ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΤΕΤΑΡΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

30. Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R έχει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ παντού, εκτός από τη σφαιρική περιοχή περί τον βόρειο πόλο, που ορίζεται από την εξίσωση $\theta \leq \alpha$.

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό της επιφάνειας δίνεται από την έκφραση:

$$\Phi = \frac{Q}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)]\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta),$$

με τη σύμβαση: $P_{-1}(\cos\alpha) = -1$.

(β) Να βρεθεί και το δυναμικό στο εξωτερικό της επιφάνειας.

(γ) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων.

(δ) Ποιες είναι οι οριακές μορφές του δυναμικού στο εσωτερικό και του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων στις περιπτώσεις (1) $\alpha = \epsilon$, (2) $\alpha = \pi - \epsilon$, όπου το ϵ είναι πολύ μικρό.

<u>Λύση:</u> (α) και (β): Κατά τα γνωστά:

$$\Phi_> = \sum_l A_l \frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta), r \geq R, \quad \Phi_< = \sum_l B_l r^l P_l(\cos\theta), r \leq R,$$

με οριακές συνθήκες: $\Phi_>|_{r=R} = \Phi_<|_{r=R} \Rightarrow A_l = B_l R^{2l+1}$, και:

$$E_{r>}|_{r=R} - E_{r<}|_{r=R} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \Rightarrow -\left.\frac{\partial\Phi_>}{\partial r}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial\Phi_<}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum\frac{(l+1)A_l}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta) + \sum lB_l R^{l-1}P_l(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum(2l+1)B_l R^{l-1}P_l(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \Rightarrow B_l = -\frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}}\int_{\theta=0}^{\pi} d\cos\theta\sigma(\theta)P_l(\cos\theta).$$

Στην περίπτωσή μας $\sigma(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq \alpha, \\ \sigma_0, & \theta > \alpha \end{cases}$, οπότε

$$-\int_{\theta=0}^{\pi} d\cos\theta\sigma(\theta)P_l(\cos\theta) = \sigma_0\int_{x=-1}^{\cos\alpha}dxP_l(x).$$

Επικαλούμαστε την ταυτότητα $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1} - P'_{l-1}$ και καταλήγουμε στην

$$B_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}}\frac{\sigma_0}{2l+1}[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)] = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0(2l+1)R^{l+1}}[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)],$$

που με τη σειρά της συνεπάγεται:

$$\Phi_< = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)}{2l+1}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta),$$

$$\Phi_> = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta).$$

(γ) Αρκεί να γράψουμε την $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\vec{E} = -\hat{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}.$$

Αφού θέλουμε να το υπολογίσουμε για $r = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση για το $\Phi_<$. Κατ΄ αρχήν σημειώνουμε ότι $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0$. Στη συνέχεια:

$$E_r|_{r=0} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)}{2l+1}\frac{lr^{l-1}}{R^l}\bigg|_{r=0} P_l(\cos\theta).$$

Λόγω της αντικατάστασης $r = 0$ θα επιζήσει μόνο ο όρος $l = 1$:

$$E_r|_{r=0} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}\frac{P_2(\cos\alpha) - P_0(\cos\alpha)}{3}P_1(\cos\theta) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}\sin^2\alpha\cos\theta,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ρητές εκφράσεις: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$. Εντελώς παρόμοια:

$$E_\theta|_{r=0} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)}{2l+1}\frac{r^l}{R^l}\bigg|_{r=0}\frac{P_l(\cos\theta)}{\partial\theta} = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}\sin^2\alpha\sin\theta.$$

