ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΠΕΜΠΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

38. Μακρύς κυλινδρικός φλοιός με διηλεκτρική σταθερά ϵ και ακτίνες a και $b > a$ τοποθετείται σε (μέχρι τότε) ομογενές πεδίο E_0 με τον άξονά του κάθετο στο πεδίο. Έξω από τον φλοιό υπάρχει κενό (η διηλεκτρική σταθερά είναι μονάδα).

(α) Προσδιορίστε το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στις τρεις παριοχές, αγνοώντας τις παραμορφώσεις περί τις βάσεις του κυλίνδρου.

(β) Εξετάστε τα δύο όρια: του διηλεκτρικού κυλίνδρου σε ομογενές εξωτερικό πεδίο και της κυλινδρικής κοιλότητας σε διηλεκτρικό υλικό.

Λύση: (α) Θεωρούμε ότι το $\vec{E}_0$ είναι κατά μήκος του άξονα των y, οπότε $\Phi(r \to \infty, \phi) = -E_0 y = -E_0 r \sin\phi$. Λαμβάνοντάς το υπόψη, μαζί με τις οριακές συνθήκες, η γενική λύση

$$\Phi = a_0 + b_0 \ln r + \sum_m \left(\tilde{a}_m r^m + \frac{\tilde{b}_m}{r^m} \right) (c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi)$$

δίνει για τα δυναμικά στις τρεις περιοχές 1 (μέσα), 2(στο διηλεκτρικό) και 3 (έξω):

$$\Phi_1 = \sum_m (c_{1m} \cos m\phi + d_{1m} \sin m\phi) r^m,$$

$$\Phi_2 = \tilde{b}_0 \ln r + \sum_m \left(\tilde{a}_{2m} r^m + \frac{\tilde{b}_{2m}}{r^m} \right) (c_{2m} \cos m\phi + d_{2m} \sin m\phi),$$

$$\Phi_3 = -E_0 r \sin\phi + b_0 \ln r + \sum_m \frac{1}{r^m} (c_{3m} \cos m\phi + d_{3m} \sin m\phi).$$

Έχουμε το επί πλέον δεδομένο της συμμετρίας περί το επίπεδο yz, δηλαδή $\Phi_k(r, \pi - \phi) = \Phi_k(r, \phi)$, οπότε οι όροι με τα $\cos m\phi$ πρέπει να είναι μηδέν. Οι εκφράσεις για τα δυναμικά ξαναγράφονται:

$$\Phi_1 = \sum_m d_{1m} r^m \sin m\phi,$$

$$\Phi_2 = \tilde{b}_0 \ln r + \sum_m \left(A_{2m} r^m + \frac{B_{2m}}{r^m} \right) \sin m\phi,$$

$$\Phi_3 = -E_0 r \sin\phi + b_0 \ln r + \sum_m \frac{1}{r^m} d_{3m} \sin m\phi.$$

Οριακές συνθήκες:

$$\Phi_2\big|_a = \Phi_1\big|_a \Rightarrow \tilde{b}_0 \ln a + \sum_m \left(A_{2m} a^m + \frac{B_{2m}}{a^m} \right) \sin m\phi = \sum_m d_{1m} a^m \sin m\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{b}_0 = 0, \ A_{2m} a^m + \frac{B_{2m}}{a^m} = d_{1m} a^m.$$

$$\epsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\bigg|_a = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\bigg|_a \Rightarrow \epsilon \sum_m \left(m A_{2m} a^{m-1} - \frac{m B_{2m}}{a^{m+1}} \right) \sin m\phi = \sum_m m d_{1m} a^{m-1} \sin m\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon\left(A_{2m}a^{m-1}-\frac{B_{2m}}{a^{m+1}}\right)=d_{1m}a^{m-1}.$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi}\bigg|_a=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi}\bigg|_a\Rightarrow\frac{1}{a}\sum_m\left(mA_{2m}a^m+\frac{mB_{2m}}{a^m}\right)\cos m\phi=\frac{1}{a}\sum_m md_{1m}a^m\cos m\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{2m}a^m+\frac{B_{2m}}{a^m}=d_{1m}a^m.$$

$$\Phi_3|_b=\Phi_2|_b\Rightarrow -E_0b\sin\phi+b_0\ln b+\sum_m\frac{1}{b^m}d_{3m}\sin m\phi=\sum_m\left(A_{2m}b^m+\frac{B_{2m}}{b^m}\right)\sin m\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_0=0,-E_0b+\frac{1}{b}d_{31}=A_{21}b+\frac{B_{21}}{b},\frac{1}{b^m}d_{3m}=A_{2m}b^m+\frac{B_{2m}}{b^m},m\geq 2.$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\bigg|_b=\epsilon\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_b\Rightarrow -E_0\sin\phi+\frac{b_0}{b}-\sum_m\frac{md_{3m}}{b^{m+1}}\sin m\phi=\epsilon\sum_m\left(mA_{2m}b^{m-1}-\frac{mB_{2m}}{b^{m+1}}\right)\sin m\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -E_0-\frac{d_{31}}{b^2}=\epsilon\left(A_{21}b-\frac{B_{21}}{b^2}\right),\quad -\frac{d_{3m}}{b^{m+1}}=\epsilon\left(A_{2m}b^{m-1}-\frac{B_{2m}}{b^{m+1}}\right),m\geq 2.$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\phi}\bigg|_b=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi}\bigg|_b\Rightarrow\sum_m m\left(A_{2m}b^m+\frac{B_{2m}}{b^m}\right)\cos m\phi=-E_0b\cos\phi+\sum_m m\frac{d_{3m}}{b^m}\cos m\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{21}b+\frac{B_{21}}{b}=-E_0b+\frac{d_{31}}{b},\quad A_{2m}b^m+\frac{B_{2m}}{b^m}=\frac{d_{3m}}{b^m},m\geq 2.$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε διαχωρίσει την περίπτωση $m=1$. Οι εξισώσεις που προκύπτουν συχνά ταυτίζονται με προηγούμενες. Οι ανεξάρτητες εξισώσεις για $m>1$ είναι οι:

$$A_{2m}a^m+\frac{B_{2m}}{a^m}=d_{1m}a^m,\quad \epsilon\left(A_{2m}a^{m-1}-\frac{B_{2m}}{a^{m+1}}\right)=d_{1m}a^{m-1},$$

$$\frac{1}{b^m}d_{3m}=A_{2m}b^m+\frac{B_{2m}}{b^m},\quad -\frac{d_{3m}}{b^{m+1}}=\epsilon\left(A_{2m}b^{m-1}-\frac{B_{2m}}{b^{m+1}}\right).$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας αυτού του ομογενούς συστήματος δίνει τη συνθήκη $\left(\frac{b}{a}\right)^{2m}=\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\right)^2$, που δεν είναι δυνατόν να ισχύει, αφού $\frac{b}{a}>1$, $\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}<1$. Άρα δεν έχουμε άλλη λύση από την τετριμένη σ' αυτήν την περίπτωση:

$$A_{2m}=B_{2m}=d_{1m}=d_{3m}=0,m\geq 2.$$

Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $m=1$, όπου το σύστημα γίνεται:

$$A_{21}a+\frac{B_{21}}{a}=d_{11}a,\quad \epsilon\left(A_{21}-\frac{B_{21}}{a^2}\right)=d_{11},$$

$$-E_0b+\frac{1}{b}d_{31}=A_{21}b+\frac{B_{21}}{b},\quad -E_0-\frac{d_{31}}{b^2}=\epsilon\left(A_{21}b-\frac{B_{21}}{b^2}\right).$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$A_{21}=\frac{2E_0b^2(\epsilon+1)}{a^2(\epsilon-1)^2-b^2(\epsilon+1)^2},\quad B_{21}=\frac{2E_0a^2b^2(\epsilon-1)}{a^2(\epsilon-1)^2-b^2(\epsilon+1)^2},$$

$$d_{11}=\frac{4E_0b^2\epsilon}{a^2(\epsilon-1)^2-b^2(\epsilon+1)^2},\quad d_{31}=\frac{E_0b^2(b^2-a^2)(\epsilon^2-1)}{a^2(\epsilon-1)^2-b^2(\epsilon+1)^2}.$$

