd}{2}\right) - \exp\left(+i\frac{Kd}{2}\right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i K}(-2i \sin\frac{Kd}{2}) = \frac{1}{\pi K} \sin\frac{Kd}{2}.$$

Επίσης η $\mathcal{F}_K[\Delta(x)]$ υπολογίζεται εύκολα:

$$\mathcal{F}_K[\Delta(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_n A_n \delta(x-x_n) \exp[-iKx] = \frac{1}{2\pi} \sum_n A_n \exp[-iKx_n].$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα καταλήγουμε στην τελική έκφραση:

$$\tilde{C}(K) = 2\pi \frac{1}{\pi K} \sin\frac{Kd}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_n A_n \exp[-iKx_n] = \frac{1}{\pi K} \sin\frac{Kd}{2} \sum_n A_n \exp[-iKx_n].$$

Εφαρμογή

Εστω ότι έχουμε δύο όμοιες σχισμές (παράλληλες μεταξύ τους) με πλάτη d που οι άξονές τους βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm L$ και $A_1 = A_2 = A$, ένας πραγματικός αριθμός. Η $f(x)$ έχει τη μορφή του παλμού που περιγράψαμε προηγουμένως. Τότε τον ρόλο του K θα τον παίζει το $K_x = k \sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση παρατήρησης με τον άξονα των z :

$$\tilde{C}(K_x) = \frac{1}{\pi K_x} \sin\frac{K_x d}{2}(A_1 \exp[-iK_x x_1] + A_2 \exp[-iK_x x_2] =$$

$$= \frac{2A}{\pi K_x} \sin\frac{K_x d}{2} \cos[K_x L] = \frac{2A}{\pi k \sin\theta} \sin\frac{k\sin\theta d}{2} \cos[k\sin\theta L].$$

Αρα η ένταση της ακτινοβολίας θα είναι:

$$I(\theta) = I_0 \left[\cos(kL\sin\theta) \frac{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}}{\frac{kd\sin\theta}{2}}\right]^2 .$$

2.9.6 Μόριο υδρογόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier ενδεχομένως να φανεί χρήσιμος σε περιπτώσεις που είναι δύσκολο να τις φανταστεί κανείς. Θα ξεκινήσουμε με τους υπολογισμούς μερικών χρήσιμων ολοκληρωμάτων.

1.

$$\int_0^{+\infty} dr \exp[-\lambda r] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\to \int_0^{+\infty} dr r \exp[-\lambda r] = -\frac{d}{d\lambda}\int_0^{+\infty} dr \exp[-\lambda r] = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.32}$$

2.

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r \exp[-\alpha r]\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{r}] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty} dr r^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \exp[-\alpha r]\exp[-ikr\cos\theta] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty} dr r^2 \exp[-\alpha r]\frac{\exp[-ikr] - \exp[ikr]}{-ikr} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 ik}\left[\int_0^{+\infty} dr r \exp[-(\alpha - ik)r] - \int_0^{+\infty} dr r \exp[-(\alpha + ik)r]\right].$$

Τα ολοκληρώματα έχουν υπολογιστεί προηγουμένως (σχέση (2.32). Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r \exp[-\alpha r]\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{r}] = \frac{\alpha}{\pi^2}\frac{1}{(k^2 + a^2)^2}.$$

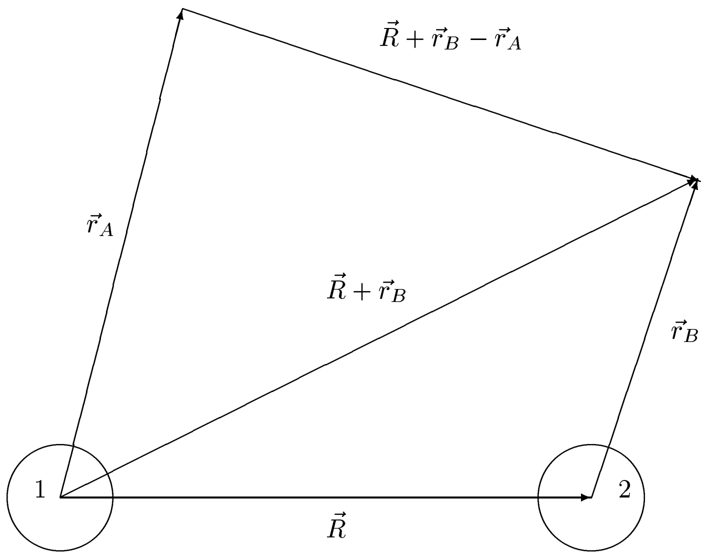
Δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της $\exp[-\alpha r]$ είναι $\frac{\alpha}{\pi^2}\frac{1}{(k^2+a^2)^2}$. Η σχέση που είναι πολύ μεγάλης σημασίας γι΄ αυτό που θα δούμε εδώ είναι η αντίστροφη αυτής που μόλις αποδείξαμε, δηλαδή η έκφραση της $\exp[-\alpha r]$ ως ολοκλήρωμα Fourier:

$$\exp[-\alpha r] = \int d^3k \frac{\alpha}{\pi^2}\frac{1}{(k^2 + a^2)^2}\exp[+i\vec{k}\cdot\vec{r}]. \tag{2.33}$$

3. Μια άλλη χρήσιμη σχέση είναι η ακόλουθη:
$$\frac{\exp[-\alpha r]}{r} = \int d^3k \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(k^2 + a^2)} \exp[+i\vec{k} \cdot \vec{r}], \tag{2.34}$$

που αποδεικνύεται παρόμοια με τις προηγούμενες.

Θεωρούμε ένα μόριο υδρογόνου, στο οποίο θεωρούμε ότι οι πυρήνες των δύο ατόμων είναι ακίνητοι στις θέσεις 1 και 2, το διάνυσμα θέσης του ηλεκτρονικού νέφους του ατόμου 1 ως προς τον πυρήνα 1 είναι το $\vec{r}_A$ και το διάνυσμα θέσης του ηλεκτρονικού νέφους του ατόμου 2 ως προς τον πυρήνα 2 είναι το $\vec{r}_B$. Ονομάζουμε $\vec{R}$ το διάνυσμα που πηγαίνει από τον πυρήνα 1 στον πυρήνα 2. Τότε το διάνυσμα από τον πυρήνα 1 στο ηλεκτρονικό νέφος 2 είναι το $\vec{R} + \vec{r}_B$ και το διάνυσμα από το ηλεκτρονικό νέφος 1 στο ηλεκτρονικό νέφος 2 είναι το $\vec{R} + \vec{r}_B - \vec{r}_A$.



Θα υπολογίσουμε την ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του συστήματος με την προϋπόθεση ότι τα ηλεκτρονικά νέφη περιγράφονται από την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης, $\psi_{100} = \frac{2}{a_0^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp[-\frac{r}{\alpha_0}] \exp[-\frac{iE_1 t}{\hbar}]$, οπότε η πυκνότητα φορτίου θα είναι

$$\rho \equiv -q|\psi_{100}|^2 = \frac{-q \exp[-\frac{2r}{\alpha_0}]}{\pi \alpha_0^3}.$$

Το q είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο και το $a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq^2}$ η ακτίνα του Bohr. Η δυναμική ενέργεια $V(R)$ θα εξαρτάται από την απόσταση $R \equiv |\vec{R}|$ και έχει τέσσερεις συνεισφορές:

1. Τη συνεισφορά $V_{n_1 n_2}$ της αλληλεπίδρασης των πυρήνων
$$V_{n_1 n_2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

2. Την αλληλεπίδραση $V_{n_1 e_2}$ του πυρήνα 1 με το ηλεκτρονικό νέφος 2 :
$$V_{n_1 e_2} = \int d^3 r_B \frac{q \frac{-q \exp\left[-\frac{2r}{\alpha_0}\right]}{\pi \alpha_0^3}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_B + \vec{R}|}$$

3. Την αλληλεπίδραση $V_{n_2 e_1}$ του πυρήνα 2 με το ηλεκτρονικό νέφος 1. Για λόγους συμμετρίας, αυτή η συνεισφορά είναι ίση με την προηγούμενη: $V_{n_2 e_1} = V_{n_1 e_2}$.

4. Την αλληλεπίδραση των δύο ηλεκτρονικών νεφών:

$$V_{e_1 e_2} = \int d^3 r_A d^3 r_B \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} + \vec{r}_B - \vec{r}_A|} \frac{-q \exp[-\frac{2r_A}{\alpha_0}]}{\pi\alpha_0^3} \frac{-q \exp[-\frac{2r_B}{\alpha_0}]}{\pi\alpha_0^3}.$$

Θα υπολογίσουμε τον σχετικά απλούστερο όρο $V_{n_1 e_2}$ για να δείξουμε το ρόλο του μετασχηματισμού Fourier. Ο όρος $V_{e_1 e_2}$ είναι κάπως πιο περίπλοκος, αλλά υπολογίζεται με εντελώς παρόμοιο τρόπο. Συμβολίζοντας το $\vec{R} + \vec{r}_B$ με $\vec{\rho}$, η έκφραση για τον $V_{n_1 e_2}$ γράφεται:

$$V_{n_1 e_2} = \int d^3\rho \frac{q \frac{-q \exp\left[-\frac{2|\vec{\rho} - \vec{R}|}{\alpha_0}\right]}{\pi\alpha_0^3}}{4\pi\epsilon_0 \rho}.$$

Η δυσκολία στον υπολογισμό έγκειται στην παρουσία της παράστασης $|\vec{\rho} - \vec{R}| = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\vec{\rho}\cdot\vec{R}}$ στον εκθέτη. Εδώ ακριβώς είναι που βοηθάει ο μετασχηματισμός Fourier με τη μορφή της αναπαράστασης (2.33) του εκθετικού:

$$V_{n_1 e_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\pi\alpha_0^3} \int d^3\rho \frac{1}{\rho} \int d^3 k \frac{2}{\pi^2 \alpha_0} \frac{\exp[i\vec{k}\cdot(\vec{\rho} - \vec{R})]}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2}.$$

Η προβληματική τετραγωνική ρίζα στον εκθέτη έχει εξαφανιστεί, με το τίμημα βεβαίως ότι έχει εισαχθεί μια επί πλέον τριδιάστατη ολοκλήρωση. Προχωρούμε αναδιατάσσοντας τις ολοκληρώσεις:

$$V_{n_1 e_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{\pi^3\alpha_0^4} \int d^3 k \frac{\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{R}]}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \int d^3\rho \frac{1}{\rho} \exp[i\vec{k}\cdot\vec{\rho}].$$

Το ολοκλήρωμα στο ρ έχει ήδη υπολογιστεί (για τη γενικότερη περίπτωση) προηγουμένως, στη σχέση (2.34), και ισούται με $\frac{4\pi}{k^2}$. Αρα

$$V_{n_1 e_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q^2}{\pi^2\alpha_0^4} \int d^3 k \frac{\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{R}]}{k^2(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q^2}{\pi^2\alpha_0^4} 2\pi \int_0^{+\infty} dk k^2 \frac{1}{k^2(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \exp[-ikR\cos\theta] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q^2}{\pi^2\alpha_0^4} 2\pi \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \frac{1}{-ikR} (\exp[-ikR] - \exp[+ikR]) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q^2}{\pi^2\alpha_0^4} 2\pi \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \frac{1}{-ikR} (\exp[-ikR] - \exp[+ikR]).$$

Τα δύο ολοκληρώματα (ένα για κάθε εκθετικό) υπολογίζονται με ολοκληρωτικά υπόλοιπα και το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$V_{n_1 e_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \left\{ \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\alpha_0} \right) \exp\left[-\frac{2R}{\alpha_0} \right] \right\}.$$

Οπως είπαμε, το $V_{n_2e_1}$ είναι ίσο με το $V_{n_1e_2}$ που μόλις υπολογίσαμε, επομένως η ολική αλληλεπίδραση πυρήνων-ηλεκτρονικών νεφών είναι:

$$V_{n_2e_1} + V_{n_1e_2} = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} q^2 \left\{ \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\alpha_0} \right) \exp\left[-\frac{2R}{\alpha_0} \right] \right\}.$$

Μένει να υπολογιστεί η αλληλεπίδραση των ηλεκτρονικών νεφών:

$$V_{e_1e_2} = \int d^3r_A d^3r_B \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} + \vec{r}_B - \vec{r}_A|} \frac{-q\exp[-\frac{2r_A}{\alpha_0}]}{\pi\alpha_0^3} \frac{-q\exp[-\frac{2r_B}{\alpha_0}]}{\pi\alpha_0^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\pi^2\alpha_0^6} \int d^3r d^3r' \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \exp\left[-\frac{2r}{\alpha_0} \right] \exp\left[-\frac{2|\vec{r}' - \vec{R}|}{\alpha_0} \right].$$

Εχουμε χρησιμοποιήσει τους συμβολισμούς: $\vec{r} \equiv \vec{r}_A, \quad \vec{r}' \equiv \vec{r}_B + \vec{R}$. Σ' αυτό το στάδιο θα επικαλεστούμε την αναπαράσταση των εκθετικών με τη μορφή που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως:

$$V_{e_1e_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\pi^2\alpha_0^6} \int d^3r \int d^3r' \int d^3k \int d^3k' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{2}{\pi^2\alpha_0} \frac{1}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]$$

$$\frac{2}{\pi^2\alpha_0} \frac{1}{(k'^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \exp[i\vec{k}'\cdot(\vec{r}' - \vec{R})].$$

Πολλαπλασιάζουμε επί $\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}']\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{r}']$ και ομαδοποιούμε τους όρους κατάλληλα, ώστε να αντικαταστήσουμε την ολοκλήρωση πάνω στο $\vec{r}$ με ολοκλήρωση πάνω στο $\vec{r} - \vec{r}'$:

$$V_{e_1e_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\pi^2\alpha_0^6} \frac{4}{\pi^4\alpha_0^2} \int d^3r' \int d^3k \int d^3k' \frac{\exp[i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{r}']}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \frac{1}{(k'^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2}$$

$$\exp[-i\vec{k}'\cdot\vec{R}] \int d^3(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\exp[i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{\pi^6\alpha_0^8} \int d^3k \int d^3k' \exp[-i\vec{k}'\cdot\vec{R}] \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2} \frac{1}{(k'^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2}$$

$$\int d^3r' \exp[i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{r}'] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{\pi^6\alpha_0^8} \int d^3k \int d^3k' \exp[-i\vec{k}'\cdot\vec{R})] \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2\pi)^3\delta(\vec{k} + \vec{k}')}{(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2 (k'^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{\pi^6\alpha_0^8} (32\pi^4) \int d^3k \frac{\exp[+i\vec{k}\cdot\vec{R})]}{k^2(k^2 + \frac{4}{\alpha_0^2})^4}.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με την συνηθισμένη μέθοδο (πολικές συντεταγμένες και ολοκληρωτικά υπόλοιπα) και δίνει το αποτέλεσμα:

$$V_{e_1e_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R} \left[1 - \exp\left[-\frac{2R}{\alpha_0} \right] \left\{ 1 + \frac{11}{16} \frac{2R}{\alpha_0} + \frac{3}{16} \left(\frac{2R}{\alpha_0} \right)^2 + \frac{1}{48} \left(\frac{2R}{\alpha_0} \right)^3 \right\} \right].$$

Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές βρίσκουμε τη συνολική δυναμική ενέργεια:

$$V(R) = V_{n_1n_2} + V_{n_1e_2} + V_{n_2n_1} + V_{e_1e_2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}\exp\left[-\frac{2R}{\alpha_0}\right]\left[1+\frac{5}{16}\frac{2R}{\alpha_0}-\frac{3}{16}\left(\frac{2R}{\alpha_0}\right)^2-\frac{1}{48}\left(\frac{2R}{\alpha_0}\right)^3\right].$$

Δεν πρέπει, βέβαια, να ξεχνάμε τις προϋποθέσεις με τις οποίες εργαστήκαμε: ότι οι πυρήνες είναι ακίνητοι, ότι οι κυματοσυναρτήσεις είναι οι ίδιες που περιγράφουν ένα μεμονωμένο άτομο, παρά την παρουσία και δεύτερου πυρήνα κλπ.

Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων

Δίνουμε εδώ μια σύντομη περιγραφή του υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα. Ξεκινάμε από το ολοκλήρωμα

$$I \equiv \int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)}.$$

Υποθέτουμε ότι $b > a$, και χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες:

$$I = 2\pi\int_0^{+\infty} dk k^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\frac{\exp[ikr\cos\theta]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} =$$

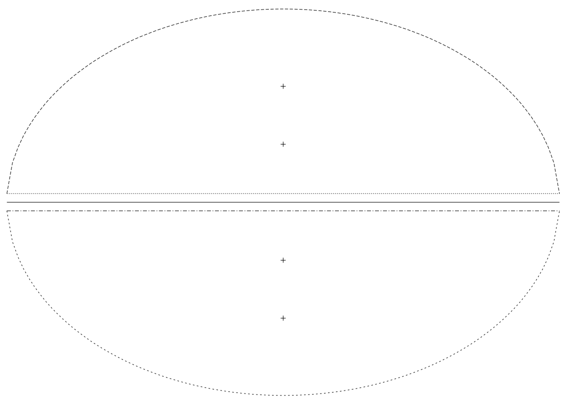
$$= 2\pi\int_0^{+\infty} dk k^2 \frac{1}{ikr}\frac{\exp[ikr]-\exp[-ikr]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} =$$

$$= -\frac{i\pi}{r}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k\exp[ikr]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dk k \frac{k\exp[-ikr]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)}\right].$$

Στο τελευταίο βήμα αξιοποιήσαμε το γεγονός ότι η ολοκληρωτέα παράσταση είναι άρτια. Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι αντίθετο του πρώτου, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k \to \tilde{k} = -k$. Αρα

$$I = -\frac{2i\pi}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k\exp[ikr]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)}.$$

Αυτό είναι ένα από τα ολοκληρώματα για τα οποία ενδείκνυται η χρήση των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα δρόμο στο μιγαδικό επίπεδο k που θα αποτελείται από το κομμάτι του πραγματικού άξονα από το $-R$ μέχρι το R και ένα ημικύκλιο με ακτίνα R. Στο τέλος θα πάρουμε το όριο $R \to +\infty$, οπότε το ολοκλήρωμα στον πραγματικό άξονα θα δώσει το ολοκλήρωμα που θέλουμε. Το θέμα είναι το ημικύκλιο να δίνει μηδενική συνεισφορά. Για ολοκληρώματα



με εκθετικό της μορφής που έχουμε εδώ, το λήμμα του Jordan εγγυάται ότι έτσι θα έχουν τα πράγματα, αν επιλέξουμε το ημικύκλιο που βρίσκεται στον θετικό φανταστικό ημιεπίπεδο, δηλαδή αυτό του οποίου όλα τα σημεία έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Αυτό το εκφράζουμε σύντομα με την όχι ακριβή, αλλά πολύ περιγραφική, έκφραση ότι κλείνουμε το μονοπάτι "από πάνω". Μετά παρατηρούμε ότι οι (απλοί) πόλοι του παρονομαστή που περικλείονται στο μονοπάτι είναι οι $+ia$ και $+ib$ και ακολουθούμε την καθιερωμένη διαδικασία:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k \exp[ikr]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} = 2\pi i \left[\frac{ia \exp[i(ia)r]}{2ia(-a^2+b^2)} + \frac{ib \exp[i(ib)r]}{2ib(-b^2+a^2)} \right],$$

οπότε κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$I \equiv \int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} = \frac{2\pi^2}{r(b^2-a^2)}[\exp(-ar) - \exp(-br)].$$

Εχοντας αυτό το αποτέλεσμα μπορεί κανείς να παραγάγει άπειρα άλλα, παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές a και b. Αν, επί παραδείγματι, παραγωγίσουμε ως προς b, το αριστερό μέλος θα μετατραπεί στην παράσταση

$$-2b \int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)^2},$$

που περιέχει ένα άλλο ενδιαφέρον ολοκλήρωμα. Η εύρεση της παραγώγου του δεξιού μέλους ως προς b είναι πολύ απλή πράξη. Αλλα ολοκληρώματα εμφανίζονται με διαφορετικές παραγωγίσεις. Δίνουμε μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα:

$$\int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{2\pi^2}{(b^2-a^2)^2} \frac{\exp(-ar) - \exp(-br)}{r} - \frac{\pi^2}{b(b^2-a^2)} \exp(-br),$$

$$\int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{k^2(k^2+b^2)^2} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{b^4} \frac{1-\exp(-br)}{r} - \frac{\pi^2}{b^3} \exp(-br),$$

$$\int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{(k^2+a^2)^2(k^2+b^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{ab(b^2-a^2)^3} \left[(b^2-a^2)[a\exp(-br) + b\exp(-ar)] \right.$$

$$\left. - \frac{4ab}{r}[\exp(-ar) - \exp(-br)] \right],$$

$$\int d^3k \frac{\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]}{k^4(k^2+b^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{24b^8 r}[48 - \exp(-br)(48 + 33br + 9(br)^2 + (br)^3)].$$

2.10 Ασκήσεις προς λύση

1. Αναπτύξτε κατά Fourier το ημιανορθωμένο ρεύμα, δηλαδή μια περιοδική συνάρτηση που στο πλαίσιο μιας περιόδου δίνεται από τη σχέση:

$$I(t) = \begin{cases} 0, -\pi \leq \omega t \leq 0 \\ I_0 \sin \omega t, 0 \leq \omega t \leq \pi. \end{cases}$$

2. Αποδείξτε ότι το ανάπτυγμα κατά Fourier της (περιοδικής) συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x), -\pi < x < 0, \\ x(\pi - x), 0 < x < \pi \end{cases}$$

δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δείξτε ότι:

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. Θεωρήστε χορδή με τα άκρα της ακλόνητα στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, της οποίας η κίνηση διέπεται από την εξίσωση:

$$\psi_{tt} = c^2 \psi_{xx} - 2\kappa \psi_t.$$

Η μορφή της εξίσωσης υποδεικνύει ότι η χορδή κινείται σε κάποιο ρευστό που ασκεί πάνω της τριβή. Η χορδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει δεδομένη αρχική παραμόρφωση $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$ και ταχύτητα $\psi_t(x, t = 0) = v_0(x)$. Να προσδιορισθεί η κίνηση της χορδής, αναπτύσσοντας την απομάκρυνση σε σειρά ημιτόνων, υποθέτοντας ότι η τριβή είναι (α) μεγάλη, (β) μικρή. Τί ακριβώς σημαίνουν τα (α) και (β) για το κ;

4. Σ' ένα ηλεκτρομαγνητικό αντηχείο η ένταση της ακτινοβολίας με συχνότητα ω_0 δίνεται από τη σχέση:

$$I(t) = A \exp\left[-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right] \exp[i\omega_0 t], t > 0, \quad I(t) = 0, t < 0,$$

όπου Q είναι ο παράγων ποιότητος, δηλαδή μια παράμετρος που ισούται με το πηλίκο της αποθηκευμένης ενέργειας προς την ενέργεια που χάνεται ανά περίοδο. Να παρασταθεί γραφικά η παράσταση $[\tilde{I}(\omega)]^* \tilde{I}(\omega)$ συναρτήσει του ω. Ποια είναι η εξάρτηση της γραφικής παράστασης από το Q;

5. Βρείτε τον ημιτονικό και τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Να υπολογιστούν επίσης τα ολοκληρώματα Fresnel: $\int_0^{+\infty} dy \cos y^2$ και $\int_0^{+\infty} dy \sin y^2$.

6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της (μη περιοδικής) συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{L}{2} < x < +\frac{L}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2}.$$

7. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |\frac{x}{2}|, & -2 < x < +2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\sin^4 y}{y^4}.$$

8. Εστω ότι ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση: $\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} \exp[-r/a_0]$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της κυματοσυνάρτησης (ο οποίος είναι χρήσιμος για τον υπολογισμό του πλάτους σκέδασης Compton και άλλων παρομοίων φαινομένων που εξαρτώνται από την κατανομή των ηλεκτρονίων στο χώρο των ορμών.)

9. Ενα ελεύθερο σωματίδιο στην Κβαντική Μηχανική περιγράφεται από το επίπεδο κύμα

$$\exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right].$$

Σχηματίζουμε τα κυματοπακέτα αθροίζοντας τέτοιες κυματοσυναρτήσεις με κατάλληλο βάρος $\phi(k)$ για κάθε ορμή:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\phi(k) \exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right].$$

Εστω ότι

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right].$$

Να υπολογιστεί το $\phi(k)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, να βρείτε την $\Psi(x,t)$. Πως εξελίσσεται αυτή η κυματοσυνάρτηση με το χρόνο;

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμός Laplace

3.1 Ορισμός

Ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{f}(s) \equiv \mathcal{L}_s[f]$ μιας συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{f}(s) \equiv \mathcal{L}_s[f] \equiv \int_0^{+\infty} dt \exp[-st] f(t).$$

Καμμιά φορά είναι χρήσιμο να αντικαθιστά κανείς τη συνάρτηση $f(t)$ με την $f(t)\Theta(t)$. Με την ευκαιρία ορίζουμε τη συνάρτηση Θήτα ή βηματική συνάρτηση:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η αντικατάσταση $f(t) \to f(t)\Theta(t)$ δεν έχει καμμιά επίδραση, αφού κινούμαστε ούτως ή άλλως στον θετικό ημιάξονα. Χρησιμεύει μόνο στο να υπενθυμίζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(t)$. Πρέπει, βέβαια, το πραγματικό μέρος του s να είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα. Επί παραδείγματι, αν $f(t) = \exp[bt]$, ο μετασχηματισμός ορίζεται μόνο για $Re[s] > b$. Η συνάρτηση $f(t)$ με τη σειρά της λέγεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $\tilde{f}(s)$ και συμβολίζεται ως εξής: $f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}[\tilde{f}(s)]$.

3.1.1 Παραδείγματα

Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων συναρτήσεων που εμφανίζονται συχνά σε φυσικές εφαρμογές.

1. $f(t) = 1 \to \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st]1 = \frac{1}{s}$.

2. $f(t) = t^n \to \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st]t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

3. $f(t) = \exp[-ct] \to \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st]\exp[-ct] = \frac{1}{s+c}$. Το c μπορεί να είναι και μιγαδικός αριθμός, $c = a + ib$, οπότε μπορούμε να βγάλουμε νέα συμπεράσματα, παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό κομμάτι της σχέσης:

4. $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st]\exp[-at](\cos bt - i \sin bt) = \frac{1}{s+a+ib}$, οπότε, αν $f_R(t) \equiv \exp[-at]\cos bt$, ο μετασχηματισμός θα είναι: $\tilde{f}_R(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$. Αντίστοιχα, αν $f_I(t) \equiv \exp[-at]\sin bt$, ο μετασχηματισμός θα είναι: $\tilde{f}_I(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$.

5. Εξειδικεύοντας στις περιπτώσεις $a = 0$ και $b = 0$ βρίσκουμε τις πολύ χρήσιμες σχέσεις:

$$\mathcal{L}_s[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}_s[\sin bt] = \frac{b}{s^2+b^2},$$

$$\mathcal{L}_s[\exp[-at]] = \frac{1}{s+a}.$$

6. Εστω ότι θέλουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ενός πηλίκου πολυωνύμων που μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$\tilde{f}(s) = \sum_k \frac{A_k}{s+r_k} + \sum_n \frac{B_n + C_n s}{(s+a_n)^2 + b_n^2} =$$

$$= \sum_k \frac{A_k}{s+r_k} + \sum_n \frac{B_n - C_n a_n}{b_n} \frac{b_n}{(s+a_n)^2 + b_n^2} + \sum_n C_n \frac{s+a_n}{(s+a_n)^2 + b_n^2}.$$

Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να συμπεράνουμε απευθείας ότι

$$f(t) = \sum_k A_k \exp[-r_k t] + \sum_n \frac{B_n - C_n a_n}{b_n} \exp[-a_n t] \sin b_n t +$$

$$+ \sum_n C_n \exp[-a_n t] \cos b_n t.$$

3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες που διευκολύνουν στον υπολογισμό του μετασχηματισμού. Οι αποδείξεις είναι απλές και βασίζονται, ως επί το πλείστον, στον ορισμό.

1.

$$\mathcal{L}_s[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}_s[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}_s[f_2(t)].$$

Με βάση αυτήν την ιδιότητα και τους γνωστούς μετασχηματισμούς κάποιων υποπαραστάσεων, μπορούμε να βρούμε αμέσως ότι ο μετασχηματισμός της συνάρτησης $7t^6 - 13\exp[5t]$ είναι ο $7\frac{6!}{s^7} - 13\frac{1}{s-5}$.

2.

$$\mathcal{L}_s[\exp[ct] f(t)] = \tilde{f}(s-c) \equiv \mathcal{L}_{s-c}[f].$$

Για παράδειγμα, από το $\mathcal{L}_s[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathcal{L}_s[\exp[-at] \cos bt] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2},$$

σε συμφωνία με τον τύπο που ήδη δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

3.

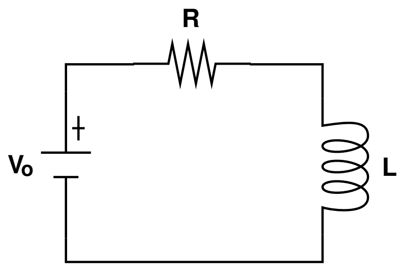
$$\mathcal{L}_s[\Theta(t-c) f(t-c)] = \exp[-cs] \mathcal{L}_s[f(t)].$$

Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός της συνάρτησης $\Theta(t - \frac{\pi}{6}) \cos(t - \frac{\pi}{6})$ είναι $\exp[-\frac{\pi}{6} s] \frac{s}{s^2+1}$. Αντίστροφα, αν $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s}$, οπότε $\mathcal{L}_t^{-1}[\tilde{f}[s]] = 1$, θα ισχύει: $\mathcal{L}_t^{-1}[\frac{\exp[-cs]}{s}] = \Theta(t-c)$.

4.
$$\mathcal{L}_s[f(ct)] = \frac{1}{c}\tilde{f}(\frac{s}{c}) = \frac{1}{c}\mathcal{L}_{\frac{s}{c}}[f(t)],$$
οπότε $\mathcal{L}_s[\sin(\omega t)] = \frac{1}{\omega}\frac{1}{(\frac{s}{\omega})^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

5. Αν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ είναι εύκολο να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της. Πράγματι, με παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε:
$$\mathcal{L}_s[f'] \equiv \int_0^{+\infty} dt \exp[-st] f'(t) =$$
$$= f(t)\exp[-st]|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} d(\exp[-st])f(t) =$$
$$= f(+\infty)\exp[-s\cdot(+\infty)]| - f(0)\exp[-s\cdot 0] + s\int_0^{+\infty} dt(\exp[-st])f(t),$$
δηλαδή
$$\mathcal{L}_s[f'] = s\mathcal{L}_s[f] - f(0) = s\tilde{f}(s) - f(0).$$
Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την ίδια διαδικασία μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις παραγώγους ανωτέρων τάξεων. Τα αποτελέσματα είναι:
$$\mathcal{L}_s[f''] = s^2\mathcal{L}_s[f] - sf(0) - f'(0) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$
και γενικά:
$$\mathcal{L}_s[f^{(n)}] = s^n\mathcal{L}_s[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$
Πρέπει να επισημάνουμε ότι ο αντίστοιχος τύπος για τον μετασχηματισμό Fourier δεν έχει όρο αντίστοιχο με τους $f(0), f'(0), \ldots$, αλλά τέτοιοι όροι υπάρχουν στον ημιτονικό και τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier. Ο λόγος είναι ότι οι δύο τελευταίοι, όπως και ο μετασχηματισμός Laplace, ορίζονται με μια ολοκλήρωση που εκτείνεται από το μηδέν ως το άπειρο, ενώ η αντίστοιχη ολοκλήρωση του συνηθισμένου μετασχηματισμού Fourier εκτείνεται από $-\infty$ μέχρι $+\infty$ και αυτό, μαζί με την υπόθεση ότι όλες οι συναρτήσεις μηδενίζονται αρκετά γρήγορα σ΄ αυτά τα όρια, δεν επιτρέπει την εμφάνιση τέτοιων όρων.

6. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορεί κανείς να αποδείξει τα θεωρήματα της αρχικής και της τελικής τιμής:
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s\tilde{f}(s)], \quad \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s\tilde{f}(s)].$$
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα κύκλωμα με μια πηγή συνεχούς V_0, μια αντίσταση R κι ένα πηνίο L με την αρχική συνθήκη $I(0) = 0$. Η λύση για το ρεύμα είναι $\tilde{I}(s) = \frac{V_0}{s(sL+R)}$ στο χώρο των s και $I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - \exp[-\frac{R}{L}t])$ συναρτήσει του t. Παρατηρούμε ότι πράγματι, το όριο του $s\tilde{I}(s)$ καθώς $s \to 0$, δεν είναι άλλο από το $\frac{V_0}{R}$, που συμπίπτει με το όριο του $I(t)$ καθώς $t \to \infty$. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε την τελική τιμή του ρεύματος και χωρίς να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $I(t)$ του $\tilde{I}(s)$. Επίσης μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το όριο του $s\tilde{I}(s)$ καθώς $s \to +\infty$ δίνει την τιμή μηδέν, όπως πρέπει.



7.
$$\mathcal{L}_s[tf(t)] = -\tilde{f}'(s), \quad \mathcal{L}_s[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n \tilde{f}}{ds^n}.$$

Για παράδειγμα, $\mathcal{L}_s[t\cos(\omega t)] = -\frac{d\mathcal{L}_s[\cos(\omega t)]}{ds} = -\frac{d}{ds}[\frac{s}{s^2+\omega^2}] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$. Αυτές οι σχέσεις είναι χρήσιμες όταν θέλει κανείς να λύσει προβλήματα που περιέχουν εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές. Πολύ συχνά οι μεταβλητοί συντελεστές είναι δυνάμεις (ή αθροίσματα δυνάμεων) της ανεξάρτητης μεταβλητής (t) που πολλαπλασιάζουν την άγνωστη συνάρτηση ή τις παραγώγους της.

8.
$$\mathcal{L}_s\left[\int_0^t dt' f(t')\right] = \frac{\mathcal{L}_s[f]}{s}.$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα ηλεκτρικών κυκλωμάτων που περιέχουν πυκνωτές. Τότε η τάση στα άκρα του πυκνωτή ισούται με το φορτίο δια τη χωρητικότητα, δηλαδή με $\frac{\int_0^t dt' I(t')}{C}$ και ο μετασχηματισμός του γράφεται: $\frac{\tilde{I}(s)}{sC}$. (Το φορτίο του πυκνωτή δίδεται γενικά από τη σχέση $Q(0) + \int_0^t dt' I(t')$, όπου $Q(0)$ είναι το τυχόν αρχικό φορτίο που έχει ο πυκνωτής τη χρονική στιγμή $t = 0$. Εδώ έχουμε υποθέσει ότι $Q(0)$.)

9.
$$\mathcal{L}_s\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} ds' \tilde{f}(s').$$

Παράδειγμα:
$$\mathcal{L}_s\left[\frac{\sin(\omega t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} ds' \mathcal{L}_{s'}[\sin \omega t] =$$
$$= \int_s^{+\infty} ds' \frac{\omega}{s'^2 + \omega^2} = \arctan \frac{s'}{\omega}\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\omega} = \arctan \frac{\omega}{s}.$$

3.3 Συνέλιξη

Η συνέλιξη εδώ ορίζεται με ανάλογο τρόπο όπως στο κεφάλαιο των μετασχηματισμών Fourier:
$$f = g * h \Leftrightarrow f(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt' g(t-t') h(t').$$

Πρόκειται, δηλαδή, για το ίδιο ακριβώς μαθηματικό αντικείμενο. Αναφέρεται στη βιβλιογραφία και μια άλλη μορφή του ορισμού. Ο λόγος ύπαρξης του εναλλακτικού ορισμού είναι ότι στους μετασχηματισμούς Laplace δεν μας ενδιαφέρει η συνάρτηση για αρνητικά t, οπότε συνήθως θεωρεί κανείς ότι $f(t) = g(t) = h(t) = 0$ για $t < 0$, ή χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις:
$$\Theta(t)f(t), \quad \Theta(t)g(t), \quad \Theta(t)h(t).$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις ο προηγούμενος ορισμός μπορεί να γραφτεί:

$$f = g * h \Leftrightarrow f(t) \equiv \int_0^t dt' g(t-t')h(t').$$

Αυτή η μορφή είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη. Μπορεί κανείς να έχει υπόψη τον εναλλακτικό ορισμό, αλλά το καλύτερο είναι να θυμάται τον πρώτο ορισμό, ώστε να μη θυμάται δύο ορισμούς για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει και για τους μετασχηματισμούς Laplace:

$$\mathcal{L}_s[f(t)] \equiv \int_0^{+\infty} dt \exp[-st] f(t) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st] \int_0^t dt' g(t-t')h(t') =$$

$$= \int_0^t dt' h(t') \int_{t=t'}^{+\infty} dt \exp[-st] g(t-t').$$

Είναι άξιο παρατήρησης ότι κατά την εναλλαγή της σειράς των ολοκληρώσεων το σημαντικό είναι να σεβαστούμε την ανισότητα $t' < t$ που επιβάλλεται από το γεγονός ότι στη δεύτερη έκφραση το t' ολοκληρώνεται από το 0 μέχρι το t. Γι' αυτό στην τρίτη έκφραση έχουμε επιβάλλει το t' ως κάτω όριο της ολοκλήρωσης ως προς t. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $t'' \equiv t - t'$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{L}_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} dt' h(t') \int_{t''=0}^{+\infty} dt'' \exp[-s(t'+t'')] g(t'') =$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} dt' \exp[-st'] h(t')\right] \left[\int_0^{+\infty} dt'' \exp[-st''] h(t'')\right] = \mathcal{L}_s[g(t)] \mathcal{L}_s[h(t)].$$

Δηλαδή:

$$\mathcal{L}_s[g * h] = \mathcal{L}_s[g] \mathcal{L}_s[h],$$

που δεν είναι άλλο από το θεώρημα της συνέλιξης για τον μετασχηματισμό Laplace.

3.4 Σχέση των μετασχηματισμών Fourier και Laplace

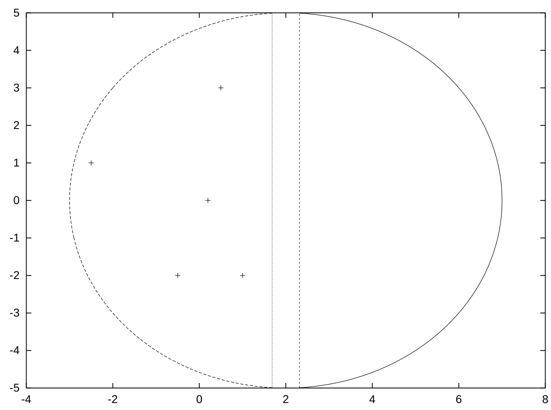
Ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[i\omega t] \tilde{f}(\omega), \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[-i\omega t] f(t).$$

Στα προηγούμενα υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $\tilde{f}(\omega)$ μηδενίζονται αρκετά γρήγορα καθώς τα αντίστοιχα ορίσματα τείνουν στο άπειρο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια συνάρτηση $g(t)$ που δεν μηδενίζεται στο $+\infty$, άρα δεν έχει μετασχηματισμό Fourier. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μιαν άλλη συνάρτηση που σχετίζεται με την $g(t)$, την $g(t)\exp[-\sigma t]$, η οποία για αρκετά μεγάλο θετικό σ περιμένουμε ότι θα συγκλίνει καθώς το t τείνει στο $+\infty$. Θεωρούμε ακόμη ότι για κάποιο λόγο μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης $g(t)$ μόνο για θετικά t. Για παράδειγμα, κάποιο κύκλωμα μπορεί να κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ και να μελετάμε την εξέλιξη του κυκλώματος από αυτή τη στιγμή και μετά. Με αυτό το σκεπτικό, αντί για τη συνάρτηση $g(t)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$f(t) = 2\pi\Theta(t) g(t) \exp[-\sigma t].$$



Σχήμα 3.1: Δρόμος ολοκλήρωσης με $\sigma = 2$ και ακτίνα 5.

(Ο παράγοντας 2π δεν έχει καμμιά ιδιαίτερη σημασία). Αυτή έχει μετασχηματισμό Fourier και οι σχετικές εξισώσεις γράφονται:

$$2\pi\Theta(t)g(t)\exp[-\sigma t] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[i\omega t]\tilde{f}(\omega),$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[-i\omega t]2\pi\Theta(t)g(t)\exp[-\sigma t].$$

Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη εξίσωση το αριστερό μέλος στην πραγματικότητα δεν εξαρτάται μόνο από το ω αλλά και από το σ. Ακριβέστερα εξαρτάται από τον συνδυασμό $\sigma + i\omega$. Με αυτήν την παρατήρηση οι εξισώσεις γράφονται:

$$\Theta(t)g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[(\sigma + i\omega)t]\tilde{g}(\sigma + i\omega),$$

$$\tilde{g}(\sigma + i\omega) = \int_{t=0}^{+\infty} dt \exp[-(\sigma + i\omega)t]g(t).$$

Σημειωτέον ότι αλλάξαμε το συμβολισμό της μετασχηματισμένης συνάρτησης από $\tilde{f}(\omega)$ σε $\tilde{g}(\sigma + i\omega)$ και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\Theta(t) = 0$ για $t < 0$ για να περιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης. Τέλος εισάγουμε τον συμβολισμό

$$s \equiv \sigma + i\omega \to ds = id\omega$$

και γράφουμε τις σχέσεις στην τελική τους μορφή:

$$\Theta(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \exp[st]\tilde{g}(s), \quad \tilde{g}(s) = \int_{t=0}^{+\infty} dt \exp[-st]g(t).$$

Τα όρια ολοκλήρωσης έχουν αλλάξει μια και ολοκληρώνουμε πια στη μεταβλητή $s \equiv \sigma + i\omega$ και όχι απλά στην ω. Η ολοκλήρωση γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο s σε μια γραμμή παράλληλη στον φανταστικό άξονα. Αυτή είναι μια πιο γενική έκφραση του μετασχηματισμού Laplace από εκείνη με την οποία ξεκινήσαμε. Στο σχήμα δείχνουμε ένα δρόμο στο μιγαδικό επίπεδο για την περίπτωση που το σ είναι 2 και η ακτίνα του ημικυκλίου είναι 5. Φυσικά, στην πορεία η ακτίνα υποτίθεται ότι αφήνεται να απειριστεί. Επίσης στο σχήμα δείχνουμε και μερικούς πόλους. Αν $t < 0$ και συμπληρώσουμε το δρόμο στο μιγαδικό επίπεδο του s μ' ένα ημικύκλιο που κλείνει από δεξιά (ώστε να μηδενίζεται η έκφραση $\exp[st]\tilde{g}(s)$ στο άπειρο) η ολοκλήρωση πρέπει να δίνει μηδέν, για να είναι συμβιβαστή με την παρουσία της συνάρτησης $\Theta(t)$ στο αριστερό μέλος. Αυτό με τη σειρά του μας δείχνει ότι για να παίρνουμε συμβιβαστά αποτελέσματα, δεν πρέπει να υπάρχουν πόλοι δεξιά από την κατακόρυφη γραμμή στο σ. Αυτή είναι η συνθήκη που προσδιορίζει σ΄ αυτήν τη γλώσσα την αναγκαία τιμή του σ. Δηλαδή το σ είναι αρκετά μεγάλο (και το ολοκλήρωμα υπάρχει) με την προϋπόθεση ότι στα δεξιά της σχετικής κατακόρυφης γραμμής $(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ στο μιγαδικό επίπεδο του s δεν απομένουν πόλοι. Με αυτήν την γενικευμένη αναπαράσταση του μετασχηματισμού του Laplace μπορούμε να αναπαραστήσουμε και συναρτήσεις όπως η $g(t)$, για τις οποίες μπορεί να μην ορίζεται ο συνηθισμένος μετασχηματισμός Fourier. Είναι επί πλέον φανερή η σχέση των δύο μετασχηματισμών.

3.5 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Οταν λύνει κανείς προβλήματα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace καταλήγει (σχετικά εύκολα) στον μετασχηματισμό Laplace $\tilde{y}(s)$ της ζητούμενης λύσης $y(t)$ και ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα είναι η αντιστροφή του μετασχηματισμού, δηλαδή η εύρεση της $y(t)$ από την $\tilde{y}(s)$. Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου δίνουν τα εργαλεία για αυτή την εργασία. Η σχέση που δίνει κατ΄ αρχήν τη συνάρτηση $g(t)$ συναρτήσει της $\tilde{g}(s)$ είναι η πορεία είναι η ολοκληρωτική αναπαράσταση που ήδη αναφέραμε, δηλαδή η:

$$\Theta(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \exp[st]\tilde{g}(s). \tag{3.1}$$

Η (3.1) λέγεται ολοκληρωτική αναπαράσταση του Bromwich.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος στην πράξη γίνεται με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Δίνουμε ένα αρκετά γενικό παράδειγμα. Εστω ότι η συνάρτηση $\tilde{g}(s)$ γράφεται με τη μορφή:

$$\tilde{g}(s) = \sum_k \frac{\tilde{g}_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}},$$

όπου οι συναρτήσεις $\tilde{g}_k(s)$ δεν μηδενίζονται, ούτε απειρίζονται στο $s = s_k$ και n_k είναι η πολλαπλότητα του πόλου σ΄ αυτό το σημείο (υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες ανωμαλίες). Τότε μπορούμε, για θετικά t, να συμπληρώσουμε την κατακόρυφη γραμμή με ένα ημικύκλιο στο μιγαδικό επίπεδο s που κλείνει από αριστερά (βλέπε το σχήμα) και να χρησιμοποιήσουμε το ισχυρό εργαλείο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (ο κλειστός δρόμος πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που σχηματίζεται έτσι λέγεται διαδρομή του Bromwich):

$$\Theta(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\sum_k Res[\exp[st]\tilde{f}(s)]_{s_k} =$$

$$= \sum_k \left[\frac{1}{(n_k-1)!}\left.\frac{d^{n_k-1}\exp[st]\tilde{g}_k(s)}{ds^{n_k-1}}\right|_{s=s_k}\right]$$

Πολύ συχνά στην πράξη, αντί να ακολουθήσει κανείς αυτή τη διαδικασία, καταφεύγει σε πίνακες μετασχηματισμών Laplace και προσδιορίζει τους αντιστρόφους μετασχηματισμούς με τη βοήθεια και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού. Για τις συνηθισμένες περιπτώσεις είναι πολύ χρήσιμο να θυμάται κανείς τους μετασχηματισμούς βασικών συναρτήσεων (δύναμης, εκθετικού, ημιτόνου, συνημιτόνου) που δόθηκαν στην αρχή αυτού του κεφαλαίου.

3.6 Μετασχηματισμός Laplace περιοδικής συνάρτησης

Εστω ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T :

$$f(t) = \phi(t), t \in [0, T], \quad f(t+T) = f(t).$$

Τότε:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} dt \exp[-st] f(t) =$$

$$= \int_0^T dt \exp[-st] f(t) + \int_T^{2T} dt \exp[-st] f(t) + \ldots =$$

$$= \int_0^T dt \exp[-st]\phi(t) + \int_{t'=0}^T d(t'+T) \exp[-s(t'+T)] f(t'+T) + \ldots =$$

$$= \int_0^T dt \exp[-st]\phi(t) + \exp[-sT] \int_{t'=0}^T dt' \exp[-st']\phi(t') + \ldots$$

Στο προηγούμενο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $f(t'+T) = f(t') = \phi(t')$. Συνεχίζουμε, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\tilde{\phi}(s) \equiv \int_0^T dt \exp[-st]\phi(t)$:

$$\tilde{f}(s) = \tilde{\phi}(s) + \exp[-sT]\tilde{\phi}(s) + \ldots =$$

$$= (1 + \exp[-sT] + \exp[-2sT] + \ldots)\tilde{\phi}(s) =$$

$$= \frac{1}{1 - \exp[-sT]}\tilde{\phi}(s).$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{f}(s)$ της περιοδικής συνάρτησης $f(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}_s[f] \equiv \tilde{f}(s) = \frac{1}{1 - \exp[-sT]}\tilde{\phi}(s).$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός πρέπει να δίνει την αρχική συνάρτηση. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, σύμφωνα με τη σχέση (3.1), προκύπτει από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\frac{\tilde{\phi}(s)\exp[st]}{1-\exp[-sT]}$. Στην αντιστροφή με ολοκληρωτικά υπόλοιπα θα χρειαστούμε τους πόλους του παρονομαστή. Οι πόλοι του $1 - \exp[-sT]$ βρίσκονται στις θέσεις s_n για τις οποίες $\exp[-s_n T] = 1$, άρα $s_n = n\frac{2\pi i}{T}$ με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:

$$\lim_{s \to s_n} (s - s_n) \frac{\tilde{\phi}(s)\exp[st]}{1 - \exp[-sT]} = \tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]\left[\lim_{s \to s_n} \frac{s - s_n}{1 - \exp[-sT]}\right].$$

Το όριο της απροσδιόριστης μορφής υπολογίζεται με τους κανόνες του de l' Hospital:

$$\tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]\frac{1}{\frac{d(1-\exp[-sT])}{ds}|_{s_n}}$$

$$= -\tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]\left[\left.\frac{d\exp[-sT]}{ds}\right|_{s_n}\right]^{-1} =$$

$$= -\tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]\left[-T\exp[-s_n T]\right]^{-1} =$$

$$= \frac{\tilde{\phi}(s_n)}{T}\exp[s_n t]\exp[s_n T] = \frac{\tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]}{T},$$

αφού $\exp[s_n T] = 1$. Συμπεραίνουμε ότι:

$$\Theta(t)f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \frac{\tilde{\phi}(s)}{1-\exp[-sT]}\exp[st] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}2\pi i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}(s_n)\exp[s_n t]}{T} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{\phi}\left(\frac{2\pi i n}{T}\right)\exp\left[i\frac{2\pi n t}{T}\right] \to$$

$$\to \Theta(t)f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\tilde{\phi}\left(\frac{2\pi i n}{T}\right)\exp\left[i\frac{2\pi n t}{T}\right].$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\tilde{\phi}(s) = \int_0^T dt \exp[-st]\phi(t)$, οπότε

$$\frac{1}{T}\tilde{\phi}\left(i\frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T}\int_0^T dt \exp\left[-i\frac{2\pi n t}{T}\right]\phi(t).$$

Αν κάνουμε τις ταυτοποιήσεις: $\frac{1}{T}\tilde{\phi}(i\frac{2\pi n}{T}) \to c_n, \quad T \to 2L, \quad t \to x$, οι σχέσεις γράφονται με τη μορφή:

$$\Theta(x)f(x) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left[i\frac{\pi n x}{L}\right], x > 0,$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} dx f(x)\exp\left[-i\frac{\pi n x}{L}\right],$$

δηλαδή καταλήγουμε στη σειρά του Fourier. Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $\tilde{f}(s)$ δίνει πράγματι την $f(t)$ αλλά με τη μορφή της σειράς Fourier που την εκφράζει.

3.7 Διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Η βασική χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι η λύση διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Οι αρχικές συνθήκες ενσωματώνονται αυτόματα στη λύση. Δίνουμε μερικά παραδείγματα.