Τελικά: $\vec{E}\Big|_{r=0} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}\sin^2\alpha(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$. Αλλά $\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta = \hat{z}$, οπότε τελικά:

$$\vec{E}\Big|_{r=0} = \frac{Q\sin^2\alpha}{16\pi\epsilon_0 R^2}\hat{z}.$$

(δ) Κατ΄ αρχήν θ΄ αποδείξουμε μια βοηθητική σχέση: από τη γεννήτρια συνάρτηση για τα πολυώνυμα Legendre βρίσκουμε: $g(x,t) = \sum P_l t^l \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=1} = \sum P'(1)t^l \Rightarrow \frac{t}{(1-t)^3} = \sum P'(1)t^l$. Εξ άλλου: $\frac{t}{(1-t)^3} = \sum \frac{l(l+1)}{2}t^l$, άρα $P'(1) = \frac{l(l+1)}{2}$. Θεωρούμε τώρα το όριο $\alpha = \epsilon \to 0$. Τότε: $\cos\alpha \to 1 - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow P_l(\cos\alpha) \to P_l(1 - \frac{\alpha^2}{2}) \approx P_l(1) - \frac{\alpha^2}{2}P'(1) = 1 - \frac{l(l+1)\alpha^2}{4}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha) \to -\frac{(2l+1)\alpha^2}{2}.$$

Μ΄ αυτές τις προσεγγίσεις:

$$\Phi_< = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)}{2l+1}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta),$$

$$\approx \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{-\frac{(2l+1)\alpha^2}{2}}{2l+1}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta) = -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$= -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \frac{r^2}{R^2}}} = -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|},\ \vec{r}_0 \equiv R\hat{z}.$$

Εξ άλλου το φορτίο της σφαίρας είναι: $q = \sigma_0 R^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_\alpha^\pi d(-\cos\theta) = 2\pi\sigma_0 R^2(1+\cos\alpha) \to Q - Q\frac{a^2}{4}$, δηλαδή η διαφορά μεταξύ του φορτίου που θα είχε η σφαίρα αν ήταν πλήρης και του φορτίου που της λείπει. Ο όρος με το Q θα έδινε δυναμικό μηδέν μέσα στη σφαίρα, άρα το δυναμικό οφείλεται στο $-Q\frac{a^2}{4}$: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q\frac{a^2}{4}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}$, σε συμφωνία με τα παραπάνω. Παρόμοια με το δυναμικό έξω από τη σφαίρα:

$$\Phi_> \approx \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{-\frac{(2l+1)\alpha^2}{2}}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}P_l(\cos\theta) = -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$= -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}} = -\frac{Q\alpha^2}{16\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

Αντίστοιχα αντιμεντωπίζουμε την περίπτωση $\alpha = \pi - \epsilon$.

31. Λεπτός αγώγιμος δίσκος ακρίνας R βρίσκεται στο επίπεδο $x-y$ με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και έχει δυναμικό V_0. Θεωρήστε ως επί πλέον δεδομένο ότι η πυκνότητα φορτίου είναι ανάλογη της παράστασης $\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$, $\rho^2 = x^2+y^2$.

(α) Δείξτε ότι για $r > R$ το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{2V_0}{\pi}\frac{R}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta).$$

(β) Βρείτε το δυναμικό και για $r < R$.

(γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του δίσκου;

Λύση: Δίδεται ότι $\sigma = \frac{K}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$. Η γενική λύση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

Στον άξονα των z μπορούμε να χτησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις μεθόδους:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\rho=0}^{R}\sigma\frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\rho=0}^{R}\frac{K}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} =$$

$$= \frac{K}{4\epsilon_0}\int_{\rho=0}^{R}\frac{d\rho^2}{\sqrt{(R^2-\rho^2)(\rho^2+z^2)}} = (t \equiv \rho^2) = \frac{K}{4\epsilon_0}\int_{t=0}^{R^2}\frac{d\left(t+\frac{z^2-R^2}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{z^2-R^2}{2}\right)^2 + R^2z^2 - \left(t+\frac{z^2-R^2}{2}\right)^2}}.$$