Τελικά το δυναμικό στις τρεις περιοχές γράφεται:

$$\Phi_1 = d_{11} r \sin\phi, \quad \Phi_2 = A_{21} r \sin\phi + \frac{B_{21}}{r}\sin\phi, \quad \Phi_3 = -E_0 r \sin\phi + \frac{d_{31}}{r}\sin\phi,$$

όπου οι συντελεστές δίνονται αμέσως πιο πάνω. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$E_{1r} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = d_{11}\sin\phi, \quad E_{1\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} = d_{11}\cos\phi,$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = -A_{21}\sin\phi + \frac{B_{21}}{r^2}\sin\phi, \quad E_{2\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} = -A_{21}\cos\phi - \frac{B_{21}}{r^2}\cos\phi,$$

$$E_{3r} = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = E_0\sin\phi + \frac{d_{31}}{r^2}\sin\phi, \quad E_{3\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \phi} = E_0\cos\phi - \frac{d_{31}}{r^2}\cos\phi.$$

(β) Στο όριο του συμπαγούς κυλίνδρου ($a = 0$) τα δυναμικά γίνονται:

$$\Phi_2 = -\frac{2E_0}{\epsilon+1} r\sin\phi, \quad \Phi_3 = -E_0 r \sin\phi - \frac{E_0 b^2(\epsilon-1)}{\epsilon+1}\frac{1}{r}\sin\phi,$$

ενώ στο όριο της κυλινδρικής κοιλότητας:

$$\Phi_1 = -\frac{4E_0\epsilon}{(\epsilon+1)^2} r\sin\phi, \quad \Phi_2 = -\frac{2E_0}{\epsilon+1} r\sin\phi, \quad \Phi_3 = -E_0 r\sin\phi - \frac{E_0 b^2(\epsilon-1)}{\epsilon+1}\frac{1}{r}\sin\phi.$$

39. Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο διηλεκτρικής σφαίρας με ακτίνα $a < d$ και διηλεκτρική σταθερά ϵ.

(α) Να υπολογιστεί το δυναμικό παντού.

(β) Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στο κέντρο της σφαίρας.

(γ) Να επαληθευθεί ότι, στο όριο $\epsilon \to \infty$ το αποτέλεσμα ταυτίζεται με το αντίστοιχο της αγώγιμης σφαίρας.

Λύση: Το δυναμικό μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα της συνεισφοράς του φορτίου Φ_q και της συνεισφοράς της σφαίρας Φ_s.

$$\Phi_q = k\frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|} = k\frac{q}{|\vec{r}_> - \vec{r}_<|} = \frac{kq}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}} =$$

$$= \frac{kq}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\theta) = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\theta) = \begin{cases} kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r < d \\ kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r > d \end{cases}$$

Εξ άλλου:

$$\Phi_s = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), & r > a \end{cases}$$

Δηλαδή, για τις τρεις περιοχές:

$$\Phi_1 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}A_l\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta), \quad r < a,$$

$$\Phi_2 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), \quad a<r<d,$$

$$\Phi_3 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), \quad r>d.$$

Για να επιβάλλουμε τις οριακές συνθήκες θα μας χρειαστούν μόνο τα Φ_1 και Φ_2 :

$$\epsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_a = \frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_a, \quad \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\bigg|_a = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\bigg|_a.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\epsilon\left(kq\sum_{l=0}^{\infty}l\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}lA_l\frac{a^{l-1}}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right) = kq\sum_{l=0}^{\infty}l\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)B_l\frac{a^l}{a^{l+2}}P_l(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon\left(kq\sum_{l=0}^{\infty}l\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}lA_l\frac{a^{l-1}}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right) = kq\sum_{l=0}^{\infty}l\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)B_l\frac{a^l}{a^{l+2}}P_l(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon\left(kql\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}} + lA_l\frac{1}{a^2}\right) = kql\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}} - (l+1)B_l\frac{1}{a^2}.$$

Η δεύτερη σχέση δίνει:

$$kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{d^{l+1}}(-\sin\theta)P_l'(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}A_l\frac{a^l}{a^{l+1}}(-\sin\theta)P_l'(\cos\theta) =$$

$$= kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{d^{l+1}}(-\sin\theta)P_l'(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{a^l}{a^{l+1}}(-\sin\theta)P_l'(\cos\theta) \Rightarrow B_l = A_l,$$

οπότε η πρώτη σχέση μεταπίπτει στην

$$\epsilon\left(kql\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}} + lA_l\frac{1}{a^2}\right) = kql\frac{a^{l-1}}{d^{l+1}} - (l+1)A_l\frac{1}{a^2},$$

που λύνεται εύκολα:

$$A_l = B_l = -\frac{klq(\epsilon-1)}{\epsilon l + l + 1}\left(\frac{a}{d}\right)^{l+1}.$$

(β) Για τους υπολογισμούς στο κέντρο της σφαίρας μας χρειάζεται μόνο το Φ_1 :

$$\Phi_1 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{klq(\epsilon-1)}{\epsilon l + l + 1}\left(\frac{a}{d}\right)^{l+1}\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta).$$

Κρατάμε τους όρους μέχρι το $P_2(\cos\theta)$:

$$\Phi_1 \simeq kq\left(\frac{1}{d} + \frac{r}{d^2}\frac{3}{\epsilon+2}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{d^3}\frac{5}{2\epsilon+3}P_2(\cos\theta)\right).$$

Με τις υπενθυμίσεις ότι $rP_1 = r\cos\theta = z$, $\;r^2P_2 = r^2\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}$, το δυναμικό γράφεται σε ορθογώνιες συντεταγμένες:

$$\Phi_1 \simeq kq\left(\frac{1}{d} + \frac{3}{\epsilon+2}\frac{z}{d^2} + \frac{5}{2\epsilon+3}\left(\frac{z^2}{d^3} - \frac{x^2+y^2}{2d^3}\right)\right),$$

και με απ΄ ευθείας παραγωγίσεις:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \simeq kq\frac{5}{2\epsilon+3}\frac{x}{d^3},\ E_y = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \simeq kq\frac{5}{2\epsilon+3}\frac{x}{d^3},$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \simeq kq\left(\frac{3}{\epsilon+2}\frac{1}{d^2} + \frac{5}{2\epsilon+3}\frac{2z}{d^3}\right).$$

(γ) Στο όριο $\epsilon \to 0$, $A_l = B_l = -kq\left(\frac{a}{d}\right)^{l+1}$, τα δυναμικά γίνονται: $\Phi_1 = \frac{kq}{d}$,

$$\Phi_2 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta) - kq\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{(rd)^{l+1}}P_l(\cos\theta),$$

$$\Phi_3 = kq\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) - kq\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{(rd)^{l+1}}P_l(\cos\theta),$$

που συναποτελούν το αποτέλεσμα για την αγώγιμη (μη γειωμένη) σφαίρα. Σημειώνουμε ότι δύο αθροίσματα ξεκινούν από το $l = 1$, επειδή $A_0 = B_0 = 0$.

