ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΕΚΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

49. (α) Να δείξετε ότι στον κενό χώρο η ενέργεια μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στην πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(\vec{x})$ δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2c^2}\int d^3x \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

(β) Αν το ρεύμα αποτελείται από επί μέρους κυκλώματα με ρεύματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$, να δείξετε ότι η ενέργεια μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \sum i = 1^n \sum_{j=1}^{n} M_{ij} I_i I_j.$$

Δώστε τις εκφράσεις για τους συντελεστές αυτεπαγωγής L_i και αμοιβαίας επαγωγής M_{ij}.

<u>Λύση:</u> (α) Ξεκινώντας από τις σχέσεις

$$W = \frac{1}{2c}\int d^3x \vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x}),\ \ \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

(β) Οι εκφράσεις $\vec{J}(\vec{x})d^3x$ θα αντικατασταθούν από τις $I\vec{dl}$, άρα

$$W = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,j}\int \vec{dl}_i\cdot\vec{dl}_j \frac{I_i I_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|} =$$

$$= \sum_i I_i^2 \left(\int \frac{\vec{dl}_i\cdot\vec{dl}_i'}{2c^2|\vec{x}_i-\vec{x}_i'|}\right) + \sum_{i>j} I_i I_j \left(\int \frac{\vec{dl}_i\cdot\vec{dl}_j}{c^2|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}\right).$$

Δηλαδή:

$$L_i = \int \frac{\vec{dl}_i\cdot\vec{dl}_i'}{2c^2|\vec{x}_i-\vec{x}_i'|},\quad M_{ij} = \int \frac{\vec{dl}_i\cdot\vec{dl}_j}{c^2|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}.$$

50. Μια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δύο σύρματα ακτίνων a και b που απέχουν απόσταση $d > a+b$. Ρεύμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στις διατομές ρέει σε κάποια κατεύθυνση στο ένα σύρμα και επιστρέφει μέσω του άλλου. Να αποδειχθεί ότι η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους είναι:

$$c^2 L = 1 + 2\ln\left(\frac{d^2}{ab}\right).$$

<u>Λύση:</u> Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $L = \frac{1}{2}LI^2$. Από τον νόμο του Ampère προκύπτει: $2\pi\rho H = \frac{4\pi}{c}\frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 \Rightarrow H = \frac{2I\rho}{ca^2}$, για $\rho < a$, και $2\pi\rho H = \frac{4\pi}{c}I \Rightarrow H = \frac{2I}{c\rho}$ για $\rho > a$. Αφού δεν υπάρχει μαγνήτιση, $\vec{B} = \vec{H}$. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right).$$

Το $\vec{B}$ έχει μη μηδενική συνιστώσα μόνο κατά το $\hat{\phi}$ και εξαρτάται μόνο από το ρ, δηλαδή $\vec{B} = -\hat{\phi}\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$, οπότε:

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \begin{cases} A_{z<} = -\frac{2I\rho}{ca^2}, & \rho < a \\ A_{z>} = -\frac{2I}{c\rho}, & \rho > a. \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} A_{z<} &= -\tfrac{I\rho^2}{ca^2} + c_<, \qquad \rho < a \\ A_{z>} &= -\tfrac{2I\ln\rho}{c} + c_>, \quad \rho > a. \end{aligned}$$

Το A_z πρέπει να είναι συνεχές στο $\rho = a$, δηλαδή πρέπει $-\frac{I}{c} + c_< = -\frac{2I\ln a}{c} + c_>$. Η μία από τις δύο σταθερές μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Επιλέγουμε $c_< = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} A_{z<} &= -\tfrac{I\rho^2}{ca^2}, & \rho < a \\ A_{z>} &= -\tfrac{2I\ln\rho}{c} + \tfrac{2I\ln a}{c} - \tfrac{I}{c}, & \rho > a. \end{aligned}$$

Μπορούμε πια να παραλείπουμε τον δείκτη z :

$$A = \begin{cases} A_< = -\frac{I\rho^2}{ca^2}, & \rho < a \\ A_> = -\frac{2I}{c}\ln\frac{\rho}{a} - \frac{I}{c}, & \rho > a. \end{cases}$$