Το ολοκλήρωμα είναι γνωστό: $\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{A}$, άρα:

$$\Phi|_{\rho=0} = \frac{K}{4\epsilon_0}\left[\arcsin\frac{R^2+\frac{z^2-R^2}{2}}{\sqrt{R^2z^2+\left(\frac{z^2-R^2}{2}\right)^2}} - \arcsin\frac{\frac{z^2-R^2}{2}}{\sqrt{R^2z^2+\left(\frac{z^2-R^2}{2}\right)^2}}\right] =$$

$$= \frac{K}{4\epsilon_0}\left[\arcsin 1 - \arcsin\frac{\frac{z^2-R^2}{2}}{\frac{z^2+R^2}{2}}\right] = \frac{K}{4\epsilon_0}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{z^2-R^2}{z^2+R^2}\right].$$

Αν $z=0$, το δυναμικό θα ισούται με V_0 :

$$\frac{K}{4\epsilon_0}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(-1)\right] = V_0 \Rightarrow \frac{K}{4\epsilon_0}\pi = V_0 \Rightarrow K = \frac{4\epsilon_0 V_0}{\pi} \Rightarrow .\sigma = \frac{4\epsilon_0 V_0}{\pi\sqrt{R^2-\rho^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi|_{\rho=0} = \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{z^2-R^2}{z^2+R^2}\right]. \quad (A)$$

(α) Για $z > R$ η εξίσωση (A) δίνει:

$$\Phi|_{\rho=0} = \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1-\frac{R^2}{z^2}}{1+\frac{R^2}{z^2}}\right] = \frac{2V_0}{\pi}\left[\left|\frac{R}{z}\right| - \frac{1}{3}\left|\frac{R}{z}\right|^3 + \frac{1}{5}\left|\frac{R}{z}\right|^5 - \dots\right] = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left|\frac{R}{z}\right|^{2n+1},$$

οπότε

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(1) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left|\frac{R}{z}\right|^{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l = 0, B_{2n+1} = 0, B_{2n} = \frac{2V_0}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}R^{2n+1},$$

οπότε:

$$\Phi_> = \frac{2V_0}{\pi}\frac{R}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta).$$

(β) Παρόμοια με την προηγούμενη ερώτηση, για $z < R$ θα έχουμε:

$$\Phi|_{\rho=0} = \frac{V_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\frac{z^2}{R^2}-1}{\frac{z^2}{R^2}+1}\right] = V_0 - \frac{2V_0}{\pi}\frac{z}{R}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z}{R}\right)^{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_< = V_0 - \frac{2V_0}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta).$$

(γ) Το φορτίο του δίσκου είναι: $Q = \int_0^R \sigma(\rho)2\pi\rho d\rho = \pi\int_0^R \frac{K}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho^2 = 2\pi KR = 8\epsilon_0 V_0 R$, άρα $C = \frac{Q}{V_0} = 8\epsilon_0 R$.

32. Θεωρήστε το χώρο μεταξύ δύο γειωμένων (άπειρων) επιπέδων (που βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$), ο οποίος μπορεί να περιέχει φορτία.

(α) Δείξτε ότι μία δυνατή μορφή της συνάρτησης Green είναι η:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right)K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right).$$

(β) Δείξτε ότι μια εναλλακτική μορφή της συνάρτησης Green είναι η:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\phi-\phi')}\int_0^{\infty}dk J_m(k\rho)J_m(k\rho')\frac{\sinh(kz_<)\sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}.$$

Λύση: Υπενθυμίζουμε ότι το δυναμικό εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Green ως εξής:

$$\Phi(\vec{x}) = k\int_V d^3x'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)}da'\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right].$$

(α) Πρέπει να αναπτύξουμε τη συνάρτηση δέλτα σε ορθογώνια σύνολα συναρτήσεων, τα οποία ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Μία σχέση που ταιριάζει είναι η

$$\delta(\phi-\phi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{im(\phi-\phi')}.$$