40. Δύο ομόκεντρες αγώγιμες σφαίρες με ακτίνες a και $b > a$ φέρουν φορτία $+Q$ (η μέσα) και $-Q$ (η έξω). Το πάνω ημισφαίριο είναι γεμάτο με διηλεκτρικό σταθεράς ϵ.

(α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον φλοιό.

(β) Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική σφαίρα.

(γ) Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων για $r = a$.

Λύση: (α) Γράφουμε τη γενική λύση για τις περιοχές 1 (πάνω) και 2 (κάτω):

$$\Phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta),\quad \Phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

Το σύστημα έχει αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε $E_\phi = 0$. Εξ άλλου: $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$. Στις δύο αγώγιμες επιφάνειες η εφαπτομενική συνιστώσα E_θ πρέπει να μηδενίζεται:

$$E_{1\theta}\big|_a = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\bigg|_a = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}\right)(-\sin\theta)P_l'(\cos\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0,\quad l = 1, 2, 3, \ldots$$

Η προηγούμενη λογική δε δίνει πληροφορία για $l = 0$, γιατί $P_0' = 0$. Παρόμοια, από τη σφαίρα ακτίνας b παίρνουμε τη σχέση:

$$A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} = 0,\quad l = 1, 2, 3, \ldots$$

Για να έχει λύση το ομογενές σύστημα των δύο εξισώσεων με τους δύο αγνώστους A_l, B_l πρέπει η ορίζουσά του να μηδενίζεται, απ΄ όπου προκύπτει $a = b$, που δεν ισχύει. Άρα:

$$A_l = B_l = 0,\quad l \geq 1.$$

Παρόμοια, θεωρώντας την περιοχή 2 στις δύο αγώγιμες επιφάνειες:

$$C_l = D_l = 0,\quad l \geq 1.$$

Δηλαδή καταλήγουμε στα δυναμικά:

$$\Phi_1 = A_0 + \frac{B_0}{r}, \quad \Phi_2 = C_0 + \frac{D_0}{r},$$

οπότε:

$$\vec{E}_1 = \frac{B_0}{r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = \frac{D_0}{r^2}\hat{r}.$$

Οι συνιστώσες που είναι παράλληλες στη διαχωριστική επιφάνεια των διηλεκτρικών πρέπει να είναι ίσες, άρα, για $\theta = \frac{\pi}{2}$ πρέπει $\frac{B_0}{r^2}\hat{r} = \frac{D_0}{r^2}\hat{r} \Rightarrow B_0 = D_0$. Η συνέχεια του δυναμικού επιβάλλει: $A_0 = C_0$.

(β) Με βάση τη σχέση $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$ και το γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό παντού επιλέγουμε ως επιφάνεια του Gauss έναν ημισφαιρικό φλοιό με ακτίνες $a \pm \delta$ με αποτέλεσμα:

$$\frac{4\pi a^2}{2}E_1 = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\frac{4\pi a^2}{2}\sigma_1 \Rightarrow \frac{B_0}{a^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\epsilon\epsilon_0 B_0}{a^2}$$

και παρόμοια:

$$\sigma_2 = \frac{\epsilon_0 B_0}{a^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon}.$$

Εξ άλλου: $Q = \sigma_1 2\pi a^2 + \sigma_2 2\pi a^2 = (\epsilon+1)\sigma_2 2\pi a^2$, άρα: $\sigma_2 = \frac{Q}{2\pi a^2(\epsilon+1)} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\epsilon Q}{2\pi a^2(\epsilon+1)}$. Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις:

$$\sigma_2 = \frac{\epsilon_0 B_0}{a^2} = \frac{\epsilon Q}{2\pi a^2(\epsilon+1)} \Rightarrow B_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon+1)} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon+1)r^2}.$$

(γ) Η σχέση $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \epsilon\epsilon_0\vec{E} - \epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon-1)\vec{E}$ μαζί με την $\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$ μπορεί να μας δώσει το σ_P. Χρειάζεται ακόμα να επισημάνουμε ότι το $\hat{n}$ δείχνει πάντα προς τα έξω, οπότε $\hat{n} = +\hat{r}$ για $r = b$ και $\hat{n} = -\hat{r}$ για $r = a$. Άρα:

$$\sigma_P\big|_b = \vec{P}(b)\cdot(+\hat{r}) = \epsilon_0(\epsilon-1)\vec{E}(b)\cdot\hat{r} = \epsilon_0(\epsilon-1)\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon+1)b^2},$$

$$\sigma_P\big|_a = \vec{P}(a)\cdot(-\hat{r}) = -\epsilon_0(\epsilon-1)\vec{E}(a)\cdot\hat{r} = -\epsilon_0(\epsilon-1)\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon+1)a^2}.$$

41. Δύο ομοαξονικές κυλινδρικές επιφάνειες μεγάλου μήκους και ακτίνων a και $b > a$ βυθίζονται κάθετα σε διηλεκτρικό υγρό. Αν το υγρό ανυψωθεί κατά h όταν εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού V, να δειχθεί ότι η επιδεκτικότητα τηυ υγρού είναι:

$$\chi_e = \frac{(b^2-a^2)\rho g h \ln\frac{b}{a}}{V^2},$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Λύση: Η λύση για το δυναμικό (αφού έχουμε μια κυλινδρικά συμμετρική κατάσταση) θα είναι:

$$\Phi = A_0 + B_0\ln\rho \Rightarrow \Phi_0 \equiv \Phi(b) - \Phi(a) = B_0\ln\frac{b}{a} \Rightarrow \Phi = A_0 + \frac{\Phi_0\ln\rho}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Από την $\Phi(a) = A_0 + \frac{\Phi_0\ln a}{\ln\frac{b}{a}}$ προκύπτει η τιμή του A_0 και το δυναμικό γράφεται τελικά:

$$\Phi = \Phi(a) + \frac{\Phi_0\ln\frac{\rho}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\Phi_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\hat{\rho}.$$

Αν το υγρό ανυψωθεί κατά δH, η ενέργεια $\frac{\epsilon}{2}\int d^3xE^2$ θα αλλάξει κατά:

$$\delta W = \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2}\int d^3xE^2 = \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2}\delta H\int_a^b d\rho 2\pi\rho\left(-\frac{\Phi_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2}\delta H 2\pi\frac{\Phi_0^2}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\ln\frac{b}{a} = \frac{\epsilon_0\chi\pi\Phi_0^2}{\ln\frac{b}{a}},$$