Προχωρούμε στον υπολογισμό της ενέργειας: $W = \frac{1}{2c}\int d^3x \vec{J}\cdot\vec{A}$. Το $\vec{A}$ έχει συνεισφορές και από τους δύο αγωγούς. Ας θεωρήσουμε πρώτα τον αγωγό με ακτίνα b. Η συνεισφορά του ίδιου αγωγού θα είναι $A_b = -\frac{I\rho_2^2}{cb^2}$, ενώ του άλλου αγωγού: $A_a = \frac{2I}{c}\ln\frac{\rho_1}{b} + \frac{I}{c}$, όπου $\rho_1^2 = \rho_2^2 + d^2 - 2\rho_2 d\cos\phi$. Εξ άλλου $J_b = \frac{I}{\pi b^2}$ και η ενέργεια ανά μονάδα μήκους λόγω του b θα είναι:

$$\frac{dW_b}{dz} = \frac{1}{2c}\int_0^b d\rho_2\rho_2\int_0^{2\pi} d\phi\frac{I}{\pi b^2}\left(-\frac{I\rho_2^2}{cb^2} + \frac{2I}{c}\ln\frac{[\rho_2^2 + d^2 - 2\rho_2 d\cos\phi]^{\frac{1}{2}}}{b} + \frac{I}{c}\right) =$$

$$= \frac{I^2}{2\pi c^2 b^2}\int_0^b d\rho_2\rho_2\int_0^{2\pi} d\phi\left(1 - \frac{\rho_2^2}{b^2} + \ln\frac{\rho_2^2 + d^2 - 2\rho_2 d\cos\phi}{b^2}.\right).$$

Αλλά

$$\int_0^{2\pi} d\phi\ln(A + B\cos\phi) = 2\pi\ln\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}, \quad A \geq B,$$

οπότε

$$\frac{dW_b}{dz} = \frac{I^2}{c^2 b^2}\int_0^b d\rho_2\rho_2\left(1 - \frac{\rho_2^2}{b^2} + \ln\frac{\rho_2^2 + d^2 + \sqrt{(\rho_2^2 + d^2)^2 - 4\rho_2^2 d^2}}{2b^2}.\right) = \frac{I^2}{4c^2}\left(1 + 4\ln\frac{d}{b}\right).$$

Παρόμοια:

$$\frac{dW_a}{dz} = \frac{I^2}{4c^2}\left(1 + 4\ln\frac{d}{a}\right),$$

άρα συνολικά:

$$\frac{dW_a}{dz} = \frac{I^2}{4c^2}\left(2 + 4\ln\frac{d^2}{ab}\right) = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow c^2 L = 1 + 2\ln\frac{d^2}{ab}.$$

51. Κύκλωμα αποτελείται από λεπτό κυλινδρικό έλασμα ακτίνας a που περιέχει ομοαξονικό σύρμα ακτίνας b. Υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή ρεύματος στον εσωτερικό αγωγό, υπολογίστε την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους. Πώς αλλάζει το αποτέλεσμα αν ο εσωτερικός αγωγός είναι λεπτός και κοίλος;

Λύση: (α) Ονομάζουμε I την περιοχή μέσα στο εσωτερικό σύρμα, II την περιοχή μεταξύ των δύο αγωγών, III το εσωτερικό του ελάσματος και IV το εξωτερικό του ελάσματος. Από το θεώρημα του Ampère προκύπτουν τα αποτελέσματα:

$$H_I = \frac{2I\rho}{cb^2},\ H_{II} = \frac{2I}{c\rho},\ H_{III} = \frac{2I}{c\rho}\frac{d^2-\rho^2}{d^2-a^2},\ H_{IV} = 0.$$

Συμβολίζοντας με $\frac{\delta W}{\delta z}$ την ενέργεια ανά μονάδα μήκους στην κατεύθυνση z προκύπτουν τα εξής:

$$\frac{\delta W_I}{\delta z} = \frac{1}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_I\cdot\vec{B}_I = \frac{\mu}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_I^2 = \frac{\mu}{8\pi}2\pi\int d\rho\rho\left(\frac{2I\rho}{cb^2}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{4c^2},$$

$$\frac{\delta W_{II}}{\delta z} = \frac{1}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_{II}\cdot\vec{B}_{II} = \frac{1}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_{II}^2 = \frac{1}{8\pi}2\pi\int d\rho\rho\left(\frac{2I}{c\rho}\right)^2 = \frac{I^2}{c^2}\ln\frac{a}{b},$$