Οι συναρτήσεις $e^{im\phi}$, με ακέραια m, είναι περιοδικές, όπως θά ΄πρεπε. Μία σχέση που μπορεί να βοηθήσει είναι η

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(z-z')} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \cos k(z-z') = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk[\cos kz \cos kz' - \sin kz \sin kz'].$$

Οι συναρτήσεις πρέπει να μηδενίζονται στο $z=0$ και στο $z=L$, οπότε τα $\cos kz$ αποκλείονται. Μια καλή υποψηφιότητα είναι τα $A\sin kz$, όπου τα A είναι παράγοντες κανονικοποίησης. Απαιτούμε επί πλέον $\sin kL = 0$, οπότε το k παίρνει τις τιμές $\frac{n\pi}{L}$. Είναι εύκολο ν΄ αποδειχθεί ότι $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$. Άρα $f_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi z}{L}$. Επιδιώκουμε να επιτύχουμε την ισότητα

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') =$$

$$= -4\pi\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')}\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L}.$$

Αναπτύσσουμε την $G(\vec{x},\vec{x}')$ με τρόπο ανάλογο με το δεύτερο μέλος:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')}\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L} g_{mn}(\rho,\rho').$$

Τα $g_{mn}(\rho,\rho')$ θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση στην εξίσωση, η οποία θα δώσει:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2}g_{mn} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}g_{mn} = -4\pi\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}.$$

Όπως συνήθως, θεωρούμε την εξίσωση πρώτα για $\rho \neq \rho'$, οπότε μεταπίπτει στην

$$\rho^2\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho} - \left[\frac{n^2\pi^2\rho^2}{L^2} + m^2\right] g_{mn} = 0,$$

που είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel με λύσεις τις $I_m\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$ και $K_m\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$. Άρα $g_{mn} = NI_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)$, όπου $\rho_< \equiv min(\rho,\rho')$, $\rho_> \equiv max(\rho,\rho')$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση ως προς ρ από $\rho'-\epsilon$ μέχρι $\rho'+\epsilon$ και θεωρώντας το όριο $\epsilon \to 0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left.\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho'+\epsilon} - \left.\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{\rho'}.$$

Αλλά

$$\left.\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho'+\epsilon} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[NI_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)\right]_{\rho=\rho'+\epsilon} = \frac{Nn\pi}{L}I_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right)K'_m\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

και παρόμοια:

$$\left.\frac{\partial g_{mn}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho'-\epsilon} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[NI_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right)\right]_{\rho=\rho'-\epsilon} = \frac{Nn\pi}{L}I'_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho'}{L}\right).$$

Η συνθήκη που προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης γίνεται:

$$\frac{Nn\pi}{L}[I_m K'_m - I'_m K_m] = -\frac{4\pi}{\rho'}.$$

Όμως από θεώρημα που αναφέρεται στη Wronskian είναι γνωστό ότι $I_m K_m' - I_m' K_m = \frac{C}{z}$ και μένει μόνο να προσδιοριστεί το C, ώστε να βρεθεί τελικά το N. Αυτό γίνεται θεωρώντας ένα κατάλληλο όριο, όπως το $z \to 0$. Στο όριο αυτό: $I_m \to \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m$, $K_m \to 2^{m-1}(m-1)! z^{-m}$, οπότε:$C = z(I_m K_m' - I_m' K_m) \to -1$, οπότε $N = -\frac{4\pi}{C} = 4\pi$. Τελικά:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{4}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi z}{L} \sin\frac{n\pi z'}{L} I_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right).$$

(β) Μπορούμε εναλλακτικά να επιλέξουμε το ανάπτυγμα:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^\infty dk k J_m(k\rho) J_m(k\rho') g(z, z'),$$

έχοντας υπόψη ότι

$$\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} = \int_0^\infty dk k J_m(k\rho) J_m(k\rho').$$