3.7.1 Αρμονικός ταλαντωτής

Είναι γνωστό ότι ο εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής με τριβή διέπεται από την εξίσωση:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Gamma\frac{dx}{dt} + kx = F(t).$$

Θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

Η εξίσωση, με τους συμβολισμούς $\gamma \equiv \frac{\Gamma}{m}, \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}$, γράφεται:

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t).$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της ισότητας:

$$\mathcal{L}_s[x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t)] = \mathcal{L}_s[f(t)].$$

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\tilde{x}(s) \equiv \mathcal{L}_s[x(t)], \tilde{f}(s) \equiv \mathcal{L}_s[f(t)]$ και τις ισότητες $\mathcal{L}_s[x'(t)] = s\tilde{x}(s) - x(0), \mathcal{L}_s[x''(t)] = s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - x'(0)$ και βρίσκουμε τη σχέση:

$$[s^2\tilde{x}(s) - sx(0) - x'(0)] + 2\gamma[s\tilde{x}(s) - x(0)] + \omega_0^2\tilde{x}(s) = \tilde{f}(s).$$

Βλέπουμε εδώ τη μεγάλη ευκολία που παρέχει ο μετασχηματισμός Laplace: η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε μια απλή αλγεβρική εξίσωση. Παρόμοια φαινόμενα είδαμε και στον μετασχηματισμό Fourier. Είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Τώρα χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και καταλήγουμε στην

$$[s^2\tilde{x}(s) - sx_0 - v_0] + 2\gamma[s\tilde{x}(s) - x_0] + \omega_0^2\tilde{x}(s) = \tilde{f}(s) \to$$

$$\to \tilde{x}(s) = \frac{v_0 + 2\gamma x_0 + x_0 s}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} + \frac{\tilde{f}(s)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2}.$$

Θα ονομάσουμε $\tilde{x}_1(s)$ τον πρώτο όρο και $\tilde{x}_2(s)$ τον δεύτερο. Το πρόβλημα έχει κατ΄ αρχήν λυθεί, αλλά επιβάλλεται η επιστροφή στην εξάρτηση από το t, δηλαδή πρέπει να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $\tilde{x}(s)$. Θα βρούμε χωριστά τους αντίστροφους των $\tilde{x}_1(s)$ και $\tilde{x}_2(s)$ υποθέτοντας ότι $\omega_0 > \gamma$. Θεωρούμε πρώτα το $\tilde{x}_1(s)$. Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι

$$s_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\omega,$$

όπου $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\tilde{x}_1(s) = \frac{r_+}{s - s_+} + \frac{r_-}{s - s_-},$$

όπου

$$r_+ = \frac{v_0 + 2\gamma x_0 + x_0 s_+}{s_+ - s_-}, \quad r_- = \frac{v_0 + 2\gamma x_0 + x_0 s_-}{s_- - s_+},$$

(δηλαδή τα r_+, r_- είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στους αντίστοιχους πόλους) οπότε

$$x_1(t) = r_+ \exp[s_+ t] + r_- \exp[s_- t] = \exp[-\gamma t][r_+ \exp[i\omega t] + r_- \exp[-i\omega t]].$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τα r_+, r_- με τα ίσα τους βρίσκουμε:

$$x_1(t) = \exp[-\gamma t]\left[x_0 \cos\omega t + (v_0 + \gamma x_0)\frac{\sin\omega t}{\omega}\right].$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η έκφραση δεν έχει καμμιά σχέση με την εξωτερική διέγερση (επί παραδείγματι, η έκφραση $\tilde{f}(s)$ δεν υπάρχει πουθενά). Αυτό το μέρος της λύσης μας έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες και τις ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος.

Για να υπολογίσουμε το $\tilde{x}_2(s)$ πρέπει να ξέρουμε λεπτομέρειες για την εξωτερική διέγερση $f(t)$. Ας υποθέσουμε ότι το $\tilde{f}(s)$ έχει μια σειρά από πόλους s_n και s_n^* με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα r_n και r_n^*. (Οι πόλοι και τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα θα εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών, λόγω του ότι η αντίστοιχη $f(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση). Ο αντίστροφος θα έχει συνεισφορές από δύο πηγές, δηλαδή (1) από τους πόλους s_n :

$$\sum_n \left(\frac{r_n}{s_n^2 + 2\gamma s_n + \omega_0^2}\exp[s_n t] + \frac{r_n^*}{s_n^{*2} + 2\gamma s_n^* + \omega_0^2}\exp[s_n^* t]\right)$$

και (2) από τους πόλους $s_\pm$:

$$\frac{f(s_+)}{s_+ - s_-}\exp[s_+ t] + \frac{f(s_-)}{s_- - s_+}\exp[s_- t].$$

Δηλαδή

$$x_2(t) = \sum_n \left(\frac{r_n}{s_n^2 + 2\gamma s_n + \omega_0^2} \exp[s_n t] + \frac{r_n^*}{s_n^{*2} + 2\gamma s_n^* + \omega_0^2} \exp[s_n^* t] \right) +$$

$$+ \frac{f(s_+)}{s_+ - s_-} \exp[s_+ t] + \frac{f(s_-)}{s_- - s_+} \exp[s_- t].$$

Οι όροι που περιέχουν τα $s_\pm$ σβήνουν με το χρόνο, όπως είδαμε και στην περίπτωση του $x_1(t)$. Οι μόνοι όροι που μπορούν να συνεισφέρουν στη μόνιμη κατάσταση είναι οι όροι με τα s_n, s_n^* στην περίπτωση που (για κάποιο συγκεκριμένο $n = N$) είναι φανταστικοί αριθμοί. Σ′ αυτήν την περίπτωση η συνεισφορά στη συνάρτηση $f(t)$ θα είναι περιοδική. Ας επικεντρώσουμε σ′ αυτήν την περίπτωση: $s_N = i\omega_N, r_N = \rho_N \exp[i\phi_N]$. Η συνεισφορά στη μόνιμη κατάσταση θα είναι:

$$\frac{\rho_N \exp[i\phi_N]}{-\omega_N^2 + 2i\gamma\omega_N + \omega_0^2} \exp[i\omega_N t] + \frac{\rho_N \exp[-i\phi_N]}{-\omega_N^2 - 2i\gamma\omega_N + \omega_0^2} \exp[-i\omega_N t] =$$

$$= \frac{2\rho_N}{(\omega_0^2 - \omega_N^2)^2 + 4\gamma^2\omega_N^2} \left[(\omega_0^2 - \omega_N^2) \cos(\omega_N t + \phi_N) + 2\gamma\omega_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \right].$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η συνιστώσα της πηγής δίνει μια μόνιμη συνεισφορά, δηλαδή συνεισφορά που δεν σβήνει με το χρόνο. Ενα πολύ ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που βλέπουμε εδώ είναι ο τρόπος με τον οποίο από τον μετασχηματισμό του Laplace μπορεί κανείς να πάρει περιοδικές λύσεις, κάτι που συνήθως χαρακτηρίζει τον μετασχηματισμό Fourier.

3.7.2 Μεταβατικά φαινόμενα σε κυκλώματα

Ο μετασχηματισμός του Laplace είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό της απόκρισης κυκλωμάτων σε τάσεις που επιβάλλονται σε ορισμένα σημεία τους. Αυτές οι τάσεις αρχίζουν να εφαρμόζονται κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, που ονομάζεται συμβατικά $t = 0$, και η εξέλιξη του συστήματος περιλαμβάνει αφ′ ενός όρους που σβήνουν με το χρόνο και επομένως θα πάψουν να υπάρχουν αν περιμένουμε αρκετά, αφ′ ετέρου όρους που θα επιζήσουν οσοδήποτε μεγάλο χρονικό διάστημα και αν περάσει και αντιπροσωπεύουν τη μόνιμη κατάσταση. Η μελέτη που γίνεται με αρχή την υπόθεση ότι όλες οι τάσεις και τα ρεύματα είναι ημιτονικά (με ενδεχομένως διαφορετικές φάσεις) μπορεί να εξετάσει μόνο μια ειδική περίπτωση της μόνιμης κατάστασης (εκείνη που οι εξωτερικές διεγέρσεις είναι ημιτονικές με συγκεκριμένη συχνότητα). Δεν μπορεί όμως να ελέγξει το πρώτο είδος όρων (τους μεταβατικούς), ενώ και η μελέτη της μόνιμης κατάστασης μ′ αυτόν τον τρόπο είναι δύσχρηστη. Εδώ ακριβώς είναι χρήσιμος ο μετασχηματισμός του Laplace.

Η τακτική είναι να γράφει κανείς τις εξισώσεις του Kirchhoff και στη συνέχεια να τις μετασχηματίζει κατά Laplace. Συνήθως η εξαρτημένη μεταβλητή που χρησιμοποιείται είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος. Για τις ωμικές αντιστάσεις η πτώση τάσης είναι $RI(t)$, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace ενός τέτοιου όρου θα είναι $R\tilde{I}(s)$. Οι επαγωγικές αντιστάσεις περιλαμβάνουν όρους της μορφής $L\frac{dI}{dt}$, οπότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace είναι $L[s\tilde{I}(s) - I(0)]$. Τέλος οι χωρητικές αντιστάσεις περιλαμβάνουν όρους της μορφής $\frac{Q(0)+\int_0^t dt' I(t')}{C}$, αφού η τάση στα άκρα του πυκνωτή οφείλεται αφ′ ενός στο τυχόν φορτίο που είχε ο πυκνωτής αυτός τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφ′ ετέρου στο φορτίο που εναποτέθηκε στους οπλισμούς του λόγω της ροής του ρεύματος $I(t')$ από τη χρονική στιγμή $t' = 0$ μέχρι την $t' = t$. Βάσει των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός τέτοιων όρων είναι $\frac{Q(0)+\tilde{I}(s)}{sC}$.

Παράδειγμα 1: Κύκλωμα RL

Για να δούμε πώς δουλεύει η μέθοδος θα μελετήσουμε το παράδειγμα ενός απλού κυκλώματος που αποτελείται από μια αντίσταση και ένα πηνίο.

Τη χρονική στιγμή μηδέν το κύκλωμα διαρρέεται από το ρεύμα I_0. Ζητείται η εξέλιξη του ρεύματος με το χρόνο. Ο νόμος του Kirchhoff γράφεται:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που διέπει το κύκλωμα, ενώ η αρχική συνθήκη είναι η $I(0) = I_0$. Βεβαίως, η λύση του προβλήματος είναι πολύ απλή, αλλά ο σκοπός του παραδείγματος είναι να δείξει τη χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό της εξίσωσης βρίσκουμε:

$$L\mathcal{L}_s[I'(t)] + R\mathcal{L}_s[I(t)] = 0 \to L[s\tilde{I}(s) - I(0)] + R\tilde{I}(s) = 0 \to$$

$$\to L[s\tilde{I}(s) - I_0] + R\tilde{I}(s) = 0 \to \tilde{I}(s) = \frac{LI_0}{Ls+R} = \frac{I_0}{s+\frac{R}{L}}.$$

Από αυτή την έκφραση είναι εύκολο να βρούμε ότι

$$I(t) = I_0 \exp\left[-\frac{Rt}{L}\right].$$

Παράδειγμα 2: Κύκλωμα RLC

Θεωρούμε το κύκλωμα των τριών στοιχείων R, L, C σε σειρά υπό την επίδραση μιας πηγής τάσης $V(t)$.

Η εξίσωση του Kirchhoff γράφεται

$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) + \frac{Q(0) + \int_0^t dt' I(t')}{C} = V(t).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης κατά τα προηγούμενα:

$$L[s\tilde{I}(s) - I(0)] + R\tilde{I}(s) + \frac{Q(0) + \tilde{I}(s)}{sC} = \tilde{V}(s) \to$$

$$\to [Ls + R + \frac{1}{sC}]\tilde{I}(s) = \tilde{V}(s) + LI(0) - \frac{Q(0)}{sC} \to$$

$$\to \tilde{I}(s) = \frac{\tilde{V}(s)}{Ls + R + \frac{1}{sC}} + \frac{LI(0) - \frac{Q(0)}{sC}}{Ls + R + \frac{1}{sC}}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $Q(0) = 0, I(0) = 0$, βλέπουμε ότι το ρεύμα $\tilde{I}(s)$ ισούται με την τάση $\tilde{V}(s)$ δια την ποσότητα $Z(s) \equiv Ls + R + \frac{1}{sC}$, που λέγεται εμπέδηση, έτσι ώστε ο νόμος να μοιάζει με τον νόμο του Ohm. Η παράσταση για την εμπέδηση θυμίζει έντονα την αντίστοιχη για την περίπτωση της μόνιμης κατάστασης. Συγκεκριμένα, αν θέσει κανείς $s = i\omega$, η $Z(s)$ μεταπίπτει στην εμπέδηση της μόνιμης κατάστασης. Πάντως η $Z(s)$ έχει να κάνει με γενικότερες καταστάσεις απ΄ ό,τι η μόνιμη συμπεριφορά. Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή της μεθόδου θα πούμε ότι πρέπει, αφού προσδιορίσουμε το $\tilde{I}(s)$, να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, ώστε να καταλήξουμε στο $I(t)$. Σημειώνουμε ότι εδώ δεν χρειάζεται το κάπως τεχνητό βήμα του να θεωρήσουμε το μιγαδικό ρεύμα ή διαφορά δυναμικού και μετά να πάρουμε το πραγματικό ή το

φανταστικό μέρος (όπως κάναμε στο μετασχηματισμό Fourier). Τα πράγματα εξελίσσονται πολύ πιο "φυσικά".
Εστω ότι $V(t) = V_0 \exp[i\omega t] \to \tilde{V}(s) = \frac{V_0}{s-i\omega}$. Τότε (με τις προϋποθέσεις ότι $Q(0) = 0$ και $I(0) = 0$) βρίσκουμε ότι:

$$\tilde{I}(s) = \frac{V_0}{(s-i\omega)(Ls+R+\frac{1}{sC})}.$$

Αν τώρα αναλύσει κανείς το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων, θα βρει:

$$\tilde{I}(s) = V_0 \left[\frac{A}{s-i\omega} + \frac{B_+}{s-s_+} + \frac{B_-}{s-s_-}\right] \to$$

$$\to I(t) = A\exp[i\omega t] + B_+ \exp[s_+ t] + B_- \exp[s_- t].$$

Τα A, B_+ και B_- μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με στοιχειώδεις μεθόδους. Επί παραδείγματι:

$$A = \frac{V_0 \exp[i\phi]}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad \phi = -\arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αποτελείται από τον πρώτο όρο, που αντιστοιχεί στη μόνιμη κατάσταση, και από τους άλλους δύο, που αντιστοιχούν σε μεταβατικές καταστάσεις. Συμπερασματικά έχουμε αναπαραγάγει τη μόνιμη κατάσταση, αλλά και κάτι περισσότερο, δηλαδή τον ακριβή τρόπο μετάβασης προς αυτήν, δηλαδή τους μεταβατικούς όρους. Αν τα αρχικά ρεύματα και φορτία δεν ήταν μηδέν, η μέθοδος και πάλι θα εφαρμοζόταν, ενώ η δυσκολία δεν θα αύξανε σημαντικά.

3.7.3 Βασικά κυκλώματα φίλτρων

Θεωρούμε δύο βασικά κυκλώματα, ένα υψηλών και ένα χαμηλών συχνοτήτων. Αρχίζουμε από το κύκλωμα CLC του σχήματος 3.2, που είναι φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων. Η τάση εισόδου είναι η $V_1(t)$ και η τάση εξόδου η $V_2(t)$. Το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα σ' αυτό το πρώτο κύκλωμα είναι στην τάση εξόδου να επιζούν κυρίως οι χαμηλές συχνότητες απ' όσες απαρτίζουν την τάση εισόδου. Γράφουμε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις του Kirchhoff για το κύκλωμα:

$$V_1 = \frac{Q_1 + \int_0^t dt'(I_1(t') - I_2(t'))}{C},$$

$$0 = \frac{Q_1 + \int_0^t dt'(I_2(t') - I_1(t'))}{C} + LI_2' + \frac{Q_2 + \int_0^t dt' I_2(t')}{C}.$$

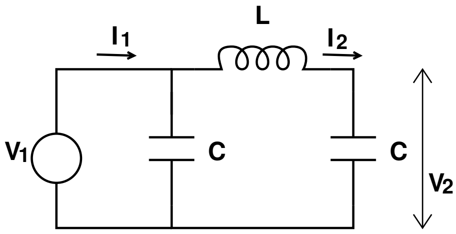
Τα Q_1 και Q_2 είναι τα τυχόν φορτία των πυκνωτών 1 και 2 τη χρονική στιγμή $t = 0$. Θεωρούμε τις πιο πάνω εξισώσεις μετασχηματισμένες κατά Laplace και βρίσκουμε:

$$\tilde{V}_1 = \frac{Q_1 + \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2}{sC}, 0 = \frac{Q_1 + \tilde{I}_2 - \tilde{I}_1}{sC} + L(s\tilde{I}_2 - I_2(0)) + \frac{Q_2 + \tilde{I}_2}{sC}.$$

Για απλότητα υποθέτουμε ότι τα αρχικά φορτία και ρεύματα είναι μηδέν: $Q_1 = Q_2 = I_1(0) = I_2(0) = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις οι πιο πάνω σχέσεις γράφονται:

$$\tilde{V}_1 = \frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2}{sC}, \quad 0 = \frac{\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1}{sC} + Ls\tilde{I}_2 + \frac{\tilde{I}_2}{sC}.$$

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις και λύνοντας ως προς $\tilde{I}_2$ έχουμε τη σχέση



Σχήμα 3.2: Κύκλωμα CLC διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{sL + \frac{1}{sC}}.$$

Στη συνέχεια επικαλούμαστε τη σχέση $V_2 = \frac{\int_0^t dt' I_2(t')}{C} \to \tilde{V}_2 = \frac{\tilde{I}_2}{sC}$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\tilde{V}_2(s) = \frac{\tilde{V}_1(s)}{s^2LC + 1} \to \tilde{G}(s) \equiv \frac{\tilde{V}_2(s)}{\tilde{V}_1(s)} = \frac{1}{s^2LC + 1} \equiv \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}}.$$

Εχουμε ορίσει την <u>συνάρτηση</u> <u>μεταφοράς</u> $\tilde{G}(s)$ ως το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου δια τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου. Εχουμε ακόμα εισαγάγει τη συχνότητα συντονισμού $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ του κυκλώματος. Ξέροντας τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση εξόδου από το σήμα εισόδου:

$$\tilde{V}_2(s) = \tilde{G}(s)\tilde{V}_1(s) \to V_2(t) = \int_0^t dt' G(t - t')V_1(t'),$$

σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης. Η συνάρτηση $G(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $\tilde{G}(s)$:

$$G(t) = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}}\right] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}\right] = \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Συνεπώς

$$V_2(t) = \omega_0 \int_0^t dt' \omega_0 \sin \omega_0(t - t')V_1(t').$$

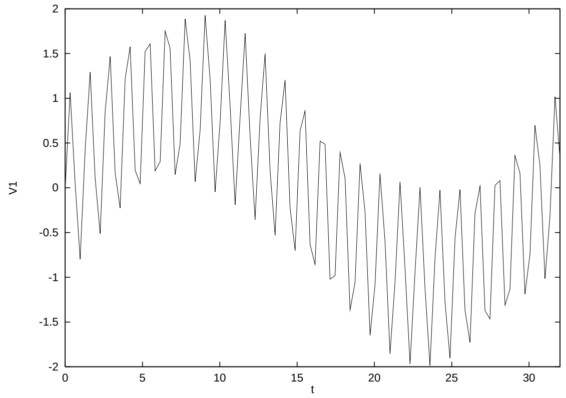
Ας υποθέσουμε ότι η τάση εισόδου δίνεται από τη σχέση:

$$V_1(t) = V_0 \sin \omega t + V_0 \sin \Omega t,$$

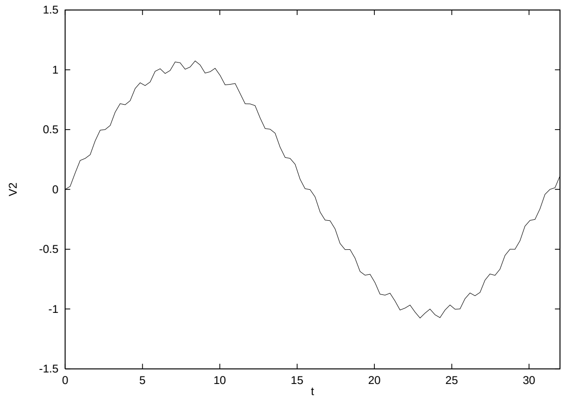
όπου $\omega = \omega_0/10,\ \Omega = 10\omega_0$. Δηλαδή έχουμε υπέρθεση μιας ταλάντωσης με χαμηλή συχνότητα ω και μιας με υψηλή συχνότητα Ω (φυσικά το "υψηλή" και το "χαμηλή" νοούνται με μέτρο τη χαρακτηριστική συχνότητα ω_0 του συστήματος). Το διάγραμμα 3.3 δείχνει την τάση εισόδου.

Ο σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου και να διαπιστώσουμε κατά πόσο διέρχονται από το φίλτρο οι υψηλές ή οι χαμηλές συχνότητες. Αν $\omega \neq \omega_0$ και $\Omega \neq \omega_0$ (όπως συμβαίνει εδώ) δίνουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^t dt' \sin \omega_0(t - t') \sin \omega t' = \frac{\omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2},$$



Σχήμα 3.3: Τάση εισόδου



Σχήμα 3.4: Τάση εξόδου του κυκλώματος CLC

$$\int_0^t dt' \sin\omega_0(t-t')\sin\Omega t' = \frac{\Omega\sin(\omega_0 t)-\omega_0\sin(\Omega t)}{\Omega^2-\omega_0^2}.$$

Τελικά η τάση εξόδου θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_2(t) = \omega_0 V_0\left[\frac{\omega\sin(\omega_0 t)-\omega_0\sin(\omega t)}{\omega^2-\omega_0^2}+\frac{\Omega\sin(\omega_0 t)-\omega_0\sin(\Omega t)}{\Omega^2-\omega_0^2}\right].$$

Στο διάγραμμα 3.4 δείχνουμε την τάση εξόδου. Παρατηρούμε ότι επιζούν κυρίως χαμηλές συχνότητες.

Το επιδιωκόμενο στο δεύτερο κύκλωμα (σχήμα 3.5) είναι στην τάση εξόδου να επιζούν κυρίως οι υψηλές συχνότητες της τάσης εισόδου. Γράφουμε τις εξισώσεις του Kirchhoff για το κύκλωμα:

$$V_1 = L(I_1'-I_2'),\quad 0 = L(I_2'-I_1')+\frac{Q+\int_0^t dt' I_2(t')}{C}+LI_2'.$$

Και εδώ, Q είναι το τυχόν αρχικό φορτίο του πυκνωτή.

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace και βρίσκουμε:

$$\tilde{V}_1 = L[s\tilde{I}_1 - I_1(0)] - L[s\tilde{I}_2 - I_2(0)],$$

$$0 = 2L[s\tilde{I}_2 - I_2(0)] - L[s\tilde{I}_1 - I_1(0)] + \frac{Q+\tilde{I}_2}{sC}.$$

Αυτό είναι ένα σύστημα με αγνώστους τα $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$. Με την υπόθεση ότι $Q = I_1(0) = I_2(0) = 0$ λύνουμε ως προς $\tilde{I}_2$:

$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{sL + \frac{1}{sC}}.$$

Στη συνέχεια επικαλούμαστε τη σχέση

$$V_2 = LI_2' \to \tilde{V}_2 = L[s\tilde{I}_2 - I_2(0)] = Ls\tilde{I}_2,$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\tilde{V}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{1 + \frac{1}{s^2 LC}} \to \tilde{G}(s) \equiv \frac{\tilde{V}_2(s)}{\tilde{V}_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}} \equiv \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}}.$$

Οπως πριν, με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση εξόδου από το σήμα εισόδου:

$$\tilde{V}_2(s) = \tilde{G}(s)\tilde{V}_1(s) \to V_2(t) = \int_0^t dt' G(t-t')V_1(t').$$

Και πάλι όπως προηγουμένως:

$$G(t) = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}}\right] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2}\right] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[1 - \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}\right] = \delta(t) - \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Συνεπώς

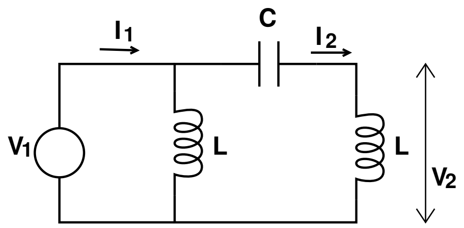
$$V_2(t) = \int_0^t dt'[\delta(t-t') - \omega_0 \sin \omega_0 (t-t')]V_1(t') = V_1(t) - \int_0^t dt' \omega_0 \sin \omega_0 (t-t') V_1(t').$$

Δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ίσο με την τάση εισόδου μείον μια έκφραση που ταυτίζεται με το τελικό αποτέλεσμα της προηγούμενης περίπτωσης. Επομένως δεν χρειάζονται καν πράξεις σ' αυτήν την περίπτωση. Υποθέτουμε ότι έχουμε την ίδια τάση εισόδου, όπως προηγουμένως και το αποτέλεσμα θα είναι:

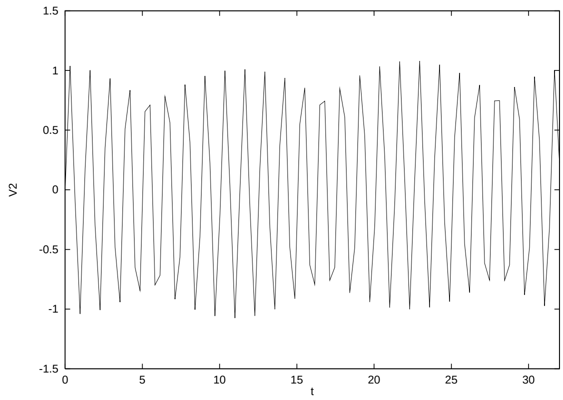
$$V_2(t) = V_0 \sin \omega t + V_0 \sin \Omega t - \omega_0 V_0 \left[\frac{\omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\Omega t)}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right].$$

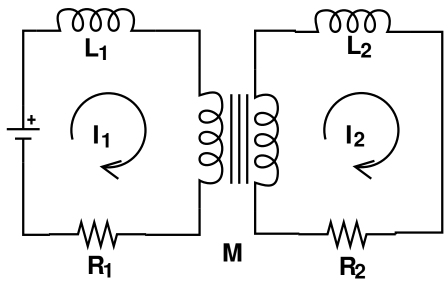
Στο διάγραμμα 3.6 δείχνουμε την τάση εξόδου. Παρατηρούμε ότι επιζούν κυρίως υψηλές συχνότητες, αντίθετα με την προηγούμενη περίπτωση.



Σχήμα 3.5: Κύκλωμα διέλευσης υψηλών συχνοτήτων



Σχήμα 3.6: Τάση εξόδου του κυκλώματος LCL



Σχήμα 3.7: Κύκλωμα μετασχηματιστή

3.7.4 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων: Μετασχηματιστής

Αφού είδαμε προηγουμένως τη μέθοδο λύσης προβλημάτων με κυκλώματα σε μια απλή περίπτωση, θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση ενός συνθετότερου προβλήματος. Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 3.7, που αποτελείται από δύο χωριστά κυκλώματα, που σχετίζονται μέσω της αμοιβαίας επαγωγής M των δύο πηνίων. Το κύκλωμα λέγεται μετασχηματιστής. Το υποκύκλωμα αριστερά λέγεται πρωτεύον, ενώ το υποκύκλωμα δεξιά δευτερεύον. Τη χρονική στιγμή μηδέν, που κλείνει ο διακόπτης, τα ρεύματα $I_1(0)$ και $I_2(0)$ είναι μηδέν. Ζητείται η εξέλιξη των δύο ρευμάτων με το χρόνο. Οι κανόνες του Kirchhoff για τους δύο βρόχους είναι:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = V_0,$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0.$$

Καταλήγουμε δηλαδή σ΄ ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. Η λύση του συστήματος είναι απλή, αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των εξισώσεων:

$$L_1 \mathcal{L}_s[I_1'] + M \mathcal{L}_s[I_2'] + R_1 \mathcal{L}_s[I_1] = \frac{V_0}{s},$$

$$L_2 \mathcal{L}_s[I_2'] + M \mathcal{L}_s[I_1'] + R_2 \mathcal{L}_s[I_2] = 0.$$

Αντικαθιστούμε από τη σχέση για τους μετασχηματισμούς Laplace των παραγώγων:

$$L_1[s\tilde{I}_1 - I_1(0)] + M[s\tilde{I}_2 - I_2(0)] + R_1 \tilde{I}_1 = \frac{V_0}{s},$$

$$L_2[s\tilde{I}_2 - I_2(0)] + M[s\tilde{I}_1 - I_1(0)] + R_2\tilde{I}_2 = 0.$$

Η αρχική συνθήκη για τον μηδενισμό των ρευμάτων στην αρχή ($I_1(0) = I_2(0) = 0$) απλοποιεί ακόμα περισσότερο τις εξισώσεις:

$$L_1 s\tilde{I}_1 + Ms\tilde{I}_2 + R_1\tilde{I}_1 = \frac{V_0}{s},$$

$$L_2 s\tilde{I}_2 + Ms\tilde{I}_1 + R_2\tilde{I}_2 = 0.$$

Οπως σε προηγούμενες περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Laplace είχε μετατρέψει μια διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, έτσι και τώρα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μετατρέπεται σε αλγεβρικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Η λύση του συστήματος είναι:

$$\tilde{I}_1(s) = \frac{V_0(sL_2 + R_2)}{s[s^2(L_1L_2 - M^2) + s(R_1L_2 + R_2L_1) + R_1R_2]},$$

$$\tilde{I}_2(s) = \frac{-V_0 M}{s^2(L_1L_2 - M^2) + s(R_1L_2 + R_2L_1) + R_1R_2}.$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ισχύει υποχρεωτικά η ανισότητα

$$L_1L_2 \geq M^2.$$

Πρόκειται για θεώρημα του ηλεκτρομαγνητισμού, που μπορεί να αποδειχθεί (επί παραδείγματι) με ενεργειακές θεωρήσεις. Στα επόμενα θα υποθέσουμε ότι ισχύει ειδικότερα η αυστηρή ανισότητα $L_1L_2 > M^2$. Η ισότητα θέλει ειδική αντιμετώπιση από την αρχή.

Το επόμενο βήμα είναι βεβαίως να αντιστρέψουμε τις σχέσεις για τα $\tilde{I}_1(s)$ και $\tilde{I}_2(s)$ ώστε να βρούμε τα $I_1(t)$ και $I_2(t)$. Εισάγουμε τους συμβολισμούς:

$$\alpha \equiv \frac{R_1L_2 + R_2L_1}{2(L_1L_2 - M^2)}, \gamma^2 \equiv \frac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2} \tag{3.2}$$

και η λύση παίρνει τη μορφή:

$$\tilde{I}_1(s) = \frac{V_0}{L_1L_2 - M^2}\frac{sL_2 + R_2}{s(s^2 + 2\alpha s + \gamma^2)},$$

$$\tilde{I}_2(s) = -\frac{V_0}{L_1L_2 - M^2}\frac{M}{s^2 + 2\alpha s + \gamma^2}.$$

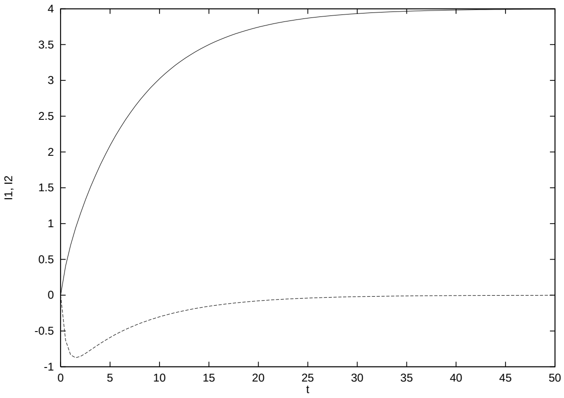
Αντιστροφή: Οι πόλοι του παρονομαστή βρίσκονται στις θέσεις

$$s = 0, \quad s = s_\pm \equiv -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = -\alpha \pm \beta \quad (\beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}).$$

Μπορεί κανείς να αποδείξει εύκολα, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (3.2), ότι $\alpha^2 > \gamma^2$, δηλαδή ότι το β είναι πραγματικός αριθμός. Οι εκφράσεις για τα $\tilde{I}_1(s)$ και $\tilde{I}_2(s)$ μπορούν να γραφτούν με τη μορφή απλών κλασμάτων:

$$\tilde{I}_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_+}{s - s_+} + \frac{B_-}{s - s_-},$$

$$\tilde{I}_2(s) = \frac{C_+}{s - s_+} + \frac{C_-}{s - s_-},$$



Σχήμα 3.8: Ρεύμα πρωτεύοντος (πάνω καμπύλη) και δευτερεύοντος(κάτω καμπύλη).

οπότε

$$I_1(t) = A + B_+ \exp[s_+ t] + B_- \exp[s_- t] = A + B_+ \exp[(-\alpha+\beta)t] + B_- \exp[(-\alpha-\beta)t],$$

$$I_2(t) = C_+ \exp[s_+ t] + C_- \exp[s_- t] =$$

$$= C_+ \exp[(-\alpha+\beta)t] + C_- \exp[(-\alpha-\beta)t].$$

Οι πράξεις για την εύρεση των συντελεστών είναι μακροσκελείς, αλλά δεν παρουσιάζουν δυσκολίες. Τα αποτελέσματα είναι:

$$A = \frac{R_2}{\gamma^2}, \quad B_+ = \frac{\gamma^2 L_2 - R_2(\alpha+\beta)}{2\beta\gamma^2}, \quad B_- = \frac{-\gamma^2 L_2 + R_2(\alpha-\beta)}{2\beta\gamma^2},$$

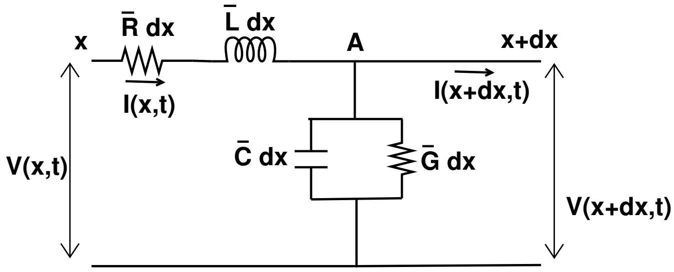
$$C_+ = -\frac{2V_0 M\beta}{L_1 L_2 - M^2}, \quad C_- = \frac{2V_0 M\beta}{L_1 L_2 - M^2} = -C_+.$$

Είναι εύκολο να δούμε, από τον ορισμό των α, β και γ, ότι τα $-\alpha \pm \beta$ είναι αρνητικοί αριθμοί.

Το $I_1(t)$ είναι η "επάνω" καμπύλη του σχήματος 3.8: αρχίζει από το μηδέν και πλησιάζει μονότονα μια οριακή τιμή καθώς ο χρόνος γίνεται πολύ μεγάλος. Το $I_2(t)$ παριστάνεται από την "κάτω" καμπύλη του σχήματος: αρχίζει από το μηδέν, φτάνει σε μια μέγιστη τιμή και μετά αρχίζει να μειώνεται όταν ο χρόνος μεγαλώσει κι άλλο. Ο φυσικός λόγος αυτής της συμπεριφοράς είναι κατανοητός: όταν μεταβάλλεται το ρεύμα στο πρωτεύον, επάγεται ρεύμα στο δευτερεύον και το $I_2(t)$ αυξάνεται. Ομως, σε κάποια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής (η παράγωγος) του $I_1(t)$ γίνεται μικρός, γιατί το $I_1(t)$ πλησιάζει την οριακή τιμή του. Το ρεύμα στο δευτερεύον, επομένως, αρχίζει να μειώνεται, γιατί εκλείπει βαθμιαία η πηγή που το τροφοδοτεί.

3.7.5 Γραμμές μεταφοράς

Γραμμή μεταφοράς είναι μια κατασκευή προορισμένη να μεταφέρει ρεύμα και τάση σε μεγάλες αποστάσεις. Ενα τυπικό δείγμα φαίνεται στο σχήμα (3.9). Η γραμμή μεταφοράς έχει αντίσταση $\bar{R}$ ανά μονάδα μήκους και αυτεπαγωγή $\bar{L}$ ανά μονάδα μήκους. Επίσης οι δύο αγωγοί σχηματίζουν πυκνωτή με χωρητικότητα $\bar{C}$ ανά μονάδα μήκους και υπάρχει αγωγιμότητα $\bar{G}$ ανά μονάδα μήκους μεταξύ των δύο αγωγών. Θεωρούμε ένα μικρό τμήμα της γραμμής με μήκος δx. Οι αντιστάσεις και οι αυτεπαγωγές συνδέονται σε σειρά, επομένως προστίθενται. Αρα η συνολική αντίσταση σε



Σχήμα 3.9: Σχηματική παράσταση γραμμής μεταφοράς

μήκος δx είναι $\bar{R}\delta x$ και η συνολική αυτεπαγωγή που αντιστοιχεί στο ίδιο μήκος είναι $\bar{L}\delta x$. Οι χωρητικότητες συνδέονται παράλληλα, με συνέπεια να αθροίζονται, άρα η χωρητικότητα που αντιστοιχεί στο δx είναι $\bar{C}\delta x$. Τέλος οι αγωγιμότητες αντιστοιχούν σε αντιστάσεις που συνδέουν τους δύο αγωγούς, άρα είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Αυτός είναι και ο λόγος που εκφράσαμε αυτό το φαινόμενο με την αγωγιμότητα (αντίστροφο της αντίστασης) και όχι με την αντίσταση: παράλληλα συνδεδεμένες αγωγιμότητες αθροίζονται (αντίθετα με τις παράλληλα συνδεδεμένες αντιστάσεις), οπότε η αγωγιμότητα που αντιστοιχεί στο δx ισούται με $\bar{G}\delta x$ (και βέβαια η αντίστοιχη αντίσταση είναι $\frac{1}{\bar{G}\delta x}$).

Στη θέση x η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών είναι $V(x,t)$ και η ένταση του ρεύματος που εισέρχεται στη γραμμή είναι $I(x,t)$. Στη θέση $x+\delta x$ η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών είναι $V(x+\delta x,t)$ και η ένταση του ρεύματος που βγαίνει από τη γραμμή είναι $I(x+\delta x,t)$. Εφαρμόζουμε τους δύο κανόνες του Kirchhoff: στον κόμβο A και στον βρόχο που περιβάλλει το τμήμα του κυκλώματος από το x μέχρι το $x+\delta x$:

$$I(x,t) - I(x+\delta x,t) - \frac{\partial}{\partial t}(\bar{C}\delta x \cdot V) - \frac{V}{\frac{1}{\bar{G}\delta x}} = 0,$$

$$V(x,t) - (\bar{R}\delta x)I - (\bar{L}\delta x)\frac{\partial I}{\partial t} - V(x+\delta x,t) = 0.$$

Αν τώρα διαιρέσουμε με το δx και θεωρήσουμε το όριο όπου το δx γίνεται απειροστό, δηλαδή $\delta x \to dx$, θα εμφανιστούν παράγωγοι ως προς x και οι προηγούμενες εξισώσεις θα μετατραπούν στις:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \bar{C}\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{G}V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{R}I + \bar{L}\frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

ή, πιο συνοπτικά:

$$I_x + \bar{C}V_t + \bar{G}V = 0, \quad V_x + \bar{R}I + \bar{L}I_t = 0. \tag{3.3}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη από τις εξισώσεις (3.3) ως προς x και τη δεύτερη ως προς t βρίσκουμε τις

$$I_{xx} + \bar{C}V_{xt} + \bar{G}V_x = 0, \quad V_{xt} + \bar{R}I_t + \bar{L}I_{tt} = 0.$$

Στην πρώτη εξίσωση μπορούμε να απαλείψουμε το V_{xt} με τη βοήθεια της δεύτερης και το V_x με τη βοήθεια μιας από τις αρχικές εξισώσεις (3.3). Το αποτέλεσμα είναι:

$$I_{xx} = \bar{L}\bar{C}I_{tt} + (\bar{R}\bar{C} + \bar{G}\bar{L})I_t + \bar{G}\bar{R}I. \tag{3.4}$$

Φτάσαμε σε μια εξίσωση που περιέχει μόνο το $I(x,t)$, χωρίς να εμπλέκει το $V(x,t)$.

Μπορεί κανείς να παραγάγει και εξίσωση που να περιέχει μόνο το $V(x,t)$, παραγωγίζοντας την πρώτη από τις εξισώσεις (3.3) ως προς t και τη δεύτερη ως προς x :

$$I_{xt} + \bar{C}V_{tt} + \bar{G}V_t = 0, \quad V_{xx} + \bar{R}I_x + \bar{L}I_{xt} = 0.$$

Με πορεία αντίστοιχη της προηγούμενης ξεκινάμε από τη δεύτερη εξίσωση και απαλείφουμε τα I_{xt} και I_x με τη βοήθεια της πρώτης εξίσωσης και των (3.3). Το αποτέλεσμα είναι:

$$V_{xx} = \bar{L}\bar{C}V_{tt} + (\bar{R}\bar{C} + \bar{G}\bar{L})V_t + \bar{G}\bar{R}V. \tag{3.5}$$

Η εξίσωση (3.5) είναι η ίδια με την εξίσωση (3.4) για την ένταση του ρεύματος.

Θα κάνουμε μια σύντομη παρέκβαση σχετική με τις μονάδες. Η ποσότητα $\bar{R}$ επί παραδείγματι αντιπροσωπεύει αντίσταση ανά μονάδα μήκους, επομένως έχει τις αντίστοιχες μονάδες: μονάδες αντίστασης διά μονάδες μήκους. Παρόμοια μπορεί κανείς να προσδιορίσει τις μονάδες και των υπόλοιπων ποσοτήτων. Θα αναφέρουμε τις μονάδες των συνδυασμών που εμφανίζονται στις εξισώσεις. Το $\bar{L}\bar{C}$ έχει μονάδες αντίστροφου τετραγώνου ταχύτητας: χρόνος στο τετράγωνο δια μήκος στο τετράγωνο. Οι συνδυασμοί $\bar{R}\bar{C}$ και $\bar{G}\bar{L}$ έχουν μονάδες χρόνου δια μήκος στο τετράγωνο. Τέλος ο συνδυασμός $\bar{G}\bar{R}$ έχει μονάδες αντίστροφου μήκους στο τετράγωνο. Αρα οι εξισώσεις (3.4) και (3.5) είναι διαστατικά σωστές.

Οι εξισώσεις (3.4) και (3.5) λέγονται εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς ή του τηλεγράφου. Παρατηρούμε ότι περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις κάποιες πολύ γνωστές εξισώσεις της Φυσικής. Αν $\bar{R}\bar{C} + \bar{G}\bar{L} = \bar{G}\bar{R} = 0$, θα έχουμε την κυματική εξίσωση (με χαρακτηριστική ταχύτητα $\frac{1}{\sqrt{\bar{L}\bar{C}}}$). Αν $\bar{L}\bar{C} = \bar{G}\bar{R} = 0$, αλλά $\bar{R}\bar{C} + \bar{G}\bar{L} \neq 0$, θα πάρουμε την εξίσωση διάχυσης.

Θα λύσουμε πρώτα τις αρχικές εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς για μια στάσιμη κατάσταση. Στάσιμη κατάσταση σημαίνει ότι όλα τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν τη γραμμή μεταφοράς ταλαντεύονται ως προς το χρόνο με μια συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα ω. Ενα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος με γνωστή συχνότητα προσαρμοσμένη στο αριστερό άκρο που καθορίζει τη συμπεριφορά ολόκληρης της γραμμής. Η σύνδεση αυτή είναι αρκετά κοντά σε ρεαλιστικές καταστάσεις.

Η διαφορά δυναμικού και η ένταση του ρεύματος μπορούν να αναπαρασταθούν ως το πραγματικό μέρος μιας παράστασης $B_M \exp[i\omega t]$. Το B_M είναι γενικά μιγαδικός αριθμός. Αν $B_M = b\exp[i\beta]$, η παράσταση ισούται με $b\exp[i(\omega t + \beta)]$ και το πραγματικό μέρος της είναι $b\cos(\omega t + \beta)$. Μπορούμε, λοιπόν, να περιγράψουμε τα στοιχεία της γραμμής μεταφοράς με τις εκφράσεις:

$$I(x,t) = I_M \exp[i\omega t], \quad V(x,t) = V_M \exp[i\omega t].$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στις εξισώσεις (3.3) βρίσκουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial I_M}{\partial x} + (\bar{G} + i\omega\bar{C})V_M = 0, \quad \frac{\partial V_M}{\partial x} + (\bar{R} + i\omega\bar{L})I_M = 0.$$

Εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$\bar{Z} \equiv \bar{R} + i\omega\bar{L}, \quad \bar{Y} \equiv \bar{G} + i\omega\bar{C}.$$

Το $\bar{Z}$ έχει μονάδες αντίστασης ανά μονάδα μήκους και το $\bar{Y}$ μονάδες αγωγιμότητας (αντίστροφου της αντίστασης) ανά μονάδα μήκους. (Οι ποσότητες αυτές είναι πραγματικοί αριθμοί αν η χωρητικότητα $\bar{C}$ και η αυτεπαγωγή $\bar{L}$ ανά μονάδα μήκους μηδενίζονται). Το σύστημα των εξισώσεων παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial I_M}{\partial x} + \bar{Y}V_M = 0, \quad \frac{\partial V_M}{\partial x} + \bar{Z}I_M = 0.$$

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη ως προς x και αντικαθιστώντας το $\frac{\partial I_M}{\partial x}$ από την πρώτη καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial^2 V_M}{\partial x^2} - \bar{Z}\bar{Y}V_M = 0.$$

Η λύση από εδώ και στο εξής δεν μπορεί παρά να είναι φορμαλιστική (όσο δεν έχουμε πιο συγκεκριμένες πληροφορίες για τα διάφορα μεγέθη). Η λύση είναι:

$$V_M = A\exp[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] + B\exp[-\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x].$$

Φυσικά, αν οι εκθέτες έχουν φανταστικό κομμάτι, τα εκθετικά θα περιέχουν ημίτονα και συνημίτονα. (Π.χ. η παράσταση $\exp[(a+ib)x]$ ισούται με την $\exp[ax]\cos bx + i\exp[ax]\sin bx$). Ακριβώς για ενδεχόμενα αυτού του είδους επισημαίνουμε ότι η λύση είναι φορμαλιστική. Πάντως δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα αρχής και τέτοιου είδους λύσεις διατηρούν ακέραιη τη χρησιμότητά τους. (Δίνουμε κάποια παραδείγματα στο τέλος αυτής της παραγράφου.) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $I_M = -\frac{1}{\bar{Z}}\frac{\partial V_M}{\partial x}$, οπότε βρίσκουμε αυτομάτως ότι

$$I_M = -A\sqrt{\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}}\exp[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] + B\sqrt{\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}}\exp[-\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x].$$

Ο συνδυασμός $\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}$ έχει μονάδες αντίστροφου μήκους, οπότε τα γινόμενα $\pm\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x$ που εμφανίζονται στους εκθέτες είναι αδιάστατα, όπως πρέπει. Ο συνδυασμός $\sqrt{\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}}$ έχει μονάδες αντίστροφου της αντίστασης, δηλαδή αγωγιμότητας.

Εστω ότι είναι γνωστές οι τιμές των V_M και I_M στη θέση $x = 0 : V_M(0) = V_0, I_M(0) = I_0$. Τότε εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τη λύση ακριβώς:

$$A = \frac{1}{2}\left[V_0 - \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}}I_0\right], \quad B = \frac{1}{2}\left[V_0 + \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}}I_0\right],$$

επομένως

$$V_M(x) = V_0\cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] - \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}}I_0\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x],$$

$$I_M(x) = -V_0\sqrt{\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}}\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] + I_0\cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x].$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο να εκφραστεί μέσω του γινομένου πινάκων:

$$\begin{bmatrix} V_M(x) \\ I_M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] & -Z_0\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] \\ -\dfrac{\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x]}{Z_0} & \cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_M(0) \\ I_M(0) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

όπου $Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}}$. Η αντίστροφη σχέση είναι εύκολο να βρεθεί (με την παρατήρηση ότι η ορίζουσα του 2×2 πίνακα, που λέγεται πίνακας μεταφοράς, είναι μονάδα):

$$\begin{bmatrix} V_M(0) \\ I_M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] & Z_0\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] \\ \dfrac{\sinh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x]}{Z_0} & \cosh[\sqrt{\bar{Z}\bar{Y}}x] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_M(x) \\ I_M(x) \end{bmatrix}.$$

Ισως ο αναγνώστης αναρωτηθεί γιατί χρειάζεται να προσδιορίζονται δύο ποσότητες (τα $V_M(x)$ και $I_M(x)$ συναρτήσει του x) και δεν περιοριζόμαστε σε μία από τις δύο. Η απάντηση είναι ότι η γραμμή μεταφοράς διέπεται από δύο πεπλεγμένες εξισώσεις πρώτης τάξης, που μπορούν, όπως είδαμε, να μετατραπούν σε μία εξίσωση δεύτερης τάξης που να περιλαμβάνει μόνο τη μία μεταβλητή. Αν υποθέσουμε ότι λύναμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, θα εμφανίζονταν δύο αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης (όπως οι A και B που είδαμε πιο πριν). Συνήθως τέτοιου είδους σταθερές προσδιορίζονται από τις αρχικές τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να γράψουμε με τη μορφή πίνακα τη σχέση που συνδέει τις αρχικές τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου της με τις αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Επομένως, αυτή η διατύπωση με τον πίνακα μεταφοράς δεν είναι κάτι καινούριο. Το μόνο νέο είναι ότι δεν χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση και την παράγωγό της, αλλά ένα άλλο ζευγάρι μεταβλητών, το $[V_M(x), I_M(x)]$, που όμως συνδέεται με το προηγούμενο. Συμπερασματικά τα $V_M(x)$, $I_M(x)$ είναι ανεξάρτητα και η γνώση του ενός δεν αρκεί για τη γνώση του άλλου.

Θα δώσουμε τώρα δύο παραδείγματα που ίσως διευκρινίσουν μερικά πράγματα. Ξεκινάμε πάντα από τη σχέση (3.6).

(1) Εστω ότι: $\bar{R} \neq 0, \bar{G} \neq 0, \bar{L} = 0, \bar{C} = 0$. Τότε: $\bar{Z} = \bar{R}, \bar{Y} = \bar{G}, Z_0 = \sqrt{\frac{\bar{R}}{\bar{G}}}, \sqrt{\bar{Z}\bar{Y}} = \sqrt{\bar{R}\bar{G}}$ και

$$\left[\begin{array}{c} V_M(x) \\ I_M(x) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cosh[\sqrt{\bar{R}\bar{G}}x] & -\sqrt{\frac{\bar{R}}{\bar{G}}}\sinh[\sqrt{\bar{R}\bar{G}}x] \\ -\sinh[\sqrt{\bar{R}\bar{G}}x]\sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{R}}} & \cosh[\sqrt{\bar{R}\bar{G}}x] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_M(0) \\ I_M(0) \end{array}\right].$$

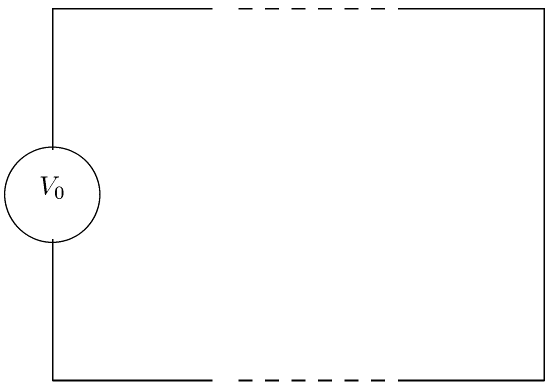
(2) Εστω ότι: $\bar{L} \neq 0, \bar{C} \neq 0, \bar{R} = 0, \bar{G} = 0$. Τότε: $\bar{Z} = i\omega\bar{L}, \bar{Y} = i\omega\bar{C}, Z_0 = \sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}}}, \sqrt{\bar{Z}\bar{Y}} = i\omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}}$. Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις $\cosh(iz) = \cos(z)$ και $\sinh(iz) = i\sin(z)$ βρίσκουμε τελικά:

$$\left[\begin{array}{c} V_M(x) \\ I_M(x) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos[\omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}}x] & -i\sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}}}\sin[\sqrt{\omega\bar{L}\bar{C}}x] \\ -i\sin[\omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}}x]\sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} & \cos[\omega\sqrt{\bar{L}\bar{C}}x] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_M(0) \\ I_M(0) \end{array}\right].$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση τα υπερβολικά (συν)ημίτονα γίνονται συνηθισμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και παίρνουμε μια περιοδική λύση. Οπως είπαμε, και για τα δύο παραδείγματα ισχύουν οι σχέσεις: $I = I_M \exp[i\omega t]$ και $V = V_M \exp[i\omega t]$. Στο πρώτο παράδειγμα αυτές οι εξισώσεις παριστάνουν μια ταλάντωση με συχνότητα ω. Το δεύτερο παράδειγμα είναι πιο ενδιαφέρον: οι περιοδικές συναρτήσεις στο χώρο συνδυάζονται με τις περιοδικές συναρτήσεις στο χρόνο και το αποτέλεσμα είναι ένα κύμα.