όπου αντικαταστήσαμε $\epsilon-\epsilon_0=\epsilon_0\chi$. Εξ άλλου, η ενέργεια λόγω βαρύτητας θα μεταβληθεί λόγω της μετατόπισης μάζας απειροστού ύψους dH κατά απόσταση H κατά:

$$dW_g = \delta m g H = (\rho dV)gH = (\rho\pi(b^2-a^2)dH)gH,$$

οπότε για την πεπερασμένη μετατόπιση δH θα έχουμε:

$$\delta W_g = \int_0^{\delta H}(\rho\pi(b^2-a^2)dH)gH = \rho\pi(b^2-a^2)g\frac{(\delta H)^2}{2}.$$

Εξισώνοντας τις δύο μεταβολές καταλήγουμε στη σχέση:

$$\chi = \frac{\rho(b^2-a^2)\left(\ln\frac{b}{a}\right)g\delta H}{\epsilon_0\Phi_0^2}.$$

42. (α) Να αποδειχθεί ότι το μαγνητικό πεδίο στον άξονα ενός σωληνοειδούς με N σπείρες ανά μονάδα μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I δίνεται, στο όριο $N\to\infty$ από τη σχέση:

$$B_z = 2\pi KNI[\cos\theta_1+\cos\theta_2],$$

για κατάλληλα ορισμένες γωνίες θ_1 και θ_2.

(β) Για ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους L και ακτίνας a να δειχτεί ότι το μαγνητικό πεδίο κοντά στον άξονα και στο κέντρο είναι βασικά παράλληλο στον άξονα, αλλά έχει μια μικρή ακτινική συνιστώσα με μέγεθος

$$B_\rho \simeq \frac{96\pi NI}{c}\left(\frac{a^2z\rho}{L^4}\right),$$

για $z<<L,\ \rho<<a$.

(γ) Να δειχτεί ότι στο άκρο ενός μακρού σωληνοειδούς κοντά στον άξονα οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$B_z \simeq \frac{2\pi NI}{c},\quad B_\rho = \pm\frac{\pi NI\rho}{ca}.$$

Λύση: (α) Η συνεισφορά ενός τμήματος του σωληνοειδούς μήκους dz θα είναι $dB_z = 2\pi KNIdz\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, όπως μπορεί να δειχθεί με στοιχειώδεις μεθόδους. Έχουμε επιλέξει το $z=0$ να βρίσκεται στο σημείο παρατήρησης. Ολοκληρώνουμε από $z=z_1$ μέχρι $z=z_2$:

$$B_z = 2\pi KNI\int_{z_1}^{z_2}dz\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Αλλά: $\int dz\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$, οπότε:

$$B_z = 2\pi KNI\left[\frac{z_2}{\sqrt{R^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{R^2+z_1^2}}\right].$$

Όμως $\frac{z_2}{\sqrt{R^2+z_2^2}} = \cos\theta_2, \quad -\frac{z_1}{\sqrt{R^2+z_1^2}} = \cos\theta_1$ και τελικά:

$$B_z = 2\pi KNI[\cos\theta_1 + \cos\theta_2].$$

(β) Αλλάζουμε ελαφρά συμβολισμό και θέτουμε το $z = 0$ στο μέσο του πηνίου, ενώ συμβολίζουμε με z τη συντεταγμένη του σημείου παρατήρησης. Τότε:

$$B_z = 2\pi KNI[\cos\theta_1 + \cos\theta_2] = 2\pi KNI\left[\frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}+z\right)^2}}\right].$$

Αφού το z είναι μικρό, μπορούμε να αναπτύξουμε και να κρατήσουμε τους όρους μέχρι z^2 :

$$B_z \simeq 4\pi KNI\left[1 - 24\left(\frac{Rz}{L^2}\right)^2\right].$$

Στη συνέχεια θυμόμαστε ότι, λόγω συμμετρίας, $B_\phi = 0$, οπότε η $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ δίνει:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(rB_\rho) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = 192\pi KNI\frac{R^2 z}{L^4} \Rightarrow B_\rho = 96\pi KNI\frac{R^2 z\rho}{L^4} + \frac{C}{\rho^2},$$

όπου $C = 0$, ώστε το B_ρ να είναι παντού πεπερασμένο.

(γ) Στο άκρο του σωληνοειδούς και κοντά στον άξονα θα έχουμε:

$$B_z \simeq 2\pi KNI\left[\frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}+z\right)^2}}\right] =$$

$$= 2\pi KNI\left[\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{R^2+(L-x)^2}}\right], x \equiv \frac{L}{2} - z.$$

Για θέσεις κοντά στην άκρη το x θα είναι μικρό, οπότε αναπτύσσουμε:

$$B_z \simeq 2\pi KNI\left[\frac{L}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{R^2 L}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{1}{R} - \frac{R^2}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\right)x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 2\pi KNI\left(\frac{1}{R} - \frac{R^2}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \simeq \frac{2\pi KNI}{R},$$

αφού το L είναι μεγάλο. Συνεπώς:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(rB_\rho) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{2\pi KNI}{R} \Rightarrow B_\rho = -\frac{\pi KNI\rho}{R}.$$

43. Παράλληλα στον άξονα κυλινδρικού αγωγού ακτίνας a και σε απόσταση d από αυτόν υπάρχει μια κυλινδρική κοιλότητα ακτίνας b $(d + b < a)$. Στο υπόλοιπο υλικό του κυλίνδρου κυκλοφορεί ρεύμα παράλληλο με τον άξονα με ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στην κοιλότητα.

    Λύση: Το θεώρημα του Ampere δίνει για το εσωτερικό αγωγού το αποτέλεσμα: $2\pi\rho B = 4\pi K\pi\rho^2 J \Rightarrow B = 2\pi KJ\rho$ με συνιστώσες: $B_x = B\left(-\frac{y}{\rho}\right) = -2\pi KJy,\ B_y = B\left(\frac{x}{\rho}\right) = 2\pi KJx$. Αυτές οι σχέσεις ισχύουν ως έχουν για τον μεγάλο αγωγό. Για το εσωτερικό μικρού αγωγού με αντίθετη πυκνότητα ρεύματος ισχύουν οι σχέσεις: $B_x = +2\pi KJy,\ B_y = -2\pi KJ(x-d)$, όπου έχουμε υποθέσει ότι το κέντρο του μικρού αγωγού βρίσκεται στο σημείο $(d,0)$. Μένει η υπέρθεση: $B_x = -2\pi KJy + 2\pi KJy = 0, \quad B_y = 2\pi KJx - 2\pi KJ(x-d) = 2\pi KJd$. Το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό μέσα στην κοιλότητα.

44. Κυκλικός βρόχος ακτίνας a βρίσκεται στο επίπεδο xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων.

(α) Δείξτε ότι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού είναι:

$$A_\phi = \frac{4Ia}{c}\int_0^\infty dk \cos kz I_1(k\rho_<)K_1(k\rho_>), \quad \rho_> \equiv max(a,\rho), \ \rho_< \equiv min(a,\rho).$$

(β) Δείξτε ότι μια εναλλακτική έκφραση για το A_ϕ είναι η:

$$A_\phi = \frac{2\pi Ia}{c}\int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_1(ka)J_1(k\rho).$$

(γ) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο πάνω στον άξονα των z χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εκφράσεις για το δυναμικό.