$$\frac{\delta W_{III}}{\delta z} = \frac{1}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_{III}\cdot\vec{B}_{III} = \frac{\mu}{8\pi}\int d\rho\rho d\phi \vec{H}_{III}^2 = \frac{\mu}{8\pi}2\pi\int d\rho\rho\left(\frac{2I}{c\rho}\frac{d^2-\rho^2}{d^2-a^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\mu I^2}{c^2}\left[\frac{d^4}{(d^2-a^2)^2}\ln\frac{d}{a} + \frac{a^2-3d^2}{4(d^2-a^2)}\right],\ \frac{\delta W_{IV}}{\delta z} = 0.$$

Από την $\frac{\delta W}{\delta z} = \frac{1}{2}\frac{\delta L}{\delta z}I^2$ προκύπτει ότι

$$c^2\frac{\delta L}{\delta z} = \frac{2}{I^2}\left[\frac{\delta W_I}{\delta z} + \frac{\delta W_{II}}{\delta z} + \frac{\delta W_{III}}{\delta z} + \frac{\delta W_{IV}}{\delta z}\right] =$$

$$= \frac{2}{I^2}\left[\frac{\mu I^2}{4c^2} + \frac{I^2}{c^2}\ln\frac{a}{b} + \frac{\mu I^2}{c^2}\left(\frac{d^4}{(d^2-a^2)^2}\ln\frac{d}{a} + \frac{a^2-3d^2}{4(d^2-a^2)}\right) + 0\right] =$$

$$= -\frac{\mu(d^2+a^2)}{4(d^2-a^2)} + \frac{2\mu d^4}{(d^2-a^2)^2}\ln\frac{d}{a} + 2\ln\frac{a}{b}.$$

(β) Έστω ότι ο μέσα αγωγός είναι κενός, δηλαδή υπάρχει μια πέμπτη περιοχή V με ακτίνα h. Τότε τα προηγούμενα αποτελέσματα τροποποιούνται ως εξής:

$$H_I = \frac{2I}{c\rho}\frac{\rho^2-h^2}{b^2-h^2},\ H_{II} = \frac{2I}{c\rho},\ H_{III} = \frac{2I}{c\rho}\frac{d^2-\rho^2}{d^2-a^2},\ H_{IV} = 0,\ H_V = 0.$$

Δηλαδή εκείνο που αλλάζει και επηρεάζει τη συνολική ενέργεια είναι το

$$\frac{\delta W_I}{\delta z} = \frac{\mu I^2}{c^2}\left[\frac{h^4}{(b^2-h^2)^2}\ln\frac{b}{h} + \frac{b^2-3h^2}{4(b^2-h^2)}\right].$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία όπως προηγουμένως καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$c^2\frac{\delta L}{\delta z} = \frac{2}{I^2}\left[\frac{\delta W_I}{\delta z} + \frac{\delta W_{II}}{\delta z} + \frac{\delta W_{III}}{\delta z} + \frac{\delta W_{IV}}{\delta z} + \frac{\delta W_V}{\delta z}\right] =$$

$$= \frac{2\mu h^4}{(b^2-h^2)^2}\ln\frac{b}{h} + 2\ln\frac{a}{b} + \frac{2\mu d^4}{(d^2-a^2)^2}\ln\frac{d}{a} + \frac{2\mu(b^2-3h^2)}{2(b^2-h^2)} - \frac{\mu(3d^2-a^2)}{2(d^2-a^2)}.$$

52. Γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δύο παράλληλα σύρματα αυθαίρετης, αλλά σταθερής, διατομής. Οι αγωγοί υποτίθενται τέλειοι. Δείξτε ότι το γινόμενο της αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους και της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\frac{\delta C}{\delta z}\frac{\delta L}{\delta z} = \frac{\mu\epsilon}{c^2},$$

όπου τα μ και ϵ αναφέρονται στο μέσον που περιβάλλει τους αγωγούς.