3.7.6 Μεταβατικά φαινόμενα στις γραμμές μεταφοράς

Θα δούμε σ' αυτήν την παράγραφο μεταβατικές καταστάσεις σε μια γραμμή μεταφοράς που η μελέτη τους γίνεται με τον μετασχηματισμό Laplace. Θεωρούμε τη γραμμή μεταφοράς του σχήματος, όπου οι αντιστάσεις των αγωγών ανά μονάδα μήκους είναι μηδέν ($\bar{R} = 0$), όπως και η αγωγιμότητα μεταξύ των δύο αγωγών ($\bar{G} = 0$). Είναι ακριβώς η περίπτωση του δεύτερου παραδείγματος της προηγούμενης παραγράφου. Στο αριστερό άκρο υπάρχει μια πηγή συνεχούς τάσης V_0, οπότε $(V(x = 0, t) = V_0)$, ενώ το δεξιό άκρο, στο $x = H$, είναι βραχυκυκλωμένο: $V(x = H, t) = 0$. Ο διακόπτης κλείνει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή $t = 0$, οπότε θεωρούμε ότι $I(x, 0) = V(x, 0) = 0, x > 0$. Ζητάμε τα $V(x, t)$ και $I(x, t)$.



Οι εξισώσεις (3.3) που διέπουν το κύκλωμα γίνονται:

$$I_x = -\bar{C}V_t, \quad V_x = -\bar{L}I_t.$$

Θεωρούμε τους μετασχηματισμούς Laplace (ως προς t) των εξισώσεων και παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\tilde{V}_x(x,s) = -\bar{L}(s\tilde{I}(x,s) - I(x,0)), \quad \tilde{I}_x(x,s) = -\bar{C}(s\tilde{V}(x,s) - V(x,0)).$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες οι εξισώσεις γράφονται:

$$\tilde{V}_x(x,s) = -\bar{L}s\tilde{I}(x,s), \quad \tilde{I}_x(x,s) = -\bar{C}s\tilde{V}(x,s).$$

Το σύστημα των εξισώσεων λύνεται εύκολα. Μια μέθοδος είναι να κατασκευάσουμε την εξίσωση που περιέχει μόνο το $V(x,t)$:

$$\tilde{V}_{xx} - \bar{L}\bar{C}s^2\tilde{V} = 0 \to \tilde{V}(x,s) = A\exp\left[\frac{sx}{v}\right] + B\exp\left[-\frac{sx}{v}\right],$$

όπου $v \equiv \frac{1}{\sqrt{\bar{L}\bar{C}}}$. Οι μετασχηματισμοί των οριακών συνθηκών είναι: $\tilde{V}|_{x=0} = \frac{V_0}{s}, \quad \tilde{V}|_{x=H} = 0$, οπότε

$$A = \frac{V_0}{s(1-\exp[\frac{2sH}{v}])}, \quad B = \frac{V_0}{s(1-\exp[-\frac{2sH}{v}])}$$

και

$$\tilde{V}(x,s) = -\frac{V_0}{s(\exp[\frac{sH}{v}] - \exp[-\frac{sH}{v}])}\left[\exp\left[\frac{x-H}{v}s\right] - \exp\left[-\frac{x-H}{v}s\right]\right].$$

<u>Αντιστροφή:</u> Η τελευταία έκφραση μπορεί να μετατραπεί:

$$\tilde{V}(x,s) = \frac{V_0}{s(1-\exp[-\frac{2sH}{v}])}\left[\exp\left[-\frac{sx}{v}\right] - \exp\left[\frac{s(x-2H)}{v}\right]\right] =$$

$$= \frac{V_0}{s}\left[1 + \exp\left[-\frac{2sH}{v}\right] + \exp\left[-\frac{4sH}{v}\right] + \ldots\right]\left[\exp\left[-\frac{sx}{v}\right] - \exp\left[\frac{s(x-2H)}{v}\right]\right] =$$

$$= \frac{V_0}{s}\left[\exp\left[-\frac{sx}{v}\right] + \exp\left[-\frac{s(x+2H)}{v}\right] + \exp\left[-\frac{s(x+4H)}{v}\right] + \ldots\right]$$

$$-\frac{V_0}{s}\left[\exp\left[-\frac{s(2H-x)}{v}\right]+\exp\left[-\frac{s(4H-x)}{v}\right]+\exp\left[-\frac{s(6H-x)}{v}\right]+\ldots\right].$$

Η τελευταία έκφραση είναι εύκολο να αντιστραφεί όρο προς όρο με τη βοήθεια της σχέσης

$$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1\rightarrow\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{\exp[-cs]}{s}\right]=\Theta(t-c)$$

που έχουμε ήδη αποδείξει. Το αποτέλεσμα είναι:

$$V(x,t)=V_0\left[\Theta\left(t-\frac{x}{v}\right)+\Theta\left(t-\frac{x+2H}{v}\right)+\Theta\left(t-\frac{x+4H}{v}\right)+\ldots\right]$$

$$-V_0\left[\Theta\left(t-\frac{2H-x}{v}\right)+\Theta\left(t-\frac{4H-x}{v}\right)+\Theta\left(t-\frac{6H-x}{v}\right)+\ldots\right].$$

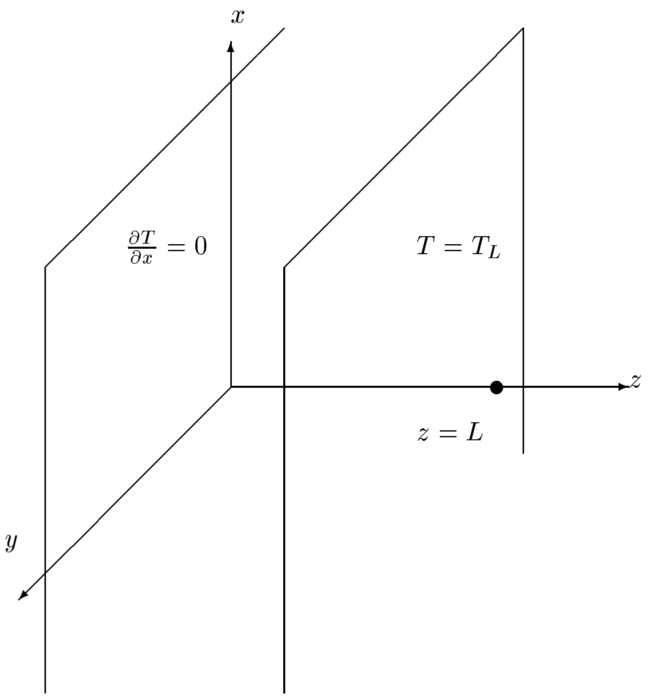
Οι διάφοροι όροι αντιπροσωπεύουν τα κύματα που προέρχονται από τα άκρα μετά από μια, δύο, τρεις ... “ανακλάσεις”.

3.8 Προβλήματα συνοριακών τιμών

3.8.1 Διάδοση θερμότητας

Θεωρούμε ένα στερεό που έχει τη μορφή πλάκας η οποία εκτείνεται επ΄ άπειρον στις κατευθύνσεις y και z και περιορίζεται στην κατεύθυνση x από τα επίπεδα $x=0$ και $x=L$. Η πλάκα έχει θερμοκρασία T_0 και τη χρονική στιγμή μηδέν η δεξιά πλευρά θερμαίνεται ώστε να αποκτήσει μόνιμα θερμοκρασία T_L, ενώ η αριστερή πλευρά είναι θερμικά μονωμένη. Οι αρχικές και οριακές συνθήκες γι΄ αυτό το πρόβλημα είναι, συνεπώς, οι εξής:

$$T|_{t=0}=T_0,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad T|_{x=L}=T_L.$$



Η διαφορική εξίσωση που το διέπει είναι η εξίσωση διάδοσης θερμότητας:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Με τη συνηθισμένη τακτική, μετασχηματίζουμε κατά Laplace (ως προς t) και τα δύο μέλη της εξίσωσης και χρησιμοποιούμε τη σχέση για τον μετασχηματισμό της παραγώγου:

$$\mathcal{L}_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \kappa \mathcal{L}_s[T_t] \to \tilde{T}_{xx} = \kappa(s\tilde{T} - T|_{t=0}) \to \tilde{T}_{xx} - \kappa s \tilde{T} = -\kappa T_0.$$

Η λύση της διαφορικής ισούται με τη λύση της ομογενούς σύν μια ειδική λύση της πλήρους, δηλαδή:

$$\tilde{T} = A\exp[\sqrt{\kappa s}x] + B\exp[-\sqrt{\kappa s}x] + \frac{T_0}{s}.$$

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των σταθερών με εφαρμογή των υπόλοιπων συνθηκών. Η $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}|_{x=0} = 0$ συνεπάγεται ότι $\sqrt{\kappa s}(A - B) = 0 \to B = A$. Η συνθήκη $T|_{x=L} = T_L$ συνεπάγεται ότι

$$\tilde{T}|_{x=L} = \frac{T_L}{s} \to A\exp[\sqrt{\kappa s}L] + A\exp[-\sqrt{\kappa s}L] + \frac{T_0}{s} = \frac{T_L}{s}.$$

Τελικά:[1]

$$\tilde{T}(x, s) = \frac{T_0}{s} + \frac{(T_L - T_0)\cosh(\sqrt{\kappa s}x)}{s\cosh(\sqrt{\kappa s}L)}.$$

[1] Μπορεί να υπάρξει ένσταση σχετικά με την παρουσία της τετραγωνικής ρίζας, η οποία γενικά απαιτεί την παρουσία μιας τομής στο μιγαδικό επίπεδο για τον πλήρη ορισμό της. Παρατηρούμε ότι η τετραγωνική ρίζα είναι στην προκειμένη περίπτωση όρισμα υπερβολικών συνημιτόνων, επομένως η παράσταση αυτή ορίζεται μονοσήμαντα χωρίς την ανάγκη τομής.

Το επόμενο βήμα είναι η αντιστροφή αυτής της παράστασης, ώστε να βρούμε το $T(x,t)$ από το $\tilde{T}(x,s)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα του Bromwich, ο υπολογισμός του οποίου θα γίνει με τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Ενας πόλος της παράστασης βρίσκεται στο μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι στις λύσεις της εξίσωσης:

$$\cosh(\sqrt{\kappa s}L) = 0 \to \exp[2\sqrt{\kappa s}L] = -1 \to \exp[2\sqrt{\kappa s_n}L] = \exp[i(2n+1)\pi] \to$$

$$\to 2\sqrt{\kappa s_n}L = i(2n+1)\pi \to s_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\kappa L^2}.$$

Εχουμε δείξει προηγουμένως ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\tilde{T}(s)$ ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της συνάρτησης $\tilde{T}(s)\exp[st]$ για την περίπτωση που (όπως εδώ) οι μόνες ανωμαλίες στο μιγαδικό επίπεδο είναι πόλοι. Στην περίπτωσή μας έχουμε απλούς πόλους. Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης είναι: T_L (για τον απλό πόλο στο μηδέν) και:

$$\frac{4(-1)^{n+1}(T_L - T_0)\exp[s_n t]}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

(για τους απλούς πόλους στα s_n, βλέπε παρατήρηση πιο κάτω.) Αρα η $T(x,t)$, που είναι το άθροισμα όλων των ολοκληρωτικών υπολοίπων, ισούται με:

$$T(x,t) = T_L + \sum_n \frac{4(-1)^{n+1}(T_L - T_0)}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\kappa L^2}t\right].$$

Αυτή είναι η τελική έκφραση της λύσης. Παρατηρούμε ότι όταν ο χρόνος γίνει πολύ μεγάλος, η θερμοκρασία τείνει στην τιμή T_L. Στο διάγραμμα δείχνουμε τη μεταβολή της συνάρτησης με το x για τυπικές τιμές των σταθερών και δυο διαφορετικές τιμές του t.

(Παρατήρηση. Ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τους πόλους s_n γίνεται ως εξής:

$$Res[\tilde{T}(s)\exp[st]]_{s_n} \equiv \lim_{s\to s_n}\left\{(s-s_n)\exp[st]\left[\frac{T_0}{s} + \frac{(T_L - T_0)\cosh(\sqrt{\kappa s}x)}{s\cosh(\sqrt{\kappa s}L)}\right]\right\} =$$

$$= 0 + (T_L - T_0)\left[\frac{\cosh(\sqrt{\kappa s_n}x)}{s_n}\right]\left\{\lim_{s\to s_n}\left[\frac{s - s_n}{\cosh(\sqrt{\kappa s}L) - \cosh(\sqrt{\kappa s_n}L)}\right]\right\}\exp[s_n t].$$

Καταλήξαμε σε μια απροσδιόριστη μορφή, που υπολογίζεται με τον κανόνα του de l' Hospital:

$$Res[\tilde{T}(s)\exp[st]]_{s_n} = (T_L - T_0)\left[\frac{\cosh(\sqrt{\kappa s_n}x)}{s_n}\right]\left\{\frac{L\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{s_n}}\sinh(\sqrt{\kappa s_n}L)\right\}^{-1}\exp[s_n t].$$

Η συνέχεια δεν παρουσιάζει δυσκολίες, αν έχει κανείς υπόψη τις ταυτότητες: $\sinh(ix) = i\sin(x)$, $\cosh(ix) = \cos(x)$ και τις σχέσεις: $s_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\kappa L^2}$ και $\sqrt{\kappa s_n} = \frac{i(2n+1)\pi}{2L}$.)

Ενα κάπως απλούστερο πρόβλημα αυτού του είδους είναι το πρόβλημα ενός ημιάπειρου στερεού (όπως η προηγούμενη πλάκα, αλλά το μήκος L θεωρούμε ότι απειρίζεται). Το στερεό βρίσκεται αρχικά σε θερμοκρασία T_1 και από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά η επιφάνεια στο επίπεδο $x = 0$ διατηρείται σε θερμοκρασία T_2. Η εξίσωση που διέπει τη θερμοκρασία είναι, όπως πριν, η

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial T}{\partial t}$$

και ο μετασχηματισμός της κατά Laplace δίνει:

$$\mathcal{L}_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \kappa\mathcal{L}_s[T_t] \rightarrow \tilde{T}_{xx} = \kappa(s\tilde{T} - T|_{t=0}) \rightarrow \tilde{T}_{xx} - \kappa s\tilde{T} = -\kappa T_1.$$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\tilde{T}(x,s) = A\exp[\sqrt{\kappa s}x] + B\exp[-\sqrt{\kappa s}x] + \frac{T_1}{s}.$$

Ο πρώτος όρος απειρίζεται στο άπειρο, οπότε πρέπει υποχρεωτικά να θέσουμε $A = 0$ και η λύση γίνεται:

$$\tilde{T}(x,s) = B\exp[-\sqrt{\kappa s}x] + \frac{T_1}{s}.$$

Η οριακή συνθήκη $T|_{x=0} = T_2$ συνεπάγεται ότι $\tilde{T}|_{x=0} = \frac{T_2}{s}$, άρα: $B + \frac{T_1}{s} = \frac{T_2}{s} \rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{s}$. Τελικά η λύση είναι:[2]

$$\tilde{T}(x,s) = \frac{T_2 - T_1}{s}\exp[-\sqrt{\kappa s}x] + \frac{T_1}{s}.$$

Μένει η αντιστροφή, ώστε να βρούμε το $T(x,t)$ από το $\tilde{T}(x,s)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του $\frac{T_1}{s}$ είναι το T_1, ενώ του $\frac{T_2 - T_1}{s}\exp[-\sqrt{\kappa s}x]$ είναι το $(T_2 - T_1)\left(1 - erf\left[\frac{x\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{t}}\right]\right)$. Στη λύση εμφανίζεται η συνάρτηση σφάλματος

$$erf(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z dx\exp[-x^2],$$

που είναι γνωστή από τη στατιστική και τις πιθανότητες. Η τελική έκφραση της λύσης είναι:

$$T(x,t) = T_1 + (T_2 - T_1)\left(1 - erf\left[\frac{x\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{t}}\right]\right).$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $x = \nu\sqrt{t}$ (όπου ν σταθερά) έχει σταθερή τιμή για τη θερμοκρασία. Δηλαδή, με άλλα λόγια, η θερμοκρασία διαδίδεται με νόμο που εξαρτάται από την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Το πρόβλημα που μόλις λύσαμε είναι ουσιαστικά το πρόβλημα της μεταβολής της θερμοκρασίας της γης, συναρτήσει της θερμοκρασίας της επιφάνειάς της. Η προσέγγιση που κάναμε εδώ είναι ότι η θερμοκρασία της επιφάνειας μένει σταθερή, πράγμα που είναι προσεγγιστικά σωστό. Αν χρησιμοποιήσει κανείς ρεαλιστικά δεδομένα για το κ θα βρει ότι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας δεν διαδίδεται σε μεγάλο βάθος στη γή.

3.8.2 Θερμοκρασία κυλίνδρου

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι επίσης χρήσιμος στη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών. Δίνουμε ένα παράδειγμα. Επειδή η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος προϋποθέτει γνώση των συναρτήσεων Bessel, το παρόν παράδειγμα πρέπει να αναγνωσθεί αφού αποκτηθούν οι σχετικές γνώσεις.

Θεωρούμε κύλινδρο με άπειρο μήκος και ακτίνα R που έχει αρχική θερμοκρασία T_0. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εμβαπτίζεται σε υγρό με θερμοκρασία T. Ζητείται η θερμοκρασία του κυλίνδρου για $t > 0$.

[2] Σ' αυτήν την περίπτωση χρειάζεται τομή στο μιγαδικό επίπεδο για να οριστεί πλήρως η παράσταση. Δεν κάνουμε τον υπολογισμό της αντιστροφής λεπτομερειακά, αλλά χρησιμοποιούμε πίνακες, για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία.

Είναι ενδεδειγμένο να δουλέψουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η εξίσωση που διέπει τη διάδοση θερμότητας (λαμβάνοντας υπόψη ότι τίποτε δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες z και ϕ) είναι:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial t}.$$

Οι αρχικές και οριακές συνθήκες γράφονται:

$$\Theta(\rho = R, t) = T, \quad \Theta(\rho, t = 0) = T_0.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης είναι:

$$\tilde{\Theta}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{\Theta}_\rho = \kappa[s\tilde{\Theta} - \Theta(\rho, t = 0)] \to$$

$$\to \tilde{\Theta}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{\Theta}_\rho - \kappa s\tilde{\Theta} = -\kappa T_0.$$

Εξ άλλου, η συνθήκη $\Theta(\rho = R, t) = T$ συνεπάγεται την $\tilde{\Theta}(\rho = R, s) = \frac{T}{s}$.
Η γενική λύση της εξίσωσης είναι το άθροισμα μιας ειδικής λύσης της (π.χ. της $\tilde{\Theta} = \frac{T_0}{s}$) και της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της:

$$\tilde{\Theta}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{\Theta}_\rho - \kappa s\tilde{\Theta} = 0 \to \rho^2\tilde{\Theta}_{\rho\rho} + \rho\tilde{\Theta}_\rho - \kappa s\rho^2\tilde{\Theta} = 0.$$

Είναι φανερό ότι καταλήξαμε στην τροποποιημένη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, και η λύση είναι γνωστή:

$$\tilde{\Theta} = AI_0(\sqrt{\kappa s}\rho) + BK_0(\sqrt{\kappa s}\rho).$$

Επί πλέον, η λύση πρέπει να είναι πεπερασμένη παντού, άρα απαιτούμε να μηδενίζεται ο συντελεστής B της συνάρτησης $K_0(\sqrt{\kappa s}\rho)$, η οποία απειρίζεται στο $\rho = 0$. Αρα η γενική λύση είναι:

$$\tilde{\Theta}(\rho, s) = \frac{T_0}{s} + AI_0(\sqrt{\kappa s}\rho).$$

Επιβάλλοντας την $\tilde{\Theta}(\rho = R, s) = \frac{T}{s}$ βρίσκουμε ότι πρέπει:

$$\tilde{\Theta}(\rho = R, s) = \frac{T}{s} = \frac{T_0}{s} + AI_0(\sqrt{\kappa s}R) \to A = \frac{T - T_0}{sI_0(\sqrt{\kappa s}R)}.$$

Τελικά η λύση γράφεται:

$$\tilde{\Theta}(\rho, s) = \frac{T_0}{s} + (T - T_0)\frac{I_0(\sqrt{\kappa s}\rho)}{sI_0(\sqrt{\kappa s}R)}.$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, ώστε να επιστρέψουμε στην εξάρτηση από τις μεταβλητές (ρ, t) αντί για τις (ρ, s) που έχουμε τώρα. Ο πρώτος όρος δίνει απλά τη σταθερά T_0. Για τον δεύτερο όρο θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα του Bromwich:

$$\Theta(\rho, t) = T_0 + \frac{T - T_0}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds \frac{\exp[st]I_0(\sqrt{\kappa s}\rho)}{sI_0(\sqrt{\kappa s}R)}.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε απλούς πόλους στο $s = 0$ και στα

$$\sqrt{\kappa s_n}R = -i\xi_{0n} \to s_n = -\frac{\xi_{0n}^2}{\kappa R^2}.$$

(Σχετικά με το τελευταίο υπενθυμίζουμε ότι $I_0(z) = J_0(iz)$, οπότε οι ρίζες z_n της $I_0(z_n) = 0$ είναι ποσότητες για τις οποίες $J_0(iz_n) = 0$. Ομως οι ρίζες ξ_{0n} της $J_0(\xi_{0n}) = 0$ είναι γνωστές, άρα $z_n = -i\xi_{0n}$).

Υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Στο $s = 0$:

$$\lim_{s\to 0}\left[s\frac{\exp[st]I_0(\sqrt{\kappa s}\rho)}{sI_0(\sqrt{\kappa s}R)}\right] = 1,$$

λόγω της συμπεριφοράς της I_0 για μικρά ορίσματα. Στα $s = s_n$:

$$\lim_{s\to s_n}\left[\frac{(s-s_n)\exp[st]I_0(\sqrt{\kappa s}\rho)}{sI_0(\sqrt{\kappa s}R)}\right] =$$

$$= \left[\frac{\exp[s_n t]I_0(\sqrt{\kappa s_n}\rho)}{s_n}\right]\lim_{s\to s_n}\left[\frac{s-s_n}{I_0(\sqrt{\kappa s}R)}\right].$$

Η πρώτη αγκύλη υπολογίζεται χωρίς πρόβλημα, ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει μια απροσδιόριστη μορφή. Το όριο της δεύτερης αγκύλης μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα του de l'Hospital. Οι εξής ιδιότητες είναι χρήσιμες:

$$I_0'(z) = I_1(z), I_0(z) = J_0(iz), I_1(z) = -iJ_1(iz),$$

οπότε:

$$\frac{\partial I_0(\sqrt{\kappa s}R)}{\partial s} = \frac{\sqrt{\kappa}R}{2\sqrt{s}}I_1(\sqrt{\kappa s}R) \to \left.\frac{\partial I_0(\sqrt{\kappa s}R)}{\partial s}\right|_{s=s_n} = \frac{\kappa R}{2\sqrt{\kappa s_n}}I_1(\sqrt{\kappa s_n}R) =$$

$$= -\frac{\kappa R^2}{2i\xi_{0n}}I_1(-i\xi_{0n}) = \frac{\kappa R^2}{2\xi_{0n}}J_1(\xi_{0n}).$$

Επίσης, το $I_0(\sqrt{\kappa s_n}\rho)$ που εμφανίζεται στην πρώτη αγκύλη ισούται με $J_0(\frac{\xi_{0n}\rho}{R})$. Δηλαδή το ολοκληρωτικό υπόλοιπο ισούται με:

$$\frac{1}{\frac{\kappa R^2}{2\xi_{0n}}J_1(\xi_{0n})}\left[\frac{\exp[-\frac{\xi_{0n}^2}{\kappa R^2}t]J_0(\frac{\xi_{0n}\rho}{R})}{-\frac{\xi_{0n}^2}{\kappa R^2}}\right] =$$

$$= -\frac{2}{\xi_{0n}J_1(\xi_{0n})}\exp\left[-\frac{\xi_{0n}^2}{\kappa R^2}t\right]J_0\left(\frac{\xi_{0n}\rho}{R}\right).$$

Αρα:

$$\Theta(\rho,t) = T_0 + (T-T_0)\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\xi_{0n}J_1(\xi_{0n})}J_0\left(\frac{\xi_{0n}\rho}{R}\right)\exp\left[-\frac{\xi_{0n}^2}{\kappa R^2}t\right]\right\}.$$

3.9 Διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές

Αν και ο μετασχηματισμός Laplace είναι χρήσιμος κυρίως για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, αρκετά συχνά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές, όπως δείχνει το παράδειγμα που θα δούμε αμέσως τώρα. Μια ιδιότητα των μετασχηματισμών Laplace που έχουμε ήδη αναφέρει είναι πολύ χρήσιμη για την περίπτωση που οι μεταβλητοί συντελεστές είναι πολυώνυμα. Αυτή η κατηγορία προβλημάτων είναι πολύ ευρεία. Περιλαμβάνει για παράδειγμα τις εξισώσεις Bessel και Legendre. Διατυπώνουμε πάλι αυτήν την ιδιότητα:

$$\mathcal{L}_s[t^n y(t)] = (-1)^n\frac{d^n\tilde{y}(s)}{ds^n},$$

όπου

$$\tilde{y} \equiv \mathcal{L}_s[y(t)].$$

Εστω τώρα ότι ζητείται η λύση της εξίσωσης

$$ty'' + y' + \omega^2 ty = 0,$$

με τις αρχικές συνθήκες:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0.$$

Η εξίσωση είναι γνωστή με το όνομα εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace βρίσκουμε:

$$\mathcal{L}_s[ty''] + \mathcal{L}_s[y'] + \omega^2 \mathcal{L}_s[ty] = 0 \to -\frac{d}{ds}[s^2\tilde{y} - sy(0) - y'(0)] + [s\tilde{y} - y(0)] - \omega^2 \frac{d\tilde{y}}{ds} = 0 \to$$

$$\to -2s\tilde{y} - s^2\frac{d\tilde{y}}{ds} + y_0 + s\tilde{y} - y_0 - \omega^2\frac{d\tilde{y}}{ds} = 0 \to (s^2 + \omega^2)\frac{d\tilde{y}}{ds} + s\tilde{y} = 0 \to$$

$$\to \int \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \int \frac{sds}{s^2 + \omega^2} = 0 \to \log|\tilde{y}| + \frac{1}{2}\log|(s^2 + \omega^2)| = \log|A| \to \tilde{y} = \frac{A}{\sqrt{s^2 + \omega^2}},$$

όπου A είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Καταφεύγοντας στους πίνακες των μετασχηματισμών Laplace βρίσκουμε την αντίστοιχη $y(t)$:

$$y(t) = AJ_0(\omega t).$$

Εξ άλλου πρέπει να ισχύει η αρχική συνθήκη

$$y(0) = y_0 \to AJ_0(0) = y_0 \to A = y_0 \to y(t) = y_0 J_0(\omega t).$$

3.10 Συνδυασμός των μετασχηματισμών Fourier και Laplace

Σ' αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς μετασχηματισμών για να λύσουμε το πρόβλημα της χορδής. Η εξίσωση που διέπει την κίνηση είναι, βέβαια, η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \to y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt}$$

με αρχικές συνθήκες

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = v_0(x).$$

Στην πραγματικότητα, ανάλογα με το είδος των οριακών συνθηκών, θα λύσουμε δύο προβλήματα: της άπειρης χορδής και της πεπερασμένης χορδής. Ο μετασχηματισμός Laplace (ως προς το t) της εξίσωσης είναι:

$$\mathcal{L}_s[y_{xx}] = \frac{1}{c^2}\mathcal{L}_s[y_{tt}] \to \tilde{y}_{xx}(x,s) = \frac{1}{c^2}[s^2\tilde{y}(x,s) - y_t|_{t=0} - sy|_{t=0}] \to$$

$$\to \tilde{y}_{xx}(x,s) = \frac{1}{c^2}[s^2\tilde{y}(x,s) - v_0(x) - sy_0(x)] \tag{3.7}$$

Α. Πεπερασμένη χορδή.

Θεωρούμε ότι έχουμε μια χορδή με μήκος L και σταθερά άκρα. Μπορούμε να αναπτύξουμε την απομάκρυνση σε σειρά Fourier:

$$\tilde{y}(x,s)=\sum_1^\infty \tilde{c}_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \tilde{c}_n=\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{y}(x,s).$$

Μπορούμε παρόμοια να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις $y_0(x)$ και $v_0(x)$:

$$y_0(x)=\sum_1^\infty a_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L}y_0(x),$$

$$v_0(x)=\sum_1^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin\frac{n\pi x}{L}v_0(x).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.7) βρίσκουμε:

$$\sum_1^\infty \left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tilde{c}_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]=$$

$$=\sum_1^\infty \left[\frac{s^2}{c^2}\tilde{c}_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]-\sum_1^\infty \left[\frac{1}{c^2}b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]-\sum_1^\infty \left[\frac{s}{c^2}a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right].$$

Αλλά τα ημίτονα είναι ορθοκανονική βάση, άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα ισχύει όχι απλά για το άθροισμα, αλλά και για τον κάθε όρο χωριστά, συνεπώς:

$$\tilde{c}_n=\frac{sa_n+b_n}{s^2+(\frac{n\pi c}{L})^2}.$$

Το τελικό βήμα είναι να μετατρέψουμε τους συντελεστές της ανάπτυξης που μόλις βρήκαμε από συναρτήσεις $\tilde{c}_n$του s σε συναρτήσεις c_n του t, δηλαδή να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Η μορφή των συναρτήσεων είναι αρκετά εύκολη, οπότε:

$$c_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+\frac{L}{n\pi c}b_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\rightarrow$$

$$\rightarrow y(x,t)=\sum_1^\infty c_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}=$$

$$=\sum_1^\infty \left[a_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+\frac{L}{n\pi c}b_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Β. Απειρη χορδή.

Θεωρούμε σ΄ αυτήν την περίπτωση τον μετασχηματισμό Fourier ως προς το x με συζυγή μεταβλητή την k. Πράγματι, ο μετασχηματισμός Fourier είναι η ενδεδειγμένη μέθοδος όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα όπου κάποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές εκτείνονται ως το άπειρο. Ο μετασχηματισμός του όρου $\tilde{y}_{xx}(x,s)$ θα ισούται, σύμφωνα με τα όσα έχουμε εξηγήσει στο κεφάλαιο για τον μετασχηματισμό Fourier, με $-k^2$ επί τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\tilde{y}$, άρα η εξίσωση (3.7) μετατρέπεται στην:

$$-k^2\mathcal{F}_k[\tilde{y}]=\frac{1}{c^2}[s^2\mathcal{F}_k[\tilde{y}]-\mathcal{F}_k[v_0]-s\mathcal{F}_k[y_0]]\rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{F}_k[\tilde{y}]=\frac{1}{k^2+\frac{s^2}{c^2}}\left[\frac{s}{c^2}\mathcal{F}_k[y_0]+\frac{1}{c^2}\mathcal{F}_k[v_0]\right].$$

Το πρόβλημα είναι λυμένο στον "αντίστροφο" χώρο, δηλαδή ξέρουμε την απομάκρυνση συναρτήσει των (k, s). Τώρα πρέπει να αντιστρέψουμε τη σχέση αυτή, για να βρούμε την απομάκρυνση συναρτήσει των (x, t). Θα αντιστρέψουμε πρώτα τον μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{F}_k[y] = \mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{s}{s^2+c^2k^2}\mathcal{F}_k[y_0] + \frac{1}{s^2+c^2k^2}\mathcal{F}_k[v_0]\right] =$$

$$= \mathcal{F}_k[y_0]\cos(kct) + \mathcal{F}_k[v_0]\frac{\sin(kct)}{ck}.$$

Μένει να αντιστρέψουμε και τον μετασχηματισμό Fourier:

$$y(x,t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ikx]\mathcal{F}_k[y] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ikx]\left[\mathcal{F}_k[y_0]\cos(kct) + \mathcal{F}_k[v_0]\frac{\sin(kct)}{ck}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ikx]\mathcal{F}_k[y_0]\cos(kct) + \mathcal{F}_k[v_0]\int_0^t dt' \cos(kct') =$$

$$= \int dk \exp[ikx]\left[\frac{\exp[ikct]+\exp[-ikct]}{2}\right]\mathcal{F}_k[y_0] +$$

$$+ \int_0^t dt' \int dk \exp[ikx]\mathcal{F}_k[v_0]\left[\frac{\exp[ikct']+\exp[-ikct']}{2}\right].$$

Εχουμε χρησιμοποιήσει την τετριμμένη σχέση:

$$\frac{\sin(kct)}{ck} = \int_0^t dt' \cos(kct').$$

Τώρα συγκεντρώνουμε τους διάφορους εκθετικούς όρους και χρησιμοποιούμε τον ορισμό ότι για τυχαία συνάρτηση ισχύει ότι:

$$\int dk \exp[ikx]\mathcal{F}_k[f] = f(x).$$

Η λύση γίνεται:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\int dk \exp[ik(x+ct)]\mathcal{F}_k[y_0] + \frac{1}{2}\int dk \exp[ik(x-ct)]\mathcal{F}_k[y_0] +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t dt' \int dk \exp[ik(x+ct')]\mathcal{F}_k[v_0] + \frac{1}{2}\int_0^t dt' \int dk \exp[ik(x-ct')]\mathcal{F}_k[v_0] =$$

$$= \frac{1}{2}[y_0(x+ct) + y_0(x-ct)] + \frac{1}{2}\int_0^t dt'[v_0(x+ct') + v_0(x-ct')].$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x' = x + ct' \to dt' = \frac{1}{c}dx'$ το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται: $\frac{1}{2c}\int_x^{x+ct} dx' v_0(x')$. Εξ άλλου, με την αλλαγή μεταβλητών $x' = x - ct' \to dt' = -\frac{1}{c}dx'$ το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται: $-\frac{1}{2c}\int_x^{x-ct} dx' v_0(x')$. Συνεπώς το άθροισμα είναι η παράσταση:

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx' v_0(x'),$$

οπότε

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[y_0(x+ct) + y_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx' v_0(x').$$

3.11 Ασκήσεις προς λύση

1. Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων:
$$t^2, \quad \cos[3(t-7)], \quad t^2 \sin 5t, \quad \delta(t-c).$$

2. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace (ως προς t) υπολογίστε το ολοκλήρωμα $g(t) \equiv \int_0^\infty dx \frac{\sin(tx)}{x}, t > 0$. Τί συμβαίνει για $t < 0$;

3. Υπολογίστε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των παραστάσεων (1) $\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$, (2) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$, όπου $a^2 \neq b^2$.

4. Να προσδιορισθεί η κίνηση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή με αρχική απομάκρυνση y_0 και αρχική ταχύτητα v_0.

5. Να μελετηθεί η κίνηση ενός εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή με τριβή που διέπεται από την εξίσωση $y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = f_0 \sin \omega_0 t$ στην περίπτωση που η τριβή γ ισούται με $\omega_0 \sqrt{2}$ και με τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0, v(0) = 0$.

6. Να μελετηθεί η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο B κατά τον άξονα των z. Για τις δύο ενδιαφέρουσες συνιστώσες της στροφορμής του ξέρουμε τις εξισώσεις κίνησης:
$$\frac{dL_x}{dt} = gBL_y, \quad \frac{dL_y}{dt} = -gBL_x,$$
όπου εμφανίζεται και ο γυρομαγνητικός λόγος g. Να βρεθούν τα $L_x(t)$ και $L_y(t)$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace με τις αρχικές συνθήκες $L_x(0) = L_0, L_y(0) = 0$.

7. Θεωρήστε τρεις πυρήνες που ανήκουν στην ίδια ραδιενεργή οικογένεια. Οι πληθυσμοί των πυρήνων είναι N_1, N_2, N_3 και λ_1, λ_2 είναι δύο θετικές σταθερές που χαρακτηρίζουν το ρυθμό των ραδιενεργών διασπάσεων ($\lambda_2 \neq \lambda_1$). Ο πυρήνας 1 διασπάται στον πυρήνα 2 κι αυτός στον πυρήνα 3, που είναι ευσταθής (δεν διασπάται). Οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο είναι οι εξής:
$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2.$$
Εστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύουν τα εξής: $N_1(0) = N_0, N_2(0) = 0, N_3(0) = 0$. Να βρεθούν τα $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ και να παρασταθούν γραφικά για κάποιες αυθαίρετες, αλλά εύλογες, τιμές των σταθερών που υπεισέρχονται.

8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace ενός τετραγωνικού παλμού με περίοδο T που περιγράφεται από τις σχέσεις:
$$V(t) = V_0, 0 < t < \frac{T}{2}, \quad V(t) = 0, \frac{T}{2} < t < T.$$
Υπόδειξη: περιοδική συνάρτηση.

9. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\frac{s}{s^2-k^2}$ (1) με ανάλυση σε απλά κλάσματα (2) με το ολοκλήρωμα Bromwich.

10. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\frac{\exp[-ks]}{s^2}$ με χρήση του ολοκληρώματος Bromwich.

Κεφάλαιο 4

Χωρισμός μεταβλητών: συνέχεια

4.1 Εισαγωγή

Θα εξετάσουμε τη λύση μιας πολύ χρήσιμης εξίσωσης, της

$$[\nabla^2 + U]\Psi = 0. \tag{4.1}$$

Η μορφή αυτή, με το αυθαίρετο δυναμικό U, περιλαμβάνει διάφορες εξισώσεις κοινότατης χρήσης στη Φυσική. Ας ξεκινήσουμε με τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schroedinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\Psi = E\Psi.$$

Επειτα από απλές πράξεις μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η εξίσωση γράφεται με τη μορφή (4.1), όπου $U \equiv \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$.
Μια άλλη εξίσωση που συναντάμε πολύ συχνά είναι η Κυματική Εξίσωση:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

Ενα πρώτο βήμα για τη λύση αυτής της εξίσωσης είναι να χωρίσουμε μεταβλητές $\Phi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})T(t)$, και στην εξίσωση

$$\frac{\nabla^2\Psi}{\Psi} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

να θέσουμε την κοινή τιμή των δύο μελών ίση με $-k^2$. Τότε η χρονική εξάρτηση θα είναι της μορφής $\exp[\pm ikct]$, ενώ η συνάρτηση Ψ διέπεται από την εξίσωση $[\nabla^2 + k^2]\Psi = 0$, που επίσης εντάσσεται στην κατηγορία (4.1). Εξ άλλου, στην ίδια κατηγορία ανήκει η εξίσωση Laplace: $\nabla^2\Psi = 0$.

4.2 Σφαιρικές συντεταγμένες: $[\nabla^2 + U(r)]\Psi = 0$

Θεωρούμε την εξίσωση $[\nabla^2 + U(r)]\Psi = 0$, όπου το $U(r)$ εξαρτάται μόνο από το r, την απόσταση από την αρχή των αξόνων, και όχι από τις γωνιακές συντεταγμένες θ και ϕ. Αν γράψουμε τον διαφορικό τελεστή ∇^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{4.2}$$

και κάνουμε τον χωρισμό μεταβλητών $\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)F(\phi)$, θα βρούμε μια συνηθισμένη διαφορική εξίσωση για κάθε παράγοντα. Πρώτα θα εξετάσουμε τους παράγοντες που έχουν να κάνουν με τις γωνίες. Αν θέσουμε την πρώτη σταθερά χωρισμού μεταβλητών ίση με c_1, η συνάρτηση $R(r)$ θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' + \left[\frac{c_1}{r^2} - U(r)\right] R(r) = 0$$

και οι $P(\theta)$ και $F(\phi)$ την:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{P(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{F(\phi)}\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2}\right] = -c_1. \tag{4.3}$$

Το πιό απλό κομμάτι της εξίσωσης (4.3) σχετίζεται με την *αζιμουθιακή γωνία* ϕ. Η σχετική εξίσωση γράφεται $\frac{d^2F(\phi)}{d\phi^2}+c_2F(\phi) = 0$, όπου c_2 είναι η δεύτερη σταθερά χωρισμού των μεταβλητών. Επειδή η συνάρτηση πρέπει να είναι περιοδική με περίοδο 2π : $F(\phi+2\pi) = F(\phi)$, η σταθερά πρέπει να ισούται με m^2, όπου ο m είναι ακέραιος. Μ' αυτόν τον τρόπο η εξίσωση μεταπίπτει στην εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή, που έχει λύσεις $\exp[\pm im\phi]$, που είναι περιοδικές για ακέραιο m. Αντικαθιστώντας $\frac{F''}{F} = -c_2 = -m^2$, η εξίσωση για το θ γίνεται:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}P(\theta)\right] + c_1P(\theta) = 0. \tag{4.4}$$

Παρατηρούμε ότι στους "παρονομαστές" των παραγωγίσεων εμφανίζονται οι παραστάσεις $\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$, ενώ τα ημίτονα εμφανίζονται στο τετράγωνο και, όπως είναι γνωστό: $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$. Αυτό δείχνει ότι με την αλλαγή μεταβλητής

$$x \equiv \cos\theta \to -dx = \sin\theta d\theta$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε την εξάρτηση από το θ με εξάρτηση από το x. Η εξίσωση (4.4) θα γραφτεί:

$$\left[\frac{d}{-dx}\left((1-x^2)\frac{dP(x)}{-dx}\right) - \frac{m^2}{1-x^2}P(x)\right] + c_1P(x) = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι, για να μην απειρίζονται οι λύσεις αυτής της εξίσωσης, ώστε να είναι φυσικά αποδεκτές, πρέπει η σταθερά c_1 να ισούται με $l(l+1)$, όπου ο αριθμός l μπορεί να παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3, \ldots$ Θεωρώντας αυτό ως δεδομένο, η εξίσωση γράφεται τελικά:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_{lm}(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_{lm}(x)}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2}P_{lm}(x) + l(l+1)P_{lm}(x) = 0.$$

Πρόκειται για μια πολύ γνωστή εξίσωση, που η λύση της $P_{lm}(x)$ εξαρτάται από τις δύο σταθερές l και m και λέγεται *συναρτημένο "πολυώνυμο" του Legendre*. Η εξίσωση έχει και δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη, λύση, που συμβολίζεται με $Q_{lm}(x)$ και λέγεται *συναφής συνάρτηση του Legendre*. Αυτή η λύση δεν είναι τόσο εύχρηστη, γιατί απειρίζεται στα σημεία $x = \pm 1$. Οπως είδαμε, λοιπόν, το γωνιακό κομμάτι της λύσης, που συμβολίσαμε με $P(\theta)F(\phi)$, είναι το γινόμενο των $P_{lm}(x \equiv \cos\theta)$ με τα εκθετικά $\exp[\pm im\phi]$. Αυτά τα γινόμενα (πολλαπλασιασμένα με κάποιες σταθερές, που δεν έχουν πολύ μεγάλη σημασία) είναι οι λεγόμενες **σφαιρικές αρμονικές** συναρτήσεις. Συμβολίζονται με $Y_{lm}(\theta,\phi)$ και είναι κεφαλαιώδους σημασίας για την αντιμετώπιση προβλημάτων όπου εμπλέκονται οι σφαιρικές συντεταγμένες. Δηλαδή:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \approx P_{lm}(\cos\theta)\exp[im\phi].$$

Αποδεικνύεται ότι ο ακέραιος m μπορεί να παίρνει τις $2l+1$ ακέραιες τιμές: $-l, -l+1, -l+2, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, l-1, l$. Είναι εύκολο να δει κανείς, αν ανασκοπήσει αυτά που μόλις είπαμε, ότι οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\theta,\phi)$ ικανοποιούν τις εξής δύο εξισώσεις:

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi),$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\phi}Y_{lm}(\theta,\phi) = mY_{lm}(\theta,\phi). \tag{4.5}$$

Οι ακριβείς παράγοντες με τους οποίους πρέπει να πολλαπλασιαστούν τα γινόμενα $P_{lm}(\cos\theta)\exp[im\phi]$ ώστε να προκύψουν οι σφαιρικές αρμονικές δεν παίζουν κανένα ρόλο σ΄ αυτές τις εξισώσεις και δεν επιμένουμε σ΄ αυτούς προς το παρόν. Οι διαφορικοί τελεστές που εμφανίζονται σ΄ αυτές τις εξισώσεις λέγονται αντίστοιχα τελεστές του τετραγώνου της στροφορμής $\hat{\mathbf{L}}^2$ και της προβολής $\hat{L}_z$ της στροφορμής κατά τον άξονα των z. Αν θυμηθούμε τον ορισμό της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ και την αντιστοιχία $\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla$ (γνωστή από την Κβαντική Μηχανική) βρίσκουμε (θέτοντας $\hbar = 1$ για ευκολία) ότι:

$$\hat{L}_x = -i(y\partial_z - z\partial_y), \quad \hat{L}_y = -i(z\partial_x - x\partial_z), \quad \hat{L}_z = -i(x\partial_y - y\partial_x).$$

Μετασχηματίζοντας σε σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right],$$

$$\hat{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{4.6}$$

δηλαδή ακριβώς οι τελεστές που εμφανίζονται στις εξισώσεις (4.5).
Δηλαδή οι σφαιρικές αρμονικές είναι ταυτόχρονα ιδιοσυναρτήσεις δύο τελεστών:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{4.7}$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta,\phi) = mY_{lm}(\theta,\phi). \tag{4.8}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές αντικατοπτρίζονται στους δείκτες l και m, οι οποίοι αναφέρονται με τα ονόματα “κβαντικός αριθμός της τροχιακής στροφορμής” και “μαγνητικός κβαντικός αριθμός”, με σαφή αναφορά στην Κβαντική Μηχανική. Αντιπαραβάλλοντας τις εκφράσεις (4.2) της Λαπλασιανής σε σφαιρικές συντεταγμένες που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω και του τελεστή $\hat{\mathbf{L}}^2$ της ολικής στροφορμής (4.6), καταλήγουμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι η Λαπλασιανή γράφεται:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2}. \tag{4.9}$$

(Είναι ενδιαφέρον να θυμηθεί κανείς τη σχέση της Κλασικής Μηχανικής

$$\mathbf{L}^2 \equiv (\mathbf{r}\times\mathbf{p})^2 = r^2p^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2 \to p^2 = (\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}. \tag{4.10}$$

Δηλαδή το τετράγωνο της ορμής μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ακτινικής συνιστώσας της ορμής $p_r \equiv \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}$ και της στροφορμής με τη σχέση

$$p^2 = p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}. \tag{4.11}$$

Η κινητική ενέργεια T εκφράζεται με τη σχέση:

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2},$$

δηλαδή ισούται με ένα είδος “κινητικής ενέργειας” που σχετίζεται με την ακτινική κίνηση αυξημένη κατά μιά ποσότητα που, όταν η στροφορμή διατηρείται, εξαρτάται μόνο από τη θέση και λέγεται “φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια”. Υπενθυμίζουμε ότι στην Κβαντική Μηχανική αναπαριστούμε την ορμή με τον τελεστή $-i\nabla$, άρα το τετράγωνό της με τον τελεστή $-\nabla^2$ (έχουμε θέσει $\hbar = 1$ για ευκολία). Βλέπουμε ότι, αν αναπαραστήσουμε τον τελεστή $-\nabla^2$ με βάση την εξίσωση (4.9), θα πάρουμε έναν ακτινικό όρο, που αντιστοιχεί στον p_r^2, κι έναν όρο “δυναμικού”, που είναι η κβαντική “μεταγραφή” του όρου $\frac{\mathbf{L}^2}{r^2}$ της εξίσωσης (4.11). Να διευκρινιστεί ότι η αναφορά στην Κβαντική Μηχανική είναι απλά υποβοηθητική. Δεν σημαίνει ότι οι εξισώσεις μας έχουν να κάνουν μόνο με την Κβαντική Μηχανική.)

Βάσει των ανωτέρω, μπορούμε να επιστρέψουμε στην αρχική εξίσωση και, γνωρίζοντας ότι η λύση είναι της μορφής

$$R(r)Y_{lm}(\theta, \phi),$$

προχωρούμε με τη βοήθεια της εξίσωσης (4.9):

$$[\nabla^2 + U(r)]\{R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\} = 0 \to$$

$$\to \frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' Y_{lm}(\theta,\phi) - \frac{R(r)}{r^2}\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta,\phi) + U(r)R(r)Y_{lm}(\theta,\phi) = 0.$$

Σ′ αυτό το στάδιο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.7) και να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' + \left[U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 \tag{4.12}$$

για την $R(r)$. Δηλαδή όλη η γωνιακή εξάρτηση έχει εκφραστεί μέσω των σφαιρικών αρμονικών και η μόνη επίδρασή της στο καθαρά ακτινικό κομμάτι περιέχεται στον όρο $-\frac{l(l+1)}{r^2}$ της εξίσωσης (4.12). Εξ άλλου, αν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα Κβαντικής Μηχανικής, τον ρόλο του $U(r)$ θα τον παίζει η παράσταση $\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$, όπως εξηγήσαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.12) το $U(r)$ με το ίσο του, θα καταλήξουμε στην:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' + \left[E - \left(V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right)\right] R(r) = 0.$$

Μιά σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο όρος $\frac{l(l+1)}{r^2}$ (που αναφέρεται συχνά με τον όρο “φυγοκεντρικό δυναμικό”, κατ′ αντιστοιχία με την περίπτωση της Κλασικής Μηχανικής) προστίθεται στον όρο του “δυναμικού” $V(r)$, και το άθροισμα είναι ένα είδος “ενεργού δυναμικού”. Το αρχικό πρόβλημα έχει αναχθεί σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα (για την συντεταγμένη r) και ο όρος του φυγοκεντρικού δυναμικού μπορεί να θεωρηθεί ως το τίμημα που πρέπει να καταβάλει κανείς για να πετύχει αυτήν την απλοποίηση. Με άλλα λόγια είναι το ίχνος που αφήνει η τριδιάστατη φύση του προβλήματος στο μονοδιάστατο πρόβλημα.

4.2.1 Ειδικές περιπτώσεις

Προχωρούμε τώρα στην εξέταση σημαντικών ειδικών περιπτώσεων της λύσης που μόλις προσδιορίσαμε.

Εξίσωση HELMHOLTZ: $[\nabla^2 + k^2]\Psi = 0$.

Πρόκειται για την περίπτωση $U(r) = +k^2$, επομένως η ακτινική εξίσωση (4.12) θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 \to$$
$$\to r^2 R''(r) + 2rR'(r) + [k^2 r^2 - l(l+1)]R(r) = 0. \tag{4.13}$$

Αυτή είναι μιά πολύ γνωστή εξίσωση, που λέγεται σφαιρική εξίσωση Bessel και θα τη συναντήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Προς το παρόν θα πούμε ότι οι λύσεις της είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, $j_l(kr)$ και οι σφαιρικές συναρτήσεις Neumann, $n_l(kr)$. Η λύση που προσδιορίσαμε μέχρι στιγμής αντιστοιχεί σε μιά συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς l χωρισμού μεταβλητών. Προφανώς η γενική λύση της εξίσωσης $[\nabla^2 + k^2]\Psi = 0$ είναι η γραμμική υπέρθεση όλων των λύσεων αυτής της μορφής:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Οι συντελεστές a_{lm} και b_{lm} αντικατοπτρίζουν τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες.

Τροποποιημένη εξίσωση HELMHOLTZ: $[\nabla^2 - k^2]\Psi = 0$.

Εδώ έχουμε την περίπτωση $U(r) = -k^2$ και η ακτινική εξίσωση (4.12) γίνεται:

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' - \left[k^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$
$$\to r^2 R''(r) + 2rR'(r) - [k^2 r^2 + l(l+1)]R(r) = 0. \tag{4.14}$$

Η λύση αυτής της τροποποιημένης σφαιρικής εξίσωσης Bessel είναι οι τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις $i_l(kr)$ και $k_l(kr)$ και η γενική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [a_{lm} i_l(kr) + b_{lm} k_l(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Εξίσωση LAPLACE: $\nabla^2\Psi = 0$.