Λύση: (α) Ξεκινάμε από τη σχέση $\vec{A} = K\int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$. Το πρόβλημα έχει αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε αρκεί να κάνουμε τον υπολογισμό για $\phi = 0$. Φυσικά: $A_z = 0$. Για να προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε ορισμένες βοηθητικές σχέσεις. $\vec{J} = J_{\phi'}\hat{\phi}'$, $J_{\phi'} = \frac{I}{2\pi}\frac{\delta(r'-a)}{r'}\delta(z')$, $\phi' = -\sin\phi'\hat{x} + \cos\phi'\hat{y}$ $\vec{x} = r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{z}$, $\vec{x}' = a\cos\phi'\hat{x} + a\sin\phi'\hat{y}$, $|\vec{x}-\vec{x}'| = [x^2 + x'^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}']^{\frac{1}{2}} = |(r\sin\theta - a\cos\phi')\hat{x} - a\sin\phi'\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}| = [r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi']^{\frac{1}{2}}$. Προκύπτει ότι:

$$A_x = K\int d^3x' \frac{J_x}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = KI\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty dr' r' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\frac{I}{2\pi}\frac{\delta(r'-a)}{r'}\delta(z')(-\sin\phi')}{[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\phi']^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

επειδή είναι περιττή ως προς ϕ' και:

$$A_y = K\int d^3x' \frac{J_y}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = KI\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty dr' r' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{\frac{I}{2\pi}\frac{\delta(r'-a)}{r'}\delta(z')(+\cos\phi')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')}\cos k(z-z') I_m(kr_<)K_m(kr_>),$$

την οποία αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$A_y = K\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\phi' \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{im(0-\phi')}\cos kz I_m(kr_<)K_m(kr_>)\frac{I}{2\pi}\cos\phi',$$

όπου θέσαμε $\phi = 0$, αφού έτσι επιλέξαμε προηγουμένως. Το απλό ολοκλήρωμα στο ϕ' δίνει: $\int_0^{2\pi} d\phi' e^{im(0-\phi')}\cos\phi' = \pi(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})$ οπότε:

$$A_y = K\frac{2}{\pi}\frac{I}{2\pi}\int_0^\infty dk \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos kz I_m(kr_<)K_m(kr_>)\pi(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) =$$

$$= \frac{KI}{\pi}\int_0^\infty dk \cos kz[I_1(kr_<)K_1(kr_>) + I_{-1}(kr_<)K_{-1}(kr_>)] = \frac{2KI}{\pi}\int_0^\infty dk \cos kz I_1(kr_<)K_1(kr_>),$$

αφού ο αναγνώστης μπορεί ν' αποδείξει ότι: $I_{-1}(x) = I_1(x)$, $K_{-1}(x) = K_1(x)$.

(β) Θα μπορούσαμε ν' αντικαταστήσουμε στο A_y το ανάπτυγμα:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(kr)J_m(kr')e^{-k|z_> - z_<|},$$

με το αποτέλεσμα:

$$A_y = K\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty dk\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^\infty dr'\delta(r'-a)(\cos\phi')e^{im(0-\phi')}J_m(kr)J_m(kr')e^{-k|z-0|} =$$

$$= \frac{KI}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty dkJ_m(kr)J_m(ka)e^{-k|z|} = \frac{KI}{2}\int_0^\infty dk[J_1(kr)J_1(ka)+J_{-1}(kr)J_{-1}(ka)]e^{-k|z|} =$$

$$= KI\int_0^\infty dkJ_1(kr)J_1(ka)e^{-k|z|},$$

όπως θα γίνει προφανές μόλις ο αναγνώστης δείξει ότι $J_{-1}(x) = -J_1(x)$.

(γ) Από την $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\vec{B} = B_r\hat{r} + B_z\hat{z}, \quad B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}.$$

Το B_r μηδενίζεται: από την έκφραση στο ερώτημα (α) προκύπτει:

$$B_r = \frac{2KI}{\pi}\int_0^\infty dk\cos kz I_1(0)K_1(ka) = 0,$$

ενώ από την έκφραση στο ερώτημα (β) προκύπτει:

$$B_r = KI\int_0^\infty dkk\epsilon(z)e^{-k|z|}J_1(0)J_1(ka) = 0.$$

Για το B_z είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση στο (β):

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} = \frac{1}{r}KI\int_0^\infty dk\frac{\partial(krJ_1(kr))}{\partial(kr)}J_1(ka)e^{-k|z|} = KI\int_0^\infty dkkJ_0(kr)J_1(ka)e^{-k|z|}.$$

Για την έκφραση στο (α) πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις: (1) Αν $r > a$, θα ισχύει $r_> = r,\ r_< = a$, και

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(krA_\phi)}{\partial(kr)} = \frac{1}{r}\frac{2KI}{\pi}\int_0^\infty dk\cos kz I_1(ka)\frac{\partial(krK_1(kr))}{\partial(kr)}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να δείξει ότι $\frac{d(xI_1)}{dx} = xI_0,\ \frac{d(xK_1)}{dx} = -xK_0$, οπότε:

$$B_z = \frac{2KI}{\pi r}\int_0^\infty dk\cos kz I_1(ka)(-krK_0(kr)) = -\frac{2KI}{\pi}\int_0^\infty dkk\cos kz I_1(ka)K_0(kr).$$

(2) Αν $r < a$, θα ισχύει $r_> = a,\ r_< = r$, και

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(krA_\phi)}{\partial(kr)} = \frac{2KI}{\pi r}\int_0^\infty dk\cos kz K_1(ka)\frac{\partial(krI_1(kr))}{\partial(kr)} = \frac{2KI}{\pi}\int_0^\infty dkk\cos kz K_1(ka)I_0(kr).$$

45. Κυκλικός βρόχος με ρεύμα I έχει το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και το διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδό του έχει γωνίες θ και ϕ. Το μαγνητικό πεδίο που υπάρχει στην περιοχή δίνεται από τις σχέσεις: $B_x = B_0(1+\beta y), \quad B_y = B_0(1+\beta x)$.

    (α) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στον βρόχο.

    (β) Υπολογίστε τη ροπή στην πιό χαμηλή τάξη. Τί συμβαίνει με τις ανώτερες τάξεις;

Λύση: Στρέφουμε το σύστημα αναφοράς με σκοπό το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια, το $\hat{n}$, με πολικές γωνίες (θ, ϕ), να έρθει πάνω στον καινούργιο άξονα των z. Ακριβέστερα, στρέφουμε το σύστημα (x, y, z) πρώτα περί τον άξονα $z' \equiv z$ κατά γωνία ϕ, ώστε να προκύψει το $(x', y', z' \equiv z)$. Σ' αυτό το σύστημα το $\hat{n}$ θα έχει πολικές γωνίες $(\theta, 0)$. Στρέφουμε τώρα το σύστημα (x', y', z') πρώτα περί τον άξονα $y' \equiv y''$ κατά γωνία θ, ώστε να προκύψει το $(x'', y' \equiv y'', z'')$. Σ' αυτό το σύστημα το $\hat{n}$ θα έχει πολικές γωνίες $(0, 0)$, δηλαδή θα κείται πάνω στον z''. Αναγόμαστε στο πρόβλημα κυκλικού βρόχου στο επίπεδο (x'', y'') μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}''$ και αναζητούμε τη δύναμη $\vec{F}''$ που ασκείται πάνω του. Τέλος πρέπει να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα αναφοράς. Αν συμβολίσουμε τους πίνακες των δύο επί μέρους στροφών με M_ϕ, M_θ και τον ολικό πίνακα με M, θα είναι: $M = M_\theta M_\phi$ και $\hat{n}'' = M\hat{n}$, $\vec{r}'' = M\vec{r}$, $\vec{B}'' = M\vec{B}$, $\vec{F}'' = M\vec{F}$. Για να υπολογίσουμε τον M_ϕ μπορούμε να φανταστούμε ότι βλέπουμε τη στροφή σε κάτοψη, κοιτώντας από τον θετικό άξονα των z. Είναι τότε προφανές ότι