Λύση: Σε άλλη άσκηση έχει αποδειχθεί ότι

$$\frac{\delta C}{\delta z} = \frac{1}{4\ln\frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}},$$

για δύο κυκλικούς αγωγούς με ακτίνες r_1 και r_2 που απέχουν κατά d. Επίσης έχει δειχθεί σε άλλη άσκηση ότι $c^2\frac{\delta C}{\delta z} = 1 + 2\ln\frac{d^2}{r_1 r_2}$. Στο όριο $d >> \sqrt{r_1 r_2}$ έχουμε:

$$c^2\frac{\delta C}{\delta z}\frac{\delta C}{\delta z} = \frac{1}{4\ln\frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}}\left(1 + 4\ln\frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}\right) \simeq 1.$$

Αν ο περιβάλλων χώρος χαρακτηρίζεται από το μ και το ϵ: $\frac{\delta C}{\delta z} \to \epsilon\frac{\delta C}{\delta z}$, $\frac{\delta L}{\delta z} \to \mu\frac{\delta L}{\delta z}$, άρα:

$$\frac{\delta C}{\delta z}\frac{\delta L}{\delta z} = \frac{\mu\epsilon}{c^2}.$$

Αν η διατομή δεν είναι κυκλική αλλά τυχούσα, μπορούμε να τη χωρίσουμε σε κυκλικές επιφάνειες και να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα, αρκεί να ισχύει: $d >> \sqrt{r_1 r_2}$.

53. Πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλους επίπεδους οπλισμούς με διαστάσεις a (κατά το x) και b (κατά το y) και απέχουν απόσταση d, που υποτίθεται μικρή συγκριτικά με τα a και b. Η τροφοδοσία ρεύματος γίνεται από τις πλευρές με μήκος a ομογενώς, δηλαδή δεν υπάρχει εξάρτηση από το x, και το ρεύμα κατευθύνεται κατά το y.

(α) Υπολογίστε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στον πυκνωτή. Να αμεληθούν φαινόμενα παραμόρφωσης που συμβαίνουν κοντά στα άκρα των οπλισμών.

(β) Δείξτε ότι το ανάπτυγμα της σύνθετης αντίστασης σε δυνάμεις της συχνότητας είναι ίδιο με το ανάπτυγμα κυκλώματος με εντοπισμένη χωρητικότητα $C = \frac{\epsilon_0 ab}{d}$ σε σειρά με αυτεπαγωγή $L = \frac{\mu_0 ad}{3b}$.

Λύση: (α) Υποθέτουμε ότι οι οπλισμοί είναι παράλληλοι με το επίπεδο xy και ότι ο ένας βρίσκεται στη θέση $z = 0$, ενώ ο άλλος στη θέση $z = d$. Οι πλευρές μήκους a είναι παράλληλες στον άξονα x, ενώ οι μήκους b είναι παράλληλες στον άξονα των y. Η οριακή συνθήκη για την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος γίνεται:

$$\vec{K}(x,0,0)e^{-i\omega t} = -\vec{K}(x,0,d)e^{-i\omega t} = K_0 e^{-i\omega t}\hat{x}.$$

Όπως έχουμε επιλέξει τη γεωμετρία και τις προσεγγίσεις μας, τα πεδία θα έχουν μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E(x,y,z)e^{-i\omega t}\hat{z}, \quad \vec{B}(x,y,z,t) = B(x,y,z)e^{-i\omega t}\hat{x}.$$

Αν λάβουμε υπ΄ όψη τη μορφή των πεδίων, οι εξισώσεις του Maxwell δίνουν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = 0,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\frac{\partial B}{\partial x}=0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\left\{\frac{\partial E}{\partial y}=i\omega B,\quad-\frac{\partial E}{\partial x}=0\right\},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\left\{\frac{\partial B}{\partial y}=\frac{i\omega}{c^2}E,\quad\frac{\partial B}{\partial z}=0\right\}.$$

Οι εξισώσεις διαβεβαιώνουν ότι τα E, B εξαρτώνται μόνο από το y. Μ΄ αυτήν την παρατήρηση, τα πεδία γράφονται:

$$\vec{E}(x,y,z,t)=E(y)e^{-i\omega t}\hat{z},\quad\vec{B}(x,y,z,t)=B(y)e^{-i\omega t}\hat{x}.$$