Στην απλή περίπτωση όπου $U(r) = 0$ η εξίσωση μεταπίπτει στην εξίσωση του Laplace και η ακτινική εξίσωση (4.12) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0 \to r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0. \tag{4.15}$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι δυνάμεις του r. Αν δοκιμάσουμε η λύση $R(r) = r^s$ θα καταλήξουμε στην εξίσωση $s(s-1) + 2s - l(l+1) = 0$ για τον προσδιοριστέο εκθέτη s, οπότε το s μπορεί να είναι είτε l είτε $-(l+1)$. Επομένως η γενική λύση για την εξίσωση Laplace είναι:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right] Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Μπορούμε εδώ να αναφερθούμε σε μιά σημαντική ειδική περίπτωση: αν δεν περιμένουμε να υπάρχει εξάρτηση από την αζιμουθιακή γωνία ϕ, οι σφαιρικές αρμονικές θα μεταπέσουν στα λεγόμενα πολυώνυμα Legendre $P_l(\cos\theta)$, και η γενική λύση της εξίσωσης Laplace απλοποιείται στην

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left[a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta).$$

4.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες: $[\nabla^2 + U(\rho)]\Psi = 0$

Μια κατάσταση αντίστοιχη με την προηγούμενη, αλλά σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η λύση της εξίσωσης $[\nabla^2 + U(\rho)]\Psi = 0$, που περιλαμβάνει τη Λαπλασιανή και ένα δυναμικό που εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη $\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$. Η εξίσωση γράφεται ως εξής σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + U(\rho)\Psi = 0.$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών $\Psi(\rho,\phi,z) = R(\rho)F(\phi)Z(z)$ συνεπάγεται την εξίσωση

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2}\frac{F''}{F} + \frac{Z''}{Z} + U(\rho) = 0.$$

Συνήθως ενδιαφέρεται κανείς για λύσεις που ικανοποιούν περιοδικές οριακές συνθήκες ως προς ϕ. Η κατάλληλη επιλογή σταθεράς για την εξάρτηση από αυτήν τη μεταβλητή είναι η εξής: $\frac{F''}{F} = -m^2$, όπου ο m είναι ακέραιος. Οι σχετικές λύσεις θα είναι οι $\cos m\phi$ και $\sin m\phi$. Η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' - \frac{m^2}{\rho^2} + U(\rho) + \frac{Z''}{Z} = 0. \tag{4.16}$$

Αποφασιστικό ρόλο παίζει η εξάρτηση από τη συντεταγμένη z. Η παράσταση $\frac{Z''}{Z}$ θα είναι, ασφαλώς, σταθερά. Υπάρχουν όμως τρία ενδεχόμενα για το πρόσημο αυτής της σταθεράς.

Αν είναι θετική, η αντίστοιχη εξίσωση $\frac{Z''}{Z} = +\zeta^2 \to Z'' - \zeta^2 Z = 0$ λύνεται από τις $\cosh\zeta z$ και $\sinh\zeta z$ (ή ισοδύναμα $\exp[+\zeta z]$ και $\exp[-\zeta z]$). Αυτή η μορφή εξυπηρετεί αν κάποια οριακή συνθήκη στο z είναι μη ομογενής. Μια πιθανή εφαρμογή αυτής της μορφής είναι να ζητείται το δυναμικό σε κύλινδρο, του οποίου η κάτω βάση είναι γειωμένη, ενώ η επάνω βρίσκεται σε μη μηδενικό δυναμικό $U(\rho,\phi,z=L) = U_0 \neq 0$.

Αν η σταθερά είναι αρνητική, η εξίσωση ως προς z είναι η $\frac{Z''}{Z} = -\zeta^2 \to Z'' + \zeta^2 Z = 0$ και λύνεται από τις $\cos\zeta z$ και $\sin\zeta z$. Αυτή η μορφή της λύσης είναι προτιμητέα, αν οι οριακές συνθήκες επιβάλλουν μηδενισμό της λύσης για δύο τιμές του z. Επί παραδείγματι, ίσως να αναζητούμε το δυναμικό μέσα σε κύλινδρο, του οποίου οι δύο βάσεις, που βρίσκονται στις θέσεις $z=0$ και $z=L$, είναι γειωμένες.

Τέλος, υπάρχει η πολύ ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση η σταθερά να μηδενίζεται, οπότε $Z'' = 0 \to Z = h_1 z + h_0$. Αν η σταθερά h_1 μηδενιστεί, οπότε $Z = h_0$, δεν υπάρχει καμμιά εξάρτηση από το z και μεταπίπτουμε σε καθαρά **διδιάστατο** πρόβλημα, εκφρασμένο στις γνωστές πολικές συντεταγμένες ρ και ϕ.

Παράδειγμα: Εστω ότι έχουμε την περίπτωση $Z'' - \zeta^2 Z = 0$ και ότι το δυναμικό είναι το $U(\rho) = 0$, δηλαδή έχουμε την εξίσωση του Laplace. Πρέπει να λυθεί η εξίσωση:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\zeta^2\rho^2 - m^2)R = 0.$$

Πρόκειται για την (κυλινδρική) εξίσωση Bessel. Οι δύο ανεξάρτητες λύσεις της είναι η συνάρτηση Bessel $J_m(\zeta\rho)$ και η συνάρτηση Neumann $N_m(\zeta\rho)$. Οπως είπαμε, οι λύσεις ως προς τη συντεταγμένη z είναι: $\cosh\zeta z$ και $\sinh\zeta z$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στη γενική λύση:

$$\Psi(\rho,\phi,z) = \sum_{m,\zeta}[a_m J_m(\zeta\rho) + b_m N_m(\zeta\rho)][c_m\cos m\phi + d_m\sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cosh \zeta z + g_\zeta \sinh \zeta z]. \tag{4.17}$$

Ο αριθμός m διατρέχει, όπως είπαμε, τους ακέραιους. Οι τιμές που θα πάρει το ζ θα εξαρτηθούν από τις οριακές συνθήκες που θα επιβληθούν στην κατεύθυνση z. Αν, για παράδειγμα, πρέπει να μηδενίζεται η λύση στην παράπλευρη επιφάνεια κάποιου κυλίνδρου, τότε η συνθήκη $J_m(\zeta R) = 0$ περιορίζει το ζ σε μια απειρία διακριτών επιτρεπτών τιμών, πάνω στις οποίες πρέπει να αθροίσουμε.

Το παράδειγμα υποδεικνύει τη μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθηθεί για τη λύση της εξίσωσης (4.16), αλλά επίτηδες στο παράδειγμα που προηγήθηκε επιλέξαμε την απλούστερη περίπτωση. Σε άλλες περιπτώσεις το ζ^2, (υπενθυμίζουμε ότι το ζ εμφανίζεται στο όρισμα των συναρτήσεων Bessel και Neumann), μπορεί να αντικατασταθεί από την παράσταση $-\zeta^2 + k^2$, οπότε το $\kappa \equiv \sqrt{-\zeta^2 + k^2}$ ενδεχομένως να γίνει μηδέν ή φανταστικός αριθμός. Επίσης το k^2 μπορεί να γίνει $-k^2$ (αν εξετάζουμε την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz), με ανάλογες συνέπειες. Αν το ζ^2 γίνει $-\zeta^2$, δηλαδή το ζ γίνει $i\zeta$, τα υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα θα μεταπέσουν στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Παρομοίως, αν τα ορίσματα των συναρτήσεων Bessel και Neumann γίνουν φανταστικοί αριθμοί, οι συναρτήσεις αυτές θα μετατραπούν σε τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel και Neumann.

Εν όψει αυτών των επιπλοκών και δεδομένου ότι δεν έχουμε καθορίσει τις ακριβείς οριακές συνθήκες, δεν θα επιχειρήσουμε να γράψουμε τη σειρά της γενικής λύσης για όλες τις περιπτώσεις. Απλά, για κάθε συνδυασμό των διαφόρων ποσοτήτων, θα γράψουμε τη μορφή του αντίστοιχου όρου στη σειρά. Θα το κάνουμε χωριστά για τις περιπτώσεις $U(\rho) = -k^2, U(\rho) = +k^2, U(\rho) = 0$. Δύο ποσότητες που θα χρησιμοποιηθούν πολύ είναι οι

$$\kappa_+ \equiv \sqrt{\zeta^2 + k^2}, \quad \kappa_- \equiv \sqrt{|-\zeta^2 + k^2|}.$$

Η ακτινική εξίσωση (4.16) είναι χρήσιμο να γραφτεί με τη μορφή:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\left[\frac{Z''}{Z} + U(\rho) \right] \rho^2 - m^2 \right) R = 0. \tag{4.18}$$

4.3.1 Εξίσωση HELMHOLTZ: $[\nabla^2 + k^2]\Psi = 0$.

Αυτή η εξίσωση προκύπτει από την (4.18) όταν $U(\rho) = +k^2$.

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cosh \zeta z$ και $\sinh \zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση

$$\rho^2 R'' + \rho R' + ([\zeta^2 + k^2]\rho^2 - m^2)R = 0$$

θα λύνεται από τις $J_m(\kappa_+\rho)$ και $N_m(\kappa_+\rho)$ και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m J_m(\kappa_+\rho) + b_m N_m(\kappa_+\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$
$$[f_\zeta \cosh \zeta z + g_\zeta \sinh \zeta z]. \tag{4.19}$$

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cos \zeta z$ και $\sin \zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + ([-\zeta^2 + k^2]\rho^2 - m^2)R = 0.$$

Αν $\zeta^2 < k^2$, η εξίσωση θα λύνεται από τις $J_m(\kappa_-\rho)$ και $N_m(\kappa_-\rho)$ και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m J_m(\kappa_-\rho) + b_m N_m(\kappa_-\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.20}$$

Αν $\zeta^2 > k^2$, η εξίσωση θα λύνεται από τις $I_m(\kappa_-\rho)$ και $K_m(\kappa_-\rho)$ και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m I_m(\kappa_-\rho) + b_m K_m(\kappa_-\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.21}$$

Τέλος, αν $\zeta^2 = k^2$, η εξίσωση θα λύνεται από τις ρ^{+m} και ρ^{-m} για $m \neq 0$ και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi][f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.22}$$

Η ακόμα ειδικότερη περίπτωση $m = 0$ δίνει τις λύσεις 1 και $\ln \rho$ για την ακτινική συνάρτηση και τον αντίστοιχο όρο:

$$[a_0 + b_0 \ln \rho][c_0][f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.23}$$

- Αν $Z = h_0 + h_1 z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (k^2 \rho^2 - m^2) R = 0$$

και λύνεται από τις $J_m(k\rho)$ και $N_m(k\rho)$, και ο αντίστοιχος όρος είναι:

$$[a_m J_m(k\rho) + b_m N_m(k\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi][h_0 + h_1 z]. \tag{4.24}$$

Η περίπτωση $h_1 = 0$ δίνει τη λύση ενός καθαρά **διδιάστατου** προβλήματος.

4.3.2 Τροποποιημένη εξίσωση HELMHOLTZ: $[\nabla^2 - k^2]\Psi = 0$

Αυτή η εξίσωση προκύπτει από την (4.18) όταν $U(\rho) = -k^2$.

Πρέπει να λυθεί η εξίσωση:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\left[\frac{Z''}{Z} - k^2 \right] \rho^2 - m^2 \right) R = 0.$$

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cosh \zeta z$ και $\sinh \zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση

$$\rho^2 R'' + \rho R' + ([\zeta^2 - k^2]\rho^2 - m^2) R = 0$$

θα λύνεται:

(1) Είτε από τις $J_m(\kappa_-\rho)$ και $N_m(\kappa_-\rho)$, αν $\zeta^2 > k^2$, οπότε ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m J_m(\kappa_-\rho) + b_m N_m(\kappa_-\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cosh \zeta z + g_\zeta \sinh \zeta z]. \tag{4.25}$$

(2) Είτε από τις $I_m(\kappa_-\rho)$ και $K_m(\kappa_-\rho)$, αν $\zeta^2 < k^2$, και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m I_m(\kappa_-\rho) + b_m K_m(\kappa_-\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cosh \zeta z + g_\zeta \sinh \zeta z]. \tag{4.26}$$

Αναφέρουμε τέλος την περίπτωση $\zeta^2 = k^2$, οπότε οι λύσεις της ακτινικής εξίσωσης είναι οι $\rho^{\pm m}$ (1 και $\ln \rho$ για $m = 0$) και οι αντίστοιχοι όροι είναι της μορφής

$$[a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z], \tag{4.27}$$

ή

$$[a_0 + b_0 \ln \rho][c_0][f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.28}$$

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cos \zeta z$ και $\sin \zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (-[\zeta^2 + k^2]\rho^2 - m^2)R = 0,$$

η οποία θα ικανοποιείται από τις $I_m(\kappa_+\rho)$ και $K_m(\kappa_+\rho)$ ανεξαρτήτως του σχετικού μεγέθους των ζ και k και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m I_m(\kappa_+\rho) + b_m K_m(\kappa_+\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cos \zeta z + g_\zeta \sin \zeta z]. \tag{4.29}$$

- Αν $Z = h_0 + h_1 z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (-k^2\rho^2 - m^2)R = 0$$

και λύνεται από τις $I_m(k\rho)$ και $K_m(k\rho)$, και ο αντίστοιχος όρος είναι:

$$[a_m I_m(k\rho) + b_m K_m(k\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[h_0 + h_1 z]. \tag{4.30}$$

Και πάλι, αν $h_1 = 0$ παίρνουμε τη λύση ενός καθαρά **διδιάστατου** προβλήματος.

4.3.3 Εξίσωση LAPLACE: $\nabla^2\Psi = 0$

Αυτή η εξίσωση προκύπτει από την (4.18) όταν $U(\rho) = 0$.

Πρέπει να λυθεί η εξίσωση:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\left[\frac{Z''}{Z} \right] \rho^2 - m^2 \right) R = 0.$$

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cosh \zeta z$ και $\sinh \zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\zeta^2\rho^2 - m^2)R = 0$$

θα λύνεται από τις $J_m(\zeta\rho)$ και $N_m(\zeta\rho)$, άρα ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:

$$[a_m J_m(\zeta\rho) + b_m N_m(\zeta\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$

$$[f_\zeta \cosh \zeta z + g_\zeta \sinh \zeta z]. \tag{4.31}$$

- Αν οι ιδιοσυναρτήσεις στην κατεύθυνση z είναι οι $\cos\zeta z$ και $\sin\zeta z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:
$$\rho^2 R'' + \rho R' + (-\zeta^2\rho^2 - m^2)R = 0,$$
η οποία θα ικανοποιείται από τις $I_m(\zeta\rho)$ και $K_m(\zeta\rho)$ και ο αντίστοιχος όρος στη σειρά θα είναι της μορφής:
$$[a_m I_m(\zeta\rho) + b_m K_m(\zeta\rho)][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi]$$
$$[f_\zeta \cos\zeta z + g_\zeta \sin\zeta z]. \tag{4.32}$$

- Αν $Z = h_0 + h_1 z$, η προκύπτουσα ακτινική εξίσωση είναι η εξής:
$$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$$
και λύνεται από τις ρ^{+m} και ρ^{-m} (1 και $\ln\rho$ αν $m = 0$) και ο αντίστοιχος όρος είναι:
$$[a_m\rho^{+m} + b_m\rho^{-m}][c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi][h_0 + h_1 z] \tag{4.33}$$
και στην ειδική περίπτωση $m = 0$:
$$[a_0 + b_0 \ln\rho][c_0][h_0 + h_1 z] \tag{4.34}$$
Και πάλι, αν $h_1 = 0$ παίρνουμε τη λύση ενός καθαρά **διδιάστατου** προβλήματος.

Σύνοψη: Επειδή η περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων έχει πολλές υποπεριπτώσεις θα αναφέρουμε τα χαρακτηριστικά των λύσεων συνοπτικά: Παντού υπάρχουν οι παράγοντες $\cos m\phi$ και $\sin m\phi$ που εκφράζουν την αζιμουθιακή εξάρτηση. Η εξάρτηση από το z εκφράζεται είτε από τις συναρτήσεις $\sin\zeta z$ και $\cos\zeta z$ είτε από τις $sinh\zeta z$ και $\cosh\zeta z$, ανάλογα με τις οριακές συνθήκες ως προς z. Για τις περιπτώσεις των εξισώσεων διάχυσης, Helmholtz και τροποποιημένης Helmholtz, εμφανίζεται η σταθερά χωρισμού μεταβλητών k^2 που συνδυάζεται με το ζ^2 και γεννά τις κ_+ και κ_-. Αν τα κ_+ και κ_- είναι πραγματικοί αριθμοί, η εξάρτηση από την ακτινική συνιστώσα δίνεται από τις συναρτήσεις $J_m(\kappa_\pm\rho)$ και $N_m(\kappa_\pm\rho)$. Αν είναι φανταστικοί αριθμοί, η ακτινική εξάρτηση γίνεται: $I_m(|\kappa_\pm|\rho)$ και $K_m(|\kappa_\pm|\rho)$.

4.4 Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι λύσεις $U(r,\theta,\phi,t)$ της κυματικής εξίσωσης στο χώρο που έχουν τη μορφή $U(r,\theta,\phi,t) = u(r,\theta,\phi)sin(\omega t)$. Υπόδειξη: Σφαιρικές συντεταγμένες. Θα εμφανιστεί η εξίσωση του Legendre (θυμηθείτε τη λύση της εξίσωσης Laplace σε τρεις διαστάσεις). Η ακτινική εξίσωση που θα προκύψει ανάγεται σε Bessel με το μετασχηματισμό $R = \frac{W}{\sqrt{r}}$.

   Λύση: Η συνάρτηση U ικανοποιεί την κυματική εξίσωση: $\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\partial_{tt}U$, άρα η u είναι λύση της $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ (εξίσωση Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες), όπου $k \equiv \frac{\omega}{c}$. Κατ' αναλογία με την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες (με τον χωρισμό μεταβλητών $u = R(r)P(\theta)F(\phi)$) βρίσκουμε τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις για τα R και Θ, ενώ η "ακτινική" εξίσωση γίνεται:
$$\frac{1}{r^2}(r^2R')' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0,$$

που με την αντικατάσταση $R = \frac{W}{\sqrt{r}}$ δίνει την

$$r^2 W'' + rW' + \left[k^2 r^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] W = 0$$

που έχει λύσεις $J_{l+\frac{1}{2}}(kr), N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση που δίνει το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ για το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα κυκλικό βρόχο ρεύματος. Υποδείξεις:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \to \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J},$$

όπου $\vec{J}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος. Λάβετε ως δεδομένο ότι: $\vec{A} = A_\phi(\rho, \theta)\hat{\phi}$ και βρείτε τη γενική λύση της <u>ομογενούς</u> εξίσωσης, αφού πρώτα τη γράφετε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Μην προσπαθήσετε να προσδιορίσετε τις σταθερές που υπεισέρχονται στη γενική λύση.

Κεφάλαιο 5

Προβλήματα Sturm-Liouville

5.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στη συντριπτική πλειοψηφία των φυσικών εφαρμογών ανάγονται σε διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ) δεύτερης τάξης με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Οι συντελεστές αυτών των ΔΕ είναι συνήθως πραγματικές συναρτήσεις. Οι λύσεις τους μπορούν να είναι και μιγαδικές συναρτήσεις. Η ΔΕ θα εμφανιστεί γενικά με τη μορφή ενός προβλήματος ιδιοτιμών, το οποίο, λαμβάνοντας υπόψη όσα είπαμε στα κεφάλαια περί χωρισμού μεταβλητών, θα είναι το εξής:

$$\hat{L}\psi_\lambda = -\lambda\psi_\lambda, \tag{5.1}$$

όπου

$$\hat{L} \equiv \alpha(x)\frac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x), \tag{5.2}$$

οι $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, και υπάρχουν επίσης οι οριακές συνθήκες, οι οποίες προσδιορίζουν πλήρως το πρόβλημα, δηλαδή την ιδιοτιμή $-\lambda$ και την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση ψ_λ.

Παρατηρούμε ότι η μορφή του προβλήματος (5.1) θυμίζει έντονα τα προβλήματα ιδιοτιμών της Γραμμικής Αλγεβρας. Οπως είναι γνωστό, σ′ αυτά τα προβλήματα υπάρχει ένας τελεστής $\hat{A}$ (που αναπαρίσταται μ′ έναν πίνακα A) ο οποίος δρα σε κάποιο διάνυσμα (μέλος του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου) που αναπαρίσταται με μια στήλη. Το πρόβλημα ιδιοτιμών γι′ αυτόν τον τελεστή, που δρα σ′ ένα χώρο πεπερασμένων διαστάσεων (έστω N), είναι να βρεθούν ιδιοτιμές λ και αντίστοιχα διανύσματα u_λ, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση: $\sum_{l=1}^{N} A_{kl}u_{\lambda l} = \lambda u_{\lambda k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N$. Το πρόβλημα (5.1) που εξετάζουμε διαφέρει κατά το ότι στη θέση του τελεστή που δρα σε χώρο πεπερασμένων διαστάσεων, έχουμε έναν διαφορικό τελεστή, τον $\hat{L}$, που δρά σε έναν απειροδιάστατο χώρο συναρτήσεων. (Η διαφορά στο πρόσημο της ιδιοτιμής δεν είναι ουσιώδης. Χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση του διαφορικού τελεστή απλά για μελλοντική ευκολία).

Υπάρχει, για χώρους πεπερασμένων διαστάσεων, η πολύ ενδιαφέρουσα υποκατηγορία των ερμιτειανών τελεστών, για τους οποίους ισχύουν πολλά ενδιαφέροντα θεωρήματα:

1. Οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί,

2. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων τους αποτελεί βάση, ως προς την οποία μπορεί κανείς να αναπτύξει οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου και

3. Τα ιδιοδιανύσματά τους που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Αυτές οι τρεις ιδιότητες παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον για τις φυσικές εφαρμογές. Επί παραδείγματι, η ιδιότητα (1) συνδέεται με το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές είναι μετρήσιμες φυσικές ποσότητες, οι οποίες πρέπει ασφαλώς να είναι πραγματικοί αριθμοί. Η ιδιότητα (2) μπορεί να μας εξασφαλίσει ότι, αν λύσουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών, θα μπορέσουμε να εκφράσουμε οποιαδήποτε δυνατή λύση υπό τη μορφή ενός γραμμικού συνδυασμού (π.χ. μιας σειράς) των ιδιοδιανυσμάτων, ενώ η ιδιότητα (3) μπορεί να μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές στο άθροισμα των ιδιοδιανυσμάτων. Για παράδειγμα, το άθροισμα της σειράς μπορεί να είναι μια αρχική συνθήκη, όπως στα παραδείγματα των κεφαλαίων για το χωρισμό μεταβλητών: ίσως η αρχική απομάκρυνση $f(x)$ μιας χορδής να εκφραστεί ως άθροισμα των ιδιοσυναρτήσεων $\sum_n c_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ και να πρέπει να προσδιοριστούν οι συντελεστές c_n. Ενδιαφερόμαστε λοιπόν πάρα πολύ να διαπιστώσουμε κατά πόσο και για το απειροδιάστατο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, υπάρχουν ερμιτειανοί τελεστές.

Είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί από μιας αρχής ότι η ερμιτειανότητα ορίζεται πάντοτε ως προς ένα συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο. Επί παραδείγματι, για τον χώρο πεπερασμένων διαστάσεων που αναφέραμε πριν, το εσωτερικό γινόμενο δύο μιγαδικών διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ με συνιστώσες u_k και $v_k, k = 1, \ldots, N$ ορίζεται από την εξίσωση

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \sum_{k=1}^{N} u_k^* v_k \tag{5.3}$$

και ο πίνακας A (που αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A}$) είναι ερμιτειανός με την έννοια ότι ισχύει η σχέση: $(A\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A\vec{v})$. (Ο αστερίσκος συμβολίζει την μιγαδική συζυγή ποσότητα.) Οπως είπαμε, στην περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων έχουμε να κάνουμε με έναν απειροδιάστατο χώρο. Για να αρχίσουμε να εξοικειωνόμαστε στην ιδέα, θα θεωρήσουμε έναν απειροδιάστατο χώρο με αριθμήσιμη βάση. Η κατ΄ ευθείαν γενίκευση της σχέσης (5.3) είναι, βέβαια η σχέση

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^* v_k. \tag{5.4}$$

Θα έλεγε λοιπόν κανείς ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να οριστεί με μια τροποποίηση της σχέσης (5.4): $(f(x), g(x)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) g(x)$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίζει το ρόλο της συντεταγμένης υπ΄ αριθμόν k στη σχέση (5.4). Παρ΄ όλ΄ αυτά θα χρειαστούμε μια ελαφρά γενίκευση της (5.4). Για να κάνουμε τη γενίκευση πιο κατανοητή, μπορούμε να πούμε ότι ενδεχομένως (για κάποιο λόγο που δεν προσδιορίζεται προς το παρόν) ορισμένες συνιστώσες είναι πιο σημαντικές από άλλες, οπότε πρέπει να λαμβάνονται υπόψη μ΄ ένα μεγαλύτερο συντελεστή, ενώ άλλες είναι πιο ασήμαντες και πρέπει να αποδυναμωθούν πολλαπλασιαζόμενες μ΄ έναν μικρό συντελεστή. Ας ονομάσουμε w_k τον (θετικό) συντελεστή για τη συνιστώσα k, οπότε η γενίκευση της (5.4) είναι η:

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k u_k^* v_k. \tag{5.5}$$

Επομένως, αν μεταβούμε στον συνεχή δείκτη, το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων ορίζεται από τη σχέση:

$$(f(x), g(x)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x) f^*(x) g(x). \tag{5.6}$$

Η συνάρτηση $w(x) \geq 0$ λέγεται συνάρτηση βάρους και είναι απαραίτητη. Μια από τις χρήσεις της είναι ότι επιτρέπει να προσαρμόζει κανείς το πεδίο ορισμού του κάθε προβλήματος στο επιθυμητό μέρος του άξονα των x. Αν ορίσουμε ότι η συνάρτηση βάρους $w(x)$ μηδενίζεται για $-\infty < x < a$ και $b < x < +\infty$, το εσωτερικό γινόμενο μεταπίπτει στο

$$(f(x), g(x)) \equiv \int_a^b dx w(x) f^*(x) g(x) \tag{5.7}$$

και επομένως ουσιαστικά το πρόβλημα ιδιοτιμών περιορίζεται στο διάστημα $[a, b]$.

Θα εξετάσουμε τώρα υπό ποιές προϋποθέσεις ο διαφορικός τελεστής $\hat{L}$ είναι ερμιτειανός ως προς το εσωτερικό γινόμενο (5.6), δηλαδή πότε ισχύει ο ορισμός

$$(\hat{L}f, g) = (f, \hat{L}g) \to (\hat{L}f, g) - (f, \hat{L}g) = 0. \tag{5.8}$$

Γράφουμε τη σχέση ρητά, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (5.2) και (5.6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx w(\alpha f'' + \beta f' + \gamma f)^* g - \int_{-\infty}^{+\infty} dx w f^* (\alpha g'' + \beta g' + \gamma g) = 0 \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{+\infty} dx [w\alpha f^{*\prime\prime} g - w\alpha f^* g''] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx [w\beta f^{*\prime} g - w\beta f^* g']$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx [w\gamma f^* g - w\gamma f^* g] = 0 \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{+\infty} dx w\alpha [f^{*\prime} g - f^* g']' + \int_{-\infty}^{+\infty} dx w\beta [f^{*\prime} g - f^* g'] = 0 \to$$

$$\to w\alpha (f^{*\prime} g - f^* g')|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx [w\beta - (w\alpha)'][f^{*\prime} g - f^* g'] = 0 \tag{5.9}$$

Η συνθήκη (5.9) πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι συναρτήσεων $f(x), g(x)$. Ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να μηδενίζονται χωριστά οι δύο όροι:

$$w\alpha (f^{*\prime} g - f^* g')|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \tag{5.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [w\beta - (w\alpha)'][f^{*\prime} g - f^* g'] = 0 \tag{5.11}$$

Η συνθήκη (5.10) περιορίζει το χώρο των αποδεκτών συναρτήσεων. Οι αποδεκτές συναρτήσεις $f(x), g(x)$ θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε το γινόμενο $w(x)\alpha(x)[f^{*\prime}(x)g(x) - f^*(x)g'(x)]$ να παίρνει την ίδια τιμή στα $-\infty, +\infty$ (συνήθως η τιμή αυτή θα είναι μηδέν).

Η συνθήκη (5.11) προσδιορίζει τη συνάρτηση βάρους, αφού πρέπει να ισχύει για οποιεσδήποτε $f(x)$ και $g(x)$: $\alpha' w + \alpha w' = w\beta \to w' \equiv \frac{dw}{dx} = \frac{\beta - \alpha'}{\alpha} w \to \int \frac{dw}{w} = \int \frac{\beta}{\alpha} dx - \int \frac{\alpha'}{\alpha} dx$, οπότε: $w(x) = \frac{c}{|\alpha(x)|} \exp\left[\int dx \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]$. Το c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης και συνήθως τίθεται ίσο με 1. Παρατηρούμε ότι η $\alpha(x)$ δεν πρέπει να μηδενίζεται στο πεδίο ορισμού, άρα (λόγω συνεχείας) δεν αλλάζει πρόσημο. Συνεπώς μπορούμε να αγνοήσουμε το σύμβολο της απόλυτης τιμής και η συνάρτηση βάρους είναι τελικά:

$$w(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \exp\left[\int dx \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]. \tag{5.12}$$

Αν τώρα το $w(x)$ επιλεγεί όπως είπαμε, θα ικανοποιεί τη σχέση $w\beta = (w\alpha)'$, οπότε η σχέση (5.1) συνεπάγεται την

$$w(x)\hat{L}\psi_\lambda(x) = -\lambda w(x)\psi_\lambda(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow w(x)\alpha(x)\psi''_\lambda(x) + w(x)\beta(x)\psi'_\lambda(x) + w(x)\gamma(x)\psi_\lambda(x) = -\lambda w(x)\psi_\lambda(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow w(x)\alpha(x)\psi''_\lambda(x) + (w(x)\alpha(x))'\psi'_\lambda(x) + w(x)\gamma(x)\psi_\lambda(x) = -\lambda w(x)\psi_\lambda(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow (w(x)\alpha(x)\psi'_\lambda(x))' + (\gamma(x) + \lambda)w(x)\psi_\lambda(x) = 0. \tag{5.13}$$

Το δίδαγμα όλων αυτών των πράξεων είναι ότι: (α) Ακόμα και αν το τυχαίο πρόβλημα με τελεστή $\hat{L}$ δεν είναι ερμιτειανό, μπορεί να γίνει, αν ο τελεστής πολλαπλασιαστεί με την κατάλληλη συνάρτηση βάρους. Βέβαια, είναι ερμιτειανό ως προς το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο (5.6) και μέσα στο χώρο των συναρτήσεων που υπακούουν στη συνθήκη (5.10). (β) Το τίμημα που πληρώνει κανείς για να το πετύχει είναι η εμφάνιση της συνάρτησης βάρους στο εσωτερικό γινόμενο (5.6) και στην εξίσωση (5.13). (γ) Από τη στιγμή που θα το πετύχουμε έχουμε εξασφαλίσει τις καλές ιδιότητες ενός ερμιτειανού τελεστή. Δηλαδή ξέρουμε ότι οι ιδιοτιμές θα είναι πραγματικές, ότι οι ιδιοσυναρτήσεις θα είναι βάση, δηλαδή θα καλύπτουν όλο τον αντίστοιχο χώρο, και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, $\psi_{\lambda_3}, \ldots$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές θα είναι ορθογώνιες. Το τελευταίο σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x)\psi^*_{\lambda_1}(x)\psi_{\lambda_2}(x)$, που παριστάνει το εσωτερικό γινόμενο, θα μηδενίζεται αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Δηλαδή, αν βρούμε τη συνάρτηση βάρους, ξέρουμε αυτόματα και ποιό ολοκλήρωμα, σχετιζόμενο με τις ιδιοσυναρτήσεις, θα μηδενιστεί, δηλαδή παράγουμε την ορθογωνιότητα. (δ) Οι ιδιότητες των ερμιτειανών τελεστών δεν προσδιορίζουν την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x)\psi^*_\lambda(x)\psi_\lambda(x)$ (με το ίδιο λ), δηλαδή το "μέτρο" της συνάρτησης. Πάντα γίνεται κάποια αυθαίρετη σύμβαση. (ε) Επίσης οι ιδιότητες των ερμιτειανών τελεστών δεν δίνουν πληροφορίες σχετικά με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x)[\psi^{(1)}_\lambda(x)]^*\psi^{(2)}_\lambda(x)$, δηλαδή για το εσωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή (αν παρουσιάζεται αυτό το φαινόμενο που λέγεται *εκφυλισμός*).

Με τους συμβολισμούς $p(x) \equiv w(x)\alpha(x)$ και $q(x) \equiv \gamma(x)w(x)$, η εξίσωση (5.13) γράφεται:

$$(p(x)\psi'_\lambda(x))' + [q(x) + \lambda w(x)]\psi_\lambda(x) = 0. \tag{5.14}$$

Συνήθως αυτή είναι η μορφή που αναφέρεται ως πρόβλημα Sturm-Liouville στη βιβλιογαφία. Προηγουμένως είδαμε πώς μπορεί να προκύψει από ένα πρόβλημα με τυχαίο διαφορικό τελεστή και ότι συνεπώς δεν πρόκειται για μια ειδική περίπτωση. Μια και η εξίσωση (5.14) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$p(x)\psi''_\lambda(x) + p'(x)\psi'_\lambda(x) + [q(x) + \lambda w(x)]\psi_\lambda(x) = 0,$$

υπάρχει η τάση να λέγεται ότι το πρόβλημα είναι ερμιτειανό αν, στον αντίστοιχο τελεστή, ο συντελεστής της πρώτης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης (δηλαδή ο $p'(x)$) είναι η παράγωγος του συντελεστή της δεύτερης παραγώγου (δηλαδή του $p(x)$). Αυτό δεν είναι ακριβές, όπως είδαμε. Το πρόβλημα δεν ορίζεται μόνο από τον τελεστή, αλλά και από τις οριακές συνθήκες, πράγμα που περιορίζει το χώρο των αποδεκτών συναρτήσεων. Πάντως, αυτή η μορφή μας πληροφορεί ότι, αν συμβαίνει κάτι τέτοιο στον αρχικό τελεστή (δηλαδή αν $\alpha'(x) = \beta(x)$, η συνάρτηση βάρους θα είναι μονάδα.

Αυτό συμβαίνει, επί παραδείγματι, στην εξίσωση Legendre: $(1-x^2)\psi'' - 2x\psi' + l(l+1)\psi = 0$, αφού $\alpha'(x) = (1-x^2)' = -2x = \beta(x)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την εξίσωση του Hermite:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Οπως βλέπουμε εύκολα, $\alpha(x) = 1, \beta(x) = -2x, \lambda = 2n, \gamma(x) = 0$. Η σχέση (5.12) δίνει: $w(x) = \exp[-x^2]$. Η εξίσωση γράφεται, αν πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση βάρους:

$$\exp[-x^2]H_n''(x) - 2x\exp[-x^2]H_n'(x) + 2n\exp[-x^2]H_n(x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\exp[-x^2]H_n'(x))' + 2n\exp[-x^2]H_n(x) = 0,$$

που συμφωνεί με τη μορφή (5.14), αφού $p(x) = \alpha(x)w(x) = \exp[-x^2]$, $q(x) = \gamma(x)w(x) = 0$, $\lambda w(x) = 2n\exp[-x^2]$. Δηλαδή, αν πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση βάρους, ο τελεστής που προκύπτει έχει ερμιτειανή μορφή. Το εσωτερικό γινόμενο δύο πολυωνύμων Hermite θα είναι:

$$(H_m(x), H_n(x)) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_m^*(x)H_n(x),$$

και θα μηδενίζεται αν $m \neq n$, γιατί θα αντιστοιχούν σε διαφορετική ιδιοτιμή. Οποιαδήποτε αποδεκτή συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί στη σειρά:

$$f(x) = \sum_n c_n H_n(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με κάποιο συγκεκριμένο πολυώνυμο $H_N(x)$ και τη συνάρτηση βάρους και ολοκληρώνοντας μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη σχέση ορθογωνιότητας και να απομονώσουμε τον αντίστοιχο συντελεστή c_N :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_N(x)f(x) = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_n(x)H_N(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_N(x)f(x) = c_N \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_N^2(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow c_N = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_N(x)f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]H_N^2(x)}.$$

5.2 Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών του Fourier

Θα προσπαθήσουμε τώρα να θεμελιώσουμε καλύτερα τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών για ομογενή προβλήματα που έχουμε ήδη εφαρμόσει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Για απλότητα θα θεωρήσουμε πρόβλημα συνοριακών τιμών με δύο μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές: το χρόνο και μια χωρική μεταβλητή. Το χρονικό κομμάτι θα περιλαμβάνει μια χρονική παράγωγο (∂_t), αν έχουμε πρόβλημα διάχυσης ή θερμικής αγωγιμότητας ή διπλή χρονική παράγωγο (∂_{tt}), αν έχουμε πρόβλημα κυματικής. Γράφουμε τον αντίστοιχο τελεστή με τη μορφή $Q \equiv c_1\partial_t + c_2\partial_{tt}$.

Το πρόβλημα είναι το εξής:

$$\frac{1}{w(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)+q(x)\Psi\right\}+Q\Psi=0, \tag{5.15}$$

$$d_a\Psi_x|_{x=a}+f_a\Psi|_{x=a}=0, \quad d_b\Psi_x|_{x=b}+f_b\Psi|_{x=b}=0, \tag{5.16}$$

$$g_1\Psi_t|_{t=t_0}+h_1\Psi|_{t=t_0}=n_1(x), \quad g_2\Psi_t|_{t=t_0}+h_2\Psi|_{t=t_0}=n_2(x). \tag{5.17}$$

Παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι το χωρικό κομμάτι είναι της μορφής των Sturm και Liouville, ώστε να μπορέσουμε να έχουμε μερικά γενικά συμπεράσματα. Οι $n_1(x), n_2(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις. Για την κυματική εξίσωση μια συνηθισμένη περίπτωση είναι $g_1=0, h_1=1, g_2=1, h_2=0$, οπότε οι συνθήκες (5.17) γίνονται $\Psi|_{t=t_0}=n_1(x), \Psi_t|_{t=t_0}=n_2(x)$ και οι $n_1(x), n_2(x)$ αντιπροσωπεύουν την αρχική απομάκρυνση και την αρχική ταχύτητα αντίστοιχα. Για την εξίσωση διάχυσης μόνο μια από τις δύο συνθήκες χρειάζεται, επομένως μια τυπική περίπτωση θα ήταν: $g_1=0, h_1=1, n_1(x)\equiv n_0(x), g_2=0, h_2=0, n_2(x)=0$, οπότε θα είχαμε τη συνθήκη: $\Psi|_{t=t_0}=n_0(x)$. Οπως είναι φανερό, οι (αρχικές) συνθήκες στο χρόνο δεν είναι υποχρεωτικά ομογενείς. Αντίθετα, οι χωρικές συνθήκες (5.16) είναι υποχρεωτικά ομογενείς για να ισχύουν αυτά που θα ισχυριστούμε πιο κάτω. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι δύο χωρικές συνθήκες αναφέρονται η κάθε μια σε ένα μόνο (a ή b) από τα δύο ακραία όρια του x. Για παράδειγμα, στις συνθήκες (5.16) δεν περιλαμβάνονται οι πολύ σημαντικές περιοδικές οριακές συνθήκες, που έχουμε ήδη συναντήσει με τη μορφή $\Psi|_{x=L}=\Psi|_{x=-L}, \quad \Psi_x|_{x=L}=\Psi_x|_{x=-L}$. Μια πολύ σημαντική πρόσθετη συνθήκη είναι ότι τα πηλίκα $\frac{p'(x)}{p(x)}, \frac{q'(x)}{q(x)}$ και $\frac{w'(x)}{w(x)}$ είναι πεπερασμένα καθώς $x\to a$ και καθώς $x\to b$.

Κάνουμε το χωρισμό μεταβλητών:

$$\Psi(x,t)=X(x)T(t)$$

και αντικαθιστώντας στην (5.15) παίρνουμε την:

$$\underbrace{\frac{1}{w(x)}\left[\frac{(pX')'}{X}+q(x)\right]}+\underbrace{c_1\frac{T'}{T}+c_2\frac{T''}{T}}=0$$

Η πρώτη παράσταση εξαρτάται μόνο από το x ενώ η δεύτερη μόνο από το t. Είναι λοιπόν και οι δύο υποχρεωτικά σταθερές, η πρώτη ίση με $-\lambda$ και η δεύτερη με $+\lambda$:

$$(pX')'+(q(x)+\lambda w(x))X(x)=0, \tag{5.18}$$

$$c_1T'+c_2T''-\lambda T=0. \tag{5.19}$$

Λύνοντας το πρόβλημα (5.18) προσδιορίζουμε τα λ_n και $X_n(x)$. Μετά τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών με αφετηρία το χωρικό πρόβλημα, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση και του ευκολότερου "χρονικού" προβλήματος $c_1T_n'+c_2T_n''-\lambda_nT_n=0$. Κατόπιν τούτου, η γενική λύση θα μπορεί να γραφτεί συμβολικά ως εξής: $\Psi(x,t)=\sum_n A_nX_n(x)T_n(t)$. Οι συντελεστές A_n μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Το χωρικό πρόβλημα που εμφανίστηκε είναι το πρόβλημα Sturm-Liouville που έχουμε ήδη συναντήσει. Επομένως, μόνο και μόνο επειδή έχουμε να κάνουμε με ερμιτειανό τελεστή, ισχύουν τα εξής:

- Οι ιδιοτιμές λ_n είναι πραγματικές.
- Με την κατάλληλη κανονικοποίηση ισχύει: $\int_a^b dxw(x)X_m^*(x)X_n(x)=\delta_{mn}$.

- Τυχαία συνάρτηση $f(x)$ του διαστήματος $[a, b]$ αναπτύσσεται σε σειρά: $f(x) = \sum_n c_n X_n(x)$, όπου $c_n = \int_a^b dx w(x) X_n^*(x) f(x)$.

Επί πλέον, με τις περιοριστικές συνθήκες που έχουμε επιβάλλει (π.χ. αποκλεισμός του ενδεχομένου των περιοδικών οριακών συνθηκών):

- Το φάσμα ιδιοτιμών είναι διακριτό.
- Το φάσμα ιδιοτιμών δεν είναι εκφυλισμένο.
- Υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή.
- Η ιδιοσυνάρτηση $X_n(x)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n μηδενίζεται ακριβώς $n-1$ φορές στο διάστημα $[a, b]$.

5.2.1 Εξαιρέσεις-Γενικεύσεις

Οταν οι συνθήκες που θέσαμε παραβιαστούν, θα αλλάξουν και ορισμένα συμπεράσματα ή τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος.

- Στην περίπτωση που έχουμε περιοδικές οριακές συνθήκες, το φάσμα των ιδιοτιμών θα είναι εκφυλισμένο. Στο παράδειγμα του δακτυλίου, που συναντήσαμε ήδη σε προηγούμενο κεφάλαιο, βρήκαμε ημιτονικές και συνημιτονικές λύσεις που αντιστοιχούσαν στην ίδια ιδιοτιμή.
- Στην περίπτωση που (α) είτε το διάστημα $[a, b]$ είναι άπειρο, (β) είτε κάποιο από τα πηλίκα $\frac{p'(x)}{p(x)}, \frac{q'(x)}{q(x)}, \frac{w'(x)}{w(x)}$ απειρίζεται σε ένα από τα δύο ακραία σημεία (το α ή το β) τότε η οριακή συνθήκη που έχει σχέση με το συγκεκριμένο οριακό σημείο δεν είναι πιά αυθαίρετη. Συνήθως απαιτείται η λύση να είναι πεπερασμένη σ' αυτό το σημείο. Ενα παράδειγμα έχουμε ήδη δει με τον δίσκο. Στο κέντρο του είχαμε ακριβώς αυτό το φαινόμενο και απαιτήσαμε να βρούμε λύση πεπερασμένη στο κέντρο, οπότε θέσαμε ίσους με το μηδέν τους συντελεστές των όρων $\frac{1}{\rho^m}$.
- Το φάσμα μπορεί να είναι διακριτό, συνεχές ή μικτό. Η λύση με ένα μέρος του φάσματος συνεχές παραπέμπει συνήθως στη χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών.

5.2.2 Ορθοκανονικοποίηση των Gram και Schmidt

Υπάρχει η περίπτωση να έχουμε δύο ή περισσότερες ιδιοσυναρτήσεις που να αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Αυτό το φαινόμενο λέγεται **εκφυλισμός**. Σ' αυτήν την περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι υποχρεωτικά ορθογώνια μεταξύ τους και χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των **Gram και Schmidt**, για να τα ορθοκανονικοποιήσουμε. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος επεκτείνεται (υπό προϋποθέσεις) αυτούσια και σε χώρους άπειρης διάστασης και έχει ως εξής: Εστω ότι έχουμε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου και έναν αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{u}_n$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε απ' αυτά έναν ίσο αριθμό ορθοκανονικών διανυσμάτων $\hat{\phi}_n$. Το μέτρο $||v||$ ενός διανύσματος $\vec{v}$ (απαραίτητο για να ορίσουμε την έννοια του 'ορθοκανονικού' διανύσματος) ορίζεται από τη σχέση $||v|| \equiv \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$. Για την κατασκευή των $\hat{\phi}_n$ είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε πρώτα τα διανύσματα $\vec{\psi}_n$, που είναι ορθογώνια ανά δύο, αλλά δεν έχουν υποχρεωτικά μέτρο μονάδα.

Η έμπνευση της μεθόδου έρχεται από τα συνηθισμένα διανύσματα. Ας θεωρήσουμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του συνηθισμένου τριδιάστατου χώρου, τα $\vec{u}_1, \quad \vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$. Από το $\vec{u}_1$ μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\hat{\phi}_1$ με μέτρο μονάδα, διαιρώντας το με το $||u_1||$: $\hat{\phi}_1 = \frac{\vec{u}_1}{||u_1||}$. Για να κατασκευάσουμε το $\vec{\psi}_2$, διάνυσμα ορθογώνιο προς το $\hat{\phi}_1$, πρέπει από το $\vec{u}_2$ να αφαιρέσουμε τη συνιστώσα του που είναι παράλληλη με το $\hat{\phi}_1$. Αρα σχηματίζουμε την προβολή του $\vec{u}_2$ πάνω στη διεύθυνση του $\hat{\phi}_1$ (ισούται με $(\hat{\phi}_1, \vec{u}_2)\hat{\phi}_1$) και την αφαιρούμε από το διάνυσμα $\vec{u}_2$. Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα $\vec{\psi}_2$, ορθογώνιο προς το $\hat{\phi}_1$: $\vec{\psi}_2 = \vec{u}_2 - (\hat{\phi}_1, \vec{u}_2)\hat{\phi}_1$. Κανονικοποιώντας το βρίσκουμε το $\hat{\phi}_2 : \hat{\phi}_2 \equiv \frac{\vec{\psi}_2}{||\psi_2||}$. Παρόμοια, βρίσκουμε το $\vec{\psi}_3$ αφαιρώντας από το $\vec{u}_3$ τις προβολές του στις προηγούμενες δύο διευθύνσεις και με κανονικοποίηση παίρνουμε το $\hat{\phi}_3 : \vec{\psi}_3 = \vec{u}_3 - (\hat{\phi}_1, \vec{u}_3)\hat{\phi}_1 - (\hat{\phi}_2, \vec{u}_3)\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3 \equiv \frac{\vec{\psi}_3}{||\psi_3||}$. Αν έχουμε περισσότερες διαστάσεις, η μέθοδος γενικεύεται εύκολα:

$$\vec{\psi}_n = \vec{u}_n - \sum_{l=1}^{n-1} \hat{\phi}_l(\hat{\phi}_l, \vec{u}_n), \quad \hat{\phi}_n \equiv \frac{\vec{\psi}_n}{||\psi_n||}.$$

Υπάρχει μια ελαφρά γενίκευση αυτών των σχέσεων. Αν θέλουμε τα μέτρα των $\vec{\phi}_n$ να μην είναι υποχρεωτικά μονάδες, αλλά N_n, τότε οι δύο παραπάνω σχέσεις πρέπει να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες:

$$\vec{\psi}_n = \vec{u}_n - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\vec{\phi}_l(\vec{\phi}_l, \vec{u}_n)}{N_l^2}, \quad \vec{\phi}_n \equiv \frac{N_n \vec{\psi}_n}{||\psi_n||}.$$

Ειναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι η διαδικασία που περιγράψαμε δεν δίνει ένα μονοσήμαντο αποτέλεσμα. Είναι εύκολο να δει κανείς, περιοριζόμενος για απλότητα σ΄ ένα χώρο δύο διαστάσεων, ότι το ορθοκανονικό σύστημα που θα προκύψει από αυτή τη διαδικασία ξεκινώντας από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ και θεωρώντας ότι $\vec{u}_1 = \vec{p}, \quad \vec{u}_2 = \vec{q}$ θα είναι διαφορετικό από το αποτέλεσμα που θα προκύψει αν θεωρήσει ότι $\vec{u}_1 = \vec{q}, \quad \vec{u}_2 = \vec{p}$. Καταλαβαίνει κανείς ότι αυτού του είδους η αυθαιρεσία μεγαλώνει πολύ όσο αυξάνεται ο αριθμός των διαστάσεων. Πάντως, οι διάφορες βάσεις (συστήματα ορθοκανονικών διανυσμάτων) που προκύπτουν είναι μεταξύ τους ισοδύναμα. Επί παραδείγματι, οι δύο βάσεις του διδιάστατου χώρου που μόλις περιγράψαμε είναι απλά στραμένες η μια ως προς την άλλη.

5.3 Προσεγγιστικές μέθοδοι για μεγάλες ιδιοτιμές

Εχουμε πει, όταν αναφερόμαστε στις γενικές ιδιότητες των συστημάτων Sturm και Liouville, ότι υπάρχει μια ελάχιστη ιδιοτιμή, ενώ οι υπόλοιπες αυξάνονται (ενδεχομένως χωρίς όριο). Οταν οι ιδιοτιμές είναι πολύ μεγάλες, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικούς τύπους για τις ιδιοτιμές και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας τη λύση της εξίσωσης

$$my''(t) + ky(t) = 0 \to y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

του αρμονικού ταλαντωτή:

$$y(t) = A_+ \exp[+i\omega_0 t] + A_- \exp[-i\omega_0 t] = A_+ \exp\left[+i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right] + A_- \exp\left[-i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right].$$

Το χαρακτηριστικό της λύσης που μας ενδιαφέρει εν προκειμένω είναι ότι ταλαντεύεται με συχνότητα ίση με την τετραγωνική ρίζα του συντελεστή k της συνάρτησης $y(t)$ (στη διαφορική εξίσωση) διά τον συντελεστή m της δεύτερης παραγώγου y''. Το πλάτος είναι σταθερό.

Ας έλθουμε τώρα στην εξίσωση Sturm-Liouville:

$$(p\psi'(x))' + (\lambda w + q)\psi(x) = 0 \to p\psi''(x) + p'\psi'(x) + (\lambda w + q)\psi(x) = 0. \tag{5.20}$$

Προσπαθούμε να μιμηθούμε τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Υποθέτουμε ότι προσεγγιστικά η συχνότητα θα μεταβάλλεται με το x και θα ισούται περίπου (σύμφωνα με όσα είπαμε στον απλό αρμονικό ταλαντωτή) με την τετραγωνική ρίζα του συντελεστή $\lambda w + q$ της συνάρτησης $\psi(x)$ (στη διαφορική εξίσωση) διά τον συντελεστή p της δεύτερης παραγώγου ψ'', δηλαδή με $\sqrt{\frac{\lambda w+q}{p}} \simeq \sqrt{\frac{\lambda w}{p}}$, αφού το λ είναι τόσο μεγάλο ώστε το $q(x)$ να είναι αμελητέο. Παρατηρούμε ότι η συχνότητα επηρεάζεται από τη μεγάλη τιμή της ιδιοτιμής, άρα την περιμένουμε μεγάλη. Θα υποθέσουμε ότι και το πλάτος μεταβάλλεται. Δηλαδή περιμένουμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση της μορφής:

$$\psi(x) = A(x)\exp[iS(x)], \tag{5.21}$$

όπου το $A(x)$ θα μεταβάλλεται σχετικά αργά, ενώ το $S(x)$ γρήγορα. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\psi'(x) = [A'(x) + iA(x)S'(x)]\exp[iS(x)],$$

$$\psi''(x) = [A''(x) + 2iA'(x)S'(x) + iA(x)S''(x) - A(x)S'^2(x)]\exp[iS(x)].$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση (5.20) δίνει (παραλείπουμε το όρισμα x) :

$$pA'' + 2ipA'S' + ipAS'' - pAS'^2 + p'A' + ip'AS' + \lambda wA + qA = 0.$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος πρέπει να μηδενίζονται χωριστά, οπότε προκύπτουν οι δύο εξισώσεις:

$$pA'' - pAS'^2 + p'A' + \lambda wA + qA = 0, \tag{5.22}$$

$$2pA'S' + pAS'' + p'AS' = 0. \tag{5.23}$$

Στην εξίσωση (5.22) μόνο οι όροι $-pAS'^2$ και λwA είναι σημαντικοί. Ο μεν πρώτος επειδή περιέχει την παράγωγο της γρήγορα μεταβαλλόμενης συνάρτησης $S(x)$, ο δε δεύτερος επειδή περιέχει τη μεγάλη ιδιοτιμή λ. Παραλείπουμε τους υπόλοιπους όρους και συνάγουμε τη σχέση:

$$S'^2 = \frac{\lambda w}{p} \to S'S'' = \lambda\frac{w'p - wp'}{2p^2}. \tag{5.24}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (5.23) με S' και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που μόλις αποδείξαμε από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε διαδοχικά:

$$2pA'S'^2 + pAS'S'' + p'AS'^2 = 0 \to 2\lambda wA' + \lambda A\frac{w'p - wp'}{2p} + \lambda p'A\frac{w}{p} = 0$$

$$\to 4A' + (\frac{w'}{w} + \frac{p'}{p})A = 0 \to 4\frac{A'}{A} + [\ln(wp)]' = 0 \to 4[\ln A]' + [\ln(wp)]' = 0$$

$$\to \ln A^4 + \ln(wp) = \tilde{c} \to A^4 wp = \exp[\tilde{c}] \equiv c \to A = \frac{c}{(wp)^{1/4}}.$$

Δηλαδή τελικά:

$$A = \frac{c}{(wp)^{1/4}} \tag{5.25}$$

Εξ άλλου η σχέση (5.24) συνεπάγεται ότι:

$$S = \int dx \sqrt{\frac{\lambda w(x)}{p(x)}}. \tag{5.26}$$

Είναι φανερό από αυτήν την έκφραση ότι η "συχνότητα" ταλάντωσης (που θα είναι στην πραγματικότητα κυματικός αριθμός, μια και πρόκειται για ταλάντωση στο χώρο και όχι στο χρόνο) θα ισούται προσεγγιστικά με $\sqrt{\frac{\lambda w(x)}{p(x)}}$, όπως είχε προβλεφθεί από το απλό επιχείρημα στην αρχή αυτής της παραγράφου.