Τότε η αντικατάσταση στην

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \delta(\phi-\phi')\delta(z-z')$$

δίνει: $g_{zz} - k^2 g = -4\pi\delta(z-z')$. Λύνοντας την αντίστοιχη ομογενή και απαιτώντας $g(z = 0, z') = 0$, $g(z = L, z') = 0$, βρίσκουμε τις

$$g_<(z, z') \sim \sinh kz, \;\; g_>(z, z') \sim \sinh k(L-z).$$

Αυτές οι εκφράσεις υποδεικνύουν ότι η συνάρτηση g θα είναι της μορφής:

$$g(z, z') = N \sinh kz_< \sinh k(L - z_>), \;\; z_> \equiv max(z, z'), \;\; z_< \equiv min(z, z').$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση ως προς z μεταξύ $z' - \epsilon$ και $z' + \epsilon$ βρίσκουμε τη συνθήκη:

$$\left.\frac{\partial g|_{z_>=z', z_<=z}}{\partial z}\right|_{z=z'} - \left.\frac{\partial g|_{z_>=z, z_<=z'}}{\partial z}\right|_{z=z'} = -4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial z}[N \sinh kz \sinh k(L-z')]\right|_{z=z'} - \left.\frac{\partial}{\partial z}[N \sinh kz' \sinh k(L-z)]\right|_{z=z'} = -4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kN[\sinh kz' \cosh k(L-z') + \cosh kz' \sinh k(L-z')] = 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kN \sinh[kz' + k(L-z')] = 4\pi \Rightarrow N = \frac{4\pi}{k \sinh kL} \Rightarrow g(z, z') = \frac{4\pi}{k \sinh kL} \sinh kz_< \sinh k(L-z_>).$$

Στην πορεία χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$. Αντικαθιστώντας την $g(z, z')$ βρίσκουμε την τελική μορφή της συνάρτησης Green:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^\infty dk J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}.$$

Παράρτημα: Στο δεύτερο σκέλος της άσκησης χρησιμοποιήσαμε ορισμένες σχέσεις που αποδεικνύουμε εδώ. Από την ταυτότητα $J_{n+1} - J_{n-1} = -2J_n'$ προκύπτει η

$$\int_0^\infty dz J_{n+1}(z) - \int_0^\infty dz J_{n-1}(z) = -2[J_n(\infty) - J_n(0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = M_{n-1} + 2J_n(0),\ M_m \equiv \int_0^\infty dz J_m(z).$$

Είναι φανερό ότι σχετίζονται τάξεις που διαφέρουν κατά δύο. Είναι απλό να δει κανείς ότι για άρτια n ισχύει η σχέση: $M_{n+1} = J_0(0) + 2(J_2(0) + J_4(0) + \ldots + J_n(0)) = 1$, ενώ για περιττά n ισχύει η σχέση: $M_{n+1} = M_0 + 2(J_1(0) + J_3(0) + \ldots + J_n(0)) = 1$. Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $J_n|_\infty = 0,\ J_0(0) = 1, J_{n\neq 0}(0) = 0$, που είναι γνωστές σχετικά με τις συναρτήσεις Bessel. Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης μπορεί κανείς να αποδείξει ότι $M_0 = 1$. Τελικά $M_m \equiv \int_0^\infty dz J_m(z) = 1 \Rightarrow \int_0^\infty d\rho J_m(k\rho) = \frac{1}{k},\ \int_0^\infty dk J_m(k\rho) = \frac{1}{\rho}$. Με τη βοήθεια αυτών των σχέσεων βρίσκουμε:

$$\frac{1}{\rho'} = \int_0^\infty dk J_m(k\rho)k \int_0^\infty d\rho J_m(k\rho) \Rightarrow \int_0^\infty d\rho \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho') = \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty dkk J_m(k\rho)J_m(k\rho')$$

για κάθε ρ', οπότε:

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho') = \int_0^\infty dkk J_m(k\rho)J_m(k\rho').$$

33. (α) Δείξτε ότι το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου q στο σημείο $(0,0,z_0)$ μεταξύ δύο γειωμένων (άπειρων) επιπέδων στις θέσεις $z=0$ και $z=L$, είναι:

$$\Phi(z,\rho) = \frac{4kq}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

(β) Δείξτε ότι η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην κάτω πλάκα είναι:

$$\sigma_0(\rho) = \frac{q}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

Υπολογίστε το αντίστοιχο σ_L για την πάνω πλάκα.