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ \text{-}\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εξ άλλου, η κάτοψη από τα θετικά y' δίνει (αυτό θέλει λίγη περισσότερη προσοχή):

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Άρα:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad M^T = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ισχύει η σχέση: $\vec{B}''(\vec{r}'') = M\vec{B}(\vec{r}) = M\vec{B}(M^T\vec{r}'')$. Η σχέση $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$ δίνει:

$$M\vec{B}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(1+\beta y) \\ B_0(1+\beta x) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi B_0(1+\beta y) + \cos\theta\sin\phi B_0(1+\beta x) \\ -\sin\phi B_0(1+\beta y) + \cos\phi B_0(1+\beta x) \\ \sin\theta\sin\phi B_0(1+\beta y) + \sin\theta\sin\phi B_0(1+\beta x) \end{bmatrix}.$$

Μένει ν' αντικατασταθεί το $\vec{r} = (x, y, z)$ συναρτήσει του $\vec{r}''$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi x'' - \sin\phi y'' + \sin\theta\cos\phi z'' \\ \cos\theta\sin\phi x'' + \cos\phi y'' + \sin\theta\sin\phi z'' \\ -\sin\theta x'' + \cos\theta z'' \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$B''_{x''} = B_0\cos\theta(\cos\phi + \sin\phi) + 2\beta B_0\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi x'' +$$

$$+\beta B_0\cos\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)y'' + 2\beta B_0\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi z'',$$

$$B''_{y''} = B_0(\cos\phi - \sin\phi) + \beta B_0 \cos\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)x'' -$$
$$-2\beta B_0 \sin\phi\cos\phi y'' + \beta B_0 \sin\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)z'',$$
$$B''_{z''} = B_0 \sin\theta(\cos\phi + \sin\phi) + 2\beta B_0 \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi x'' +$$
$$+\beta B_0 \sin\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)y'' + 2\beta B_0 \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi z''.$$

Υπολογισμός της δύναμης:

$$\vec{F}'' = I\int \vec{dr}'' \times \vec{B}'', \vec{r}'' = x''\hat{x}'' + y''\hat{y}'' = a\cos\chi\hat{x}'' + a\sin\chi\hat{y}'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{dr}'' = -a\sin\chi\hat{x}'' + a\cos\chi\hat{y}'' \equiv dr_{x''}\hat{x}'' + dr_{y''}\hat{y}''.$$

Σημειώνουμε ότι το z'' είναι μηδέν πάνω στο δρόμο ολοκλήρωσης, οπότε:

$$\vec{dr}'' \times \vec{B}'' = \begin{vmatrix} \hat{x}'' & \hat{y}'' & \hat{z}'' \\ dr_{x''} & dr_{y''} & dr_{z''} \\ B''_{x''} & B''_{y''} & B''_{z''} \end{vmatrix} = \hat{x}''(dr_{y''}B''_{z''} - dr_{z''}B''_{y''}) +$$
$$+\hat{y}''(dr_{z''}B''_{x''} - dr_{x''}B''_{z''}) + \hat{z}''(dr_{x''}B''_{y''} - dr_{y''}B''_{x''})$$

και η αντικατάσταση θα δώσει:

$$\vec{dr}'' \times \vec{B}'' = ad\chi\hat{x}''\{\cos\chi[B_0\sin\theta(\cos\phi + \sin\phi) +$$
$$+2\beta B_0 \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi a\cos\chi + \beta B_0\sin\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)a\sin\chi]\} +$$
$$+ad\chi\hat{y}''\{\sin\chi[B_0\sin\theta(\cos\phi + \sin\phi) + 2\beta B_0\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi a\cos\phi +$$
$$+\beta B_0 \sin\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)]a\sin\chi\} +$$
$$+ad\chi\hat{z}''\{-\sin\chi[B_0(\cos\phi - \sin\phi) + \beta B_0\cos\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)a\cos\chi -$$
$$-2\beta B_0 \sin\phi\cos\phi a\sin\chi] - \cos\chi[B_0\cos\theta(\cos\phi + \sin\phi) + 2\beta B_0\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi a\cos\chi +$$
$$+\beta B_0\cos\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)a\sin\chi]\}.$$

Από την ολοκλήρωση πάνω στη γωνία ϕ θα επιζήσουν μόνο οι όροι $\int_0^{2\pi} d\chi\cos^2\chi = \int_0^{2\pi} d\chi\sin^2\chi = \pi$, συνεπώς

$$\vec{F}'' = \begin{bmatrix} 2Ia^2\pi\beta B_0\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi \\ Ia^2\pi\beta B_0\sin\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ 2Ia^2\pi\beta B_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F} = M^T\vec{F}'' = \begin{bmatrix} Ia^2\pi\beta B_0\sin\theta\sin\phi \\ Ia^2\pi\beta B_0\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Μια προσεγγιστική έκφραση για τη δύναμη είναι η $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$, όπου $\vec{m} = \pi a^2 I\hat{n} \to \vec{m}\cdot\vec{B} = \pi a^2 I(B_x\sin\theta\cos\phi + B_y\sin\theta\sin\phi) = \pi a^2 I(B_0(1+\beta y)\sin\theta\cos\phi + B_0(1+\beta x)\sin\theta\sin\phi) \to$

$$\to \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \pi a^2 I B_0(\hat{x}\sin\theta\sin\phi + \hat{y}\sin\theta\cos\phi).$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η προσέγγιση ταυτίζεται με το ακριβές αποτέλεσμα, κι αυτό γιατί η προσέγγιση αρχίζει θεωρώντας το ανάπτυγμα: $B_k(\vec{x}) = B_k(\vec{0}) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}B_k(\vec{0}) + \ldots$, που στην περίπτωσή μας τερματίζεται στον δεύτερο όρο: $\vec{\nabla}B_x = \beta B_0\hat{y}$, $\vec{\nabla}B_y = \beta B_0\hat{x}$, $vec\nabla B_z = \vec{0}$.