Η σχέση (5.21), λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις (5.25) και (5.26) συνεπάγεται ότι η γενική (προσεγγιστική) λύση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(x) = \frac{1}{(wp)^{1/4}} \left\{ C_+ \exp\left[+i\int dx \sqrt{\frac{\lambda w(x)}{p(x)}}\right] + C_- \exp\left[-i\int dx \sqrt{\frac{\lambda w(x)}{p(x)}}\right] \right\} \tag{5.27}$$

Οι οριακές συνθήκες θα δώσουν περιορισμούς που θα επιτρέψουν τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών. Εστω, επί παραδείγματι, ότι υπάρχει η απαίτηση η απομάκρυνση να μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος $[0, L]$ και ότι οι σταθερές ολοκλήρωσης έχουν επιλεγεί έτσι ώστε το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στα εκθετικά μηδενίζεται για $x = 0$. Με άλλα λόγια επιλέγουμε το ολοκλήρωμα να δίδεται εναλλακτικά από την έκφραση: $\int_0^x dx' \sqrt{\frac{\lambda w(x')}{p(x')}}$. Τότε η συνθήκη $\psi(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $C_- = -C_+$, με αποτέλεσμα η συνάρτηση να είναι ανάλογη της παράστασης $\sin\left[\sqrt{\lambda}\int dx \sqrt{\frac{w(x)}{p(x)}}\right]$. Με αυτό το δεδομένο, η δεύτερη συνθήκη $\psi(L) = 0$ δίνει τη σχέση $\sqrt{\lambda}\int_0^L dx' \sqrt{\frac{w(x')}{p(x')}} = n\pi$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\lambda = \left(\frac{n\pi}{\int_0^L dx \sqrt{\frac{w(x)}{p(x)}}}\right)^2$. Η μέθοδος είναι γνωστή στους Φυσικούς με το όνομα **WKB**, από τα ονόματα των Wentzel, Kramers και Brillouin, ενώ θα ήταν ίσως δικαιότερο να αποδίδεται στους Green και Liouville.

Παράδειγμα: Θα εξετάσουμε το όριο των μεγάλων ιδιοτιμών της εξίσωσης του Hermite, που συναντήσαμε ήδη προηγουμένως:

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση αυτή εξαρτάται από μια αδιάστατη ανεξάρτητη μεταβλητή, που συμβολίζεται εδώ με ξ. (Καμμιά φορά η εξίσωση του Hermite γράφεται συναρτήσει του x. Εδώ χρησιμοποιούμε το ξ επειδή θέλουμε να κάνουμε τη διάκριση μεταξύ των μεταβλητών που έχουν διαστάσεις κι εκείνων που δεν έχουν). Οπως έχουμε ήδη δει, πολλαπλασιάζοντας με τη συνάρτηση βάρους $w(\xi) = \exp[-\xi^2]$, η εξίσωση μεταπίπτει στην

$$(\exp[-\xi^2]H_n'(\xi))' + 2n\exp[-\xi^2]H_n(\xi) = 0,$$

απ' όπου είναι προφανές ότι $p(\xi) = w(\xi) = \exp[-\xi^2], \lambda = 2n$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.27) βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\psi_n(\xi) = \exp\left[\frac{\xi^2}{2}\right](C_+ \exp[+i\sqrt{2n}\xi] + C_- \exp[-i\sqrt{2n}\xi]).$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η εξίσωση του Hermite χρησιμεύει για τη λύση του προβλήματος του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Από τη θεωρία του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή είναι γνωστό ότι η κυματοσυνάρτηση θα ισούται με το γινόμενο $\exp[-\frac{\xi^2}{2}]\psi_n(\xi) = C_+ \exp[+i\sqrt{2n}\xi] + C_- \exp[-i\sqrt{2n}\xi]$. Επαναφέρουμε τώρα τις φυσικές μονάδες. Η χωρική μεταβλητή x σχετίζεται με την αντίστοιχη αδιάστατη ξ μέσω της σχέσης $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, όπου ω είναι η κλασική συχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή και m η μάζα του. Η κυματοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή $C_+ \exp\left[+i\sqrt{\frac{2nm\omega}{\hbar}}x\right] + C_- \exp\left[-i\sqrt{\frac{2nm\omega}{\hbar}}x\right]$. Δηλαδή βρίσκουμε μια συνάρτηση που περιγράφει μια χωρική κύμανση με κυματικό αριθμό $k = \sqrt{\frac{2nm\omega}{\hbar}}$. Η ενέργεια του ταλαντωτή θα δίνεται από τη σχέση $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 2nm\omega}{2m\hbar} = n\hbar\omega$. Παρατηρούμε ότι η ενέργεια που προκύπτει προσεγγίζει πολύ καλά την ακριβή έκφραση $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

5.4 Ασκήσεις προς λύση

1. Τα πολυώνυμα Laguerre είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x\frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n}{dx} + nL_n = 0, \quad x \in [0, +\infty).$$

Βρείτε τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ που είναι αναγκαία, ώστε το πρόβλημα να είναι ερμιτειανό στο διάστημα $[0, +\infty)$. Βρείτε τα τρία πρώτα πολυώνυμα Laguerre ξεκινώντας από τις συναρτήσεις $1, \quad x, \quad x^2$ και θεωρώντας ότι πρέπει να είναι κανονικοποιημένα στη μονάδα.

2. Οι συναρτήσεις $P_1(x) = x$ και $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ είναι λύσεις της εξίσωσης του Legendre, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, +1]$ και αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Η συνάρτηση βάρους είναι μονάδα. Υπολογίστε το εσωτερικό τους γινόμενο: $\int_{-1}^{+1} dx \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Είναι μηδέν (ή όχι;) Γιατί (ή γιατί όχι;)

3. Εστω ότι έχουμε ένα φαινόμενο που διέπεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\psi}{dx}\right) + p(x)\frac{d\psi}{dx} + (\lambda + q(x))\psi = 0$$

και ορίζεται στο διάστημα $[a, b]$. Οι οριακές συνθήκες είναι: $\psi(b) = \psi(a), \quad \psi'(b) = 5\psi(a) + C\psi'(a)$. Να προσδιορισθεί η σταθερά C, ώστε το πρόβλημα να είναι ερμιτειανό, δηλαδή Sturm-Liouville.

4. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\psi'' + \lambda(2+x)^2\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{1}{5}\right) = 0.$$

Να υπολογιστούν προσεγγιστικά οι μεγάλες ιδιοτιμές.

Κεφάλαιο 6

Πολυώνυμα Legendre

6.1 Εισαγωγή

Οπως εξηγήσαμε στα κεφάλαια για τον χωρισμό των μεταβλητών, όταν προσπαθήσει κανείς να λύσει την εξίσωση

$$\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi) + U(r)\Psi(r,\theta,\phi) = 0,$$

όπου το $U(r)$ εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα r και όχι από τις γωνίες, καταλήγει μεταξύ άλλων σε μια εξίσωση ως προς θ και μια ως προς ϕ. Η τελευταία έχει τις απλές λύσεις $e^{\pm im\phi}$, και ο ακέραιος m υπεισέρχεται και στην εξίσωση για την πολική γωνία θ. Αν για διαφόρους λόγους μας ενδιαφέρει ειδικά η περίπτωση $m = 0$, η εξίσωση ως προς θ απλοποιείται και γίνεται η εξίσωση του Legendre:

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0, \tag{6.1}$$

όπου $x \equiv \cos\theta$. Το πρόβλημα είναι Sturm-Liouville, έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες και μάλιστα η συνάρτηση βάρους $w(x)$ είναι μονάδα, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα. Η λύση βρίσκεται με τη μέθοδο ανάπτυξης σε σειρά του Frobenius, αλλά, αν ο αριθμός l είναι ακέραιος, η σειρά δεν έχει άπειρους όρους: τερματίζεται και καταλήγει σε ένα πολυώνυμο Legendre.

6.2 Γεννήτρια συνάρτηση

Αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από τον τύπο του Rodrigues:

$$P_l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}[(x^2-1)^l]. \tag{6.2}$$

Μπορούμε αρκετά απλά να επαληθεύσουμε ότι οι συναρτήσεις που προκύπτουν επαληθεύουν την εξίσωση του Legendre. Επίσης μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) \tag{6.3}$$

Σημειώνουμε ότι $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$.

Πολλές χρήσιμες ιδιότητες των πολυωνύμων αυτών προκύπτουν από τη γεννήτρια συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g(x,t) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \tag{6.4}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση μπορεί ακόμα να γραφτεί με τη μορφή $g(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)t^{l-1}$ και η παράγωγός της ως προς t με τις μορφές:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)t^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)P_{l+1}(x)t^l = \sum_{l=2}^{\infty}(l-1)P_{l-1}(x)t^{l-2}. \tag{6.5}$$

Με βάση αυτές αποδεικνύεται εύκολα η σχέση:

$$\sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}t^l = \sum_{l=1}^{\infty}(l-1)P_{l-1}t^l + \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}t^l = \frac{\partial g}{\partial t}t^2 + tg, \tag{6.6}$$

που θα χρησιμοποιήσουμε σε λίγο.

Αν πολλαπλασιάσουμε την αναδρομική σχέση (6.3) με t^l και αθροίσουμε ως προς l, θα βρούμε:

$$\sum_l (l+1)P_{l+1}t^l = 2xt\sum_l lP_l t^{l-1} + x\sum_l P_l t^l - \sum_l lP_{l-1}t^l. \tag{6.7}$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.4), (6.5) και (6.6) η σχέση αυτή γίνεται:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2xt\frac{\partial g}{\partial t} + xg - \left[\frac{\partial g}{\partial t}t^2 + tg\right] \to [1 - 2xt + t^2]\frac{\partial g}{\partial t} = (x-t)g. \tag{6.8}$$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση αυτής της διαφορικής εξίσωσης ως προς t :

$$\int \frac{dg}{g} = \int \frac{x-t}{1-2xt+t^2}dt \to \ln g = -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-2xt+1)}{1-2xt+t^2}$$

$$\to g = \frac{K(x)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \tag{6.9}$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης $K(x)$ είναι βέβαια ανεξάρτητη του t, αλλά δεν μπορούμε να αποκλείσουμε τυχόν εξάρτησή της από το x. Για να την προσδιορίσουμε, θέτουμε $t = 0$ και βρίσκουμε $g(x,0) = P_0(x) \to \frac{K(x)}{\sqrt{1-0+0}} = P_0(x) = 1 \to K(x) = 1$. Αρα έχουμε προσδιορίσει πλήρως τη συνάρτηση $g(x,t)$:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l. \tag{6.10}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης αυτής είναι τα πολυώνυμα Legendre, γι' αυτό η $g(x,t)$ ονομάζεται **γεννήτρια συνάρτηση** των πολυωνύμων Legendre.

Αν παραγωγίσουμε την $g(x,t)$ ως προς t, θα πάρουμε την αναδρομική σχέση (6.3) από την οποία ξεκινήσαμε. Αν, όμως, παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $g(x,t)$ ως προς x βρίσκουμε κάτι καινούργιο:

$$t\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_l P_l' t^l \to tg = \sum_l (1-2xt+t^2)P_l' t^l \to$$

$$\to \sum_l P_l t^{l+1} = \sum_l P_l' t^l - 2x\sum_l P_l' t^{l+1} + \sum_l P_l' t^{l+2} \to$$

$$\to \sum_l P_l t^{l+1} = \sum_l P_{l+1}' t^{l+1} - 2x\sum_l P_l' t^{l+1} + \sum_l P_{l-1}' t^{l+1}. \tag{6.11}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$P_l = P_{l+1}' - 2xP_l' + P_{l-1}'. \tag{6.12}$$

Παραγωγίζοντας την αναδρομική σχέση (6.3) ως προς x βρίσκουμε:

$$(l+1)P'_{l+1} = (2l+1)P_l + (2l+1)xP'_l - lP'_{l-1}. \tag{6.13}$$

Απαλείφοντας το xP'_l μεταξύ των (6.12) και (6.13) βρίσκουμε την εύχρηστη σχέση

$$P'_{l+1} - P'_{l-1} = (2l+1)P_l.$$

Μόνο <u>δύο</u> από τις αναδρομικές σχέσεις είναι πραγματικά <u>ανεξάρτητες</u>. Διάφορες άλλες χρήσιμες αναδρομικές σχέσεις μπορούν να παραχθούν από τις προηγούμενες με γραμμικούς συνδυασμούς. Σημειώνουμε μερικές:

$$\begin{aligned}
P'_{l+1} &= (l+1)P_l + xP'_l, \\
P'_{l-1} &= -lP_l + xP'_l, \\
(1-x^2)P'_l &= lP_{l-1} - lxP_l, \\
(1-x^2)P'_l &= (l+1)xP_l - (l+1)P_{l+1}.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις και τις παραγώγους τους μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι θα πάρουμε ακόμα μια φορά την εξίσωση Legendre:

$$(1-x^2)P''_l - 2xP'_l + l(l+1)P_l = 0. \tag{6.14}$$

Ενα θέμα στο οποίο η γεννήτρια συνάρτηση είναι χρήσιμη είναι ο υπολογισμός των τιμών των πολυωνύμων Legendre σε συγκεκριμένες τιμές του x. Θα δώσουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Είναι γνωστό ότι:

$$g(-1,t) = \sum_l P_l(-1)t^l.$$

Αλλά $g(-1,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_l (-1)^l t^l$. Αρα

$$\sum_l P_l(-1)t^l = \sum_l (-1)^l t^l \to P_l(-1) = (-1)^l.$$

Παρόμοια $P_l(1) = 1$. Εξ άλλου

$$g(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!} t^{2k},$$

συνεπώς $P_{2k+1}(0) = 0, P_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}$.

Σημειώνουμε τους ορισμούς:

$$\begin{aligned}
N! &\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot N, \\
(2N-1)!! &\equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2N-1), \\
(2N)!! &\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2N) = 2^N N!
\end{aligned}$$

Η ομοτιμία των πολυωνύμων Legendre εκφράζεται από τη σχέση

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x).$$

Αυτό μπορεί κανείς να το δει πρόχειρα από τη γεννήτρια συνάρτηση. Ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι $g(-x,t) = g(x,-t)$, και συμπεραίνουμε ότι:

$$\sum_l P_l(-x)t^l = \sum_l P_l(x)(-t)^l \to \sum_l P_l(-x)t^l = \sum_l P_l(x)(-1)^l t^l,$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για την ομοτιμία.

6.3 Σειρά LEGENDRE

Η ορθογωνιότητα προκύπτει από τη γενική θεωρία των Sturm και Liouville:

$$\int_{-1}^{+1} dx P_{l_1}(x) P_{l_2}(x) = \frac{2}{2l_1+1}\delta_{l_1 l_2}.$$

Ο παράγοντας κανονικοποίησης έχει επιλεγεί αυθαίρετα και η σχέση μπορεί να αποδειχτεί ξεκινώντας από τον τύπο του Rodrigues.

Με βάση τα παραπάνω μπορεί κανείς εύκολα να βρει τους συντελεστές a_l της ανάπτυξης σε **σειρά Legendre** μιας συνάρτησης ορισμένης στο διάστημα [-1,+1]: Αν

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x),$$

οι συντελεστές a_l δίνονται από τη σχέση:

$$a_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} dx f(x) P_l(x).$$

Η πληρότητα των πολυωνύμων Legendre, δηλαδή η επάρκειά τους για την ανάπτυξη οποιασδήποτε συνάρτησης σ' αυτό το διάστημα προκύπτει επίσης από την ερμιτειανότητα του αντίστοιχου διαφορικού τελεστή.

6.4 Δεύτερη λύση της εξίσωσης του LEGENDRE

Η εξίσωση του Legendre είναι δεύτερης τάξης και έχει και άλλη μια ανεξάρτητη λύση, εκτός από τα πολυώνυμα που μόλις αναπτύξαμε. Η λύση αυτή συμβολίζεται με $Q_l(x)$ και λέγεται συνάρτηση του Legendre. Ικανοποιεί την εξίσωση, αλλά απειρίζεται στις θέσεις $x = \pm 1$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $x = \cos\theta$, βλέπουμε ότι οι απειρισμοί συμβαίνουν στις γωνίες $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, δηλαδή στους "πόλους" κάποιας σφαίρας. Η γενική λύση της εξίσωσης του Legendre γράφεται με τη μορφή:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l P_l(x) + b_l Q_l(x)].$$

Αν τώρα μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης μας στους πόλους και απαιτούμε (για φυσικούς λόγους) η λύση αυτή να μην απειρίζεται, τότε υποχρεωτικά θέτουμε τους συντελεστές b_l των ποσοτήτων $Q_l(x)$ ίσους με το μηδέν. Η μόνη περίπτωση που μπορεί να είναι χρήσιμη η αποκλίνουσα λύση $Q_l(x)$ είναι όταν μας ενδιαφέρει η λύση μόνο σ' ένα διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$, όπου $\theta_1 > 0$ και $\theta_2 < \pi$, οπότε δεν πλησιάζουμε την επικίνδυνη περιοχή. Σ' αυτήν την (σχετικά σπάνια) περίπτωση η δεύτερη λύση είναι, όχι απλά ανεκτή, αλλά απαραίτητη.

6.5 Αγώγιμη σφαίρα σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο

Θεωρούμε μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R με φορτίο Q μέσα σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο με ένταση E, και διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των z. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στο κεφάλαιο για τον χωρισμό των μεταβλητών, η λύση της $\nabla^2 V = 0$ στο χώρο έξω από τη σφαίρα είναι της μορφής:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left[a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta). \tag{6.15}$$

(Υπενθυμίζεται ότι τίποτα δεν εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία ϕ και ότι η δεύτερη λύση της εξίσωσης Legendre, η $Q_l(\cos\theta)$ απειρίζεται στα $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, άρα απορρίπτεται.) Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_l και b_l επικαλούμαστε τις οριακές συνθήκες. Κατ΄ αρχήν ο συντελεστής a_0 είναι μια σταθερά χωρίς σημασία που απλά καθορίζει τη στάθμη όπου το δυναμικό είναι μηδέν, άρα μπορεί να τεθεί ίση με μηδέν από την αρχή. Μία άλλη απαίτηση είναι το πεδίο να είναι ομογενές μακριά από τη σφαίρα. Ενα δυναμικό που παράγει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι το $v(z) = -Ez$. Πράγματι: $\vec{E} = -\vec{\nabla} v(z) = E\hat{z}$. Επομένως, αυτή η συνθήκη γράφεται:

$$V(r \to \infty) = v(z) = -Ez = -Er\cos\theta = -ErP_1(\cos\theta).$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta) = a_1 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta),$$

απ΄ όπου γίνεται φανερό ότι $a_1 = -E$ και ότι $a_l = 0$, για $l \geq 2$. Η δεύτερη οριακή συνθήκη θα μας προσδιορίσει τους υπόλοιπους συντελεστές. Πάνω στην αγώγιμη σφαίρα το δυναμικό πρέπει να έχει μια σταθερή τιμή, έστω V_0 :

$$V_0 = V(r = R) = -ERP_1(\cos\theta) + \frac{b_0}{R} + \frac{b_1}{R^2} P_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{b_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

Αφού τα $P_l(\cos\theta)$ είναι ορθογώνια, αυτή η ισότητα συνεπάγεται ότι:

$$\frac{b_0}{R} = V_0, \quad \frac{b_1}{R^2} - ER = 0, \quad b_{l\geq 2} = 0.$$

Δηλαδή οι μόνοι μη μηδενικοί όροι στη σειρά (6.15) είναι οι εξής:

$$a_1 = -E, \quad b_0 = V_0 R, \quad b_1 = ER^3.$$

Τελικά, λοιπόν, χρησιμοποιώντας και την $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ βρίσκουμε:

$$V(r,\theta) = -ErP_1(\cos\theta) + \frac{V_0 R}{r} + \frac{ER^3}{r^2} P_1(\cos\theta) = \frac{V_0 R}{r} - Er\cos\theta(1 - \frac{R^3}{r^3}).$$

Η ποσότητα V_0 μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής: όταν δεν υπάρχει καθόλου ηλεκτροστατικό πεδίο, το δυναμικό της φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας θα δίνεται αφ΄ ενός από τη σχέση $V(r,\theta) = \frac{V_0 R}{r}$, αφ΄ ετέρου από την γνωστή έκφραση του Coulomb $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, οπότε προκύπτει η ταυτοποίηση $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Δηλαδή η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι:

$$V(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - Er\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right).$$

Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, που ισούται με ϵ_0 επί την συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι κάθετη στην αγώγιμη επιφάνεια: $\sigma(\theta) = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\big|_R \right) = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\epsilon_0 E\cos\theta$. Ο πρώτος προσθετέος είναι η πυκνότητα φορτίου που οφείλεται στο φορτίο Q και είναι ανεξάρτητη της ύπαρξης του ηλεκτροστατικού πεδίου, ενώ ο δεύτερος είναι η πυκνότητα του φορτίου που επάγεται από το πεδίο.

6.6 Συναρτημένα "πολυώνυμα" LEGENDRE

Τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre ορίζονται από τη σχέση:

$$P_{lm}(x) \equiv (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \tag{6.16}$$

όπου $P_l(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. Είναι εύκολο από τον ορισμό να δειχθεί ότι ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_{lm}}{dx^2} - 2x\frac{dP_{lm}}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_{lm} = 0. \tag{6.17}$$

Η εξίσωση (6.17) εμφανίζεται πολύ συχνά σε φυσικές εφαρμογές, ειδικά όταν χρησιμοποιούνται οι σφαιρικές συντεταγμένες. Προκύπτει κατά τον χωρισμό μεταβλητών των εξισώσεων $[\nabla^2 + V(r)]\Psi = 0$, όπου το $V(r)$ εξαρτάται μόνο από το μέτρο της απόστασης r και όχι από τις γωνίες.

Σημειώνουμε ότι η ειδική περίπτωση $m = 0$ αντιστοιχεί στα πολυώνυμα Legendre. Δηλαδή

$$P_{l0}(x) \equiv P_l(x).$$

Τα μη μηδενικά m αντιστοιχούν σε μη τετριμένη εξάρτηση από τη γωνία ϕ, την $\exp[\pm im\phi]$. Αντιθέτως, η περίπτωση $m = 0$ είναι μερικότερη και αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου τίποτε δεν εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία. Εχουμε αναφερθεί σ' αυτά τα θέματα σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Στην περίπτωση $m = 0$ (και σε άλλες περιπτώσεις) το συναρτημένο "πολυώνυμο" Legendre είναι πράγματι πολυώνυμο. Γενικά όμως τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre γενικά <u>δεν</u> <u>είναι</u> <u>πολυώνυμα!</u> Ακριβέστερα, είναι πολυώνυμα για άρτια m, ενώ για περιττά m είναι πολυώνυμα πολλαπλασιασμένα επί την παράσταση: $\sqrt{1-x^2}$. Για παράδειγμα, $P_{11} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Γι' αυτόν το λόγο πολλοί συγγραφείς προτιμούν να τα ονομάζουν "συναφείς <u>συναρτήσεις</u> του Legendre".

Από τον ορισμό (6.16) των συναρτημένων "πολυωνύμων" Legendre και τον τύπο (6.2) του Rodrigues: $P_l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$ για τα απλά πολυώνυμα του Legendre, συνάγουμε τον τύπο του Rodrigues για τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre:

$$P_{lm}(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l.$$

Σ' αυτόν τον τύπο το m δεν είναι υποχρεωτικά θετικό, όπως στην (6.16). Μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, αρκεί να ισχύει ότι $l + m \geq 0$. Εξ άλλου, αν το m γίνει πιο μεγάλο από το $+l$, οι παράγωγοι θα είναι τόσο μεγάλης τάξης, που θα μηδενίσουν το αποτέλεσμα. Τελικά, λοιπόν, το m τρέχει μεταξύ $-l$ και $+l$:

$$-l \leq m \leq +m.$$

Αποδεικνύονται επίσης οι σχέσεις:

$$P_{l,-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x), \quad P_{lm}(-x) = (-1)^{l+m} P_{lm}(x).$$

Ο τύπος του Rodrigues μας επιτρέπει να παραγάγουμε τη **σχέση ορθογωνιότητας:**

$$\int_{-1}^{1} dx P_{l_1 m}(x) P_{l_2 m}(x) = \frac{2}{2l_1+1}\frac{(l_1+m)!}{(l_1-m)!}\delta_{l_1 l_2},$$

που υποστηρίζεται και από τη γενική ιδιότητα των ιδιοδιανυσμάτων ενός ερμιτειανού τελεστή. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης m σ' αυτή τη σχέση είναι **ίδιος** για τις δύο συναρτήσεις. Μόνο αυτή η σχέση ορθογωνιότητας είναι χρήσιμη, γιατί τα $P_{lm}(\cos\theta)$ δεν εμφανίζονται μόνα τους, αλλά πολλαπλασιασμένα με τα εκθετικά $\exp[\pm im\phi]$, υπό τη μορφή των σφαιρικών αρμονικών, όπως θα δούμε σε λίγο. Η ολοκλήρωση στην αζιμουθιακή γωνία ϕ υποχρεώνει τους δύο δείκτες m να ταυτιστούν. Οι **αναδρομικές σχέσεις** γι΄ αυτά τα "πολυώνυμα" βρίσκονται από τις αντίστοιχες των πολυωνύμων Legendre κάνοντας τις αναγκαίες παραγωγίσεις. Γράφουμε μερικές:

$$P_{l,m+1} - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_{lm} + [l(l+1) - m(m-1)]P_{l,m-1} = 0,$$

$$(2l+1)\sqrt{1-x^2}P_{lm} = P_{l+1,m+1} - P_{l-1,m+1}$$

$$= (l+m)(l+m-1)P_{l-1,m-1} - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1,m-1},$$

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dP_{lm}}{dx} = \frac{1}{2}P_{l,m+1} - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_{l,m-1}.$$

Σημειώνουμε τέλος ότι η συναρτημένη εξίσωση Legendre έχει και **δεύτερη λύση** (εκτός της $P_{lm}(x)$), την $Q_{lm}(x)$. Προκύπτει από τις συναρτήσεις Legendre ως εξής:

$$Q_{lm}(x) \equiv (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_l(x)$$

και απειρίζεται στα σημεία $x = \pm 1$. Οι παρατηρήσεις που είχαν γίνει σχετικά με τη χρήση της $Q_l(x)$ σε προβλήματα συνοριακών τιμών ισχύουν αυτούσιες και για τις συναρτήσεις $Q_{lm}(x)$.

6.7 Σφαιρικές αρμονικές

Από το χωρισμό μεταβλητών σε μερικές διαφορικές εξισώσεις όπως η $[\nabla^2 + V(r)]\Psi = 0$, που περιέχουν δυναμικά $V(r)$ με σφαιρική συμμετρία, προκύπτουν εξισώσεις ως προς τις συντεταγμένες θ και ϕ που δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο δυναμικό. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή εξάρτηση είναι κοινή για όλα τα δυναμικά με σφαιρική συμμετρία και δίδεται από τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

Η ορθογωνιότητα αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια των σχέσεων ορθογωνιότητας των συναρτημένων "πολυωνύμων" Legendre:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta [Y_{l_1m_1}(\theta,\phi)]^* Y_{l_2m_2}(\theta,\phi) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} dx \left[(-1)^{m_1}\sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}\frac{(l_1-m_1)!}{(l_1+m_1)!}}P_{l_1m_1}(x)e^{-im_1\phi}\right]$$

$$\left[(-1)^{m_2}\sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}\frac{(l_2-m_2)!}{(l_2+m_2)!}}P_{l_2m_2}(x)e^{+im_2\phi}\right] =$$

$$= 2\pi\delta_{m_1m_2}\int_{-1}^{+1} dx(-1)^{2m_1}\left[\sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}\frac{(l_1-m_1)!}{(l_1+m_1)!}}P_{l_1m_1}(x)\right]$$

$$\left[\sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}\frac{(l_2-m_2)!}{(l_2+m_2)!}}P_{l_2 m_1}(x)\right] =$$

$$= 2\pi\delta_{m_1 m_2}\frac{2}{2l_1+1}\frac{(l_1+m_1)!}{(l_1-m_1)!}\delta_{l_1 l_2}\left(\sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}\frac{(l_1-m_1)!}{(l_1+m_1)!}}\right)^2 = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}.$$

(Στην πορεία αλλάξαμε το δείκτη του συναρτημένου "πολυωνύμου" Legendre από m_2 σε m_1 εκμεταλλευόμενοι την παρουσία του δέλτα του Kronecker $\delta_{m_1 m_2}$). Δηλαδή τελικά:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta [Y_{l_1 m_1}(\theta,\phi)]^* Y_{l_2 m_2}(\theta,\phi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}.$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, σε μια πολύ απλή σχέση ορθογωνιότητας για τις σφαιρικές αρμονικές. Ουσιαστικά μια τέτοια απλή σχέση για τις σφαιρικές αρμονικές ήταν ο λόγος που βρισκόταν πίσω από τους αρκετά περίεργους παράγοντες στις σχέσεις ορθογωνιότητας των συναρτημένων "πολυωνύμων" Legendre: δηλαδή επελέγησαν εκείνοι κάπως περίπλοκοι, ώστε να καταλήξουμε σε κάτι απλό για τις σφαιρικές αρμονικές, που χρησιμοποιούνται πάρα πολύ συχνά.

Θα εισαγάγουμε έναν πολύ χρήσιμο συμβολισμό που συνηθίζεται ιδιαίτερα σε υπολογισμούς Φυσικής. Είδαμε ότι η ολοκλήρωση ως προς τις γωνίες σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι της μορφής:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta f(\cos\theta,\phi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{x=-1}^{+1} dx f(x,\phi).$$

Τις γωνίες θ και ϕ τις συμβολίζουμε συλλογικά ως Ω, δηλαδή:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta f(\cos\theta,\phi) \equiv \int d\Omega f(\Omega).$$

Επίσης η συνάρτηση δέλτα του Dirac ως προς τις γωνίες (βλέπε το σχετικό παράρτημα) συμβολίζεται:

$$\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\phi-\phi_0) \equiv \delta(\Omega-\Omega_0).$$

Με τον συμβολισμό αυτόν η σχέση ορθογωνιότητας για τις σφαιρικές αρμονικές γράφεται:

$$\int d\Omega [Y_{l_1 m_1}(\Omega)]^* Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}.$$

Οι σφαιρικές αρμονικές είναι πλήρες σύστημα (βάση), δηλαδή οποιαδήποτε συνάρτηση των θ, ϕ μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός σφαιρικών αρμονικών:

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \alpha_{lm} Y_{lm}(\Omega).$$

Η ανάπτυξη αυτή λέγεται **σειρά του Laplace.** Η πληρότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι σφαιρικές αρμονικές είναι ιδιοσυναρτήσεις ερμιτειανού τελεστή και εκφράζεται σε πιο θεμελιώδες επίπεδο με τη σχέση:

$$\delta(\Omega-\Omega') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta,\phi)[Y_{lm}(\theta',\phi')]^*.$$

Εχουμε δηλαδή την ανάλυση της "μονάδας" (δηλαδή της συνάρτησης δέλτα που είναι το μοναδιαίο στοιχείο στον χώρο των συναρτήσεων) σε άθροισμα γινομένων ιδιοσυναρτήσεων. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτή τη σχέση με $f(\Omega')$ και ολοκληρώσουμε βρίσκουμε:

$$\int d\Omega' \delta(\Omega - \Omega') f(\Omega') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \phi) \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' [Y_{lm}(\theta', \phi')]^* f(\theta', \phi'),$$

δηλαδή

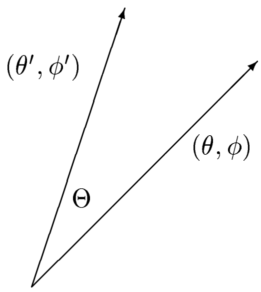
$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \alpha_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad \alpha_{lm} = \int d\Omega' [Y_{lm}(\Omega')]^* f(\Omega').$$

6.8 Προσθετικό θεώρημα

Μια εξαιρετικά σπουδαία ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών είναι το λεγόμενο προσθετικό θεώρημα:

$$P_l(\cos\Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} [Y_{lm}(\theta', \phi')]^* Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{6.18}$$

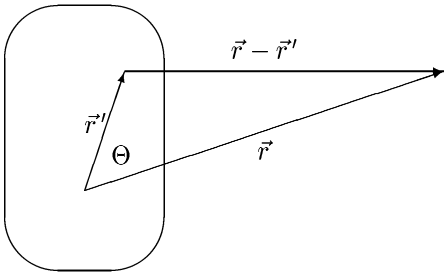
όπου Θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι κατευθύνσεις (θ, ϕ) και(θ', ϕ'). Η απόδειξή του είναι πολύ μακροσκελής και δεν θα την επιχειρήσουμε. Υπάρχει μια πάρα πολύ απλή απόδειξη στο πλαίσιο των συναρτήσεων Green.



6.9 Πολυπολική ανάπτυξη

Μια εφαρμογή των σφαιρικών αρμονικών με θεμελιώδη σημασία για τη Φυσική είναι η πολυπολική ανάπτυξη. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση της ηλεκτροστατικής. Θεωρούμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε σ' ένα σημείο παρατήρησης με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ (με πολικές συντεταγμένες r, θ, ϕ), το δυναμικό που οφείλεται σε μια κατανομή φορτίου η οποία εκτείνεται σε μια περιορισμένη περιοχή του χώρου. Αυτές οι πηγές χωρικά προσδιορίζονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}'$ (με πολικές συντεταγμένες r', θ', ϕ') και ποσοτικά από την πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{r}')$. Συνήθως θεωρούμε ότι το σημείο παρατήρησης βρίσκεται "μακριά" από τις "πηγές".

Ας υποθέσουμε ότι η αρχή των αξόνων επιλέγεται κάπου μέσα στο χώρο των πηγών, και ότι απαιτούμε να ισχύει η σχέση $r' < r$ για όλα τα $\vec{r}'$, για να έχει νόημα η πολυπολική ανάπτυξη. Βέβαια, θα είναι πιο χρήσιμη στην περιοχή $r' << r$, αλλά η κατ' αρχήν ανάπτυξη θα ισχύει και με την ασθενέστερη συνθήκη. Απλά, αν δεν ισχύει η ισχυρή συνθήκη, χρειάζεται να λάβει κανείς υπόψη περισσότερους όρους της σειράς, για να πετύχει μια καλή προσέγγιση του δυναμικού.



Είναι γνωστό ότι, αν χωρίσουμε την περιοχή των πηγών σε απειροστές περιοχές που έχουν όγκο d^3r' και περικλείουν φορτίο $dq(\vec{r}') = d^3r'\rho(\vec{r}')$ το αντίστοιχο στοιχειώδες δυναμικό στο σημείο $\vec{r}$, που απέχει από την πηγή απόσταση $|\vec{r}-\vec{r}'|$, δεν είναι παρά το γνωστό δυναμικό του Coulomb: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ Αθροίζοντας σ΄ όλες τις πηγές βρίσκουμε, λοιπόν, ότι το δυναμικό θα δίνεται από τη σχέση:

$$V(r,\theta,\phi) = \int d^3r'\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{6.19}$$

Επομένως, το πρόβλημα είναι κατ΄ αρχήν λυμένο. Η λύση είναι όμως δύσχρηστη, με την έννοια ότι η ολοκλήρωση γίνεται μεν στον χώρο των πηγών $\vec{r}'$, αλλά, μέσω του παρονομαστή, παίζει σημαντικό ρόλο και το σημείο παρατήρησης $\vec{r}$. Είναι επόμενο να αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια πιο εύχρηστη έκφραση, τουλάχιστον για σημεία παρατήρησης "έξω" από την κατανομή φορτίου. Μια πρώτη ιδέα έχει ως αφετηρία το δυναμικό που προέρχεται από μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα. Η κατ΄ αρχήν λύση και σ΄ αυτήν την απλή περίπτωση είναι η (6.19). Ξέρουμε όμως ότι, αν η αρχή των αξόνων επιλεγεί στο κέντρο της σφαίρας, το δυναμικό έξω από τη σφαίρα δίνεται από τη σχέση $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$, όπου Q είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας (το οποίο προκύπτει από μια ολοκλήρωση στο χώρο των πηγών, $Q = \int d^3r'\rho(\vec{r}')$, η οποία όμως δεν εμπλέκει το σημείο παρατήρησης $\vec{r}$). Αυτή η έκφραση είναι πραγματικά απλή.

Για να επιτύχουμε κάτι αντίστοιχο στη γενική περίπτωση, παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής στην (6.19) μπορεί να γραφτεί:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')} = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta},$$

όπου έχουμε συμβολίσει με Θ τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα δύο διανύσματα, δηλαδή ουσιαστικά οι δύο διευθύνσεις (θ,ϕ) και (θ',ϕ'). Στη συνέχεια γράφουμε τον παρονομαστή με τη μορφή $r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\Theta}$, ώστε να εκμεταλλευτούμε, όπως θα δούμε σε λίγο, την υπόθεση ότι το r είναι μεγαλύτερο από το r'. Παρατηρούμε ότι η έκφραση $\frac{1}{r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\Theta}}$ ταυτίζεται με τη γεννήτρια συνάρτηση $g(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ των πολυωνύμων Legendre, αν θέσουμε $t \equiv \frac{r'}{r}, x \equiv \cos\Theta$. Αφού $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\Theta}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\Theta).$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση η έκφραση (6.19) για το δυναμικό γίνεται:

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\Theta).$$

Εφαρμόζοντας τώρα το αθροιστικό θεώρημα (6.18) προκύπτει ότι:

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\rho(\vec{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l}Y_{lm}(\theta,\phi)[Y_{lm}(\theta',\phi')]^*$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{1}{2l+1}\int d^3r'\rho(\vec{r}')r'^l[Y_{lm}(\theta',\phi')]^*.$$

Το αντικείμενο

$$Q_{lm} \equiv \int d^3r'\rho(\vec{r}')r'^l[Y_{lm}(\theta',\phi')]^*$$

λέγεται **πολυπολική ροπή** τάξης l της κατανομής φορτίου. Τελικά το δυναμικό γράφεται:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{1}{r^{l+1}}\frac{1}{2l+1}Q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi).$$

Αυτή είναι η **πολυπολική ανάπτυξη** του δυναμικού. Σημειώνουμε ότι οι πολυπολικές ροπές είναι απλά αριθμοί, οπότε η εξάρτηση του δυναμικού από το σημείο παρατήρησης είναι εμφανής. Πρόκειται μια σειρά με όρους που είναι όλο και λιγότερο σημαντικοί, όσο ανεβαίνουμε σε τάξη.

Εχει ενδιαφέρον να δούμε τους πρώτους όρους αυτής της ανάπτυξης για τυχαία κατανομή φορτίου. Για τον όρο $l=0$ μας χρειάζεται η έκφραση $Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Τότε $Q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int d^3r'\rho(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q$, όπου Q το συνολικό φορτίο της κατανομής. Ο αντίστοιχος όρος στο δυναμικό είναι ο

$$\frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{r}Q_{00}Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r},$$

που είναι το δυναμικό Coulomb.

Για τον όρο $l=1$ μας χρειάζονται οι εκφράσεις:

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}.$$

Τότε:

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int d^3r'\rho(\vec{r}')r'\cos\theta' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int dq(\vec{r}')z' \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z,$$

$$Q_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int d^3r'\rho(\vec{r}')r'\sin\theta' e^{\mp i\phi} =$$

$$= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int dq(\vec{r}')(x'\mp iy') \equiv \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x \mp ip_y).$$

Οι τελευταίες εκφράσεις δείχνουν ότι τα μεγέθη που προκύπτουν είναι συναρτήσεις των συνιστωσών της γνωστής ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\vec{p} \equiv \int dq(\vec{r}')\vec{r}'$. (Οι συνιστώσες x και y εκφράζονται με τους συνδυασμούς $p_x \pm ip_y$). Οι αντίστοιχοι όροι στο δυναμικό είναι:

$$\frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{1}{3}[Q_{10}Y_{10} + Q_{11}Y_{11} + Q_{1-1}Y_{1-1}] =$$

$$= \frac{1}{3\epsilon_0 r^2}\left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta + \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y)\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi)\right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y)\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi)\right].$$

Αν κάνουμε τις πράξεις θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{p}\cdot\hat{r}$$

για τη διπολική συνεισφορά στο δυναμικό.

Παρατηρούμε τη χαρακτηριστική εξάρτηση $\frac{1}{r^2}$ του δυναμικού του διπόλου (που θα γίνει εξάρτηση $\frac{1}{r^3}$ αν παραγωγίσει κανείς κατάλληλα ώστε να πάρει την ένταση του αντίστοιχου ηλεκτρικού πεδίου). Η διπολική συνεισφορά, λοιπόν, είναι πιο ασθενική από την πρώτη (του φορτίου, που μπορούμε να το λέμε και μονόπολο και συμπεριφέρεται ως $\frac{1}{r}$). Επομένως, σε μεγάλες αποστάσεις κυριαρχεί η συνεισφορά του φορτίου. Αν, όμως, το σύστημα έχει συνολικά μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο (όπως στην περίπτωση δύο αντίθετων φορτίων σε μικρή απόσταση μεταξύ τους) τότε η συνεισφορά του φορτίου μηδενίζεται και στις μεγάλες αποστάσεις κυριαρχεί πια η διπολική συνεισφορά. Αυτό το πράγμα συνεχίζεται και με τις ανώτερες ροπές. *Η συνεισφορά της ροπής τάξης l συμπεριφέρεται ως $\frac{1}{r^{l+1}}$ και γίνεται σημαντική μόνο αν όλες οι ροπές με τάξεις $l = 0, 1, 2, \ldots, l-1$ μηδενίζονται.*

Αναφέρουμε ακόμη ότι οι ροπές τάξης l έχουν $2l+1$ συνιστώσες και λέγονται 2^l-πολα. Επί παραδείγματι:

Η ροπή τάξης 0 έχει 1 συνιστώσα και λέγεται μονόπολο (φορτίο).

Η ροπή τάξης 1 έχει 3 συνιστώσες και λέγεται δίπολο.

Η ροπή τάξης 2 έχει 5 συνιστώσες και λέγεται τετράπολο.

Παρόμοια έχουμε το οκτάπολο, το δεκαεξάπολο κλπ.

6.10 Αρμονικά πολυώνυμα

Μπορούμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα ότι

$$\nabla^2[r^l Y_{lm}(\theta,\phi)] = 0.$$

Πολυώνυμα $P(x,y,z)$, για τα οποία ισχύει η σχέση $\nabla^2 P(x,y,z) = 0$ λέγονται αρμονικά πολυώνυμα. Η έκφραση $r^l Y_{lm}(\theta,\phi)$ είναι μια απλή έκφραση για τα αρμονικά πολυώνυμα στις τρεις διαστάσεις.

6.11 Ασκήσεις προς λύση

1. Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια ενός ατόμου υδρογόνου στη θεμελιώδη κατάσταση, όπου η πυκνότητα φορτίου του ηλεκτρονικού νέφους δίνεται από την έκφραση: $\rho = -q\frac{1}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$. Θα αγνοήσετε την αλληλεπίδραση του ηλεκτρονικού νέφους με τον εαυτό του. Στη συνέχεια λύστε το αντίστοιχο πρόβλημα όταν το ηλεκτρόνιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση ψ_{210}, που αντιστοιχεί σε πυκνότητα φορτίου $\rho = -\frac{qr^2}{32\pi a_0^5}e^{-\frac{r}{a_0}}\cos^2\theta$.

2. Αποδείξτε ότι
$$P_l(\cos\theta) = (-1)^l \frac{r^{l+1}}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right).$$
Μπορείτε να συγκρίνετε την ανάπτυξη της γεννήτριας συνάρτησης με ένα ανάπτυγμα Taylor του $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}}$ σε δυνάμεις του δz.

3. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο Legendre μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα:

$$P_l(\cos\theta) = \sum a_{ln} \cos n\theta,$$

όπου οι συντελεστές a_{ln} είναι όλοι θετικοί. (Ξεκινήστε από τη γεννήτρια συνάρτηση, την οποία θα γράψετε με τη μορφή: $g(\cos\theta, t) = (1 - t\exp[i\theta])^{-\frac{1}{2}}(1 - t\exp[-i\theta])^{-\frac{1}{2}}$. Αποδείξτε ως πόρισμα την ανισότητα: $|P_l(\cos\theta)| \leq 1$.

4. Βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό που γεννιέται από έναν ομοιογενώς φορτισμένο δακτύλιο αμελητέου πάχους και ακτίνας R. Θα ικανοποιείται παντού η εξίσωση του Laplace. Οι συντελεστές της σειράς προσδιορίζονται συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τη λύση πάνω στον άξονα του κυλίνδρου, που μπορεί να βρεθεί με στοιχειώδεις μεθόδους. Η λύση αυτή είναι:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{R}{z}\right)^{2n}, z > R.$$

5. Το πλάτος σκέδασης συναρτήσει των μερικών κυμάτων δ_l στην Κβαντική Μηχανική εκφράζεται από τον τύπο:

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \exp[i\delta_l] \sin\delta_l P_l(\cos\theta).$$

Δείξτε ότι για την ολική ενεργό διατομή $\sigma_{o\lambda} \equiv \int d\Omega |f(\theta)|^2$ ισχύει η σχέση:

$$\sigma_{o\lambda} = 4\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2\delta_l.$$

6. Βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό μιας σφαίρας της οποίας το "βόρειο ημισφαίριο" βρίσκεται σε δυναμικό V_0, ενώ το "νότιο ημισφαίριο" σε δυναμικό $-V_0$.

7. Στο πρότυπο υγρής σταγόνας ο πυρήνας του ατόμου θεωρείται μια ελαφρώς παραμορφωμένη σφαίρα, της οποίας η ακτίνα συναρτήσει της πολικής γωνίας θ δίνεται από τη σχέση: $r = r_0[1 + \lambda P_2(\cos\theta)]$. Να βρεθεί το εμβαδόν της σφαίρας αυτής με τη μορφή ενός αθροίσματος που περιλαμβάνει όρους μέχρι λ^2. Το στοιχειώδες εμβαδόν ισούται με: $dS = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2} r \sin\theta d\theta d\phi$.

Κεφάλαιο 7

Συναρτήσεις BESSEL

7.1 Εισαγωγή: Κυκλική μεμβράνη

Εστω ότι προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση μιας μεμβράνης που είναι στερεωμένη σ΄ έναν κυκλικό ακλόνητο οδηγό και η απομάκρυνση $\Psi(\rho,\phi,t)$ σε κάθε σημείο και χρονική στιγμή υπακούει στην κυματική εξίσωση:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.$$

Η συνθήκη ότι το άκρο είναι ακλόνητο σε κυκλικό οδηγό ακτίνας R γράφεται

$$\Psi|_{\rho=R} = 0. \tag{7.1}$$

Εξ άλλου η αρχική απομάκρυνση και ταχύτητα εκφράζονται ως εξής:

$$\Psi|_{t=0} = \psi_0(\rho,\phi) \tag{7.2}$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(\rho,\phi). \tag{7.3}$$

Η Λαπλασιανή είναι διδιάστατη γι΄ αυτό το πρόβλημα:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{7.4}$$

Γράφουμε την κυματική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{7.5}$$

Αν προχωρήσουμε στον χωρισμό μεταβλητών $\Psi(\rho,\phi,t) = J(\rho)F(\phi)T(t)$ κατά τα γνωστά, καταλήγουμε σε τρία μονοδιάστατα προβλήματα. Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\frac{1}{c^2}T'' + \lambda T = 0, \tag{7.6}$$

$$F'' + \mu F = 0, \tag{7.7}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ}{d\rho}\right) - \frac{\mu}{\rho^2}J = -\lambda J, \tag{7.8}$$

όπου λ και μ είναι οι δύο σταθερές που προέκυψαν κατά την αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε μονοδιάστατα.

Η σταθερά μ είναι εύκολο να προσδιοριστεί. Η συνάρτηση $F(\phi)$ που περιγράφει τη γωνιακή εξάρτηση, πρέπει να ικανοποιεί περιοδικές οριακές συνθήκες:

$$F(2\pi) = F(0), \quad F'(2\pi) = F'(0). \tag{7.9}$$

Αυτές οι συνθήκες, όπως έχουμε δει και σε άλλες περιπτώσεις, συνεπάγονται ότι η εξίσωση (7.7) έχει λύσεις $\sin m\phi, \cos m\phi$ και ιδιοτιμές $\mu_m = m^2$, όπου ο m είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (7.7) μαζί με τις περιοδικές οριακές συνθήκες συνιστούν ένα πρόβλημα Sturm-Liouville, όμως οι οριακές του συνθήκες είναι μικτές, δηλαδή εμπλέκουν τις τιμές της συνάρτησης (και της παραγώγου της) σε δύο διαφορετικά σημεία. Για τέτοιου είδους οριακές συνθήκες ισχύουν οι περισσότερες ιδιότητες των λύσεων και ιδιοτιμών, αλλά έχουμε το φαινόμενο του εκφυλισμού, δηλαδή έχουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις για το ίδιο m.