(γ) Υπολογίστε το συνολικό επαγόμενο φορτίο στην κάτω πλάκα.

Λύση: Σύμφωνα με άλλη άσκηση, η συνάρτηση Green για δύο γειωμένα αγώγιμα επίπεδα δίνεται από την έκφραση:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right)K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right).$$

Εξ άλλου η έκφραση του δυναμικού είναι:

$$\int_V d^3x'[\Phi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x},\vec{x}') - G(\vec{x},\vec{x}')\nabla'^2\Phi(\vec{x}')] = \int_{S(V)} da'\left[\Phi(\vec{x}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial \Phi(\vec{x}')}{\partial n'}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x},\vec{x}')k\rho(\vec{x}'),$$

αφού το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Η πυκνότητα φορτίου είναι:

$$\rho(\vec{x}') = q\frac{\delta(\rho'-\rho_0)}{\rho'}\delta(z'-z_0)\frac{1}{2\pi},$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη από το αζιμούθιο. Η έκφραση για το δυναμικό μετατρέπεται στην:

$$\Phi(\vec{x}) = kq\int_0^\infty d\rho'\rho'\int_{-\infty}^{+\infty}dz'\int_0^{2\pi}d\phi' G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\delta(\rho'-\rho_0)}{\rho'}\delta(z'-z_0)\frac{1}{2\pi}.$$

Η ολοκλήρωση στο ϕ' δίνει το μη μηδενικό αποτέλεσμα 2π μόνο στην περίπτωση που $m=0$, οπότε το δυναμικό γίνεται:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{4kq}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)I_0\left(\frac{n\pi 0}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το δεδομένο ότι $\rho_0 = 0$, οπότε $\rho_< = 0$ και $\rho_> = \rho$. Επί πλέον $I_0(0) = 1$, και βρίσκουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

(β) Ξεκινάμε από τις εκφράσεις:

$$\sigma = \frac{E_\perp}{4\pi k} \Rightarrow \sigma(0) = -\frac{1}{4\pi k}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0},\ \sigma(L) = +\frac{1}{4\pi k}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=L}.$$

Εφαρμόζοντας αυτούς τους ορισμούς στην προηγούμενη έκφραση για το δυναμικό καταλήγουμε στα αποτελέσματα:

$$\sigma(0) = -\frac{q}{L^2}\sum_1^\infty n\sin\frac{n\pi z_0}{L}K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right),\ \sigma(L) = +\frac{q}{L^2}\sum_1^\infty n(-1)^n\sin\frac{n\pi z_0}{L}K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

(γ) Εξ ορισμού:

$$Q = \int_0^\infty d\rho 2\pi\rho\sigma(L) = 2\pi\int_0^\infty d\rho\rho\frac{q}{L^2}\sum_1^\infty n(-1)^n\sin\frac{n\pi z_0}{L}K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right) =$$

$$= \frac{2\pi q}{L^2}\sum_1^\infty n(-1)^n\sin\frac{n\pi z_0}{L}\int_0^\infty d\rho\rho K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