(β) Για τη ροπή ισχύει: $\vec N=\int d^3x\vec x\times(\vec J\times\vec B)$, $B_k(\vec x)=B_k(\vec 0)+\vec x\cdot\vec\nabla B_k(\vec 0)+\dots$, άρα

$$\vec N\simeq\int d^3x\vec x\times(\vec J\times\vec B(\vec 0))=\int d^3x[\vec x\cdot\vec B(\vec 0)]\vec J-\int d^3x[\vec x\cdot\vec J]\vec B(\vec 0).$$

Υπενθύμιση:

$$\int d^3xg\vec J\cdot\vec\nabla f=-\int d^3xf\vec\nabla\cdot(g\vec J)=-\int d^3xf\vec J\cdot\vec\nabla g-\int d^3xfg\vec\nabla\cdot\vec J=-\int d^3xf\vec J\cdot\vec\nabla g,$$

αφού $\vec\nabla\cdot\vec J=0$. Τελικά:

$$\int d^3x[f\vec J\cdot\vec\nabla g+g\vec J\cdot\vec\nabla f]=0.$$

Πορίσματα: (1) $[f=1,g=x_k]\to\int d^3x\vec J\cdot\hat x_k=0\to\int d^3xJ_k=0$. (2) $[f=x_k,g=x_l]\to\int d^3x[x_k\vec J\cdot\hat x_l+x_l\vec J\cdot\hat x_k]=0\to\int d^3x[x_kJ_l+x_lJ_k]=0$. (3) $[f=r,g=r]\to 2\int d^3xr\vec J\cdot\hat r=0\to\int d^3x\vec r\cdot\vec J=0$. Σύμφωνα με το πόρισμα (3) το ολοκλήρωμα $\int d^3x[\vec x\cdot\vec J]\vec B(\vec 0)$, που συνεισφέρει κατ΄ αρχήν στη ροπή, θα μηδενίζεται. Εξ άλλου: $\int d^3x[\vec x\cdot\vec B(\vec 0)]\vec J\Big|_k=\int d^3xB_l(\vec 0)x_lJ_k=\frac{1}{2}B_l(\vec 0)\int d^3x(x_lJ_k-x_kJ_l)$, σύμφωνα με το πόρισμα (2). Συνεχίζουμε:

$$\int d^3x[\vec x\cdot\vec B(\vec 0)]\vec J\Big|_k=\frac{1}{2}B_l(\vec 0)\int d^3x\epsilon_{mlk}(\vec x\times\vec J)_m=-\frac{1}{2}\int d^3x\epsilon_{lmk}B_l(\vec 0)(\vec x\times\vec J)_m=$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^3x[\vec B(\vec 0)\times(\vec x\times\vec J)]_k\Rightarrow\int d^3x[\vec x\cdot\vec B(\vec 0)]\vec J=-\frac{1}{2}\int d^3x\epsilon_{lmk}\vec B(\vec 0)\times(\vec x\times\vec J)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec N=\left[\frac{1}{2}\int d^3x(\vec x\times\vec J)\right]\times\vec B(\vec 0)\equiv\vec m\times\vec B(\vec 0).$$

Στην περίπτωσή μας

$$\vec N=\vec m\times\vec B(\vec 0)=-\pi Ia^2B_0\cos\theta\hat x+\pi Ia^2B_0\cos\theta\hat y+\pi Ia^2B_0\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)\hat z.$$

46. Σφαίρα ακτίνας a φέρει φορτίο με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ. Η σφαίρα περιστρέφεται περί μία διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο μέσα κι έξω από τη σφαίρα.

<u>Λύση:</u> Κατ΄ αρχή προσδιορίζουμε την (επιφανειακή) πυκνότητα ρεύματος συναρτήσει της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $\Sigma=\sigma\frac{1}{a^2}\delta(r-a)$, $\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}$:

$$\vec J=\Sigma\vec v=\frac{1}{a^2}\sigma\delta(r-a)\vec v=\left[\frac{1}{a^2}\sigma\delta(r-a)\right][\omega a\sin\theta\hat\phi]=\sigma\omega\frac{1}{a}\delta(r-a)\sin\theta\hat\phi,\ \ \hat\phi=-\sin\phi\hat x+\cos\phi\hat y,$$

$$J_\phi=\sigma\omega\frac{1}{a}\delta(r-a)\sin\theta,\ \ \vec J\cdot\hat x=-J_\phi\sin\phi,\ \ \vec J\cdot\hat y=J_\phi\cos\phi$$

Λόγω αζιμουθιακής συμμετρίας αρκεί να υπολογίσουμε το διανυσματικό δυναμικό $\vec A=K\int d^3x'\frac{\vec J(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}$ στο $\phi=0$, οπότε

$$A_\phi=A_y=K\int d^3x'\frac{\vec J(\vec x')\cdot\hat y}{|\vec x-\vec x'|}=K\int d^3x'\frac{J_{\phi'}\cos\phi'}{|\vec x-\vec x'|}=$$

$$=K\sigma\omega\frac{1}{a}\int dr'r'^2d\cos\theta'd\phi'\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\delta(r'-a)\sin\theta'\cos\phi'.$$

Αλλά
$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi),$$
οπότε έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση
$$\sin\theta'\cos\phi'=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}[Y_{1,-1}(\theta',\phi')-Y_{1,1}(\theta',\phi')],$$
ώστε να καταλήξουμε στην έκφραση:
$$A_\phi=K\sigma\omega a\int d\cos\theta' d\phi'\sqrt{\frac{2\pi}{3}}[Y_{1,-1}(\theta',\phi')-Y_{1,1}(\theta',\phi')]\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}K\sigma\omega a\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi)\int d\cos\theta' d\phi'[Y_{1,-1}(\theta',\phi')-Y_{1,1}(\theta',\phi')]Y^*_{lm}(\theta',\phi')=$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}4\pi K\sigma\omega a\sum_{lm}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi)\delta_{l1}[\delta_{m,-1}-\delta_{m1}]=$$
$$=4\pi K\sigma\omega a\frac{1}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}[Y_{1,-1}(\theta,\phi)-Y_{1,1}(\theta,\phi)]=\frac{4\pi K\sigma\omega a}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\cos\phi=\frac{4\pi K\sigma\omega a}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta.$$
(Υπενθυμίζουμε ότι $\cos\phi=1$, αφού υπολογίζουμε για $\phi=0$). Αν $r<a$ θα έχουμε $r_<=r$, $r_>=a$ και $A_\phi=\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{r}{a}\sin\theta$. Αν $r>a$ θα έχουμε $r_<=a$, $r_>=r$ και $A_\phi=\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{a^2}{r^2}\sin\theta$.

Από τις γενικές εκφράσεις:
$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right)-\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi).$$

Για $r<a$:
$$B_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{r}{a}\sin\theta\right)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{r}{a}2\sin\theta\cos\theta=\frac{8\pi K\sigma\omega}{3a}\cos\theta,$$
$$B_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{r}{a}\sin\theta\right)=-\frac{8\pi K\sigma\omega}{3a}\sin\theta.$$
Η σχέση $\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta=\hat{z}$ δείχνει ότι $\vec{B}=\frac{8\pi K\sigma\omega}{3a}\hat{z}$, δηλαδή το πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας είναι σταθερό κατά τον άξονα των z.

Για $r>a$:
$$B_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\right)=\frac{8\pi K\sigma\omega}{3}\frac{a^2}{r^3}\cos\theta,$$
$$B_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\right)=\frac{4\pi K\sigma\omega}{3}\frac{a^2}{r^3}\sin\theta.$$

47. Ένα μαγνητικά “σκληρό” υλικό έχει το σχήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου μήκους L και ακτίνας a. Ο κύλινδρος έχει ομογενή μαγνήτιση M_0 παράλληλη στον άξονά του. (α) Προσδιορίστε τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ σ' όλα τα σημεία του άξονα του κυλίνδρου, μέσα κι έξω ασπό το υλικό. (β) Σχεδιάστε τα πηλίκα $\frac{B_z}{\mu_0 M_0}$ και $\frac{H_z}{M_0}$ στον άξονα συναρτήσει του z για $\frac{L}{a}=5$.