Αν αντικαταστήσουμε το μ με το ίσο του m^2 στην εξίσωση (7.8) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\rho^2 \frac{d^2 J_m}{d\rho^2} + \rho \frac{dJ_m}{d\rho} + (\lambda\rho^2 - m^2) J_m = 0 \tag{7.10}$$

με την οριακή συνθήκη

$$J_m(\rho = R) = 0. \tag{7.11}$$

Εχουμε προσθέσει τον δείκτη m στο συμβολισμό της λύσης της εξίσωσης (7.10) για να δείξουμε ρητά ότι εξαρτάται από αυτόν τον δείκτη. Υπάρχει μια επί πλέον οριακή συνθήκη που πρέπει να επιβληθεί. Η απομάκρυνση Ψ δεν μπορεί να είναι άπειρη, πράγμα που σημαίνει ότι και η $J_m(\rho)$ δεν μπορεί να απειρίζεται όταν υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σημείο και ειδικότερα στο $\rho = 0$. Δηλαδή αυτή η οριακή συνθήκη είναι η

$$|J_m(\rho = 0)| < \infty. \tag{7.12}$$

Η εξίσωση (7.10) μπορεί επίσης να γραφτεί με τη μορφή:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dJ_m}{d\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho} J_m + \lambda\rho J_m = 0. \tag{7.13}$$

Αν συγκρίνουμε αυτή τη μορφή της εξίσωσης με τη γενική εξίσωση ενός προβλήματος Sturm-Liouville, δηλαδή την

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x) + \lambda w(x)y(x) = 0, \tag{7.14}$$

θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα (με τις προφανείς ταυτοποιήσεις $x \to \rho$, $y(x) \to J_m(\rho)$) ότι:

$$p(\rho) = \rho, \quad q(\rho) = -\frac{m^2}{\rho}, \quad w(\rho) = \rho.$$

Βλέπουμε ότι το πρόβλημα Sturm-Liouville που πρέπει να επιλυθεί είναι προβληματικό για μια σειρά από λόγους. Η συνάρτηση $q(\rho)$ απειρίζεται όταν $\rho \to 0$, ενώ οι συναρτήσεις $p(\rho)$ και $w(\rho)$ μηδενίζονται σ' αυτό το σημείο. Αυτά τα γεγονότα παραβιάζουν την καθιερωμένη συνθήκη ότι οι παραστάσεις:

$$\frac{p'(\rho)}{p(\rho)}, \quad \frac{q'(\rho)}{q(\rho)}, \quad \frac{w'(\rho)}{w(\rho)}$$

πρέπει να είναι πεπερασμένες στα δύο άκρα του πεδίου ορισμού του προβλήματος, δηλαδή στην περίπτωσή μας στο $\rho = 0$ (η συμπεριφορά στο $\rho = R$, που είναι το άλλο άκρο, δεν παρουσιάζει τέτοιο πρόβλημα). Αυτός είναι και ο λόγος, όπως εξηγούμε στο κεφάλαιο για τα προβλήματα Sturm-Liouville, που η οριακή συνθήκη στο προβληματικό σημείο $\rho = 0$ είναι απλά ότι η λύση εκεί δεν πρέπει να απειρίζεται. Κατά τ' άλλα ισχύουν οι ιδιότητες που είπαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Δηλαδή, υπάρχει μια απειρία ιδιοτιμών λ, οι λ_{mn}, που αντιστοιχούν σε ιδιοσυναρτήσεις $J_m^{(n)}(\rho)$, τις οποίες θα εξετάσουμε αργότερα και οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση και τις οριακές συνθήκες (7.11, 7.12). Επίσης, για κάθε συγκεκριμένο m, οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες υπό την έννοια ότι:

$$\int_0^R d\rho \rho J_m^{(n_1)}(\rho) J_m^{(n_2)}(\rho) = 0, \quad n_1 \neq n_2. \tag{7.15}$$

Οπως λέει η γενική θεωρία, πρέπει να χρησιμοποιηθεί και η συνάρτηση βάρους $w(\rho) = \rho$ μέσα στο ολοκλήρωμα.

7.2 Εξίσωση BESSEL

Η εξίσωση (7.10) (ή η ισοδύναμη μορφή (7.13) της εξίσωσης), είναι η εξίσωση Bessel, που θα μας απασχολήσει σ' αυτό το κεφάλαιο. Είναι μια από τις εξισώσεις που εμφανίζονται πολύ συχνά σε φυσικά προβλήματα, κυρίως σε όσα εμφανίζουν κυλινδρική συμμετρία. Κατ' αρχήν πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μπορεί κανείς (περιοριζόμενος στην περίπτωση $\lambda > 0$) να κάνει την αλλαγή μεταβλητών $\rho \to z \equiv \sqrt{\lambda}\rho$, οπότε η (7.10) γίνεται:

$$z^2 \frac{d^2 J_m}{dz^2} + z \frac{dJ_m}{dz} + (z^2 - m^2) J_m = 0. \tag{7.16}$$

Αν θέλουμε να είμαστε απολύτως ακριβείς, η εξίσωση την οποία μελέτησε ο Bessel είναι ακριβώς η (7.16) και όχι η (7.10). Πάντως η πρακτική μεταξύ των Φυσικών είναι να αποκαλούν οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις "εξίσωση του Bessel". Η εξίσωση (7.16) είναι απλούστερη (παρατηρούμε ότι λείπει κάθε αναφορά στο λ) και συνήθως λύνει κανείς πρώτα αυτήν. Αν είναι γνωστή η λύση $J_m(z)$ της (7.16), τότε η λύση της (7.10) είναι η $J_m(\sqrt{\lambda}\rho)$.

Η διαδικασία λύσης της εξίσωσης (7.16) είναι γνωστή. Η μέθοδος λέγεται μέθοδος του Frobenius και συνίσταται στην ανάπτυξη σε σειρά περί ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης ή περί ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. (Υπενθυμίζουμε ότι, αναφορικά με την εξίσωση $y''(z) + F_1(z)y'(z) + F_2(z)y(z) = 0$, το σημείο z_0 λέγεται ομαλό, αν τα όρια $\lim_{z\to z_0} F_1(z)$ και $\lim_{z\to z_0} F_2(z)$ είναι πεπερασμένα. Το z_0 λέγεται κανονικό ανώμαλο σημείο, αν ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω όρια απειρίζεται, αλλά τα όρια $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)F_1(z)$ και $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 F_2(z)$ είναι πεπερασμένα).

Στην περίπτωση της εξίσωσης (7.16) του Bessel, αναπτύσσουμε περί το σημείο $z = 0$, που είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο για την εξίσωση. Το θεώρημα του Fuchs μας εξασφαλίζει τότε ότι υπάρχει λύση υπό τη μορφή σειράς, οπότε αντικαθιστούμε στην εξίσωση (7.16) την άγνωστη συνάρτηση J_m με τη σειρά $z^s \sum c_n z^n$ και αναζητώντας τους συντελεστές της κάθε μιας δύναμης του z στη δυναμοσειρά προσδιορίζουμε τους άγνωστους συντελεστές c_n και τον εκθέτη s. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι:

$$J_m(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+m}. \tag{7.17}$$

Παρατηρούμε ότι, αν ο δείκτης της συνάρτησης είναι $-m$ (αρνητικός), οι παρονομαστές θα γίνουν $(l-m)!$ που είναι γνωστό (από τις λεγόμενες "συναρτήσεις Γάμμα", βλέπε το σχετικό παράρτημα) ότι απειρίζονται για $l \leq m-1$, άρα οι αντίστοιχοι όροι της σειράς μηδενίζονται (αφού έχουν "άπειρο παρονομαστή") και η σειρά

$$J_{-m} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l-m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-m} = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l-m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-m}$$

αρχίζει να έχει μη μηδενικούς όρους από το $l = m$ και έπειτα. Με την αλλαγή μεταβλητής $l = \tilde{l}+m$ μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σειρά με τη μορφή:

$$J_{-m}(z) = \sum_{\tilde{l}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{l}+m}}{(\tilde{l}+m)!\tilde{l}!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2\tilde{l}} .$$

Συνοψίζοντας (και παραλείποντας το "καπελλάκι" από τη βουβή μεταβλητή που αθροίζεται) έχουμε:

$$J_m(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2l} , \tag{7.18}$$

$$J_{-m}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{l!(l+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2l} = (-1)^m J_m(z). \tag{7.19}$$

Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους ή απλά συναρτήσεις Bessel.

7.3 Συναρτήσεις NEUMANN

Η εξίσωση (7.16) του Bessel είναι δεύτερης τάξης, επομένως έχει και δεύτερη λύση, ανεξάρτητη από τήν $J_m(z)$ που ήδη βρήκαμε. Μια πρώτη σκέψη που θα μπορούσε κανείς να κάνει για να βρει τη δεύτερη ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης θα ήταν να δοκιμάσει την $J_{-m}(z)$. Αποδεικνύεται ότι, αν ο δείκτης m δεν είναι ακέραιος, η ιδέα πράγματι αποδίδει. Ομως, από τις εκφράσεις (7.18) και (7.19), που αποδείχτηκαν μόνο για ακέραιους m, είναι προφανές ότι σ' αυτήν την περίπτωση θα ισχύει η σχέση: $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$, άρα, για ακέραιους m, η συνάρτηση με τον αντίθετο δείκτη δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την αρχική. Ο τρόπος για να πάρουμε μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση για όλες τις περιπτώσεις είναι να σχηματίσουμε την παράσταση:

$$N_\mu(z) \equiv \frac{\cos(\mu\pi) J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)} \tag{7.20}$$

Αυτή η παράσταση δίνει πράγματι μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση στην σχετικά απλούστερη περίπτωση του μη ακέραιου δείκτη. Οταν ο δείκτης είναι ακέραιος, πρέπει να τον προσεγγίσουμε παίρνοντας το όριο $\mu \to m$. Ο παρονομαστής θα τείνει προφανώς στο μηδέν, όπως άλλωστε και ο αριθμητής, αν λάβουμε υπόψη τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις με αντίθετους δείκτες. Το όριο είναι επομένως μια απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$ και πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας του de l' Hospital:

$$N_m(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\mu}{\partial \mu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\mu}}{\partial \mu} \right]_{\mu=m} .$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι επομένως καλά ορισμένες για οποιονδήποτε δείκτη, είναι ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel και λέγονται συναρτήσεις Neumann. Μπορεί να αποδειχτεί ότι:

$$\lim_{z\to 0} N_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln z, \quad \lim_{z\to 0} N_\mu(z) = -\frac{(\mu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\mu . \tag{7.21}$$

(Η παράσταση $(\mu-1)!$ για μη ακέραιο μ ορίζεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων Γάμμα). Παρατηρούμε ότι έχουμε απειρισμό στο όριο $z \to 0$, αντίθετα με την περίπτωση των συναρτήσεων Bessel. Αυτό σημαίνει ότι στη γενική λύση της εξίσωσης Bessel, που μπορεί να εκφραστεί με την παράσταση $A_\mu J_\mu(z) + B_\mu N_\mu(z)$, τα B_μ μπορούν να είναι μη μηδενικά μόνο σε περίπτωση που δεν μας ενδιαφέρει για κάποιο λόγο η συμπεριφορά στο μηδέν, για παράδειγμα σ΄ έναν ομοαξονικό κυματοδηγό. Θα επανέλθουμε αργότερα σ΄ αυτό το σημείο με παράδειγμα.

Τέλος αναφέρουμε την ανάπτυξη της συνάρτησης Neumann σε σειρά:

$$N_m(z) = \frac{2}{\pi}\left[(\log\frac{z}{2}+\gamma)J_m(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!(z/2)^{2k-m}}{k!}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}[\varphi(k)+\varphi(k+m)]\frac{(z/2)^{2k+m}}{k!(m+k)!}\right], \tag{7.22}$$

όπου $\varphi(k) \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$ $\quad (\phi(0)=0)$ και για το γ, που λέγεται σταθερά του Euler, ισχύει το εξής: $\gamma \equiv \lim_{k\to\infty}[\varphi(k)-\ln k] \simeq 0.577$.

Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις Neumann λέγονται εναλλακτικά και συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους. Καμμιά φορά οι $J_m(z)$ και $N_m(z)$ λέγονται και κυλινδρικές αρμονικές, κατ΄ αναλογία με τις σφαιρικές αρμονικές. Επίσης οι συναρτήσεις $N_\mu(z)$ του Neumann συμβολίζονται από μερικούς συγγραφείς με το $Y_\mu(z)$.

7.4 Γεννήτρια συνάρτηση

Πολλές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel με ακέραιο δείκτη προκύπτουν εύκολα από τη λεγόμενη γεννήτρια συνάρτηση. Αυτή η συνάρτηση ορίζεται ως το άθροισμα:

$$g(z,t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z) t^m.$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις Bessel είναι οι συντελεστές της ανάπτυξης της γεννήτριας συνάρτησης σε σειρά Laurent. Μπορούμε να βρούμε κλειστή αναλυτική έκφραση για την $g(z,t)$ αν θυμηθούμε την έκφραση (7.17) για την $J_m(z)$ σε σειρά. Τότε έχουμε:

$$g(z,t) = \sum_m \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+m}\right] t^m.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $n = l+m \to m = n-l$ βρίσκουμε:

$$g(z,t) = \sum_n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{l+n} t^{n-l} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n t^n \sum_l \frac{(-1)^l}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^l t^{-l}.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία έκφραση είναι το γινόμενο δύο εκθετικών, αφού

$$\sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n t^n = \exp\left[\frac{z}{2}t\right], \quad \sum_l \frac{(-1)^l}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^l t^{-l} = \exp\left[-\frac{z}{2}\frac{1}{t}\right].$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στην τελική μορφή για τη γεννήτρια συνάρτηση:

$$g(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]. \tag{7.23}$$

Επισημαίνουμε και πάλι το σημαντικό γεγονός ότι η γεννήτρια συνάρτηση σχετίζεται με τις συναρτήσεις Bessel ακέραιας τάξης.

Αναδρομικές σχέσεις

Οι δύο ανεξάρτητες αναδρομικές σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις Bessel είναι εύκολο να προκύψουν από τη γεννήτρια συνάρτηση με παραγωγίσεις. Οπως είδαμε η γεννήτρια συνάρτηση $g(z,t)$ εξαρτάται από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές z και t. Παραγωγίζοντας ως προς κάθε μία από τις δύο αυτές μεταβλητές βρίσκουμε δύο σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύεται ότι είναι οι μοναδικές ανεξάρτητες. Το πλήθος άλλων σχέσεων που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία είναι συνδυασμοί αυτών των δύο. Ο λόγος συνδέεται με το γεγονός ότι η εξίσωση Bessel είναι δεύτερης τάξης, συνεπώς πρόσθετες παραγωγίσεις της γεννήτριας συνάρτησης, που θα εισαγάγουν παραγώγους των συναρτήσεων Bessel τάξης ανώτερης της πρώτης, θα ανάγονται σε σχέσεις που έχουν ήδη βρεθεί ή σε παραγώγους τους. Επί παραδείγματι, η εξίσωση του Bessel δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε τη δεύτερη παράγωγο συναρτήσει της πρώτης παραγώγου και της ίδιας της συνάρτησης:

$$J_\mu'' = \left(\frac{\mu^2}{z^2} - 1\right) J_\mu(z) - \frac{J_\mu'(z)}{z}.$$

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη των αναδρομικών σχέσεων. Παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum m J_m(z) t^{m-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum J_m(z) t^m = \sum m J_m(z) t^{m-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z}{2} \sum J_m(z) t^m + \frac{z}{2} \sum J_m(z) t^{m-2} = \sum m J_m(z) t^{m-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z}{2} \sum J_{m-1}(z) t^{m-1} + \frac{z}{2} \sum J_{m+1}(z) t^{m-1} = \sum m J_m(z) t^{m-1}.$$

Εξισώνοντας ίσες δυνάμεις του t συμπεραίνουμε ότι:

$$J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z) = \frac{2}{z} m J_m(z).$$

Η παραγώγιση της γεννήτριας συνάρτησης ως προς z δίνει:

$$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \sum J_m(z) t^m = \sum J_m'(z) t^m,$$

η οποία παρόμοια δίνει το αποτέλεσμα:

$$J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z) = 2J_m'(z).$$

Εχουμε αποδείξει τις δύο βασικές αναδρομικές σχέσεις για τις συναρτήσεις Bessel. Από αυτές μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε όλες τις άλλες. Γράφουμε μερικές:

$$J_{m-1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) + J_m'(z),$$

$$J_{m+1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_m'(z),$$

$$\frac{d}{dz}[z^m J_m(z)] = z^m J_{m-1}(z).$$

Η τελευταία είναι πολύ χρήσιμη για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Γενικεύσεις

Οι αναδρομικές σχέσεις που βρήκαμε αποδείχθηκαν μόνο για τις συναρτήσεις Bessel $J_m(z)$ με ακέραιο δείκτη m. Αποδεικνύεται (με τη χρήση ολοκληρωμάτων στο μιγαδικό επίπεδο) ότι ισχύουν για τυχόντα δείκτη καθώς και ότι τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις υπακούουν **και** οι συναρτήσεις Neumann. Γράφουμε τις αναδρομικές σχέσεις με τη γενικότερη μορφή τους:

$$\begin{array}{ll} J_{\mu+1}(z) + J_{\mu-1}(z) = \frac{2}{z}\mu J_\mu(z), & N_{\mu+1}(z) + N_{\mu-1}(z) = \frac{2}{z}\mu N_\mu(z) \\ J_{\mu-1}(z) - J_{\mu+1}(z) = 2J'_\mu(z), & N_{\mu-1}(z) - N_{\mu+1}(z) = 2N'_\mu(z) \\ J_{\mu-1}(z) = \frac{\mu}{z}J_\mu(z) + J'_\mu(z), & N_{\mu-1}(z) = \frac{\mu}{z}N_\mu(z) + N'_\mu(z) \\ J_{\mu+1}(z) = \frac{\mu}{z}J_\mu(z) - J'_\mu(z), & N_{\mu+1}(z) = \frac{\mu}{z}N_\mu(z) - N'_\mu(z) \\ \frac{d}{dz}[z^\mu J_\mu(z)] = z^\mu J_{\mu-1}(z), & \frac{d}{dz}[z^\mu N_\mu(z)] = z^\mu N_{\mu-1}(z) \end{array} \tag{7.24}$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ένα τυχαίο ζευγάρι ανεξάρτητων αναδρομικών σχέσεων, επί παραδείγματι το ζευγάρι $J'_\mu(z) = J_{\mu-1}(z) - \frac{\mu}{z}J_\mu(z)$ και $J'_\mu(z) = -J_{\mu+1}(z) + \frac{\mu}{z}J_\mu(z)$, οδηγεί πράγματι στην εξίσωση Bessel. Παραγωγίζοντας την πρώτη προκύπτει η σχέση: $J''_\mu(z) = J'_{\mu-1}(z) + \frac{\mu}{z^2}J_\mu - \frac{\mu}{z}J'_\mu$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη, με τη μορφή $J'_{\mu-1}(z) = -J_\mu(z) + \frac{\mu-1}{z}J_{\mu-1}(z)$, η σχέση γράφεται: $J''_\mu(z) = [-J_\mu(z) + \frac{\mu-1}{z}J_{\mu-1}(z)] + \frac{\mu}{z^2}J_\mu(z) - \frac{\mu}{z}J'_\mu(z)$. Χρησιμοποιούμε πάλι την πρώτη σχέση με τη μορφή $J_{\mu-1}(z) = J'_\mu(z) + \frac{\mu}{z}J_\mu(z)$ για να απαλείψουμε το $J_{\mu-1}(z)$ και καταλήγουμε στην $J''_\mu(z) = -J_\mu(z) + \frac{\mu-1}{z}(J'_\mu(z) + \frac{\mu}{z}J_\mu(z)) + \frac{\mu}{z^2}J_\mu(z) - \frac{\mu}{z}J'_\mu(z)$. Η άλγεβρα δίνει τελικά $J''_\mu(z) = \left(\frac{\mu^2}{z^2} - 1\right)J_\mu(z) - \frac{J'_\mu(z)}{z}$, οπότε, αναδιατάσσοντας ελαφρά τους όρους του αποτελέσματος βρίσκουμε ότι η $J_\mu(z)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$z^2 J''_\mu(z) + zJ'_\mu(z) + (z^2 - \mu^2)J_\mu(z) = 0,$$

που δεν είναι άλλη από την εξίσωση Bessel. Φυσικά, με τα ίδια ακριβώς βήματα μπορούμε να δείξουμε ότι και η $N_\mu(z)$ ικανοποιεί την εξίσωση Bessel, αφού ικανοποιεί τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις.

7.5 Ολοκληρωτική αναπαράσταση

Ξεκινώντας από τη γεννήτρια συνάρτηση (7.23) και θέτοντας $t = e^{i\theta}$ βρίσκουμε ότι

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right] = J_0(z) + \sum_{l=1}^{\infty}\left[J_{2l}(z)e^{i2l\theta} + J_{-2l}(z)e^{-i2l\theta}\right]$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left[J_{2l-1}(z)e^{i(2l-1)\theta} + J_{-(2l-1)}(z)e^{-i(2l-1)\theta}\right]$$

Εχουμε αναδιατάξει τη σειρά ξεχωρίζοντας τους άρτιους όρους από τους περιττούς. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη σχέση $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$ που έχουμε ήδη συναντήσει. Η σχέση μάς λέει ότι $J_{-2l}(z) = J_{2l}(z)$ και $J_{-(2l+1)}(z) = -J_{2l+1}(z)$. Δηλαδή προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\exp[iz\sin\theta] = J_0(z) + 2\sum_{l=1}^{\infty}J_{2l}(z)\cos[2l\theta] + 2i\sum_{l=1}^{\infty}J_{2l-1}(z)sin[(2l-1)\theta].$$

Ενα πολύ σημαντικό παραπροϊόν της μεθόδου που ακολουθούμε είναι τα λεγόμενα αναπτύγματα του Jacobi, που είναι, απλά, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της πιο πάνω σχέσης:

$$\cos[z\sin\theta] = J_0(z) + 2\sum_{l=0}^{\infty} J_{2l}(z)\cos[2l\theta], \tag{7.25}$$

$$\sin[z\sin\theta] = 2\sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}(z) sin[(2l+1)\theta]. \tag{7.26}$$

Ομως το δεξιό μέλος των (7.25) και (7.26) δεν είναι παρά το ανάπτυγμα Fourier του αριστερού μέλους των πιο πάνω εξισώσεων, οπότε οι συντελεστές είναι γνωστοί:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta)\cos m\theta d\theta = \begin{cases} 2J_m(z), & \text{για άρτια } m \text{ (και μηδέν)}, \\ 0, & \text{για περιττά } m. \end{cases} \tag{7.27}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\theta)\sin m\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{για άρτια } m \text{ (και μηδέν)}, \\ 2J_m(z), & \text{για περιττά } m. \end{cases} \tag{7.28}$$

Επομένως, αθροίζοντας τα δύο τελευταία αποτελέσματα κατά μέλη συνάγουμε ότι:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\,[\cos(z\sin\theta)\cos(m\theta) + \sin(z\sin\theta)\sin(m\theta)] = 2J_m(z)$$

και αυτό για κάθε m, άρτιο ή περιττό. Δηλαδή, τελικά, η ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel με ακέραιο δείκτη είναι η εξής:

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\,[\cos(z\sin\theta - m\theta)]\,. \tag{7.29}$$

Η αναπαράσταση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Για παράδειγμα, από αυτήν βρίσκει κανείς τη συμπεριφορά των συναρτήσεων για μεγάλες τιμές του ορίσματος. Ειδικά το $J_0(z)$, που είναι μια συνάρτηση που εμφανίζεται συχνά, γράφεται:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta cos(zsin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta cos(zsin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta e^{izsin\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta e^{izcos\theta}.$$

7.6 Ορθογωνιότητα

Για το θέμα της ορθογωνιότητας θεωρούμε την εξίσωση (7.10), όπου αντικαθιστούμε τη σταθερά $\sqrt{\lambda}$ με την k :

$$\rho^2\frac{d^2J_\mu(k\rho)}{d\rho^2} + \rho\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho} + (k^2\rho^2 - \mu^2)J_\mu(k\rho) = 0$$

με τις οριακές συνθήκες (7.11):

$$J_\mu(k\rho)|_{\rho=R} = 0,$$

και (7.12):

$$|J_\mu(k\rho)|_{\rho=0}| < \infty.$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει τον δείκτη μ, που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, αντί του m που υποδηλώνει ακέραια τιμή. Η συνθήκη (7.12) απλά περιορίζει τη λύση στις συναρτήσεις Bessel (με την έννοια ότι αποκλείει τις συναρτήσεις Neumann). Αν οι ρίζες της εξίσωσης $J_\mu(z) = 0$ είναι οι $\xi_{\mu n}$, είναι φανερό ότι η οριακή συνθήκη (7.11) μπορεί να ικανοποιηθεί, αν απαιτήσουμε η παράσταση kR να ισούται με $\xi_{\mu n}$, για κάποιο n. Αυτό δείχνει ότι το k δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε, αλλά παίρνει τις συγκεκριμένες τιμές $k_{\mu n} = \frac{\xi_{\mu n}}{R}$, οπότε η αρχική ιδιοτιμή λ θα γίνει αντίστοιχα $\lambda_{\mu n} \equiv k^2_{\mu n} = \left(\frac{\xi_{\mu n}}{R}\right)^2$. Η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι η $J_\mu(k_{\mu n}\rho) = J_\mu(\xi_{\mu n}\frac{\rho}{R})$. Βλέπουμε ότι έχουμε τη λύση του προβλήματος ιδιοτιμών που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου. Από τη γενική θεωρία Sturm-Liouville ξέρουμε ότι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(J_\mu^{(n_1)}, J_\mu^{(n_2)}) \equiv \int_0^R d\rho\rho J_\mu(\xi_{\mu n_1}\frac{\rho}{R})J_\mu(\xi_{\mu n_2}\frac{\rho}{R})$, όπου ο συμβολισμός $J_\mu^{(n)}$ έχει πιά συγκεκριμένο νόημα: $J_\mu^{(n)} \equiv J_\mu(\xi_{\mu n}\frac{\rho}{R})$. Ομως η γενική θεωρία δεν προσδιορίζει το ολοκλήρωμα

$$I \equiv \int_0^R d\rho\rho \left[J_\mu\left(\xi_{\mu n}\frac{\rho}{R}\right)\right]^2 .$$

Το επόμενο θέμα μας θα είναι αυτός ακριβώς ο υπολογισμός.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Bessel με την συνάρτηση $2\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}$, όπου $k \equiv \frac{\xi_{\mu n}}{R}$:

$$2\rho^2\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\frac{d^2J_\mu(k\rho)}{d\rho^2} + 2\rho\left(\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right)^2 + 2(k^2\rho^2-\mu^2)J_\mu(k\rho)\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho^2\frac{d\left[\left(\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right)^2\right]}{d\rho} + \frac{d\rho^2}{d\rho}\left(\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right)^2 + (k^2\rho^2-\mu^2)\frac{d\left[J_\mu(k\rho)\right]^2}{d\rho} = 0.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας μια κατάλληλη ποσότητα, μπορούμε να εμφανίσουμε μια ολική παράγωγο:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\left(\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right)^2\right] + \frac{d[(k^2\rho^2-\mu^2)[J_\mu(k\rho)]^2]}{d\rho} - 2k^2\rho[J_\mu(k\rho)]^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2k^2\int_0^R d\rho\rho[J_\mu(k\rho)]^2 = \int_0^R d\rho\frac{d[\rho^2\left(\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right)^2 + (k^2\rho^2-\mu^2)[J_\mu(k\rho)]^2]}{d\rho} =$$

$$= \left[R^2\left(\left.\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=R}\right)^2 + (k^2R^2-\mu^2)[J_\mu(kR)]^2\right] - \left[0 + (0-\mu^2)J_\mu^2(0)\right] .$$

Αλλά $J_\mu(0) = 0$ με τη μοναδική εξαίρεση του $J_0(0)$, άρα $\mu J_\mu(0) = 0$. Εξ άλλου, ισχύει η ισότητα $J_\mu(kR) = 0$, οπότε το ολοκλήρωμα που θέλουμε δίνεται από τη σχέση:

$$\int_0^R d\rho\rho J_\mu^2 = \frac{1}{2k^2}\left[R^2\left(\left.\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=R}\right)^2\right].$$

Με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης $J'_\mu(z) = \frac{\mu}{z}J_\mu(z) - J_{\mu+1}(z)$ βρίσκουμε ότι $\left.\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=R} = kJ'_\mu(kR) = kJ'_\mu\left(\frac{\xi_{\mu n}}{R}R\right) = kJ'_\mu(\xi_{\mu n}) = -kJ_{\mu+1}(\xi_{\mu n})$ και η τελευταία παράσταση δίνει:

$$\int_0^R d\rho\rho J_\mu^2(k\rho) = \frac{R^2}{2}[J_{\mu+1}(\xi_{\mu n})]^2.$$

Συνεπώς η σχέση ορθογωνιότητας είναι:

$$\int_0^R d\rho\rho J_\mu\left(\xi_{\mu n_1}\frac{\rho}{R}\right)J_\mu\left(\xi_{\mu n_2}\frac{\rho}{R}\right) = \frac{R^2}{2}[J_{\mu+1}(\xi_{\mu n})]^2\delta_{n_1n_2}. \qquad (7.30)$$

Σημειώνουμε ότι το μ πρέπει να είναι μεγαλύτερο από -1.

Μια σημαντική παρατήρηση αναφέρεται στις παραγωγίσεις των συναρτήσεων Bessel: Οι παράγωγοι που εμφανίζονται στις αναδρομικές σχέσεις όπως τις αναπτύξαμε στην αντίστοιχη παράγραφο είναι παράγωγοι ως προς το όρισμα $k\rho$ της συνάρτησης. Σε όσα προηγήθηκαν σ' αυτήν την παράγραφο εμφανίστηκαν αποκλειστικά παράγωγοι ως προς το ρ (και όχι ως προς το όρισμα $k\rho$). Επιμείναμε στη διάκριση γράφοντας τις παραγώγους με τη μορφή $\frac{d}{d\rho}$, ώστε να είναι σαφής η μεταβλητή ως προς την οποία παραγωγίζουμε. Το αποτέλεσμα είναι να εμφανίζονται δυνάμεις του k : $\frac{dJ_\mu(k\rho)}{d\rho} = kJ'_\mu(k\rho)$, όπου με τον τόνο εννοείται η συνηθισμένη παραγώγιση ως προς το συνολικό όρισμα $k\rho$.

7.7 Σειρά BESSEL

Οπως έχουμε εξηγήσει, η γενική θεωρία Sturm-Liouville μας εξασφαλίζει ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που βρήκαμε αποτελούν πλήρες σύστημα για το πρόβλημά μας, δηλαδή οποιαδήποτε συνάρτηση $f(\rho)$ που μηδενίζεται για $\rho = R$ μπορεί να αναπτυχθεί στην λεγόμενη σειρά Bessel:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\mu n} J_\mu \left(\xi_{\mu n}\frac{\rho}{R}\right). \tag{7.31}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν με τη συνηθισμένη πρακτική (πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με κατάλληλους παράγοντες και ολοκληρώνοντας, ώστε να εμφανιστούν εσωτερικά γινόμενα των συναρτήσεων Bessel, που είναι ορθογώνιες, και αξιοποιώντας τη σχέση (7.30) της προηγούμενης παραγράφου):

$$c_{\mu n} = \frac{2}{R^2[J_{\mu+1}(\xi_{\mu n})]^2}\int_0^R d\rho\rho J_\mu \left(\xi_{\mu n}\frac{\rho}{R}\right) f(\rho).$$

Σημειώνουμε ότι στη σειρά (7.31) εκείνο που αθροίζεται είναι το n. Είναι πολύ σημαντική η παρατήρηση ότι το μ μπορεί να είναι οτιδήποτε (αρκεί να είναι μεγαλύτερο από -1). Δηλαδή έχουμε **άπειρες σειρές Bessel** (μία γιά κάθε τιμή του μ) γιά κάθε συγκεκριμένη συνάρτηση $f(\rho)$!

7.8 Τιμές για πολύ μικρά ή πολύ μεγάλα ορίσματα

Για τα μικρά ορίσματα των $J_\mu(z)$ αρκεί να κρατήσουμε κάποιους αρχικούς όρους από την ανάπτυξη σε σειρά. Για παράδειγμα, αν ο m είναι θετικός ακέραιος:

$$\lim_{z\to 0} J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(m+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots\right]. \tag{7.32}$$

Εχουμε ήδη δώσει πιο πάνω τη συμπεριφορά των συναρτήσεων Neumann για μικρό όρισμα:

$$\lim_{z\to 0} N_0(z) = \frac{2}{\pi}\ln z, \quad \lim_{z\to 0} N_m(z) = -\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m, \quad m = 1,2,3,\dots \tag{7.33}$$

Για τα μεγάλα ορίσματα καταφεύγουμε στην ολοκληρωτική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο. Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{z\to\infty} J_\mu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left[z - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right], \tag{7.34}$$

$$\lim_{z\to\infty} N_\mu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left[z - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{7.35}$$

7.9 Συναρτήσεις HANKEL

Οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους είναι οι δύο αντίστοιχοι γραμμικοί συνδυασμοί:

$$H_\mu^{(1)}(z) \equiv J_\mu(z) + iN_\mu(z), \quad H_\mu^{(2)}(z) \equiv J_\mu(z) - iN_\mu(z). \tag{7.36}$$

Στο μηδέν αυτές οι συναρτήσεις απειρίζονται, αφού περιέχουν την συνάρτηση Neumann που απειρίζεται, ικανοποιούν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τις $J_\mu(z)$ και $N_\mu(z)$ και η συμπεριφορά τους για μεγάλα ορίσματα μπορεί να παραχθεί εύκολα από τις (7.34) και (7.35):

$$\lim_{z\to\infty} H_\mu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(+i\left[z - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right), \tag{7.37}$$

$$\lim_{z\to\infty} H_\mu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(-i\left[z - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right), \tag{7.38}$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι χρήσιμες για την περιγραφή οδευόντων (κυλινδρικών) κυμάτων. Επί παραδείγματι η έκφραση $H_\mu^{(1)}(k\rho)\exp[-i\omega t]$ για μεγάλες αποστάσεις $\rho >> \frac{1}{k}$ τείνει στην παράσταση:

$$\exp\left[-i\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[+i\left(k\rho - \omega t\right)\right] \tag{7.39}$$

Αυτή η μορφή περιέχει τον χαρακτηριστικό συνδυασμό $k\rho - \omega t$ ενός οδεύοντος κύματος. Ο πρώτος παράγοντας είναι μια "φάση" χωρίς ιδιαίτερη σημασία, ενώ ο παράγοντας κάτω από την τετραγωνική ρίζα μας δείχνει ότι το κυλινδρικό κύμα που περιγράφει αυτή η σχέση εξασθενεί όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα του κυλίνδρου. Το τελευταίο έχει να κάνει με τη διατήρηση της ενέργειας που εκπέμπεται στο χώρο. Η ένταση της ακτινοβολίας του εκπεμπομένου κύματος είναι ανάλογη προς το μέτρο του μιγαδικού αριθμού (7.39) στο τετράγωνο: $N\frac{2}{\pi k\rho}$ όπου N είναι μια σταθερά αναλογίας. Αυτό πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το εμβαδόν $2\pi\rho L$ της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα ρ και ύψος L για να βρεθεί η ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα χρόνου σε ένα τμήμα κυλίνδρου με ύψος L : $N\frac{2}{\pi k\rho}2\pi\rho L = 4NL$. Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος παράγοντας της (7.39) έχει ακριβώς τη μορφή που χρειάζεται, ώστε η ολική εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου να μην εξαρτάται από την ακτίνα ρ στην οποία γίνεται ο υπολογισμός.

Ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των ειδικών συναρτήσεων θυμίζει έντονα τους αντίστοιχους γραμμικούς συνδυασμούς $\exp[\pm i(kx - \omega t)] = \cos(kx - \omega t) \pm i\sin(kx - \omega t)$. Και σ' αυτήν την περίπτωση τα εκθετικά ενδείκνυνται για την περιγραφή οδευόντων κυμάτων, ενώ τα ημίτονα και συνημίτονα περιγράφουν καλύτερα τα στάσιμα κύματα. Βλέπουμε εδώ εκδηλώσεις μιας αναλογίας που καλό είναι να έχει κανείς υπόψη σχετικά με τις συναρτήσεις που έχουμε δει ως εδώ σ' αυτό το κεφάλαιο:

- Οι συναρτήσεις Bessel $J_\mu(z)$ αντιστοιχούν στα συνημίτονα $\cos z$.
- Οι συναρτήσεις Neumann $N_\mu(z)$ αντιστοιχούν στα ημίτονα $\sin z$.
- Οι συναρτήσεις Hankel $H_\mu^{(1,2)}(z)$ αντιστοιχούν στα εκθετικά $\exp(\pm iz)$.

Βέβαια, αυτές οι αντιστοιχίες είναι εντελώς διαισθητικές και αποκτούν νόημα μόνο μετά απ' όσα είπαμε για τη συμπεριφορά σε μεγάλα ορίσματα. Πρέπει πάντα να θυμόμαστε και τους υπόλοιπους παράγοντες και κυρίως τον πολύ σημαντικό παράγοντα με την τετραγωνική ρίζα.

7.10 Κυκλική μεμβράνη, συνέχεια και τέλος

Εξηγήσαμε ήδη στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου ότι η λύση για την απομάκρυνση της μεμβράνης είναι άθροισμα γινομένων των εξής συναρτήσεων: των $J_m(\sqrt{\lambda}\rho)$ και $N_m(\sqrt{\lambda}\rho)$ για την ακτινική συνιστώσα, των $\sin m\phi$ και $\cos m\phi$ για τη γωνία, και των $\sin(\sqrt{\lambda}ct)$ και $\cos(\sqrt{\lambda}ct)$ για το χρόνο. Αλλά ο συντελεστής του $N_m(\sqrt{\lambda}\rho)$ πρέπει να είναι μηδέν, ώστε να αποφύγουμε τον απειρισμό της λύσης στο μηδέν και πρέπει επίσης $\sqrt{\lambda} \equiv k = \frac{\xi_{mn}}{R}$, ώστε να έχουμε μηδενισμό της απομάκρυνσης στην περιφέρεια της μεμβράνης. Αρα η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$\Psi(\rho,\phi,t) = \sum_{m,n} J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)[a_m\cos m\phi + b_m \sin m\phi]$$

$$\left[d_{mn}\cos\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right) + f_{mn}\sin\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right)\right]$$

$$= \sum_{m,n} J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\left[A_{mn}\cos m\phi\cos\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right) + B_{mn}\cos m\phi \sin\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right)\right.$$

$$\left. + C_{mn}\sin m\phi\cos\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right) + D_{mn}\sin m\phi\sin\left(\frac{\xi_{mn}}{R}ct\right)\right] \qquad (7.40)$$

Τώρα πρέπει να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες. Για την απομάκρυνση ισχύει:

$$\Psi(\rho,\phi,t=0) = \psi_0(\rho,\phi) = \sum J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)[A_{mn}\cos m\phi + C_{mn}\sin m\phi],$$

ενώ για την ταχύτητα:

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(\rho,\phi) = \sum\left(\frac{\xi_{mn}c}{R}\right) J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)[B_{mn}\cos m\phi + D_{mn}\sin m\phi].$$

Από τις σειρές αυτές, χρησιμοποιώντας τις συνηθισμένες τεχνικές, μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ και να προσδιορίσουμε πλήρως τη λύση. Οι τελικές εκφράσεις είναι:

$$A_{mn} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho\psi_0(\rho,\phi)J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\cos m\phi,$$

$$B_{mn}\frac{\xi_{mn}c}{R} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho v_0(\rho,\phi)J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\cos m\phi,$$

$$C_{mn} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho\psi(\rho,\phi)J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\sin m\phi,$$

$$D_{mn}\frac{\xi_{mn}c}{R} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho v(\rho,\phi)J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\sin m\phi,$$

όπου

$$P \equiv \frac{2}{\pi R^2[J_{m+1}(\xi_{mn})]^2}.$$

Για την εύρεση του P χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις:

$$\int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi J_M\left(\xi_{MN}\frac{\rho}{R}\right)\cos M\phi J_m\left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right)\cos m\phi$$

$$= \delta_{Mm}\delta_{Nn}\frac{\pi R^2}{2}[J_{M+1}(\xi_{MN})]^2,$$

$$\int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi J_M \left(\xi_{MN}\frac{\rho}{R}\right) \sin M\phi J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) \sin m\phi$$

$$= \delta_{Mm}\delta_{Nn}\frac{\pi R^2}{2}[J_{M+1}(\xi_{MN})]^2,$$

και

$$\int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi J_M \left(\xi_{MN}\frac{\rho}{R}\right) \sin M\phi J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) \cos m\phi = 0.$$

Σημειώνουμε και τις ειδικές περιπτώσεις: $C_{0n} = D_{0n} = 0$. Επί πλέον, για τα A_{0n} και B_{0n} το P παίρνει την τιμή $\frac{1}{\pi R^2 [J_{m+1}(\xi_{mn})]^2}$.

7.11 Δυναμικό σε κενό κύλινδρο

Αυτό το πρόβλημα είναι μια ελαφρά γενίκευση του προβλήματος της μεμβράνης. Ζητείται να βρεθεί το δυναμικό σ' έναν κενό κύλινδρο του οποίου η παράπλευρη επιφάνεια και η κάτω βάση είναι γειωμένες, ενώ η πάνω βάση βρίσκεται σε γνωστό δυναμικό $V(\rho,\phi,z=H) = f(\rho,\phi)$. Μέσα στον κύλινδρο το δυναμικό υπακούει την εξίσωση Laplace. Ο χωρισμός των μεταβλητών της εξίσωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες με την απαίτηση να ικανοποιούνται οι ομογενείς οριακές συνθήκες και να μην υπάρχουν απειρισμοί στις θέσεις όπου $\rho = 0$ οδηγεί στη λύση:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{m,n} J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) [a_{mn}\cos m\phi + b_{mn}\sin m\phi] \sinh\left(\xi_{mn}\frac{z}{R}\right).$$

Επιβάλλοντας την μη ομογενή συνθήκη προσδιορίζουμε τους συντελεστές:

$$V(\rho,\phi,z=H) = f(\rho,\phi) =$$

$$= \sum_{m,n} J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) [a_{mn}\cos m\phi + b_{mn}\sin m\phi] \sinh\left(\xi_{mn}\frac{H}{R}\right)$$

οπότε

$$a_{mn} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho f(\rho,\phi) J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) \cos m\phi$$

και

$$b_{mn} = P\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\rho f(\rho,\phi) J_m \left(\xi_{mn}\frac{\rho}{R}\right) \sin m\phi,$$

όπου

$$P \equiv \frac{2}{\pi R^2 \sinh\left(\xi_{mn}\frac{H}{R}\right)[J_{m+1}(\xi_{mn})]^2}.$$

Οι ειδικές περιπτώσεις έχουν ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση (της μεμβράνης).

7.12 Ομοαξονικός κυματοδηγός

Θεωρούμε κυλινδρικό ομοαξονικό κυματοδηγό με ακτίνες r και $R > r$, μέσα στο οποίο οδεύουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητα ω κατά τον άξονα των z. Η ηλεκτρική συνιστώσα πρέπει να μηδενίζεται στα εσωτερικά τοιχώματα και στο εσωτερικό του κυματοδηγού να υπακούει στην κυματική εξίσωση που, αφού έχουμε μόνο μία συχνότητα, μεταπίπτει στην εξίσωση του Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)E = 0 \tag{7.41}$$

με $k = \frac{\omega}{c}$. Το ιδιαίτερο σ' αυτό το παράδειγμα είναι ότι μας ενδιαφέρει μόνο η περιοχή $r < \rho < R$, επομένως ποτέ δεν πλησιάζουμε την περιοχή $\rho = 0$, όπου οι συναρτήσεις Neumann απειρίζονται. Δηλαδή, εδώ, δεν υπάρχει λόγος να τις αποκλείσει κανείς και συμμετέχουν στη λύση ισότιμα με τις συναρτήσεις Bessel. Χωρίζοντας τις μεταβλητές σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η έκφραση

$$E = \sum_{mn} \left[A_{mn} J_m\left(q_{mn}\rho\right) + B_{mn} N_m\left(q_{mn}\rho\right)\right]\left[C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi\right] e^{i(kz-\omega t)}$$

ικανοποιεί την εξίσωση (7.41) και παριστάνει ένα κύμα που οδεύει στην κατεύθυνση $\hat{z}$. Εχουμε υποθέσει ότι οι ιδιοτιμές q_{mn} είναι διακριτές. Η απαίτηση να μηδενίζεται το E στα τοιχώματα οδηγεί στις συνθήκες:

$$A_{mn} J_m\left(q_{mn} r\right) + B_{mn} N_m\left(q_{mn} r\right) = 0,$$

$$A_{mn} J_m\left(q_{mn} R\right) + B_{mn} N_m\left(q_{mn} R\right) = 0.$$

Το σύστημα είναι ομογενές, άρα για να έχουμε μη τετριμένη λύση για τους συντελεστές A_{mn}, B_{mn} πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται:

$$J_m\left(q_{mn} r\right) N_m\left(q_{mn} R\right) - J_m\left(q_{mn} R\right) N_m\left(q_{mn} r\right) = 0.$$

Αυτή η συνθήκη είναι ένας περιορισμός πάνω στις ιδιοτιμές. Ακριβέστερα, μόνο τα q_{mn} που ικανοποιούν αυτή τη σχέση είναι αποδεκτά και από εδώ προκύπτει η "κβάντωση" των ιδιοτιμών. Επισημαίνουμε ότι οι ιδιοτιμές δεν είναι ίσες με $\frac{\xi_{mn}}{R}$ ή $\frac{\xi_{mn}}{r}$, όπως στις περιπτώσεις που εξετάσαμε μέχρι τώρα, όπου αποκλείονταν οι συναρτήσεις Neumann, αλλά με κάτι πιο σύνθετο. Για αυτές τις τιμές των q_{mn}, το σύστημα μας δίνει το πηλίκο των συντελεστών και η λύση (με τη βοήθεια της

$$B_{mn} = -\frac{J_m(q_{mn} r)}{N_m(q_{mn} r)} A_{mn}$$

γράφεται:

$$E = \sum_{mn} \left[J_m\left(q_{mn}\rho\right) - \frac{J_m\left(q_{mn} r\right)}{N_m\left(q_{mn} r\right)} N_m\left(q_{mn}\rho\right)\right]$$

$$\left[P_{mn} \cos m\phi + Q_{mn} \sin m\phi\right] e^{i(kz-\omega t)},$$

όπου έχουμε θέσει

$$P_{mn} \equiv A_{mn} C_m, \quad Q_{mn} \equiv A_{mn} D_m.$$

Αν έχουμε την πρόσθετη πληροφορία ότι στην αρχή του κυματοδηγού έχουμε $E(\rho, \phi, z = 0, t) = f(\rho, \phi) \exp[-i\omega t]$ (γνωστή συνάρτηση), τότε μπορούμε να βρούμε με τις γνωστές τεχνικές τους συντελεστές P_{mn} και Q_{mn}.

7.13 Κύλινδρος με τις βάσεις του σε μηδενική θερμοκρασία

Αυτή η εφαρμογή είναι εισαγωγή σε μιαν άλλη κατηγορία συναρτήσεων Bessel. Θεωρούμε την κατανομή θερμοκρασίας για έναν κύλινδρο σε θερμική ισορροπία του οποίου οι βάσεις βρίσκονται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ η παράπλευρη επιφάνειά έχει τη γνωστή θερμοκρασία $\Theta(\rho = R, \phi, z) = f(\phi, z)$. Η θερμοκρασία μέσα στον κύλινδρο διέπεται από την εξίσωση

$$\nabla^2 \Theta = 0. \tag{7.42}$$

Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες και να προχωρήσουμε στον χωρισμό μεταβλητών $\Theta(\rho, \phi, z) = f(\rho) \exp[\pm i m \phi] \sin[\frac{n\pi z}{H}]$. Εχουμε αξιοποιήσει δηλαδή τη γνώση ότι οι λύσεις ως προς τη γωνία είναι τα φανταστικά εκθετικά με ακέραιο m (ή ισοδύναμα τα $\sin m\phi$ και $\cos m\phi$) και ότι οι λύσεις ως προς z είναι τα ημίτονα, που χαρακτηρίζονται από τον ακέραιο n. Αντικαθιστώντας αυτήν τη δοκιμαστική συνάρτηση στην εξίσωση $\nabla^2\Theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0$ βρίσκουμε για τη συνάρτηση $f(\rho)$ την εξίσωση:

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left(-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \rho^2 - m^2 \right) f = 0.$$

Εισάγουμε τώρα το συμβολισμό $k \equiv \frac{n\pi}{H}$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left(-k^2 \rho^2 - m^2 \right) f = 0. \tag{7.43}$$

Αυτή η εξίσωση μοιάζει με την εξίσωση Bessel και λέγεται τροποποιημένη εξίσωση Bessel. Η μόνη, αλλά σημαντική, διαφορά βρίσκεται στο πρόσημο του όρου $k^2\rho^2$.

7.14 Τροποποιημένες συναρτήσεις BESSEL

Μια σκέψη για τη λύση της εξίσωσης (7.43) είναι ότι αν θέσει κανείς $\rho = -i\tilde{\rho}$ η εξίσωση μετατρέπεται στην $\tilde{\rho}^2 \frac{d^2 f}{d\tilde{\rho}^2} + \tilde{\rho}\frac{df}{d\tilde{\rho}} + \left(+k^2\tilde{\rho}^2 - m^2\right) f = 0$, που είναι ακριβώς η εξίσωση Bessel, με γενική λύση την $A_m J_m(k\tilde{\rho}) + B_m N_m(k\tilde{\rho}) = A_m J_m(ik\rho) + B_m N_m(ik\rho)$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε τη λύση χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Bessel και Neumann αλλά με φανταστικό όρισμα. Αυτή η σκέψη βρίσκεται στη βάση του ορισμού των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel. Στην ουσία είναι οι συναρτήσεις με φανταστικό όρισμα που περιγράψαμε πριν. Ο ακριβής ορισμός τους είναι ο ακόλουθος:

$$I_\mu(z) \equiv i^{-\mu} J_\mu(iz), \quad K_\mu(z) \equiv \frac{\pi}{2} i^{\mu+1} H_\mu^{(1)}(iz). \tag{7.44}$$

Σημειώνουμε ότι η δεύτερη τροποποιημένη συνάρτηση Bessel ορίζεται με βάση τη συνάρτηση Hankel και όχι τη συνάρτηση Neumann, όπως θα ήταν, ίσως, φυσικότερο.

Οι αναδρομικές σχέσεις για τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel προκύπτουν από τις αναδρομικές σχέσεις (7.24) για τις $J_\mu(z)$ και $N_\mu(z)$ σε συνδυασμό με τους ορισμούς (7.44). Γράφουμε τις ανεξάρτητες:

$$\begin{aligned} I_{\mu-1}(z) - I_{\mu+1}(z) &= \tfrac{2}{z}\mu I_\mu(z), \quad & K_{\mu-1}(z) - K_{\mu+1}(z) &= \tfrac{2}{z}\mu K_\mu(z) \\ I_{\mu+1}(z) + I_{\mu-1}(z) &= 2I'_\mu(z), \quad & K_{\mu+1}(z) + K_{\mu-1}(z) &= 2K'_\mu(z) \end{aligned} \tag{7.45}$$

Μια επί πλέον παρατήρηση είναι ότι, με την ίδια έννοια που η συνάρτηση Bessel αντιστοιχεί σε συνημίτονο (βλέπε παρατηρήσεις στην παράγραφο για τις συναρτήσεις Hankel), η τροποποιημένη συνάρτηση $I_\mu(z)$ αντιστοιχεί σε υπερβολικό συνημίτονο (αυτό είναι αντανάκλαση του γεγονότος ότι το συνημίτονο με φανταστικό όρισμα μετατρέπεται σε υπερβολικό συνημίτονο). Επίσης, αφού η συνάρτηση Hankel αντιστοιχεί σε εκθετικό με φανταστικό εκθέτη, η συνάρτηση $K_\mu(z)$ αντιστοιχεί σε εκθετικό με πραγματικό εκθέτη. Αυτά αντικατοπτρίζονται στη συμπεριφορά για μεγάλα ορίσματα (έχουμε επί πλέον λάβει υπόψη ότι το $\cosh z$ συμπεριφέρεται για μεγάλα z σαν $\frac{\exp[z]}{2}$):

$$\lim_{z\to\infty} I_\mu(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\exp[z], \quad \lim_{z\to\infty} K_\mu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp[-z]. \tag{7.46}$$

Για μικρά ορίσματα έχουμε:

$$\lim_{z\to 0} I_m(z) = \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m,$$
$$\lim_{z\to\infty} K_{m(\neq 0)}(z) = \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m}, \lim_{z\to 0} K_0(z) = \ln z. \tag{7.47}$$

7.15 Σφαιρικές συναρτήσεις BESSEL

Αν προσπαθήσει κανείς να χωρίσει τις μεταβλητές για την

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0$$

(εξίσωση του Helmholtz) σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)F(\phi),$$

το κομμάτι με τις γωνίες θα δώσει τις σφαιρικές αρμονικές, που εξετάζονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο, ενώ το ακτινικό κομμάτι θα δώσει για το $R(r)$ την εξίσωση

$$r^2R'' + 2rR' + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0. \tag{7.48}$$

Αυτή η εξίσωση μοιάζει με τη Bessel, όμως στον συντελεστή της πρώτης παραγώγου έχει έναν παράγοντα 2, που δεν υπάρχει στην Bessel. Αυτό διορθώνεται εύκολα. Αν θέσουμε $R(r) = \frac{Z(r)}{\sqrt{r}}$, θα καταλήξουμε σε μια εξίσωση για το Z που είναι ακριβώς μια εξίσωση Bessel:

$$r^2Z'' + rZ' + \left[k^2r^2 - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]Z = 0. \tag{7.49}$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι γνωστές: είναι η $J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ και η $N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$. Δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης (7.48) για τη συνάρτηση $R(r)$ δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}, \quad \frac{N_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}. \tag{7.50}$$

Με το παραπάνω σκεπτικό ορίζουμε τις **σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel** με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$j_l(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad n_l(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}}N_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{7.51}$$

$$h_l^{(1)}(z) \equiv j_l(z) + in_l(z), \quad h_l^{(2)}(z) \equiv j_l(z) - in_l(z). \tag{7.52}$$

Οι συναρτήσεις αυτές λύνουν την ακτινική εξίσωση

$$z^2 y'' + 2zy' + [z^2 - l(l+1)]y = 0,$$

που προκύπτει από το χωρισμό μεταβλητών στην εξίσωση του Helmholtz, με την ταυτοποίηση $z \to k\rho$. Καταγράφουμε τις κυριότερες ιδιότητές τους, που προκύπτουν εύκολα από τις αντίστοιχες των κυλινδρικών συναρτήσεων Bessel με ημιπεριττό δείκτη.