και οι εξισώσεις τους:

$$E'(y)=i\omega B(y),\quad B'(y)=-\frac{i\omega}{c^2}E(y).$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη και αντικαθιστώντας το $B'(y)$ που θα προκύψει από τη δεύτερη, βρίσκουμε ότι

$$E''+\frac{\omega^2}{c^2}E=0\Rightarrow E=A\sin ky+D\cos ky,\quad\left(k\equiv\frac{\omega}{c}\right).$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$B=\frac{iE'(y)}{\omega}=\frac{ikA}{\omega}\cos ky-\frac{ikD}{\omega}\sin ky=\frac{iA}{c}\cos ky-\frac{iD}{c}\sin ky.$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης, κατ΄ αρχήν θα επικαλεστούμε τις συνθήκες συνέχειας των πεδίων στους οπλισμούς, με την υπόθεση ότι τα πεδία έξω από τον πυκνωτή είναι μηδέν: $E=\frac{\sigma}{\epsilon_0}, B=\mu_0 K_y$, όπου σ και $K_y=J_0 a$ οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα στον κάτω οπλισμό. Έστω τώρα ότι το ρεύμα μπαίνει στο σημείο $y=0$, και έχει ένταση $I_0e^{-i\omega t}$, οπότε στο άκρο $y=b$ το ρεύμα θα είναι μηδέν:

$$K_y\big|_{y=0}=\frac{I_0}{a}e^{-i\omega t}\Rightarrow B\big|_{y=0}=\mu_0\frac{I_0}{a}e^{-i\omega t}\Rightarrow\frac{iA}{c}e^{-i\omega t}=\frac{I_0}{a}e^{-i\omega t}\Rightarrow\frac{iA}{c}=\frac{\mu_0 I_0}{a},$$

$$K_y\big|_{y=b}=0\Rightarrow A\cos kb=D\sin kb.$$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$B=\frac{\mu_0 I_0}{a}e^{-i\omega t}(\cos ky-\cot kb\sin ky).$$

54. Πυκνωτής με οπλισμούς κυκλικού σχήματος ακτίνας a και διάκενο $d << a$ συνδέεται με πηγή ρεύματος μέσω καλωδίων, στα οποία το ρεύμα δίνεται από τη σχέση: $I(t)=I_0\cos\omega t$. Να υπολογιστούν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μεταξύ των οπλισμών, αμελώντας φαινόμενα παραμόρφωσης που ίσως συμβαίνουν κοντά στα άκρα των οπλισμών.

Λύση: Λαμβάνοντας υπ΄ όψη τη συμμετρία του προβλήματος και υποθέτοντας επί πλέον ότι για όλα τα μεγέθη η χρονική εξάρτηση είναι $e^{-i\omega t}$,τα πεδία θα έχουν τη μορφή:

$$\vec{E}(\vec{x},t)=E(\rho,z)e^{-i\omega t}\hat{z},\quad\vec{B}(\vec{x},t)=B(\rho,z)e^{-i\omega t}\hat{\phi}.$$

Με τα δεδομένα αυτά, οι εξισώσεις του Maxwell δίνουν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\frac{\partial E}{\partial z}=0,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\frac{\partial B}{\partial\phi}=0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial E}{\partial\rho}=-i\omega B,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B)=-\frac{i\omega}{c^2}E.$$

Οι εξισώσεις διαβεβαιώνουν ότι τα E,B εξαρτώνται μόνο από το ρ. Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B)\right)=-\frac{i\omega}{c^2}\frac{\partial E}{\partial\rho}=-\frac{i\omega}{c^2}(-i\omega B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2\frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial B}{\partial\rho}+(k^2\rho^2-1)B=0,\quad\left(k\equiv\frac{\omega}{c}\right),$$

που είναι εξίσωση Bessel πρώτης τάξης με λύσεις:

$$B=\alpha J_1(k\rho)+\beta N_1(k\rho).$$

Με ανάλογα βήματα καταλήγουμε για το E στην εξίσωση

$$\rho^2\frac{\partial^2 E}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial E}{\partial\rho}+(k^2\rho^2)E=0,$$

που είναι εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης με λύσεις:

$$E=\gamma J_0(k\rho)+\delta N_0(k\rho).$$

Οι συντελεστές β και δ πρέπει να τεθούν ίσοι με μηδέν, για να έχουμε φυσικά παραδεκτές (μη απειριζόμενες) λύσεις. Όμως ούτε οι α, γ είναι ανεξάρτητοι: η εξίσωση $\frac{\partial E}{\partial\rho}=-i\omega B$ θα δώσει

$$\gamma\frac{\partial J_0(k\rho)}{\partial\rho}=-i\omega\alpha J_1(k\rho)\Rightarrow k\gamma=i\omega\alpha\Rightarrow\gamma=ic\alpha,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα: $J_0'(x)=-J_1(x)$.