Λύση: Ξεκινάμε από την εξίσωση του Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0$, που ισχύει για στατικές καταστάσεις όπου επί πλέον το ρεύμα μηδενίζεται. Μπορούμε να ορίσουμε το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό: $\vec{H}=-\vec{\nabla}\Phi_M$. Τότε:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot[\mu_0(\vec{H}+\vec{M})]=0\Rightarrow-\vec{\nabla}^2\Phi_M+\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=0\Rightarrow\vec{\nabla}^2\Phi_M=\vec{\nabla}\cdot\vec{M}\equiv-\rho_M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Phi_M(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\rho_M(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Για τους "σκληρούς" σιδηρομαγνήτες είναι χρήσιμη η εξιδανίκευση της ασυνεχούς μεταβολής της μαγνήτισης στα όρια. Ολοκλήρωση σ' ένα κουτί του Gauss δίνει: $\sigma_M=\hat{n}\cdot\vec{M}$. Άρα έχουμε έναν πρόσθετο όρο:

$$\Phi_M(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\rho_M(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\frac{1}{4\pi}\int da'\,\frac{\sigma_M(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}'\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\frac{1}{4\pi}\int da'\,\frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Φυσικά, αν η μαγνήτιση είναι σταθερή μέσα στο υλικό, το ολοκλήρωμα όγκου θα είναι μηδέν. Στην περίπτωσή μας ισχύει ακριβώς αυτό, οπότε:

$$\Phi_M=\frac{1}{4\pi}\left[\int_{S(V)}da'\,\frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]=\frac{1}{4\pi}\left[\int_0^a d\rho'\,\frac{2\pi\rho' M_0}{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}}+\int_0^a d\rho'\,\frac{2\pi\rho'(-M_0)}{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{L}{2}+z\right)^2}}\right]=$$

$$=\frac{M_0}{2}\left[\sqrt{a^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}-\left|z-\frac{L}{2}\right|-\sqrt{a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}+\left|z+\frac{L}{2}\right|\right].$$

Η συνάρτηση είναι περιττή, άρα η $H_z=-\frac{\partial\Phi_M}{\partial z}$ θα είναι άρτια και αρκεί να θεωρήσουμε μόνο θετικά z. Προκύπτει:

$$\frac{H_z}{M_0}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}\right)^2}}-\epsilon-\frac{\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}\right)^2}}+1\right],$$

όπου $\epsilon=+1$ για $z>\frac{L}{2}$ και $\epsilon=-1$ για $0\le z<\frac{L}{2}$. Εξ άλλου $B_z=\mu_0(H_z+M_z)$, δηλαδή μέσα θα είναι:

$$\frac{B_z}{\mu_0 M_0}=\frac{H_z+M_0}{M_0}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}\right)^2}}-\frac{\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}\right)^2}}\right],$$

ενώ έξω θα είναι:

$$\frac{B_z}{\mu_0 M_0}=\frac{H_z+0}{M_0}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}-\frac{L}{2a}\right)^2}}-\frac{\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}+\frac{L}{2a}\right)^2}}\right].$$

Είναι φανερό ότι το B_z δίνεται παντού από την ίδια έκφραση και είναι συνεχής συνάρτηση, ενώ το H_z εμφανίζει ασυνέχειες στις δύο βάσεις.

48. Ένα μαγνητοστατικό πεδίο οφείλεται αποκλειστικά σε μια μόνιμη μαγνήτιση εντοπισμένη στο χώρο.

(α) Δείξτε ότι

$$\int d^3x\vec{B}\cdot\vec{H}=0.$$

(β) Δείξτε ότι η μαγνητοστατική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U=\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{H}\cdot\vec{H}=-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{M}\cdot\vec{H}.$$

Λύση: (α) Στην περίπτωση αυτή υπάρχει βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό: $\vec{H}=-\vec{\nabla}\Phi_M$, άρα

$$\int d^3x\vec{B}\cdot\vec{H}=-\int d^3x\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\Phi_M=-\int d^3x[\vec{\nabla}(\Phi_M\vec{B})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\Phi_M]=-\int da\hat{n}\Phi_M\vec{B}=0.$$

Στην τελευταία ισότητα επικαλεστήκαμε το γεγονός ότι τα Φ_M και $\vec{B}$ μεταβάλλονται σαν $\frac{1}{r}$ και $\frac{1}{r^2}$ συναρτήσει του r, ενώ το da σαν r^2, οπότε το ολοκλήρωμα συμπεριφέρεται σαν $\frac{1}{r}$ και, αφού ολοκληρώνουμε σ' όλο το χώρο, μηδενίζεται.

(β) Η ενέργεια μαγνητικού διπόλου ροπής $\vec{m}$ σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ δίνεται από τη σχέση $U=-\vec{m}\cdot\vec{B}$, οπότε, για συνεχή κατανομή, $U=-\int d^3x\vec{M}\cdot\vec{B}$, όπου $\vec{M}$ η μαγνήτιση (ροπή ανά μονάδα όγκου). Αν κατασκευάσουμε την κατανομή διπόλων φέρνοντας σταδιακά δίπολα από το άπειρο και αυξάνοντας τη μαγνήτιση από μηδέν μέχρι την τελική της τιμή, η ενέργεια θα μεταβάσλλεται σε κάθε νέα προσθήκη κατά $\delta U=-\int d^3x\delta\vec{M}\cdot\vec{B}$. Εξ άλλου: $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\Rightarrow\delta\vec{M}=\frac{1}{\mu_0}\delta\vec{B}-\delta\vec{H}$, όπου, για απλότητα, χρησιμοποιήσαμε μονάδες SI και όχι τις γενικότερες εκφράσεις με τις σταθερές k, K, α. Συνεπώς:

$$\delta U=-\int d^3x\frac{1}{\mu_0}\delta\vec{B}\cdot\vec{B}+\int d^3x\delta\vec{H}\cdot\vec{B}.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, με βάση το σκέλος (α) της άσκησης. Άρα, ολοκληρώνοντας:

$$U=U_0-\int d^3x\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2=U_0-\frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\mu_0^2[\vec{H}^2+\vec{M}^2+2\vec{H}\cdot\vec{M}]=$$

$$=U_0-\frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\mu_0^2[\vec{H}^2+\vec{M}^2+2\vec{H}\cdot\vec{M}]=$$

$$=U_0-\frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\mu_0^2\left[\vec{H}^2+\vec{M}^2+2\vec{H}\cdot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}\right)\right]=$$

$$=U_0-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\left[\vec{H}^2+\vec{M}^2+\frac{2}{\mu_0}\vec{H}\cdot\vec{B}-2\vec{H}^2\right]=$$

$$=U_0-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{M}^2+\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{H}^2=$$

$$=U_0-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{M}^2+\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{H}\cdot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)=U_0-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{M}^2+\frac{1}{2}\int d^3x\vec{H}\cdot\vec{B}-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{H}\cdot\vec{M}=$$

$$=U_0-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{M}^2-\frac{\mu_0}{2}\int d^3x\vec{H}\cdot\vec{M},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και πάλι το αποτέλεσμα του πρώτου σκέλους της άσκησης. Οι πρώτοι δύο όροι του τελικού αποτελέσματος είναι σταθερές ολοκλήρωσης.