7.15.1 Ανάπτυξη σε σειρά

$$j_l(z) = 2^l z^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+l)!}{n!(2n+2l+1)!} z^{2n} \tag{7.53}$$

$$n_l(z) = \frac{(-1)^{l+1}}{2^l z^{l+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-l)!}{n!(2n-2l)!} z^{2n}. \tag{7.54}$$

Ειδικά για $l = 0$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι δύο σειρές γίνονται:

$$j_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right] = \frac{\sin z}{z},$$

$$n_0(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = -\frac{1}{z}\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right] = -\frac{\cos z}{z}.$$

Γενικά αποδεικνύονται οι **τύποι του Rayleigh:**

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z}, \tag{7.55}$$

$$n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z}. \tag{7.56}$$

7.15.2 Ασυμπτωτικές μορφές για πολύ μικρά και πολύ μεγάλα ορίσματα

Για $z \to 0$ αρκεί να πάρουμε τους πρώτους όρους της σειράς:

$$\lim_{z\to 0} j_l(z) = \frac{z^l}{(2l+1)!!}, \quad \lim_{z\to 0} n_l(z) = -\frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}} \tag{7.57}$$

Η μορφή για μεγάλα ορίσματα μπορεί να βρεθεί από τις αντίστοιχες των κυλινδρικών συναρτήσεων Bessel και Neumann. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\lim_{z\to\infty} j_l(z) = \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{l\pi}{2}\right), \quad \lim_{z\to\infty} n_l(z) = \frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{l\pi}{2}\right). \tag{7.58}$$

Από αυτές προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel:

$$\lim_{z\to\infty} h_l^{(1)}(z) = \frac{1}{z}\exp\left[i\left(z - \frac{l\pi}{2}\right)\right],$$

$$\lim_{z\to\infty} h_l^{(2)}(z) = \frac{1}{z}\exp\left[-i\left(z - \frac{l\pi}{2}\right)\right]. \tag{7.59}$$

Οπως είπαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, οι (κυλινδρικές) συναρτήσεις Hankel χρησιμεύουν για την περιγραφή (κυλινδρικών) οδευόντων κυμάτων. Εντελώς αντίστοιχα, οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel χρησιμεύουν για την περιγραφή σφαιρικών οδευόντων κυμάτων. Και πάλι, η ενέργεια που ακτινοβολείται είναι ανάλογη με το τετράγωνο του μέτρου της συνάρτησης που περιγράφει το κύμα, δηλαδή της $\frac{1}{kr}\exp\left[i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)-i\omega t\right]$. Θα ισούται συνεπώς με $N\frac{1}{k^2r^2}$. Οπως και στην περίπτωση των κυλινδρικών συναρτήσεων Hankel, το $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ είναι ο κυματικός αριθμός. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτήν την έκφραση με το εμβαδόν $4\pi r^2$ της σφαίρας ακτίνας r, θα βρούμε την ενέργεια $\frac{4\pi N}{k^2}$ που περνάει από την επιφάνεια της σφαίρας ανά μονάδα χρόνου. Βλέπουμε ότι η σφαιρική συνάρτηση Hankel έχει την κατάλληλη εξάρτηση από την ακτίνα, ώστε η συνολική ενέργεια να μην εξαρτάται από την τιμή της ακτίνας, όπου γίνεται ο υπολογισμός, και η ενέργεια που περνάει ανά μονάδα χρόνου από κάποια σφαίρα να ισούται με την αντίστοιχη ενέργεια που περνάει από μια σφαίρα διαφορετικής ακτίνας. Δηλαδή εξασφαλίζεται ότι δεν χάνεται ούτε δημιουργείται ενέργεια μεταξύ των δύο σφαιρικών επιφανειών. Επομένως γίνεται σεβαστή η φυσική απαίτηση της διατήρησης της ενέργειας, όπως και στην περίπτωση του κυλινδρικού κύματος.

7.15.3 Αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dz}\left[z^{l+1}j_l(z)\right]=z^{l+1}j_{l-1}(z) & \frac{d}{dz}\left[z^{l+1}n_l(z)\right]=z^{l+1}n_{l-1}(z) \\ \frac{d}{dz}\left[z^{-l}j_l(z)\right]=-z^{-l}j_{l+1}(z) & \frac{d}{dz}\left[z^{-l}n_l(z)\right]=-z^{-l}n_{l+1}(z), \\ j_{l+1}(z)+j_{l-1}(z)=\frac{2l+1}{z}j_l(z) & n_{l+1}(z)+n_{l-1}(z)=\frac{2l+1}{z}n_l(z) \end{array} \tag{7.60}$$

Τέλος η **ορθογωνιότητα** των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel δίνεται από τη σχέση:

$$\int_0^R d\rho\rho^2 j_l\left(\xi_{ln_1}\frac{\rho}{R}\right) j_l\left(\xi_{ln_2}\frac{\rho}{R}\right)=\frac{R^3}{2}[j_{l+1}(\xi_{ln_1})]^2\delta_{n_1n_2}, \tag{7.61}$$

όπου ξ_{ln} είναι οι ρίζες της σφαιρικής συνάρτησης Bessel $j_l(z)$.

7.15.4 Τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις BESSEL

Οπως είδαμε, οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel δίνουν τη θέση τους στις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel όταν επιχειρηθεί η λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel συνδέονται με τις αρχικές όταν οι αρχικές υπολογιστούν για φανταστικό όρισμα. Τελείως ανάλογα πράγματα συμβαίνουν όταν προσπαθήσει κανείς να λύσει την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες. Θα εμφανιστούν οι τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, ή σφαιρικές συναρτήσεις Bessel με φανταστικό όρισμα.

7.16 Εξισώσεις που ανάγονται στην εξίσωση BESSEL

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο **εξαιρετικά χρήσιμο** αποτέλεσμα:

Θεώρημα Η γενική λύση της εξίσωσης:

$$z^2y''(z)+(1-2\alpha)xy'(z)+\left[\beta^2\gamma^2z^{2\gamma}+\alpha^2-\mu^2\gamma^2\right]y(z)=0 \tag{7.62}$$

είναι η:

$$y(z)=Az^{\alpha}J_{\mu}(\beta z^{\gamma})+Bz^{\alpha}N_{\mu}(\beta z^{\gamma}). \tag{7.63}$$

Απόδειξη Θα χρειαστεί μια αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής και μία της ανεξάρτητης. Αρχίζουμε από την εξαρτημένη: $y(z) = z^\alpha u(z) \to y'(z) = \alpha z^{\alpha-1}u(z) + z^\alpha u'(z) \to y''(z) = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}u(z) + 2\alpha z^{\alpha-1}u'(z) + z^\alpha u''(z)$. Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση προκύπτει η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η $u(z)$:

$$z^2u''(z) + zu'(z) + \left[(\beta\gamma z^\gamma)^2 - \mu^2\gamma^2\right] u(z) = 0. \tag{7.64}$$

Τώρα αλλάζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή: $t \equiv z^\gamma \to \frac{du}{dz} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dz} = \gamma z^{\gamma-1}\frac{du}{dt}$. Επίσης: $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\gamma z^{\gamma-1}\frac{du}{dt}\right) = \gamma(\gamma-1)z^{\gamma-2}\frac{du}{dt} + \gamma z^{\gamma-1}\frac{d^2u}{dt^2}\frac{dt}{dz} = \gamma(\gamma-1)z^{\gamma-2}\frac{du}{dt} + \gamma^2 z^{2\gamma-2}\frac{d^2u}{dt^2}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7.64) καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση:

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + [(\beta t)^2 - \mu^2]u = 0, \tag{7.65}$$

που είναι η εξίσωση Bessel. Η γενική λύση της (7.65) είναι η: $u(t) = AJ_\mu(\beta t) + BN_\mu(\beta t) = AJ_\mu(\beta z^\gamma) + BN_\mu(\beta z^\gamma)$. Επομένως η συνάρτηση $y(z) = z^\alpha u(z)$ θα δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$y(z) = Az^\alpha J_\mu(\beta z^\gamma) + Bz^\alpha N_\mu(\beta z^\gamma). \tag{7.66}$$

Αυτό το θεώρημα μας δίνει τη λύση ολόκληρης οικογένειας διαφορικών εξισώσεων, με αρκετές ενδιαφέρουσες υποπεριπτώσεις. Θα δούμε μερικά παραδείγματα.

1. Το πρώτο παράδειγμα είναι η γνωστή εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή $y'' + k^2y = 0$. Φυσικά η λύση είναι γνωστή ($y = c_1\cos kz + c_2\sin kz$). Το αναφέρουμε μόνο και μόνο για να βεβαιωθούμε ότι παίρνουμε το γνωστό αποτέλεσμα. Η εξίσωση (7.62) μεταπίπτει στην εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή, αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = k, \gamma = 1, \mu = \frac{1}{2}$. Αρα η λύση θα είναι η $y = Az^{1/2}J_{\frac{1}{2}}(kz) + Bz^{1/2}N_{\frac{1}{2}}(kz)$. Επειδή, όμως, $J_{\frac{1}{2}}kz = \frac{2}{\sqrt{\pi kz}}\sin kz, N_{\frac{1}{2}}(kz) = -\frac{2}{\sqrt{\pi kz}}\cos kz$, η λύση γράφεται $y = A\frac{2}{\sqrt{\pi k}}\sin kz - B\frac{2}{\sqrt{\pi k}}\cos kz$. Δηλαδή, πράγματι, αναπαράγουμε τη γνωστή λύση.

2. Το επόμενο παράδειγμα το έχουμε ήδη συναντήσει και έχουμε βρει τη λύση. Είναι η εξίσωση $r^2R'' + 2rR' + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0$, δηλαδή η σφαιρική εξίσωση Bessel. Είδαμε ότι η λύση είναι μια συνάρτηση Bessel ή Neumann με τάξη $l + \frac{1}{2}$ διαιρεμένη με την τετραγωνική ρίζα του r. Στη γλώσσα του θεωρήματος που μελετάμε η εξίσωση (7.62) μεταπίπτει στην εξίσωση που εξετάζουμε, αν $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = k, \gamma = 1, \mu = l + \frac{1}{2}$. Αρα η λύση είναι η $y = Ar^{-\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + Br^{-\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$, δηλαδή η λύση που βρήκαμε και προηγουμένως.

3. Η εξίσωση που θα εξετάσουμε τώρα είναι πολύ μεγάλης σημασίας για την Οπτική και ονομάζεται **εξίσωση του Airy:** $y'' - zy = 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η εξίσωση (7.62) μεταπίπτει στην εξίσωση του Airy, αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2i}{3}, \gamma = \frac{3}{2}, \mu = \frac{1}{3}$. Αρα οι λύσεις είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί: $y = Az^{1/2}J_{\frac{1}{3}}(\frac{2i}{3}z^{\frac{3}{2}}) + Bz^{1/2}N_{\frac{1}{3}}(\frac{2i}{3}z^{\frac{3}{2}})$. Ισοδύναμα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη μορφή $y = Cz^{1/2}J_{\frac{1}{3}}(\frac{2i}{3}z^{\frac{3}{2}}) + Dz^{1/2}J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2i}{3}z^{\frac{3}{2}})$, αφού ο δείκτης δεν είναι ακέραιος. Η σχέση $I_\mu(z) = i^{-\mu}J_\mu(iz)$ μας υποδεικνύει ότι έχουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των $I_{+\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})$ και $I_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})$. Η καθιερωμένη μορφή των λύσεων είναι οι λεγόμενες **συναρτήσεις του Airy**,

$$Ai(z) = \frac{z^{1/2}}{3}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) - I_{+\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$Bi(z) = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{3}}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) + I_{+\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε πράγματι αναπαραγάγει την καθιερωμένη λύση.

4. Θα έλθουμε τώρα σε μια πολύ γνωστή εξίσωση, που συνήθως αντιμετωπίζεται διαφορετικά στα στοιχειώδη βιβλία διαφορικών εξισώσεων. Πρόκειται για τη **εξίσωση του Riccati:**

$$y' + ay^2 = bx^n. \tag{7.67}$$

Είναι, δηλαδή, μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Ομως, με το μετασχηματισμό

$$y(x) = \frac{1}{a}\frac{u'(x)}{u(x)} \to y'(x) = -\frac{1}{a}\frac{u'^2(x)}{u^2(x)} + \frac{1}{a}\frac{u''(x)}{u(x)},$$

η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$u'' - abx^n u = 0.$$

Αυτή η εξίσωση είναι της μορφής (7.62), αν οι παράμετροι επιλεγούν ως εξής: $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2\sqrt{-ab}}{n+2}, \gamma = \frac{n+2}{2}, \mu = \frac{1}{n+2}$. Αρα η λύση για την $u(x)$ είναι γνωστή:

$$u(x) = \sqrt{x}\left[AJ_{\frac{1}{n+2}}\left(\sqrt{-ab}\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}\right) + BN_{\frac{1}{n+2}}\left(\sqrt{-ab}\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}\right)\right].$$

Αν χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $\frac{1}{n+2} \equiv l + \frac{1}{2}$ η λύση γράφεται με τη μορφή:

$$u(x) = A\sqrt{x}J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-ab}(2l+1)x^{\frac{1}{2l+1}}\right)$$

$$+B\sqrt{x}N_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-ab}(2l+1)x^{\frac{1}{2l+1}}\right),$$

και φυσικά $y = \frac{1}{a}\frac{u'}{u}$. Ξεκινώντας από αυτή τη μορφή μπορεί κανείς να δει εύκολα πότε η λύση μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Για παράδειγμα, όταν ο l είναι ακέραιος, η λύση εκφράζεται με ημίτονα και συνημίτονα.

7.17 Σχέση LEGENDRE με BESSEL

Στο όριο των μεγάλων τιμών για τους ακέραιους l η συναρτημένη εξίσωση Legendre (6.17):

$$(1-x^2)\frac{d^2P_{lm}}{dx^2} - 2x\frac{dP_{lm}}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{lm} = 0.$$

μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση Bessel. Το πρώτο βήμα είναι η αλλαγή μεταβλητών

$$z \equiv l\sqrt{1-x^2} \to \frac{dz}{dx} = -\frac{lx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Αυτές οι σχέσεις μας βοηθούν να εκφράσουμε τις παραγώγους ως προς x συναρτήσει των αντίστοιχων ως προς z :

$$\frac{dP_{lm}}{dx} = \frac{dP_{lm}}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{lx}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dP_{lm}}{dz},$$

$$\frac{d^2P_{lm}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{lx}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dP_{lm}}{dz}\right] = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{lx}{\sqrt{1-x^2}}\right]\frac{dP_{lm}}{dz} -$$

$$-\frac{lx}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{d^2P_{lm}}{dz^2}\frac{dz}{dx}\right] \to \frac{d^2P_{lm}}{dx^2} = -\frac{l}{(1-x^2)^{3/2}}\frac{dP_{lm}}{dz} + \frac{l^2x^2}{1-x^2}\frac{d^2P_{lm}}{dz^2}$$

Αντικαθιστούμε αυτές τις σχέσεις στην εξίσωση (6.17) και καταλήγουμε στην

$$l^2 x^2 \frac{d^2 P_{lm}}{dz^2} + \frac{2lx^2 - l}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dP_{lm}}{dz} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_{lm} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $x^2 = 1 - \frac{z^2}{l^2}$ (που προκύπτει από τον ορισμό του z) για να εκφράσουμε όλα τα εναπομένοντα x συναρτήσει του z, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) \frac{d^2 P_{lm}}{dz^2} + \frac{1 - \frac{2z^2}{l^2}}{z} \frac{dP_{lm}}{dz} + \left[1 + \frac{1}{l} - \frac{m^2}{z^2} \right] P_{lm} = 0 \tag{7.68}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (7.68) είναι <u>ισοδύναμη</u> με την (6.17), αφού μέχρι στιγμής δεν κάναμε καμμιά προσέγγιση. Τώρα θα αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι οι ακέραιοι l θεωρούνται πολύ μεγάλοι, θα πάρουμε δηλαδή το όριο $l \to \infty$. Η εξίσωση (7.68) θα μεταπέσει στην:

$$\frac{d^2 P_{lm}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dP_{lm}}{dz} + \left[1 - \frac{m^2}{z^2} \right] P_{lm} = 0,$$

που γράφεται και με τη μορφή:

$$z^2 \frac{d^2 P_{lm}}{dz^2} + z \frac{dP_{lm}}{dz} + \left(z^2 - m^2\right) P_{lm} = 0,$$

και δεν είναι άλλη από την εξίσωση Bessel. Χρειάζεται προσοχή στον τρόπο με τον οποίο παίρνουμε το όριο: αφήνουμε το l να πάει στο άπειρο, ενώ φροντίζουμε το z να παραμένει πεπερασμένο, ενώ το $|x|$ τείνει όλο και πιο πολύ στο 1, σύμφωνα με τη σχέση ορισμού του z. Καταλήγουμε, λοιπόν, ότι θα ισχύει η σχέση:

$$\lim_{l \to \infty} P_{lm} \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{l^2}} \right) = c J_m(z),$$

όπου το c είναι κάποια σταθερά. Σημειώνουμε τέλος ότι, αντίστοιχα, τα $Q_{lm}\left(\sqrt{1-\frac{z^2}{l^2}}\right)$ θα τείνουν στην $c' N_m(z)$.

7.18 Ασκήσεις προς λύση

1. Ενα τύμπανο έχει σχήμα κυκλικού τομέα με άνοιγμα γωνίας α και ακτίνα R. Η μεμβράνη του τυμπάνου είναι ακλόνητα στερεωμένη στα άκρα. Εστω ότι για $t = 0$ η αρχική ταχύτητα και επιτάχυνση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Psi(\rho, \phi, t = 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = f(\rho, \phi),$$

όπου $f(\rho, \phi)$ γνωστή συνάρτηση.

(1) Να βρεθεί η λύση που περιγράφει την κίνηση της μεμβράνης με αυτές τις οριακές συνθήκες, ξεκινώντας από το γεγονός ότι η κίνησή της διέπεται από την κυματική εξίσωση:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

όπου c δοσμένη σταθερά.

(2) Εξειδικεύστε στην περίπτωση όπου $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ και

$$f(\rho, \phi) = u_0 J_q(k_N \rho) \sin \frac{3\phi}{2}.$$

(α) Ποιά είναι η τάξη q της συνάρτησης Bessel;

(β) Αποδείξτε ότι η σταθερά k_N ικανοποιεί την εξίσωση:

$$k_N R = \tan(k_N R).$$

2. Στο κεφάλαιο των μετασχηματισμών Fourier (στην παράγραφο για την περίθλαση Fraunhofer) είχαμε καταλήξει ότι η περίθλαση από κυκλικό άνοιγμα καθορίζεται από την ποσότητα που δίνεται στην εξίσωση (2.31):

$$F_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] = \frac{\Lambda}{4\pi^2} \int_0^R dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[-ikr' \sin\theta \cos(\phi' - \phi)].$$

Να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός (που περιλαμβάνει συναρτήσεις Bessel.)

3. Αποδείξτε επαγωγικά ότι:

$$J_m(z) = (-1)^m z^m \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m J_0(x), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

4. (α) Να επαληθευθεί η σχέση του Rayleigh:

$$\exp[ikr\cos\theta] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta),$$

που εκφράζει την ανάλυση ενός επίπεδου κύματος σε άθροισμα σφαιρικών κυμάτων. (Υπόδειξη: παραγωγίστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς r και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε αναδρομικές σχέσεις για να αντικαταστήσετε τα $\cos\theta P_l(\cos\theta)$ και j_l'.)

(β) Δείξτε ότι

$$j_l(kr) = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^{1} dx P_l(x) \exp[ikrx].$$

5. Η διαφορική ενεργός διατομή σ' ένα πείραμα σκέδασης δίνεται από τη σχέση: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$, όπου το $f(\theta)$ ισούται με:

$$f(\theta) = -\frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \exp[ik\rho \sin\theta \sin\phi].$$

Να υπολογιστεί από αυτά τα δεδομένα η διαφορική ενεργός διατομή.

6. (α) Αν $B_{\mu 1}(x)$ και $B_{\mu 2}(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel $x^2 B_\mu'' + zB_\mu' + (x^2 - \mu^2) B_\mu = 0$, να αποδειχθεί η σχέση:

$$B_{\mu 1}(x) B_{\mu 2}'(x) - B_{\mu 1}'(x) B_{\mu 2}(x) = \frac{K_\mu}{x},$$

όπου η K_μ είναι σταθερά. Υπόδειξη: ορίζουσα Wronski. (β) Υπολογίστε τη σταθερά K_μ στην περίπτωση που οι δύο λύσεις είναι οι $J_\mu(x)$ και $N_\mu(x)$.

7. Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σωματίδιο μάζας μ που κινείται σε σφαιρικό δοχείο ακτίνας a. Τα τοιχώματα του δοχείου θεωρούνται ακλόνητα ($V = +\infty$). Υπόδειξη: Η ελάχιστη ενέργεια αντιστοιχεί σε μηδενική στροφορμή.

8. Ενα αντηχείο Helmholtz έχει σφαιρικό σχήμα (ακτίνας a) και περιέχει ένα στάσιμο κύμα, που (προφανώς) ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Η οριακή συνθήκη είναι: $\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$. Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα, αν η ταχύτητα του ήχου θεωρηθεί δεδομένη. Υπόδειξη: Η ελάχιστη ενέργεια αντιστοιχεί σε μηδενική στροφορμή.

9. Να επαληθευθεί η σχέση του Poisson::

$$j_l(z) = \frac{z^l}{2^{l+1}l!}\int_0^\pi d\theta \cos(z\cos\theta)\sin^{2l+1}\theta.$$

Υπόδειξη: Ισως φανούν χρήσιμες οι συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα (βλέπε το σχετικό Παράρτημα).

10. Να αποδειχθεί ότι τα ολοκληρώματα Fresnel

$$F_1(t) \equiv \int_0^t dx \cos(x^2), \quad F_2(t) \equiv \int_0^t dx \sin(x^2)$$

μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$F_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^{t^2} dy j_{-1}(y)\sqrt{y}, \quad F_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^{t^2} dy j_0(y)\sqrt{y}.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθούν οι ισότητες:

$$\frac{1}{2}\int_0^z dy j_{-1}(y)\sqrt{y} = \sqrt{z}\sum_{l=0}^{\infty} j_{2l}(z), \quad \frac{1}{2}\int_0^z dy j_0(y)\sqrt{y} = \sqrt{z}\sum_{l=0}^{\infty} j_{2l+1}(z).$$

Υπόδειξη: οι ισότητες αυτές μπορούν να αποδειχθούν, αν αποδειχθούν πρώτα οι αντίστοιχες ισότητες για τις παραγώγους.

Κεφάλαιο 8

Πολυωνυμικά προβλήματα STURM-LIOUVILLE

8.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα Sturm-Liouville που περιγράφεται από την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\hat{L}(x)u(x) \equiv \left[\alpha(x)\frac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)\right] u(x) = -\lambda u(x)$$

και επιβάλλουμε την επί πλέον απαίτηση οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_n είναι τα πολυώνυμα $U_n(x)$ βαθμού n :

$$\hat{L}(x)U_n(x) = -\lambda_n U_n(x), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις οι πιθανές συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ περιορίζονται θεαματικά. Για να το δούμε, θα γράψουμε αναλυτικά την εξίσωση:

$$\alpha(x)U_n''(x) + \beta(x)U_n'(x) + \gamma(x)U_n(x) = -\lambda_n U_n(x)$$

για $n = 0, 1, 2$:

$$\alpha(x)U_0''(x) + \beta(x)U_0'(x) + \gamma(x)U_0(x) = -\lambda_0 U_0(x),$$

$$\alpha(x)U_1''(x) + \beta(x)U_1'(x) + \gamma(x)U_1(x) = -\lambda_1 U_1(x),$$

$$\alpha(x)U_2''(x) + \beta(x)U_2'(x) + \gamma(x)U_2(x) = -\lambda_2 U_2(x).$$

Υπενθυμίζουμε ότι το $U_0(x)$ είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή μια σταθερά, άρα $U_0'(x) = 0, U_0''(x) = 0$. Συνεπώς, η πρώτη εξίσωση δίνει τη σχέση $\gamma(x)U_0(x) = -\lambda_0 U_0(x) \to \gamma(x) = -\lambda_0 \equiv \gamma_0$. Η συνάρτηση $\gamma(x)$ ισούται με κάποια ιδιοτιμή, άρα είναι μια σταθερά, την οποία συμβολίζουμε με γ_0. Για να εξετάσουμε τη δεύτερη εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $U_1''(x) = 0$ που ισχύει για τη συνάρτηση πρώτου βαθμού $U_1(x)$. Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση $\beta(x)U_1'(x) + \gamma(x)U_1(x) = -\lambda_1 U_1(x) \to \beta(x) = -\frac{\lambda_1+\gamma(x)}{U_1'(x)}U_1(x)$. Η συνάρτηση $\beta(x)$ είναι γινόμενο του $U_1(x)$, που είναι πρώτου βαθμού, με το κλάσμα που είναι συνδυασμός σταθερών, δηλαδή είναι μια γραμμική συνάρτηση: $\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Η τρίτη εξίσωση προσδιορίζει τη συνάρτηση που απομένει: $\alpha(x) = -\frac{\lambda_2+\gamma(x)}{U_2''}U_2(x) - \beta(x)\frac{U_2'}{U_0''}$. Ο πρώτος όρος είναι γινόμενο μιας σταθεράς επί το $U_2(x)$, που είναι δευτέρου βαθμού. Ο δεύτερος όρος είναι γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων όρων, των $\beta(x)$ και $\frac{U_2'}{U_0''}$. Συνολικά η $\alpha(x)$ είναι δεύτερου βαθμού: $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Ο περιορισμός του χώρου των συναρτήσεων όπου μπορεί να κινούνται τα $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ προκειμένου να υπάρχουν πολυωνυμικές ιδιοσυναρτήσεις είναι ήδη εντυπωσιακός, αφού οι συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ περιορίζονται σε πολυώνυμα δεύτερου, πρώτου και μηδενικού βαθμού αντίστοιχα. Μπορεί δηλαδή κανείς να διατρέξει όλα τα πολυωνυμικά συστήματα Sturm-Liouville απλά επιτρέποντας στις έξι παραμέτρους $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$ να πάρουν τυχαίες πραγματικές τιμές.

Ομως ο περιορισμός είναι ακόμα μεγαλύτερος. Μια σημαντική παρατήρηση έχει ως εξής: Εστω ότι είναι γνωστές οι (πολυωνυμικές) ιδιοσυναρτήσεις $U_n(x)$ που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_n. Τότε είναι εύκολο να δεί κανείς ότι στον τελεστή $C_1 + C_2\hat{L}(C_3 x + C_4)$ αντιστοιχούν οι ιδιοσυναρτήσεις $U_n(C_3 x + C_4)$ και οι ιδιοτιμές $C_1 - C_2\lambda_n$. Στην πραγματικότητα επομένως, τα πολυωνυμικά συστήματα Sturm-Liouville χαρακτηρίζονται από $6 - 4 = 2$ (το πολύ) ανεξάρτητες παραμέτρους, επειδή οι αλλαγές που σχετίζονται με τις 4 παραμέτρους C_1, C_2, C_3, C_4 είναι τετριμένες. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τέτοιους μετασχηματισμούς για να μετατρέπουμε ένα τυχαίο σύστημα σε απλούστερη μορφή. Το πρώτο που θα κάνουμε θα είναι να φροντίσουμε να μηδενίσουμε μ΄ αυτόν τον τρόπο το γ_0. Επομένως, από εδώ και στο εξής, $\gamma(x) \equiv \gamma_0 = 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις. Το κριτήριο είναι αν ο βαθμός της συνάρτησης $\alpha(x)$ είναι 0, 1 ή 2.

8.1.1 Αν η $\alpha(x)$ είναι σταθερά

Αν το $\alpha(x)$ είναι μια σταθερά α_0, έχουμε για τη συνάρτηση βάρους τη σχέση:

$$w(x) = \frac{c}{\alpha_0}\exp\left[\int dx \frac{\beta_1 x + \beta_0}{\alpha_0}\right] = \frac{c}{\alpha_0}\exp\left[\frac{\beta_1 x^2}{2\alpha_0} + \frac{\beta_0 x}{\alpha_0} + \frac{K}{\alpha_0}\right] =$$

$$= \frac{c}{\alpha_0}\exp\left[\frac{K - \beta_0^2}{2\alpha_0\beta_1}\right]\exp\left[\frac{\beta_1}{2\alpha_0}\left(x + \frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2\right].$$

Οι τιμές των c, K είναι αυθαίρετες, ενώ των $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ ρυθμίζονται από τις παραμέτρους C_1, C_2, C_3, C_4. Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους ώστε η συνάρτηση βάρους να πάρει την εύχρηστη μορφή $w(x) = \exp[-x^2]$, δηλαδή επιλέγουμε:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = -2.$$

Τα αντίστοιχα πολυώνυμα $U_n(x)$ συμβολίζονται με $H_n(x)$ και λέγονται πολυώνυμα του Hermite.

8.1.2 Αν η $\alpha(x)$ είναι γραμμική

Μπορούμε να κάνουμε τους μη ουσιώδεις μετασχηματισμούς και να πετύχουμε η γραμμική $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ να πάρει τη μορφή $\alpha(x) = x$. Συμπεραίνουμε ότι

$$w(x) = \frac{1}{x}\exp[\int dx \frac{\beta_0 + \beta_1 x}{x}] = \frac{1}{x}\exp[\beta_0 \ln x + \beta_1 x] = x^{\beta_0 - 1}\exp[\beta_1 x].$$

Επιλέγουμε $\beta_1 = -1, \beta_0 > 0$. (Η επιλογή αυτή είναι απλά μια χρήσιμη σύμβαση. Για παράδειγμα, αν διαλέγαμε το β_1 να είναι θετικό, η παράσταση $w(x)\alpha(x)$ θα μηδενιζόταν στο $-\infty$ και θα απειριζόταν στο $+\infty$, αντίθετα από την τωρινή μας σύμβαση, αλλά αυτό δεν θα είχε ουσιώδη σημασία.) Ομως η συνάρτηση βάρους ως έχει θα απειρίζεται στο $x \to -\infty$. Επιλέγουμε λοιπόν να περιορίσουμε το διάστημα ορισμού του προβλήματος στο διάστημα $[0, +\infty)$ επιλέγοντας:

$$w(x) = \begin{cases} x^s e^{-x}, x \geq 0, \\ w(x) = 0, x < 0. \end{cases}$$

Εχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $s \equiv \beta_0 - 1$. Δηλαδή οι διάφορες σταθερές έχουν επιλεγεί ως εξής:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_0 = s + 1, \quad \beta_1 = -1.$$

Τα αντίστοιχα πολυώνυμα $U_n(x)$ συμβολίζονται $L_n^s(x)$ και λέγονται συναρτημένα πολυώνυμα του Laguerre τάξης s.

8.1.3 Αν η $\alpha(x)$ είναι δευτέρου βαθμού

Αποδεικνύεται ότι, αν οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ είναι μιγαδικές, στην πορεία δεν θα μπορέσουμε να ικανοποιήσουμε την οριακή συνθήκη $w(x)\alpha(x)[f^*(x)g'(x) - f^{*\prime}(x)g(x)]|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ για πολυώνυμα $f(x), g(x)$ αρκετά μεγάλου βαθμού. Για την μόνη περίπτωση που υπάρχει λύση, δηλαδή όταν οι ρίζες είναι πραγματικές, φροντίζουμε να φέρουμε την $\alpha(x)$ στη μορφή $1 - x^2$. Οι μόνες παράμετροι που απομένουν είναι οι β_0 και β_1. Τις εκφράζουμε συναρτήσει δύο άλλων (αυτό είναι μια απλή σύμβαση): $\beta_0 = q - p, \beta_1 = -(q + p + 2)$. Με αυτές τις προϋποθέσεις είναι εύκολο να δούμε ότι $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{q+1}{1+x} - \frac{p+1}{1-x}$ και η συνάρτηση βάρους δίνεται από τη σχέση: $w(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \exp\left[\int dx \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right] = \frac{1}{1-x^2} \exp\left[\int dx \left(\frac{q+1}{1+x} - \frac{p+1}{1-x}\right)\right] = (1+x)^q(1-x)^p$. Εχουμε και εδώ πρόβλημα με την οριακή συνθήκη (όπως και στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών), γιατί το $w(x)\alpha(x)$ στο άπειρο πηγαίνει σαν δύναμη του x και το γινόμενο των πολυωνύμων από ένα βαθμό και πάνω θα κάνουν την παράσταση $w(x)\alpha(x)[f^*(x)g'(x) - f^{*\prime}(x)g(x)]$ να απειρίζεται. Ομως εδώ, αντίθετα με την περίπτωση των μιγαδικών ριζών, η $w(x)$ μηδενίζεται στα $x = \pm 1$, οπότε μπορούμε να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού του προβλήματος στο διάστημα $[-1, +1]$, επιβάλλοντας στη συνάρτηση βάρους να μηδενίζεται έξω από αυτό:

$$w(x) = \begin{cases} (1+x)^q(1-x)^p, -1 \leq x \leq +1, \\ w(x) = 0, |x| > 1. \end{cases}$$

Αυτή η επιλογή λύνει, προφανώς, το πρόβλημα με την οριακή συνθήκη. Συνοψίζουμε τις επιλογές που έχουν γίνει για τις σταθερές:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \beta_0 = q - p, \quad \beta_1 = -(q + p + 2).$$

Τα πολυώνυμα που προκύπτουν λέγονται πολυώνυμα του Jacobi με δείκτες p και q, συμβολίζονται: $J_n^{(p,q)}(x)$ και ορίζονται στο διάστημα $[-1, +1]$.

Ειδικές περιπτώσεις πολυωνύμων Jacobi

1. $p = q = m$, όπου ο m είναι ακέραιος και $m > -1$. Τότε $w(x) = (1 - x^2)^m$ και τα πολυώνυμα $G_n^m(x) \equiv J_n^{(m,m)}(x)$ που προκύπτουν λέγονται υπερσφαιρικά πολυώνυμα Gegenbauer. Στις περιπτώσεις όπου $p = q$ (όπως εδώ) παρατηρούμε ότι $\beta_0 = 0$, πράγμα που συνεπάγεται γιά τον τελεστή τη σχέση $\hat{L}(x) = \hat{L}(-x)$. Αυτή η ιδιότητα (μαζί με το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις δεν είναι εκφυλισμένες) συνεπάγεται ότι

$$G_n^m(-x) = (-1)^n G_n^m(x).$$

Αυτή είναι η πολύ σημαντική ιδιότητα της ομοτιμίας. Η πιο πάνω σχέση συνεπάγεται ότι αν το n είναι άρτιο, το πολυώνυμο θα έχει μόνο τους άρτιους όρους, ενώ αν το n είναι περιττό, μόνο τους περιττούς. Μια επίσης σημαντική παρατήρηση είναι ότι τα πολυώνυμα Gegenbauer συνδέονται στενότατα με τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre. Η ακριβής σχέση, την οποία θα συζητήσουμε σε λίγο, είναι:

$$G^m_{l-m}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_{lm}(x).$$

2. $p = q = -\frac{1}{2}$. Σ′ αυτήν την περίπτωση $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ και τα πολυώνυμα $T_n(x) \equiv J_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$ λέγονται πολυώνυμα του Chebyshev. Και αυτά έχουν συγκεκριμένη ομοτιμία. Αυτά τα πολυώνυμα είναι πολύ χρήσιμα στην αριθμητική ανάλυση, πράγμα που οφείλεται στην ιδιότητα της ορθογωνιότητας. Ενας εναλλακτικός ορισμός τους είναι ο ακόλουθος: $T_n(x) = N \cos(n \arccos x)$, όπου το N είναι μια σταθερά.

3. $p = q = 0$. Αυτή η απλή περίπτωση αντιστοιχεί στα γνωστά μας πολυώνυμα Legendre. Η συνάρτηση βάρους προκύπτει ίση με τη μονάδα, όπως ακριβώς θα περιμέναμε. Και εδώ έχουμε ομοτιμία: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

8.1.4 Παρατηρήσεις

Στα προηγούμενα είδαμε ότι τα πολυωνυμικά προβλήματα Sturm - Liouville περιλαμβάνουν μεταξύ των λύσεών τους πολλά γνωστά ορθογώνια πολυώνυμα. Γενικά, στην περίπτωση που η $\alpha(x)$ είναι δευτεροβάθμια, δηλαδή έχει όλους τους όρους της, τα πολυώνυμα που προκύπτουν χαρακτηρίζονται από δύο παραμέτρους, τις p και q, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει. Αυτή είναι η μέγιστη ελευθερία που έχει κανείς στην κατασκευή πολυωνυμικών συστημάτων Sturm - Liouville. Στην περίπτωση της γραμμικής $\alpha(x)$ έχουμε μια συνθήκη που μας περιορίζει την ελευθερία: κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό, ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου στην $\alpha(x)$ πρέπει να μηδενίζεται. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο σ′ αυτήν την περίπτωση έχουμε μόνο μία παράμετρο (την s των συναρτημένων πολυωνύμων Laguerre) που χαρακτηρίζει τα διάφορα πολυώνυμα. Τέλος, αν η $\alpha(x)$ είναι σταθερά έχουμε προφανώς δύο περιορισμούς, οπότε δεν υπάρχει καμμιά ελευθερία. Πράγματι, τα πολυώνυμα του Hermite δεν έχουν κανένα δείκτη (αν εξαιρέσουμε το βαθμό τους).

Με βάση τις συναρτήσεις βάρους που προσδιορίσαμε, γράφουμε και τις σχέσεις ορθογωνιότητας για κάθε περίπτωση, με την προϋπόθεση ότι $n_1 \neq n_2$. Για τα πολυώνυμα Hermite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_{n_1}(x) H_{n_2}(x) = 0.$$

Για τα συναρτημένα πολυώνυμα Laguerre:

$$\int_0^{+\infty} dx x^s e^{-x} L^s_{n_1} L^s_{n_2}(x) = 0.$$

Για τα πολυώνυμα Jacobi:

$$\int_{-1}^{+1} dx (1+x)^q (1-x)^p J_{n_1}^{(p,q)}(x) J_{n_2}^{(p,q)}(x) = 0.$$

8.1.5 Εξισώσεις και ιδιοτιμές

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στην εξίσωση:

$$(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(x^n + \ldots)'' + (\beta_1 x + \beta_0)(x^n + \ldots)' + \gamma_0(x^n + \ldots) = -\lambda_n(x^n + \ldots).$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\gamma_0 = 0$ και παρατηρούμε ότι έχουμε απλοποιήσει τον συντελεστή του x^n στις ιδιοσυναρτήσεις, μια και δεν παιζει κανένα ρόλο στο παρόν επιχείρημα. Η εξίσωση των συντελεστών του x^n δίνει:

$$\lambda_n = -n[\alpha_2(n-1) + \beta_1].$$

Εξειδικεύουμε στις ιδιαίτερες περιπτώσεις.

Για τα πολυώνυμα Hermite έχουμε $\alpha_2 = 0, \beta_1 = -2$, οπότε:

$$\lambda_n = 2n.$$

Για τα συναρτημένα πολυώνυμα Laguerre έχουμε $\alpha_2 = 0, \beta_1 = -1$, οπότε:

$$\lambda_n = n.$$

Για τα πολυώνυμα Jacobi έχουμε $\alpha_2 = -1, \beta_1 = -(p+q+2)$, οπότε:

$$\lambda_n = n(n+p+q+1).$$

Για τις ειδικές περιπτώσεις των Jacobi βρίσκουμε:

1. Για την περίπτωση $p = q = m$ (Gegenbauer): $\lambda_n = n[n + 2m + 1]$.
2. Για την περίπτωση $p = q = -\frac{1}{2}$ (Chebyshev): $\lambda_n = n^2$.
3. Για την περίπτωση $p = q = 0$ (Legendre): $\lambda_n = n(n+1)$.

Τώρα έχουμε προσδιορίσει κατά περίπτωση τις συναρτήσεις $\alpha(x), \beta(x)$, $\gamma(x)$ και τις ιδιοτιμές λ_n, οπότε μπορούμε να γράψουμε αναλυτικά την εξίσωση $\hat{L}(x)U_n(x) = -\lambda_n U_n(x)$ και να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιεί το κάθε είδος πολυωνύμου.

Τα πολυώνυμα Hermite ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0, \quad -\infty \le x < +\infty.$$

Τα συναρτημένα πολυώνυμα Laguerre ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x\frac{d^2 L_n^s(x)}{dx^2} + (-x + s + 1)\frac{dL_n^s(x)}{dx} + nL_n^s(x) = 0, \quad 0 \le x < +\infty.$$

Τα πολυώνυμα Jacobi ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(1 - x^2)\frac{d^2 J_n^{(p,q)}(x)}{dx^2} + [-(p+q+2)x + (q-p)]\frac{dJ_n^{(p,q)}(x)}{dx}$$

$$+n(n+p+q+1)J_n^{(p,q)}(x) = 0, \quad -1 \le x \le +1.$$

Οπως εξηγήσαμε, η τελευταία εξίσωση έχει τις υποπεριπτώσεις της:

(1) Την υποπερίπτωση Gegenbauer:

$$(1-x^2)\frac{d^2G_n^m(x)}{dx^2}-(2m+1)x\frac{dG_n^m(x)}{dx}+n(n+2m+1)G_n^m(x)=0.$$

(2) Τη υποπερίπτωση Chebyshev:

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2}-x\frac{dT_n(x)}{dx}+n^2T_n(x)=0.$$

(3) Την υποπερίπτωση Legendre:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0.$$

Εδώ θα κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση. Αν στην εξίσωση Gegenbauer ο δείκτης n πάρει την τιμή $l-m$, το πολυώνυμο θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$(1-x^2)\frac{d^2G_{l-m}^m(x)}{dx^2}-(2m+1)x\frac{dG_{l-m}^m(x)}{dx}+n(n+2m+1)G_{l-m}^m(x)=0.$$

Αν αντικαταστήσουμε

$$G_{l-m}^m(x)=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}P_{lm}(x),$$

θα βρούμε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το $P_{lm}(x)$:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_{lm}(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_{lm}(x)}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{lm}(x)=0.$$

Ομως αυτή είναι η συναρτημένη εξίσωση Legendre και τα $P_{lm}(x)$ δεν είναι άλλα από τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre. Δηλαδή, και αυτές οι συναρτήσεις περιλαμβάνονται στις λύσεις των πολυωνυμικών συστημάτων Sturm - Liouville.

8.2 Τύπος του RODRIGUES

Θα δώσουμε έναν τύπο, με τη βοήθεια του οποίου μπορεί κανείς να προσδιορίζει τα ορθογώνια πολυώνυμα στα οποία αναφερθήκαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Λέγεται τύπος του Rodrigues και είναι πολύ γνωστός για τα πολυώνυμα του Legendre. Ισως είναι λιγότερο γνωστό ότι υπάρχει μια εκδοχή του που ισχύει για οποιαδήποτε πολυώνυμα Sturm - Liouville.

Αν η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι η

$$\alpha(x)U_n''(x)+\beta(x)U_n'(x)+\gamma(x)U_n(x)=\lambda_nU_n(x)$$

και $w(x)=\frac{c}{\alpha(x)}\exp\left[\int dx\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση βάρους, τα πολυώνυμα $U_n(x)$ δίνονται από τον τύπο:

$$U_n(x)=K_n\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{[\alpha(x)]^nw(x)\},$$

όπου το K_n είναι μια αυθαίρετη πολλαπλασιαστική σταθερά.

Εξειδικεύουμε τώρα τον τύπο στις περιπτώσεις που έχουμε εξετάσει:

(1) Hermite:

$$H_n(x)=(-1)^n\exp[x^2]\frac{d^n}{dx^n}\{\exp[-x^2]\},$$

(2) Laguerre:

$$L_n^s(x) = K_n x^{-s} \exp[x] \frac{d^n}{dx^n}\{x^{n+s}\exp[-x]\},$$

(3) Jacobi:

$$U_n^{(p,q)}(x) = K_n \frac{1}{(1+x)^p(1-x)^q}\frac{d^n}{dx^n}\{(1+x)^{p+n}(1-x)^{q+n}\}.$$

Η επιλογή της σταθεράς για τα πολυώνυμα Laguerre διαφέρει από συγγραφέα σε συγγραφέα. Για την κάθε μια από τις υποπεριπτώσεις των πολυωνύμων Jacobi η σταθερά επιλέγεται διαφορετικά.

8.3 Εφαρμογές

Τα αρχικά και τα συναρτημένα "πολυώνυμα" Legendre τα έχουμε ήδη συναντήσει. Θα κάνουμε τώρα κάποια σχόλια για τις φυσικές εφαρμογές των πολυωνύμων Hermite και Laguerre.

8.3.1 Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής

Θεωρούμε κβαντικό σωματίδιο με μάζα m που κινείται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με κλασική ιδιοσυχνότητα ω : $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Η εξίσωση του Schrödinger γράφεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \to \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi = 0.$$

Δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $\psi = \exp[-qx^2]u$ με την ελπίδα η εξίσωση για την u να είναι απλούστερη. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 4qx\frac{du}{dx} + \left[\left(4q^2 - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2\right)x^2 + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - 2q\right)\right]u = 0.$$

Επιλέγουμε $q = \frac{m\omega}{2\hbar}$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{m\omega}{\hbar}x\frac{du}{dx} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right)u = 0.$$

Αν τώρα κάνουμε την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής:

$$x = r\xi \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{r}\frac{du}{d\xi} \to \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\xi^2}$$

θα καταλήξουμε στην:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - 2\frac{m\omega}{\hbar}\xi\frac{du}{d\xi} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right)u = 0.$$

Η επιλογή $r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ θα δώσει την εξίσωση:

$$u''(\xi) - 2\xi u'(\xi) + \frac{2}{\hbar\omega}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right)u(\xi) = 0.$$

Σημειώνουμε ότι οι τόνοι συμβολίζουν παραγωγίσεις ως προς ξ. Επίσης αξίζει να επισημάνουμε ότι η μεταβλητή ξ είναι αδιάστατη, αντίθετα προς την x που έχει μονάδες μήκους. Ομως η τελευταία σχέση δεν είναι παρά η εξίσωση του Hermite:

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0,$$

άρα $\frac{2}{\hbar\omega}\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) = 2n \to E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Αποδεικνύεται ότι, για να μην απειρίζεται η λύση σε κάποια όρια, το n που εμφανίζεται στην τελευταία εξίσωση πρέπει να είναι ακέραιος. Από αυτό το χαρακτηριστικό προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας θα είναι διακριτές και ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι:

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\xi)\exp[-qx^2] = N_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right],$$

όπου το N_n είναι μια σταθερά κανονικοποίησης. Επομένως τα πολυώνυμα του Hermite παίζουν ουσιώδη ρόλο στην ανάλυση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.

8.3.2 Ατομο του υδρογόνου

Θεωρούμε την κίνηση του ηλεκτρονίου στο πεδίο Coulomb του πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου, ο οποίος θεωρείται ακίνητος. Σύμφωνα και με όσα έχουμε πει στο κεφάλαιο περί χωρισμού των μεταβλητών, η εξίσωση του Schrödinger, αφού κάνουμε το χωρισμό μεταβλητών και θεωρήσουμε την ακτινική συνιστώσα που αντιστοιχεί σε τροχιακή στροφορμή l είναι η εξής:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}(r^2R')' + V(r)R + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R = ER.$$

Το δυναμικό μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2}{a_0 r},$$

όπου η ποσότητα $a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ λέγεται ακτίνα του Bohr. Επίσης, η ολική ενέργεια E είναι μια αρνητική ποσότητα, αφού αναφερόμαστε σε δέσμιες καταστάσεις. Μια ποσότητα που θα χρησιμοποιηθεί πολύ στη συνέχεια είναι η $\mu^2 \equiv -\frac{2mE}{\hbar^2}$. Με τους συμβολισμούς αυτούς η εξίσωση του Schrödinger γράφεται με τη μορφή

$$(r^2R')' + \frac{2r}{a_0}R - l(l+1)R - \mu^2 r^2 R = 0. \tag{8.1}$$

Εξετάζουμε τις οριακές μορφές της εξίσωσης:

1. Οταν $r \to 0$ η εξίσωση απλοποιείται στην $(r^2R')' - l(l+1)R = 0$ που λύνεται από τις $R = r^l$ και $R = r^{-(l+1)}$. Μόνο η πρώτη λύση είναι ομαλή, άρα φυσικά παραδεκτή, στο $r \to 0$. Αρα $\lim_{r\to 0} R(r) = r^l$.

2. Οταν $r \to \infty$ θα έχουμε την προσεγγιστική εξίσωση $(r^2R')' - \mu^2 r^2 R = 0$. Για να τη λύσουμε αντικαθιστούμε: $R = \frac{f}{r} \to (r^2R')' = rf''$, οπότε η προσεγγιστική εξίσωση γίνεται:

   $$rf'' - \mu^2 rf = 0 \to f'' - \mu^2 f = 0 \to f \sim \exp[\pm\mu r].$$

   Μόνο η λύση $\exp[-\mu r]$ είναι αποδεκτή από φυσική πλευρά, οπότε:

   $$\lim_{r\to\infty} R(r) = \frac{\exp[-\mu r]}{r}.$$

   Μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι, εκτός από την $f(r) = \exp[-\mu r]$, και η $f(r) = g(r)\exp[-\mu r]$ ικανοποιεί την εξίσωση $f(r)$ στο όριο $r \to \infty$, αρκεί οι παράγωγοι της συνάρτησης $g(r)$ να είναι πολύ μικρότερες από την ίδια την $g(r)$ στο ίδιο όριο. Τέτοιες συναρτήσεις είναι τα πολυώνυμα με δυνάμεις του r, που θα εμφανιστούν στη συνέχεια. Το συμπέρασμα από αυτήν την παρατήρηση είναι ότι το ουσιώδες χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς της συνάρτησης στο άπειρο είναι το εκθετικό (όχι το $\frac{1}{r}$).