55. Διηλεκτρική σφαίρα με διηλεκτρική σταθερά ϵ και ακτίνα a βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Ομογενές πεδίο E_0 έχει φορά κατά τον άξονα των x. Η σφαίρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα των z. Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο δίδεται από τη σχέση $\vec{H}=-\vec{\nabla}\Phi_M$, όπου

$$\Phi_M=\frac{9}{10}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\epsilon_0E_0\omega\left(\frac{a}{r_>}\right)^5xz,$$

όπου το $r_>$ είναι το μεγαλύτερο μεταξύ των r και a. Οι ταχύτητες δεν είναι σχετικιστικές. Υπενθυμίζεται ότι η πόλωση διηλεκτρικής σφαίρας σε εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση: $P=\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\epsilon_0E_0$.

Λύση: Ξεκινάμε από τη σχέση $\vec{M}=\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{J}$ και το γεγονός ότι η πόλωση είναι παράλληλη με το $\hat{x}$, οπότε $\vec{P}\cdot\hat{r}=P\sin\theta\cos\phi$, και με τη βοήθεια των σχέσεων $\vec{J}=\rho_P\vec{v}=\sigma_P\delta(r-a)\vec{v}=(\vec{P}\cdot\hat{r})\delta(r-a)\vec{v}$ και $\vec{v}=\omega\hat{z}\times\vec{r}=\omega r\hat{z}\times\hat{r}=\omega r\hat{\phi}$ καταλήγουμε στην

$$\vec{M}=-\frac{P}{2}\omega ra\sin^2\theta\cos\phi\delta(r-a)\hat{\theta}.$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\hat{\theta} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}$, $\hat{\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ και $\hat{r}\times\hat{\phi} = -\hat{\theta}$. Η αντίστοιχη πυκνότητα μαγνητικού "φορτίου" ισούται με:

$$\rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta M_\theta) = \frac{3P\omega a}{2}\delta(r-a)\cos\phi\sin\theta\cos\theta.$$

Αν αντικαταστήσουμε το P με το ίσο του καταλήγουμε στην:

$$\rho_M = \frac{9\omega a\epsilon_0 E_0}{2}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\delta(r-a)\cos\phi\sin\theta\cos\theta.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$Y_{2,\pm1} = \mp 3\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \Rightarrow \cos\phi\sin\theta\cos\theta = \sqrt{\frac{6\pi}{5}}\frac{Y_{2,-1}-Y_{2,1}}{3}.$$

Άρα

$$\rho_M = \sqrt{\frac{6\pi}{5}}\frac{3\omega a\epsilon_0 E_0}{2}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\delta(r-a)(Y_{2,-1}-Y_{2,1}).$$

Θεωρούμε τώρα την πολυπολική ανάπτυξη του Φ_M <u>έξω από τη σφαίρα:</u>

$$\Phi_M = \sum_{lm}\frac{1}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Q_{lm}Y_{lm}$$

θα επιζήσουν μόνο δύο όροι:

$$\Phi_M = \frac{1}{5}\frac{1}{r^3}\{Q_{21}Y_{21} + Q_{2,-1}Y_{2,-1}\}.$$

Κατά τα γνωστά,

$$Q_{21} = \int d^3x r^2\rho_M(Y_{21})^* = \int_0^\infty dr r^2 r^2\delta(r-a)\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\frac{3\omega a\epsilon_0 E_0}{2}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\int d\theta\sin\theta d\phi(-Y_{21})(Y_{21})^* =$$

$$= -\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\frac{3\omega a^5\epsilon_0 E_0}{2}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}$$

και $Q_{2,-1} = -Q_{21}$. Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το Φ_M και αξιοποιώντας τις ρητές εκφράσεις των σφαιρικών αρμονικών που δώσαμε προηγουμένως καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\Phi_M = \frac{9\omega a^5}{10r^3}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\epsilon_0 E_0\frac{r\sin\theta\cos\phi}{r}\frac{r\cos\theta}{r} = \frac{9\omega a^5}{10r^5}\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\epsilon_0 E_0 xz.$$

Για <u>μέσα στη σφαίρα</u> ακολουθούμε αντίστοιχη πορεία.