Οι οριακές μορφές της λύσης υποβάλλουν την ιδέα της αντικατάστασης

$$R(r) = r^l \exp[-\mu r] L(r).$$

Η εξίσωση (8.1) θα μετατραπεί στην:

$$r\frac{d^2L(r)}{dr^2} + [2l + 2 - 2\mu r]\frac{dL(r)}{dr} + \left[\frac{2}{a_0} - 2(l+1)\mu\right] L(r) = 0.$$

Το τελευταίο βήμα θα είναι η αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής:

$$x \equiv 2\mu r \to \frac{dL}{dr} = 2\mu\frac{dL}{dx} \to \frac{d^2L}{dr^2} = (2\mu)^2\frac{d^2L}{dx^2}.$$

Η εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$x\frac{d^2L(x)}{dx^2} + [2l + 2 - x]\frac{dL(x)}{dx} + \left[\frac{1}{\mu a_0} - (l+1)\right] L(x) = 0.$$

Αυτή όμως είναι η (συναρτημένη) εξίσωση του Laguerre:

$$x\frac{d^2L_N^s(x)}{dx^2} + [s + 1 - x]\frac{dL_N^s(x)}{dx} + NL_N^s(x) = 0,$$

εφόσον γίνουν οι ταυτοποιήσεις:

$$N = \frac{1}{\mu a_0} - (l+1), \quad s + 1 = 2l + 2.$$

Και πάλι, αποδεικνύεται ότι, για να αποφευχθούν απειρισμοί στις λύσεις, ο $\frac{1}{\mu a_0} - (l+1)$ πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, άρα και $\frac{1}{\mu a_0} = n$, όπου ο n είναι ακέραιος και δεν είναι άλλος από τον γνωστό μας κύριο κβαντικό αριθμό. Η σχέση $\mu = \frac{1}{na_0}$ συνεπάγεται ότι $\mu^2 \equiv -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{1}{n^2a_0^2} \to E = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}$. Εχουμε λοιπόν αναπαραγάγει τη γνωστή εξάρτηση της ενέργειας από τον κύριο κβαντικό αριθμό. Επί πλέον, οι ταυτοποιήσεις που κάναμε συνεπάγονται τις σχέσεις $s = 2l+1, N = n - l - 1, \mu = \frac{1}{na_0}$. Αρα, η λύση για την ακτινική συνιστώσα όταν η τροχιακή στροφορμή είναι l δίνεται από τη σχέση:

$$R(r) \sim r^l \exp[-\mu r] L_N^s(2\mu r) = r^l \exp\left[-\frac{r}{na_0}\right] \left[L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)\right].$$

Οπως είδαμε, λοιπόν, τα συναρτημένα πολυώνυμα του Laguerre παίζουν πολύ σπουδαίο ρόλο στην εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοτιμών της ενέργειας για το άτομο του υδρογόνου. Ενα από τα συμπεράσματα που μπορεί κανείς να βγάλει είναι ότι το $n - l - 1$ δεν μπορεί να γίνει αρνητικό, επομένως, για δεδομένο n, το l μπορεί να παίρνει τις τιμές απο 0 μέχρι $n - 1$, κατά τα γνωστά.

8.4 Ασκήσεις προς λύση

1. Θεωρήστε το κανονικοποιημένο ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης του υδρογονοειδούς ατόμου:

$$R_{nl}(r) = \left[N^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{Nr}{2}\right] (Nr)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(Nr), \quad N \equiv \frac{2Z}{na_0}.$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή

$$< r >= \int_0^\infty drr^2[rR_{nl}(r)R_{nl}(r)]$$

της απόστασης του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα. Υπόδειξη: Θα φανεί χρήσιμη η αναδρομική σχέση:

$$(2N + s + 1 - x)L_N^s(x) = (N + s)L_{N-1}^s(x) + (N + 1)L_{N+1}^s(x)$$

για τα πολυώνυμα Laguerre.

2. Η κυματοσυνάρτηση του τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ($V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$) μπορεί να γραφτεί σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπως κάναμε για το άτομο του υδρογόνου. Θα εμφανιστούν πάλι οι ιδιοτιμές των σφαιρικών αρμονικών στην ακτινική εξίσωση. Δείξτε ότι, αν γράψετε $R(r) = r^l \exp[-\frac{\beta r^2}{2}]f(r)$, όπου $\beta = \frac{\mu\omega}{\hbar}$, η συνάρτηση $f(r)$ θα ικανοποιεί την συναρτημένη εξίσωση του Laguerre και θα είναι ανάλογη του πολυωνύμου:

$$L_{\frac{1}{2}(n-l-1)}^{l+\frac{1}{2}}(\beta r^2),$$

όπου n κάποιος ακέραιος.

Κεφάλαιο 9

Μη ομογενή προβλήματα

9.1 Εισαγωγή

Εχουμε ήδη περιγράψει μια μέθοδο (του χωρισμού των μεταβλητών) για τη λύση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ). Η μέθοδος έχει τον σοβαρό περιορισμό ότι δεν εφαρμόζεται απ΄ ευθείας σε μη ομογενή προβλήματα. Μεχρι τώρα φροντίσαμε τα προβλήματα που αντιμετωπίσαμε να είναι ομογενή, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά.

Ας ξεκινήσουμε μ΄ έναν ορισμό. Ενα πρόβλημα λέγεται **ομογενές** όταν ισχύει το εξής: αν η συνάρτηση Ψ είναι λύση του προβλήματος, η συνάρτηση $c\Psi$ είναι επίσης λύση (το c είναι μια σταθερά). Ενα παράδειγμα ομογενούς πρόβληματος είναι το εξής: $y''(x) + k^2 y(x) = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$.

Ενα πρόβλημα μπορεί να μην είναι ομογενές βασικά για δύο λόγους:

- Ενδέχεται η διαφορική εξίσωση να έχει "δεύτερο μέλος", δηλαδή να έχει έναν όρο $f(x)$ που είναι ανεξάρτητος από την άγνωστη συνάρτηση. Για παράδειγμα η εξίσωση μπορεί να είναι η: $y''(x) + k^2 y(x) = f(x)$. Είναι προφανές ότι, αν βρούμε κάποια λύση $y(x)$ η $cy(x)$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση. Εν προκειμένω, λοιπόν, η πηγή του προβλήματος είναι η μη ομογενής εξίσωση.
- Ενδέχεται οι οριακές συνθήκες να είναι της μορφής $y(0) = a, y(L) = b$, όπου τουλάχιστον ένα από τα a, b είναι μη μηδενικό. Τότε, ακόμα και αν η εξίσωση είναι ομογενής και έχουμε βρει τη λύση $y(x)$ η $cy(x)$ πάλι δεν λύνει το πρόβλημα, γιατί δεν ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Τώρα η πηγή του προβλήματος είναι οι μη ομογενείς οριακές συνθήκες.

Βέβαια, είναι δυνατόν ένα πρόβλημα να χάσει την ομογένειά του επειδή έχει και τα δύο στοιχεία που αναφέραμε, αλλά μεθοδολογικά βοηθάει να έχει κανείς υπόψη του αυτόν το διαχωρισμό. Οπως θα δούμε, τα δύο προβλήματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Μια μη ομογένεια που οφείλεται π.χ. σε μη ομογενείς οριακές συνθήκες μπορεί να αλλάξει με έναν μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με ομογενείς οριακές συνθήκες αλλά με μη ομογενή όρο στην εξίσωση και αντίστροφα.

Θα εξετάσουμε τη λύση μη ομογενών προβλημάτων που διέπονται είτε από την κυματική εξίσωση είτε από την εξίσωση διάχυσης. Τα μη ομογενή προβλήματα που διέπονται από τις εξισώσεις Laplace, Helmholtz ή τροποποιημένη Helmholtz δεν αντιμετωπίζονται με γενικές μεθόδους, αλλά με διάφορα τεχνάσματα (επί παραδείγματι, μπορεί κανείς να δει στο πρώτο κεφάλαιο το μη ομογενές πρόβλημα με την κατανομή θερμοκρασίας σε ορθογώνια πλάκα.)

9.2 Εξίσωση διάχυσης

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\psi_{xx}(x,t) - \kappa\psi_t(x,t) = f(x,t), \psi(x,t=0) = g(x),$$
$$\alpha_1\psi_x(0,t) + \beta_1\psi(0,t) = n_1(t), \alpha_2\psi_x(L,t) + \beta_2\psi(L,t) = n_2(t). \tag{9.1}$$

Εχουμε, δηλαδή, περιοριστεί σ΄ ένα πρόβλημα σε μια μόνο χωρική διάσταση, με μη ομογενείς οριακές συνθήκες στα σημεία $x = 0$ και $x = L$ και με μη ομογενή αρχική συνθήκη (στο $t = 0$). Εξ άλλου, η ίδια η εξίσωση είναι μη ομογενής, αφού έχει "δεύτερο μέλος", την συνάρτηση $f(x,t)$.

Η ιδέα για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι να βρούμε έναν τρόπο να μετατρέψουμε τις μη ομογενείς (χωρικές) οριακές συνθήκες σε ομογενείς. Ο λόγος που επιδιώκουμε ομογενείς οριακές συνθήκες στο χώρο είναι ότι επιτρέπουν να λύσουμε μ΄ έναν σχετικά απλό τρόπο το πρόβλημα ιδιοτιμών που θα προκύψει. Ο μετασχηματισμός που μπορεί να κάνει αυτό το πράγμα είναι ο εξής:

$$\psi(x,t) = y(x,t) + w(x,t).$$

Δηλαδή η άγνωστη συνάρτηση $\psi(x,t)$ γράφεται με τη μορφή αθροίσματος μιας νέας άγνωστης συνάρτησης $y(x,t)$ και μιας συνάρτησης $w(x,t)$ που θα επιλεγεί με το μοναδικό κριτήριο να δημιουργήσουμε ομογενείς οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, αν αντικαταστήσουμε την $\psi(x,t)$ με το ίσο της στις δύο οριακές συνθήκες, θα βρούμε τις οριακές συνθήκες που θα ικανοποιεί η νέα άγνωστη συνάρτηση:

$$\alpha_1 y_x(0,t) + \beta_1 y(0,t) = n_1(t) - \alpha_1 w_x(0,t) - \beta_1 w(0,t),$$

$$\alpha_2 y_x(L,t) + \beta_2 y(L,t) = n_2(t) - \alpha_2 w_x(L,t) - \beta_2 w(L,t).$$

Απαιτούμε αυτές οι οριακές συνθήκες να γίνουν ομογενείς, δηλαδή τα δεξιά μέλη να μηδενιστούν, επιλέγοντας κατάλληλα την $w(x,t)$:

$$\alpha_1 w_x(0,t) + \beta_1 w(0,t) = n_1(t),$$
$$\alpha_2 w_x(L,t) + \beta_2 w(L,t) = n_2(t).$$

Θέτουμε

$$w(x,t) = w_1(x)n_1(t) + w_2(x)n_2(t)$$

και οι προηγούμενες συνθήκες γράφονται:

$$\alpha_1[w_1'(x)|_{x=0}n_1(t) + w_2'(x)|_{x=0}n_2(t)] + \beta_1[w_1(x)|_{x=0}n_1(t) + w_2(x)|_{x=0}n_2(t)] = n_1(t),$$
$$\alpha_2[w_1'(x)|_{x=L}n_1(t) + w_2'(x)|_{x=L}n_2(t)] + \beta_2[w_1(x)|_{x=L}n_1(t) + w_2(x)|_{x=L}n_2(t)] = n_2(t).$$

Στις εκφράσεις αυτές οι συντελεστές των $n_1(t)$ και $n_2(t)$ πρέπει να μηδενίζονται, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\alpha_1 w_1'(x)|_{x=0} + \beta_1 w_1(x)|_{x=0} = 1,$$
$$\alpha_1 w_2'(x)|_{x=0} + \beta_1 w_2(x)|_{x=0} = 0,$$
$$\alpha_2 w_1'(x)|_{x=L} + \beta_2 w_1(x)|_{x=L} = 0,$$

$$\alpha_2 w_2'(x)|_{x=L} + \beta_2 w_2(x)|_{x=L} = 1.$$

Η ακριβής μορφή των $w_1(x), w_2(x)$ εξαρτάται από τις τιμές των σταθερών $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Ομως μπορεί να δει κανείς ότι αυτές οι συναρτήσεις δε χρειάζεται να είναι κάτι πιο περίπλοκο από πολυώνυμα δεύτερου βαθμού. Αν γράψουμε $w_k(x) = c_{k2}x^2 + c_{k1}x + c_{k0}, k = 1, 2$ και αντικαταστήσουμε, θα προκύψει ένα σύστημα αρκετά εύκολο στη λύση του. Στις πιο πολλές περιπτώσεις, πάντως, δε χρειάζεται κανείς να κάνει τόση προσπάθεια. Είναι δυνατόν να μαντέψει μια λύση απ΄ ευθείας. Η λύση πάντως δεν είναι μοναδική.

Εχοντας προσδιορίσει τις $w_1(x), w_2(x)$, άρα και την $w(x,t)$, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η $y(x,t)$, απλά, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (9.1) την $\psi(x,t)$ με το ίσο της:

$$y_{xx}(x,t) - \kappa y_t(x,t) = f(x,t) - [w_{xx}(x,t) - \kappa w_t(x,t)] \equiv F(x,t).$$

Εξ άλλου, η αρχική συνθήκη για την $\psi(x,t)$ θα μετατραπεί σε αρχική συνθήκη για την $y(x,t)$:

$$y(x,0) = g(x) - w(x,0) \equiv G(x).$$

Δηλαδή το αρχικό πρόβλημα για την $\psi(x,t)$ έχει μετατραπεί στο ακόλουθο πρόβλημα για την $y(x,t)$:

$$\begin{gathered} y_{xx}(x,t) - \kappa y_t(x,t) = F(x,t), \\ \alpha_1 y_x(0,t) + \beta_1 y(0,t) = 0, \quad \alpha_2 y_x(L,t) + \beta_2 y(L,t) = 0, \\ y(x,0) = G(x). \end{gathered} \tag{9.2}$$

Μετά από αυτό το πρώτο στάδιο, θεωρούμε ένα βοηθητικό πρόβλημα συνοριακών τιμών "εμπνευσμένο" από το (9.2):

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(L) + \beta_2 X(L) = 0 \tag{9.3}$$

Το πρόβλημα αυτό είναι γενικά απλό στη λύση του. Εστω ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του λ_n και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$. Το επόμενο βήμα είναι να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις που έχουν απομείνει στη βάση των $X_n(x)$:

$$F(x,t) = \sum_n f_n(t) X_n(x), \quad y(x,t) = \sum_n y_n(t) X_n(x), \quad G(x) = \sum_n g_n X_n(x).$$

Αντικατάσταση αυτών των αναπτυγμάτων στο πρόβλημα (9.2) δίνει τις σχέσεις:

$$\sum_n y_n(t) X_n'' - \kappa \sum_n y_n'(t) X_n(x) = \sum_n f_n(t) X_n(x),$$

$$\sum_n y_n(t)|_{t=0} X_n(x) = \sum_n g_n X_n(x).$$

Οι ομογενείς χωρικές οριακές συνθήκες έχουν ικανοποιηθεί αυτόματα, αφού τις ικανοποιούν τα $X_n(x)$. Επειδή τα $X_n(x)$ συναποτελούν ένα σύνολο ανεξάρτητων ορθογώνιων διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων, μπορούμε να συμπεράνουμε, χρησιμοποιώντας και τη σχέση:

$$X_n''(x) = -\lambda_n X_n(x),$$

ότι πρέπει:

$$\lambda_n y_n(t) + \kappa y_n'(t) = -f_n(t),$$

$$y_n(t)|_{t=0} = g_n.$$

Δηλαδή, όπως βλέπουμε, διαλέγοντας τα $X_n(x)$ κατάλληλα, έχουμε κατορθώσει να ικανοποιήσουμε τις (ομογενείς, πια) οριακές συνθήκες και μένει μόνο μια απλή γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο μαζί με την αρχική συνθήκη που χρειάζεται. Βρίσκοντας τα $y_n(t)$ έχουμε πιά λύσει και το αρχικό μη ομογενές πρόβλημα.

9.3 Κυματική Εξίσωση

Πάνω στα ίδια ακριβώς βήματα θα επιλύσουμε ένα μη ομογενές κυματικό πρόβλημα, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$\psi_{xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}\psi_{tt}(x,t) = f(x,t), \quad \psi(x,t)|_{t=0} = g(x), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x),$$
$$\alpha_1\psi_x(0,t) + \beta_1\psi(0,t) = n_1(t), \quad \alpha_2\psi_x(L,t) + \beta_2\psi(L,t) = n_2(t). \tag{9.4}$$

Εχουμε δηλαδή ένα πρόβλημα εντελώς αντίστοιχο με το προηγούμενο. Η μόνη διαφορά είναι ότι έχουμε στην εξίσωση δεύτερη χρονική παράγωγο αντί για πρώτη και την απαραίτητη πρόσθετη αρχική συνθήκη (που από φυσική άποψη αντιστοιχεί στην αρχική ταχύτητα).

Το πρώτο βήμα, για την μετατροπή των μη ομογενών οριακών συνθηκών σε ομογενείς είναι ακριβώς το ίδιο, όπως προηγουμένως, χωρίς καμμιά απολύτως αλλαγή. ($\psi(x,t) = y(x,t) + w(x,t)$ κλπ.) Εχοντας προσδιορίσει την $w(x,t)$, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η $y(x,t)$ απλά αντικαθιστώντας στην εξίσωση (9.4) την $\psi(x,t)$ με το ίσο της:

$$y_{xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}y_{tt}(x,t) = f(x,t) - \left[w_{xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}w_{tt}(x,t)\right] \equiv F(x,t).$$

Εξ άλλου οι αρχικές συνθήκες για την $\psi(x,t)$ θα μετατραπούν σε αρχικές συνθήκες για την $y(x,t)$:

$$y(x,0) = g(x) - w(x,0) \equiv G(x), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x) - \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv H(x).$$

Το βοηθητικό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι το ίδιο, όπως προηγουμένως:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \alpha_2 X'(L) + \beta_2 X(L) = 0, \tag{9.5}$$

και δίνει τα ίδια λ_n και $X_n(x)$. Προχωρώντας στις αναπτύξεις

$$F(x,t) = \sum_n f_n(t)X_n(x), \quad y(x,t) = \sum_n y_n(t)X_n(x)$$

$$G(x) = \sum_n g_n X_n(x), \quad H(x) = \sum_n h_n X_n(x)$$

βρίσκουμε:

$$\lambda_n y_n(t) + \frac{1}{c^2}y_n''(t) = -f_n(t),$$
$$y_n(t)|_{t=0} = g_n, \quad y_n'(t)|_{t=0} = h_n.$$

Η διαφορική εξίσωση έγινε δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο και απέκτησε άλλη μια αρχική συνθήκη, κατά τ΄ άλλα όμως το πρόβλημα δεν άλλαξε ουσιαστικά.

9.4 Χορδή με εξαναγκασμένη κίνηση

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα της μεθόδου που αναπτύξαμε. Θεωρούμε χορδή μήκους L της οποίας το ένα άκρο (έστω το άκρο στο $x = L$) είναι στερεωμένο σ′ έναν τοίχο, ενώ αναγκάζουμε με το χέρι μας το άλλο της άκρο (στο $x = 0$) να εκτελεί μια ημιτονική κίνηση με πλάτος A και συχνότητα ω. Εστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η χορδή έχει σχήμα που περιγράφεται από την απομάκρυνση $B\sin\frac{\pi x}{L}$ και αρχική ταχύτητα μηδέν. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την απομάκρυνση κάθε σημείου της χορδής σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\psi_{xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}\psi_{tt}(x,t) = 0,$$

$$\psi(0,t) = A\sin\omega t, \quad \psi(L,t) = 0,$$

$$\psi(x,t)|_{t=0} = B\sin\frac{\pi x}{L}, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{9.6}$$

Συγκρίνοντάς το με το γενικό πρόβλημα (9.4), διαπιστώνουμε ότι είναι αρκετά απλούστερο, γιατί διάφορες συναρτήσεις και συντελεστές έχουν επιλεγεί ίσοι με το μηδέν. Βλέπουμε αμέσως ότι έχουμε μια μη ομογενή οριακή συνθήκη: την $\psi(0,t) = A\sin\omega t$. Ψάχνουμε για μια $w(x,t)$, τέτοια ώστε η αντίστοιχη $y(x,t) \equiv \psi(x,t) - w(x,t)$ να έχει ομογενείς οριακές συνθήκες. Μια κατάλληλη τέτοια συνάρτηση είναι η $w(x,t) = A(1-\frac{x}{L})\sin\omega t$, άρα $y(x,t) = \psi(x,t) - A(1-\frac{x}{L})\sin\omega t$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι οριακές συνθήκες για την συνάρτηση $y(x,t)$ είναι ομογενείς: $y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0$. Η κυματική εξίσωση (που ήταν ομογενής για την $\psi(x,t)$) αποκτά δεύτερο μέλος για την $y(x,t)$:

$$y_{xx}(x,t) - \frac{1}{c^2}y_{tt}(x,t) = -\frac{\omega^2}{c^2}A\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\omega t \equiv F(x,t). \tag{9.7}$$

Οι αρχικές συνθήκες γράφονται:

$$y(x,t)|_{t=0} = B\sin\frac{\pi x}{L} \equiv G(x), \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = -\omega A\left(1-\frac{x}{L}\right) \equiv H(x)$$

και οι οριακές συνθήκες:

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0.$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι:

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad X_n(0) = 0, \quad X_n(L) = 0,$$

απ′ όπου βλέπουμε εύκολα ότι

$$X_n(x) \sim \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Προχωρούμε στην ανάπτυξη:

$$F(x,t) \equiv -\frac{\omega^2}{c^2}A\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\omega t = \sum_n f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{9.8}$$

$$y(x,t) = \sum_n y_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{9.9}$$

$$y(x,0) = \sum_n y_n(t)|_{t=0} \sin\frac{n\pi x}{L} = G(x) = B\sin\frac{\pi x}{L} = \sum_n g_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{9.10}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_n y_n'(t)|_{t=0} \sin\frac{n\pi x}{L} = H(x) = -\omega A\left(1-\frac{x}{L}\right) = \sum_n h_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9.11}$$

Παρατηρούμε ότι για το παρόν πρόβλημα ισχύει ότι $F(x,t) = \frac{\omega}{c^2}H(x)\sin\omega t$ και αυτό συνεπάγεται ότι $f_n = \frac{\omega}{c^2}h_n \sin\omega t$, άρα:

$$F(x,t) = \sum_n \frac{\omega}{c^2} h_n X_n(x)\sin\omega t.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (9.7) βρίσκουμε:

$$-\lambda_n y_n(t) - \frac{1}{c^2}y_n''(t) = \frac{\omega}{c^2}h_n\sin\omega t.$$

Εξ άλλου οι (9.10) και (9.11) δίνουν:

$$y_n(t)|_{t=0} = g_n, \quad y_n'(t)|_{t=0} = h_n.$$

Η τελική μορφή της εξίσωσης είναι:

$$y_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 y_n(t) = -\omega h_n \sin\omega t. \tag{9.12}$$

Η λύση της εξίσωσης (9.12) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας ειδικής λύσης της πλήρους. Προχωρούμε στην εύρεση της ειδικής λύσης: αντικαθιστώντας στη θέση της άγνωστης συνάρτησης την δοκιμαστική λύση $M_n\sin\omega t$ βρίσκουμε μια αλγεβρική εξίσωση ως προς M_n, της οποίας η λύση είναι: $M_n = \frac{\omega h_n}{\omega^2-(\frac{n\pi c}{L})^2}$. (Σημειώνουμε εδώ ότι η περίπτωση το ω να ισούται με $\frac{n\pi c}{L}$ για κάποιο n απαιτεί ιδιαίτερη αντιμετώπιση και θα εξεταστεί χωριστά στο τέλος). Αρα, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης (9.12) είναι τελικά η ακόλουθη:

$$y_n(t) = c_{1n}\cos\frac{n\pi ct}{L} + c_{2n}\sin\frac{n\pi ct}{L} + \frac{\omega h_n}{\omega^2 - (\frac{n\pi c}{L})^2}\sin\omega t.$$

Η εξίσωση $y_n(t)|_{t=0} = g_n$ συνεπάγεται τη σχέση $c_{1n} = g_n$. Εξ άλλου, η εξίσωση $y_n'(t)|_{t=0} = h_n$ συνεπάγεται τη σχέση $c_{2n} = \frac{L}{n\pi c}\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega^2-(\frac{n\pi c}{L})^2}\right]h_n$. Οι συντελεστές g_n και h_n μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις (9.10) και (9.11):

$$g_n = B\delta_{n1},$$

$$h_n = -\frac{2\omega A}{L}\int_0^L dx\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} = -\frac{2\omega A}{n\pi}.$$

Συνεπώς οι συντελεστές c_{1n} και c_{2n} δίνονται από τις εκφράσεις:

$$c_{1n} = B\delta_{n1},$$

$$c_{2n} = -\frac{2L\omega A}{\pi^2 n^2 c}\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega^2-(\frac{n\pi c}{L})^2}\right],$$

και η συνάρτηση $y(x,t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,t) = B\cos\frac{\pi ct}{L}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{2\omega AL}{\pi^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{1}{1-(\frac{n\pi c}{\omega L})^2}\right]\sin\frac{n\pi ct}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$-\frac{2A}{\pi}\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-(\frac{n\pi c}{\omega L})^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Η συνάρτηση $\psi(x,t)$ ισούται τελικά με:

$$\psi(x,t) = y(x,t) + A(1-\frac{x}{L})\sin\omega t.$$

Παρατηρούμε ότι στη λύση μας εμφανίζονται παρονομαστές, που μηδενίζονται αν συμβεί το ω να ισούται με $\frac{n\pi c}{L}$. Πρόκειται για μια ακόμα εμφάνιση του φαινομένου του συντονισμού. Σ΄ αυτήν την περίπτωση η ειδική λύση της εξίσωσης (9.12) αποδεικνύεται ότι είναι η συνάρτηση $-\frac{h_n}{2}t\cos\omega t$, και οι συντελεστές c_{1n} και c_{2n} προκύπτουν μετά από πράξεις παραπλήσιες με τις προηγούμενες: $c_{1n} = g_n$ και $c_{2n} = \frac{3Lh_n}{2n\pi c}$.

9.5 Ασκήσεις προς λύση

1. Να λυθεί η εξίσωση
$$\Psi_{tt} = v^2\Psi_{xx} + \frac{v^2\pi}{L}sin(\frac{2v\pi t}{L})$$
αν υπόκειται στις αρχικές και οριακές συνθήκες: $\Psi_x(0,t) = 0, \Psi_x(L,t) = 0,\ \Psi(x,0) = 0, \Psi_t(x,0) = 2v\cos(\frac{2\pi x}{L})$. Το σύστημα περιγράφει μια χορδή που εκτείνεται από το 0 ως το L με εξωτερική διέγερση και δοσμένη αρχική ταχύτητα και απομάκρυνση.

2. Να λυθεί η εξίσωση:
$$x^2\psi'' + x\psi' - \psi = \left(\frac{x}{L}\right)^2 sin\left(\frac{x}{L}\right)$$
αν η $\psi(x)$ υπόκειται στις συνθήκες: $\psi(2\pi L) = 2\pi, \psi'(2\pi L) = 0$. Υπόδειξη: Μέθοδος "μεταβολής των σταθερών" του Lagrange.

3. Να λυθεί η εξίσωση $\psi'' + \lambda\psi = x$ με τις συνθήκες $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Υπάρχει πάντοτε λύση; Υπόδειξη: Λύστε πρώτα το ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών. Μια αναλογία με τα γραμμικά αλγεβρικά συστήματα και την ύπαρξη λύσης γι΄ αυτά (σε συσχέτιση με τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος) είναι διαφωτιστική.

4. Εστω ότι κατά τη λύση της χορδής με εξαναγκασμένη κίνηση διαλέγει κανείς $w(x,t) = A\left(1-(\frac{x}{L})^2\right)\sin\omega t$ αντί για την επιλογή $w(x,t) = A(1-\frac{x}{L})\sin\omega t$ που έγινε στην αντίστοιχη παράγραφο. Να επαληθευτεί ότι αυτή η επιλογή είναι εξ ίσου καλή και να λυθεί από την αρχή το παράδειγμα ξεκινώντας από αυτήν την $w(x,t)$.

Κεφάλαιο 10

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α΄

Διανυσματικοί τελεστές σε διάφορες συντεταγμένες

Σε ό,τι ακολουθεί, το $\psi(\vec{r})$ παριστάνει μια βαθμωτή συνάρτηση, ενώ η $\vec{A}(\vec{r})$ μια διανυσματική συνάρτηση, η οποία αναπτύσσεται σε συνιστώσες ως εξής:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi} = A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{z},$$

για ορθογώνιες, σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες αντίστοιχα. Με "καπελλάκι" συμβολίζονται τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των διαφόρων συντεταγμένων.

Α΄.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Α΄.2 Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \hat{\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] +$$

$$+\hat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right],$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}.$$

Α΄.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}\psi=\hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\hat{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\hat{\phi}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]+\hat{\phi}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]+\hat{z}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right],$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Σημαντική ταυτότητα:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi).$$

Παράρτημα Β΄

Συνάρτηση δέλτα

Η συνάρτηση δέλτα συνήθως ορίζεται με τις σχέσεις:

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad x \neq x_0,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0),$$

όπου x_0 είναι ένα σταθερό σημείο του άξονα των x και $f(x)$ μια τυχαία συνάρτηση. Μια ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση $f(x) = 1$, οπότε το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1.$$

Η διαισθητική εικόνα είναι ότι πρόκειται για μια συνάρτηση που είναι μηδέν παντού, εκτός από το σημείο x_0, όπου η τιμή της είναι άπειρη, ώστε να μπορέσει το ολοκλήρωμα να πάρει την τιμή $f(x_0)$.

Είναι εμφανείς οι λογικές αδυναμίες αυτού του πρώτου ορισμού. Μια καλύτερη προσέγγιση είναι να κατασκευάσει κανείς μια ακολουθία συναρτήσεων, της οποίας το όριο να αναπαράγει με κάποιον τρόπο τις ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα. Η ακριβής μορφή των συναρτήσεων δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Η ιδέα είναι να θεωρήσει κανείς μια πρώτη συνάρτηση $\delta_1(x)$, η οποία είναι σχετικά εντοπισμένη περί το $x = 0$ και έχει κατάλληλες τιμές, ώστε $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_1(x) = 1$. Οι επόμενες συναρτήσεις ($\delta_n(x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$) πρέπει να είναι όλο και πιο εντοπισμένες περί το μηδέν, αλλά να παίρνουν όλο και πιο μεγάλες τιμές, ώστε το ολοκλήρωμα να είναι μονάδα, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι οι μή μηδενικές τιμές εκτείνονται σε όλο και μικρότερο διάστημα. Διαισθητικά, προσπαθούμε να έχουμε συναρτήσεις με όλο και μικρότερο "πλάτος" και όλο και μεγαλύτερο "ύψος", που να περικλείουν το ίδιο πάντα εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική τους παράσταση και τον άξονα των x. Περιμένει κανείς ότι η οριακή συνάρτηση θα είναι μηδέν σχεδόν παντού και θα έχει ολοκλήρωμα μονάδα, δηλαδή θα είναι η συνάρτηση δέλτα:

$$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(x).$$

(Περιοριζόμαστε για λόγους απλότητας στην περίπτωση $x_0 = 0$, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα).

Εχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες τέτοιες συναρτήσεις. Δίνουμε μερικά παραδείγματα:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} dk \exp[ikx]$$

Δεν έχουμε ακόμη κάνει κάποιο ουσιαστικό βήμα, γιατί το όριο $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)$ δεν υπάρχει για καμμιά από αυτές τις συναρτήσεις (ή άλλες παρόμοιες). Εκείνο που κάνουμε είναι ότι θεωρούμε τις $\delta_n(x)$ ως μια ακολουθία κανονικοποιημένων συναρτήσεων (με την έννοια ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta_n(x) = 1$) και, αντί να εξετάσουμε το προβληματικό όριο των $\delta_n(x)$, συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στο όριο των ολοκληρωμάτων

$$M_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta_n(x).$$

Αποδεικνύεται ότι πράγματι:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = f(0).$$

Αυτή η πορεία δεν έχει μαθηματικά προβλήματα. Η διαφορά από την προηγούμενη προσέγγιση είναι ότι δεν χρειάζεται να θεωρήσει κανείς το εξωτικό αντικείμενο που λέγεται όριο της σειράς των $\delta_n(x)$. Θα το εκφράσουμε κάπως διαφορετικά. Προηγουμένως ισχυριζόμαστε ότι:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\left[\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)\right],$$

ενώ τώρα ότι:

$$f(0) = \lim_{n\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta_n(x)\right].$$

Η διαφορά είναι ότι η πρώτη εξίσωση προϋποθέτει ένα αντικείμενο (το όριο) που δεν υπάρχει, ενώ η δεύτερη δεν έχει τέτοιες απαιτήσεις. Τώρα που έχουμε και τις δύο εκφράσεις μαζί μπορούμε να δούμε πιο καθαρά την αρχή του προβλήματος. Η δεύτερη έκφραση μπορεί να παραχθεί από την πρώτη εναλλάσσοντας τις διαδικασίες του ορίου και της ολοκλήρωσης. Εδώ ακριβώς βρίσκεται το λεπτό σημείο: αυτές οι δύο πράξεις δεν μετατίθενται.

Οταν λοιπόν μιλάμε για την συνάρτηση δέλτα, πρέπει να έχουμε υπόψη όλη τη διαδικασία των ορίων που αναπτύξαμε. Παρ΄ όλ΄ αυτά, φορμαλιστικά μπορεί κανείς να χειρίζεται τη συνάρτηση δέλτα σαν μια συνηθισμένη συνάρτηση. Παραθέτουμε μερικές ιδιότητές της:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ikx],$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta'(-x) = -\delta'(x), \quad x\delta(x) = 0, \quad x\delta'(x) = -\delta(x),$$

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}.$$

Στην τελευταία σχέση η άθροιση γίνεται στις ρίζες x_k της $f(x): \quad f(x_k) = 0$.

Η συνάρτηση δέλτα έχει μέχρι τώρα οριστεί σε μια διάσταση, την x. Η γενίκευση σε δύο ή τρεις διαστάσεις είναι πολύ απλή:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

σε ορθογώνιες συντεταγμένες.

Ενα σημαντικό χαρακτηριστικό που όμως δεν αναφέρεται σχεδόν ποτέ είναι ότι, από τη σκοπιά του Φυσικού, η συνάρτηση δέλτα έχει μονάδες. Για μονοδιάστατο χώρο το διαφορικό dx στο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x-x_0) = 1$ έχει μονάδες μήκους οπότε η συνάρτηση δέλτα πρέπει να έχει μονάδες αντίστροφου μήκους, ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι ο αδιάστατος αριθμός 1. Για χώρο N διαστάσεων η συνάρτηση δέλτα έχει μονάδες $\frac{1}{L^N}$, όπου με L συμβολίζουμε κάποια μονάδα μήκους.

Β΄.1 Συνάρτηση δέλτα σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Η συνάρτηση δέλτα είναι ιδιαίτερα απλή σε ορθογώνιες συντεταγμένες. Ομως, πολύ συχνά, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε περιγράφεται καλύτερα σε σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες. Για να βρούμε την έκφραση της δέλτα στις συντεταγμένες αυτές, θα ξεκινήσουμε από τις ορθογώνιες συντεταγμένες και θα επικαλεσθούμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού του στοιχείου όγκου κατά την αλλαγή συντεταγμένων. Για έναν μονοδιάστατο χώρο ο μετασχηματισμός από το x στο $x' = f(x)$ συνεπάγεται την μετατροπή του μονοδιάστατου στοιχείου "όγκου" dx στο dx', όπου $dx = \frac{dx}{dx'}dx' \equiv Jdx'$. Συμβολίσαμε την παράγωγο με J, επειδή είναι μια στοιχειώδης μορφή αυτού που λέγεται Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Πράγματι, στην περίπτωση του τριδιάστατου χώρου η απλή σχέση που είδαμε θα μετατραπεί στην:

$$dxdydz = Jdx'dy'dz',$$

αν ο μετασχηματισμός είναι:

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z').$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας (του οποίου η απόλυτη τιμή της ορίζουσας είναι το $J : J = |det(M)|$) ορίζεται ως:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix}$$

Οσο για την συνάρτηση δέλτα, υπενθυμίζουμε ότι η βασική σχέση ορισμού της είναι η

$$\int d^3r\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \int d^3r'\delta(\vec{r'} - \vec{r'_0}) = 1.$$

Περιμένουμε ότι η συνάρτηση δέλτα σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες θα είναι ανάλογη με το γινόμενο $\delta(x'-x'_0)\delta(y'-y'_0)\delta(z'-z'_0)$ επί κάποια προσδιοριστέα συνάρτηση $D(x'_0, y'_0, z'_0)$. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $[\vec{r} \rightarrow (x, y, z), \quad \vec{r_0} \rightarrow (x_0, y_0, z_0)]$ για τις ορθογώνιες συντεταγμένες και $[\vec{r'} \rightarrow (x', y', z'), \quad \vec{r'_0} \rightarrow (x'_0, y'_0, z'_0)]$ για τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Αντικαθιστώντας το στοιχείο όγκου και τη συνάρτηση δέλτα με τα ίσα τους βρίσκουμε:

$$1 = \int dxdydz\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) =$$

$$= \int dx'dy'dz'J(x', y', z')D(x'_0, y'_0, z'_0)\delta(x'-x'_0)\delta(y'-y'_0)\delta(z'-z'_0) =$$

$$= J(x'_0, y'_0, z'_0)D(x'_0, y'_0, z'_0).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση:

$$D(x_0', y_0', z_0') = \frac{1}{J(x_0', y_0', z_0')},$$

συνεπώς:

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0') = \frac{1}{J(x_0', y_0', z_0')}\delta(x' - x_0')\delta(y' - y_0')\delta(z' - z_0').$$

Συνοπτικά δηλαδή, το στοιχείο όγκου μετασχηματίζεται με την Ιακωβιανή και η συνάρτηση δέλτα με το αντίστροφο της Ιακωβιανής, ώστε στο γινόμενο αυτοί οι πρόσθετοι παράγοντες να απλοποιούνται και το αποτέλεσμα να είναι πάλι η μονάδα.

Οι εκφράσεις των ορθογώνιων συντεταγμένων συναρτήσει των σφαιρικών έχουν ως εξής:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

οπότε η Ιακωβιανή μετά τις πράξεις ισούται με

$$J = r^2\sin\theta,$$

το στοιχείο όγκου μετατρέπεται στο:

$$r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

και η συνάρτηση δέλτα γράφεται:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0).$$

Σχετικά με τις μονάδες, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\delta(\theta - \theta_0)$ και $\delta(\phi - \phi_0)$ είναι αδιάστατες, ενώ η $\delta(r - r_0)$ έχει μονάδες αντίστροφου μήκους. Αρα, το γινόμενο των δέλτα μαζί με τον παράγοντα $\frac{1}{r^2\sin\theta}$ έχει τελικά διαστάσεις αντίστροφου μήκους στον κύβο, όπως θα έπρεπε, αφού κινούμαστε στις τρεις διαστάσεις. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι, σύμφωνα με τη σχέση $\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}$, που αναφέραμε παραπάνω, μπορεί να αποδειχθεί ότι $\delta(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{\sin\theta_0}$, οπότε η προηγούμενη σχέση για την δέλτα μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$\frac{1}{r^2}\delta(r - r_0)\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\phi - \phi_0).$$

Οι εκφράσεις των ορθογώνιων συντεταγμένων συναρτήσει των κυλινδρικών συντεταγμένων έχουν ως εξής:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z,$$

οπότε η Ιακωβιανή μετά τις πράξεις ισούται με

$$J = \rho,$$

το στοιχείο όγκου μετατρέπεται στο:

$$\rho d\rho d\phi dz$$

και η συνάρτηση δέλτα γράφεται:

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0).$$

Αν παραβλέφει κανείς τη συντεταγμένη z, που δεν αλλάζει από τις ορθογώνιες στις κυλινδρικές συντεταγμένες, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι στις <u>δύο διαστάσεις</u> το στοιχείο όγκου στις πολικές συντεταγμένες είναι

$$\rho d\rho d\phi$$

και η συνάρτηση δέλτα γράφεται:

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0).$$

Παράρτημα Γ′

Συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα

Γ′.1 Συνάρτηση Γάμμα

Ο ορισμός της συνάρτησης Γάμμα κατά τον Euler έχει ως εξής:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty dt \exp[-t] t^{z-1}.$$

Από τον ορισμό εξυπακούεται ότι το πραγματικό μέρος του z είναι θετικό. Μπορεί κανείς εύκολα με παραγοντικές ολοκληρώσεις να δείξει ότι:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1).$$

Η απευθείας ολοκλήρωση δίνει $\Gamma(1) = 1$, οπότε $\Gamma(2) = (2-1)\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = (3-1)\Gamma(3-1) = 2, \ldots$ και γενικά, για φυσικούς αριθμούς n :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Η συνάρτηση Γάμμα συνδέεται λοιπόν στενά με το παραγοντικό. Ομως το όρισμα της συνάρτησης Γάμμα δεν είναι υποχρεωτικά ακέραιος, οπότε η $\Gamma(z)$ δίνει μια γενίκευση του παραγοντικού για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Για την επέκταση σε αρνητικά ορίσματα ξεκινάμε από τη σχέση:

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}.$$

Βέβαια, η σχέση έχει αποδειχθεί μόνο για $z > 1$ και δεν ισχύει για τις μικρότερες τιμές. Απλά την θεωρούμε δεδομένη και ορίζουμε τη συνάρτηση για αρνητικά ορίσματα με βάση τη σχέση αυτή. Η συνάρτηση $\Gamma(z)$ έχει απλούς πόλους στους αρνητικούς ακεραίους. Μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητά της είναι η προσέγγιση του Stirling:

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z+\frac{1}{2}} \exp[-z].$$

Ενας ενδιαφέρων εναλλακτικός ορισμός προκύπτει από τον αρχικό, με την αλλαγή μεταβλητής $t = y^2 \to dt = 2y dy$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty dy \exp[-y^2] y^{2z-1}.$$

Για $z = \frac{1}{2}$ από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Ξεκινώντας από την τελευταία σχέση μπορούμε να βρούμε το παραγοντικό αριθμών της μορφής $n + \frac{1}{2}$, όπου ο n είναι ακέραιος.

Γ΄.2 Συνάρτηση Βήτα

Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται με τη σχέση:

$$B(m,n) = B(n,m) \equiv \int_0^1 ds s^{m-1}(1-s)^{n-1}.$$

Η αλλαγή μεταβλητών $s = \sin^2\theta$ συνεπάγεται ότι:

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta.$$

Η συνάρτηση Βήτα μπορεί να εκφραστεί με γινόμενα των Γάμμα. Πράγματι:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty du \exp[-u]u^{m-1} \int_0^\infty dv \exp[-v]v^{n-1}.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής: $u = xs, \quad v = x(1-s)$ (με Ιακωβιανή $J = x$) η παράσταση γίνεται:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty dx \int_0^1 dsx \exp[-xs]x^{m-1}s^{m-1}\exp[-x(1-s)]x^{n-1}(1-s)^{n-1} =$$

$$= \int_0^\infty dx \exp[-x]x^{m+n-1}\int_0^1 ds s^{m-1}(1-s)^{n-1}.$$

Ομως, εξ ορισμού, η πρώτη παράσταση ισούται με $\Gamma(m+n)$, ενώ η δεύτερη με $B(m,n)$. Δηλαδή: $\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)B(m,n)$, οπότε:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Παράρτημα Δ΄

Πίνακας μετασχηματισμών LAPLACE

Δ΄.1 Μετασχηματισμοί LAPLACE

Δίνουμε στη συνέχεια μερικά από τα πιο χρήσιμα ζευγάρια μετασχηματισμών Laplace. Αριστερά είναι ο μετασχηματισμός και δεξιά η αρχική συνάρτηση.

$\mathcal{L}_s[f] \equiv \tilde{f}(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(s-c)^m}$	$\frac{t^{m-1}\exp[ct]}{(m-1)!}$
$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin bt$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
$\frac{1}{s\sqrt{s+c}}$	$\frac{erf(\sqrt{ct})}{\sqrt{c}}$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+\omega^2}}$	$J_0(\omega t)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$	$I_0(\omega t)$
$\frac{(\sqrt{s^2+\omega^2}-s)^m}{\sqrt{s^2+\omega^2}}$	$\omega^m J_m(\omega t)$
$\frac{(s-\sqrt{s^2-\omega^2})^m}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$	$\omega^m I_m(\omega t)$
$\frac{\exp[-c\sqrt{s}]}{\sqrt{s}}$	$\frac{\exp[-c^2/(4t)]}{\sqrt{\pi t}}$
$\exp[-c\sqrt{s}]$	$\frac{c\exp[-c^2/(4t)]}{2\sqrt{\pi t^3}}$
$\frac{1-\exp[-c\sqrt{s}]}{s}$	$erf[\frac{c}{2\sqrt{t}}]$
$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$	$\frac{\exp[-bt]-\exp[-at]}{t}$
$-\frac{\gamma+\ln s}{s} \quad (\gamma = 0.577)$	$\ln t$
$-\frac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$
$\arctan(\frac{\omega}{s})$	$\frac{\sin(\omega t)}{t}$
$\exp[-cs]$	$\delta(t-c)$
$\frac{\exp[-cs]}{s}$	$\Theta(t-c)$

Παράρτημα Ε΄

Ειδικές συναρτήσεις

Ε΄.1 Πολυώνυμα HERMITE

Τα πρώτα πολυώνυμα Hermite είναι τα εξής:

$$H_0(x) = 1,$$

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= 2x,\\
H_2(x) &= 4x^2 - 2,\\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x,\\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12,\\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x,\\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.
\end{aligned}$$

Ε΄.2 Αρχικά και συναρτημένα πολυώνυμα LAGUERRE

Τα αρχικά πολυώνυμα Laguerre (δηλαδή με $s = 0$) είναι τα εξής:

$$L_0(x) = 1,$$

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= -x + 1,\\
2!L_2(x) &= x^2 - 4x + 2,\\
3!L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,\\
4!L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24,\\
5!L_5(x) &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120,\\
6!L_6(x) &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720.
\end{aligned}$$

Αυτά μπορούν να προκύψουν από το άθροισμα:

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{n! x^{n-m}}{(n-m)!(n-m)!m!}.$$

Τα συναρτημένα πολυώνυμα Laguerre προκύπτουν από τα αρχικά μέσω του τύπου:

$$L_n^s(x) = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}[L_{n+s}(x)],$$

από τον οποίον προκύπτει το άθροισμα:

$$L_n^s(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+s)! x^m}{(n-m)!(s+m)!m!}.$$

Ε΄.3 Αρχικά και συναρτημένα "πολυώνυμα" LEGENDRE

Τα πρώτα αρχικά πολυώνυμα του Legendre είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).
\end{aligned}$$

Τα πρώτα συναρτημένα "πολυώνυμα" του Legendre είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}
P_{11}(x) &= (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta, \\
P_{21}(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2} = 3\sin\theta\cos\theta, \\
P_{22}(x) &= 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta, \\
P_{31}(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta-1), \\
P_{32}(x) &= 15x(1-x^2) = 15\sin^2\theta\cos\theta, \\
P_{33}(x) &= 15(1-x^2)^{3/2} = 15\sin^3\theta, \\
P_{41}(x) &= \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}\sin\theta(7\cos^3\theta-3\cos\theta), \\
P_{42}(x) &= \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \frac{15}{2}\sin^2\theta(7\cos^2\theta-1), \\
P_{43}(x) &= 105x(1-x^2)^{3/2} = 105\sin^3\theta\cos\theta, \\
P_{44}(x) &= 105(1-x^2)^2 = 105\sin^4\theta.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η μεταβλητή x συμβολίζει το $\cos\theta$. Δώσαμε μόνο τα P_{lm} που αντιστοιχούν σε θετικά m. Για $m=0$ τα συναρτημένα "πολυώνυμα" του Legendre ανάγονται στα αρχικά: $P_{l0} \equiv P_l$, τα οποία παραθέσαμε μόλις προηγουμένως. Οσο για τα αρνητικά m, μπορούμε να τα βρούμε από τα αντίστοιχα με θετικά m, βάσει της σχέσης:

$$P_{l,-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x).$$

Για παράδειγμα: $P_{2,-1}(x) = (-1)\frac{1}{3!}P_{21}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2} = -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$.

Ε΄.4 Σφαιρικές αρμονικές

Οι πρώτες σφαιρικές αρμονικές είναι οι εξής:

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{11}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp[i\phi],$$

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp[-i\phi],$$

$$Y_{22}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta\exp[2i\phi],$$

$$Y_{21}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\exp[i\phi],$$

$$Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right),$$

$$Y_{2,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\exp[-i\phi],$$

$$Y_{2,-2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta\exp[-2i\phi].$$

Ε΄.5 Υδρογονοειδές άτομο

Οι ιδιοκαταστάσεις ενέργειας ενός υδρογονοειδούς ατόμου με ατομικό αριθμό Z δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Psi = \psi_{nlm}(r,\theta,\phi)\exp\left[-\frac{iE_n t}{\hbar}\right].$$

Τα E_n είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας και τα n, l, m οι γνωστοί τρεις κβαντικοί αριθμοί. Δίνουμε στη συνέχεια τα πρώτα ψ_{nlm}. Το a_0 που εμφανίζεται είναι η ακτίνα του Bohr:

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu q^2},$$

όπου μ είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και q το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Ο γενικός τύπος είναι:

$$\psi_{nlm} = \frac{2}{n^2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)\exp\left[-\frac{Zr}{na_0}\right]Y_{lm}(\theta,\phi),$$

όπου με $L_N^s(x)$ συμβολίζονται τα συναρτημένα πολυώνυμα Laguerre. Ο γενικός τύπος εξιδικεύεται ως εξής για τους πιο μικρούς κβαντικούς αριθμούς:

$$\psi_{100} = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]Y_{00}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) \exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right] Y_{00}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{210} = \frac{1}{\sqrt{24}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} \exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right] Y_{10}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{21\pm1} = \frac{1}{\sqrt{24}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} \exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right] Y_{1\pm1}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{300} = \frac{2}{81\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(27 - \frac{18Zr}{a_0} + \frac{2Z^2r^2}{a_0^2}\right) \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{00}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{310} = \frac{4}{81\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{10}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{31\pm1} = \frac{4}{81\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{1\pm1}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{320} = \frac{\sqrt{8}}{81\sqrt{15}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2r^2}{a_0^2} \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{20}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{32\pm1} = \frac{\sqrt{8}}{81\sqrt{15}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2r^2}{a_0^2} \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{2\pm1}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{32\pm2} = \frac{\sqrt{8}}{81\sqrt{15}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2r^2}{a_0^2} \exp\left[-\frac{Zr}{3a_0}\right] Y_{2\pm2}(\theta,\phi)$$

Σημείωση: Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι η μάζα του πυρήνα τείνει στο άπειρο. Αν θεωρείται πεπερασμένη (όπως είναι η ρεαλιστική περίπτωση), το a_0 πρέπει να αντικατασταθεί παντού με το $\left(1 + \frac{\mu}{M}\right) a_0$, όπου μ και M οι μάζες του ηλεκτρονίου και του πυρήνα αντίστοιχα.

Παράρτημα ϛ´

Εξισώσεις Ηλεκτρομαγνητισμού

Δύναμη Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

ϛ´.1 Εξισώσεις του MAXWELL στο κενό

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ϛ´.2 Εξισώσεις του MAXWELL στην ύλη

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\epsilon\lambda}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\epsilon\lambda} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ορισμοί:

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}.$$

Εχουμε συμβολίσει με $\rho_{\epsilon\lambda}$, $\vec{J}_{\epsilon\lambda}$ την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα των ελεύθερων φορτίων.

Για γραμμικά μέσα:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_M \vec{H}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B},$$

όπου $\epsilon \equiv \epsilon_0(1+\chi_E)$ και $\mu \equiv \mu_0(1+\chi_M)$. Οι σταθερές χ_E και ϵ λέγονται διηλεκτρική επιδεκτικότητα και διηλεκτρική σταθερά του μέσου αντίστοιχα. Οι σταθερές χ_M και μ λέγονται μαγνητική επιδεκτικότητα και διαπερατότητα του μέσου αντίστοιχα.

ϛ'.3 Συνθήκες σε διαχωριστικές επιφάνειες.

Α. Διηλεκτρικά (υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο στη διαχωριστική επιφάνεια):

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2}, \quad \vec{E}_{\parallel 1} = \vec{E}_{\parallel 2},$$

που για γραμμικά διηλεκτρικά γράφονται ισοδύναμα με τη μορφή:

$$\epsilon_1 E_{\perp 1} = \epsilon_2 E_{\perp 2}, \quad \frac{1}{\epsilon_1}\vec{D}_{\parallel 1} = \frac{1}{\epsilon_2}\vec{D}_{\parallel 2}.$$

Το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι πάντα συνεχές, αλλά οι παράγωγοί του έχουν τις ασυνέχειες που προκύπτουν από τις αντίστοιχες του ηλεκτροστατικού πεδίου. Οι έννοιες “παράλληλο” και “κάθετο” αναφέρονται στη διαχωριστική επιφάνεια.

Β. Μαγνητικά υλικά (υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ελεύθερο ρεύμα στη διαχωριστική επιφάνεια):

$$B_{\perp 1} = B_{\perp 2}, \quad \vec{H}_{\parallel 1} = \vec{H}_{\parallel 2},$$

που για γραμμικά υλικά γράφονται ισοδύναμα με τη μορφή:

$$\mu_1 H_{\perp 1} = \mu_2 H_{\perp 2}, \quad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{\parallel 1} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{\parallel 2}.$$