Εξ άλλου

$$K_0(x) = \int_0^\infty dt e^{-x\cosh t} \Rightarrow \int_0^\infty dx x K_0(x) = \int_0^\infty dt\int_0^\infty dx x e^{-x\cosh t} = \int_0^\infty dt\frac{1}{\cosh^2 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dx x K_0(x) = \int_0^\infty dt\frac{4}{e^{2t}+e^{-2t}+2} = 2\int_{z=1}^\infty\frac{dz}{(z+1)^2} = 1,$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής: $z = e^{2t}, dt = \frac{dz}{2z}$. Συνεπώς:

$$Q = \frac{2\pi q}{L^2}\sum_1^\infty n(-1)^n\sin\frac{n\pi z_0}{L}\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\int_0^\infty dx x K_0(x) = \frac{2q}{\pi}\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z_0}{L}.$$

Θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση που ορίζεται ως $f(x) = \frac{x}{L}$ στο διάστημα $(-L,+L)$ και η περίοδός της είναι $2L$. Αποδεικνύεται (Fourier) ότι $f(x) = -\sum_1^\infty\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$, οπότε

$$Q = \frac{2q}{\pi}\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z_0}{L} = -q\frac{z_0}{L}.$$

34. Να υπολογιστούν οι πολυπολικές ροπές των ακόλουθων διατάξεων: (α) Ενός φορτίου q στο (0,0,0). (β) Δύο αντίθετων φορτίων στα σημεία $+L/2, -L/2$. (γ) Δύο θετικών και δύο αρνητικών φορτίων με ίσο μέγεθος που βρίσκονται στο επίπεδο xy τοποθετημένα εναλλάξ στα σημεία $(L,0),(0,L)$, $(-L,0),(0,-L)$. (δ) Τεσσάρων θετικών και τεσσάρων αρνητικών φορτίων ίσου μεγέθους, τοποθετημένων εναλλάξ στις κορυφές ενός κύβου πλευράς L. (ε) Δύο φορτίων $+q$ στις θέσεις $z=+L, z=-L$ και ενός φορτίου $-2q$ στη θέση $z=0$.

(στ) Των φορτίων $-q, +2q, -2q, +q$, τοποθετημένων αντίστοιχα στις θέσεις $z = -2L, z = -L, z = +L, z = +2L$. Σχολιάστε για κάθε περίπτωση ποια είναι η χαμηλότερης τάξης πολυπολική ροπή που συνεισφέρει.

Λύση: Γενικά

$$Q_{lm} = \int d^3 r r^l \rho(\vec{r})[Y_{lm}(\theta,\phi)]^*,$$

όπου για συντομία έχουμε παραλείψει τους τόνους στις βουβές μεταβλητές. Επίσης χρήσιμη είναι η έκφραση της $\delta(\vec{r} - \vec{R})$ σε ορθογώνιες και σφαιρικές συντεταγμένες: $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = \frac{1}{r_0^2}\delta(r - r_0)\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\phi - \phi_0)$, όπου το $\vec{r}_0$ είναι δεδομένο και σταθερό διάνυσμα, ενώ το $\vec{r}$ ολοκληρώνεται.

(α)$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) \to Q_{lm} = 0$, αν $l \neq 0$. Αρα επιζεί μόνο η συνιστώσα

$$Q_{00} = \int d^3 r \rho(\vec{r})[Y_{00}(\theta,\phi)]^* = \int d^3 r q\delta(\vec{r})\sqrt{\frac{1}{4\pi}} = q\sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Σημειώνουμε ότι το δυναμικό θα ισούται με: $V = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{r}Q_{00}Y_{00} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{r}q\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, όπως αναμένεται για το δυναμικό Coulomb.

(β) $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \frac{L}{2}\hat{z}) - q\delta(\vec{r} + \frac{L}{2}\hat{z})$ άρα

$$Q_{lm} = \int dr r^2 d\theta \sin\theta d\phi r^l \left[q\frac{1}{(L/2)^2}\delta\left(r - \frac{L}{2}\right)\delta(\theta - 0)\delta(\phi - \phi_0) - \right.$$

$$\left. -q\frac{1}{(L/2)^2}\delta\left(r - \frac{L}{2}\right)\delta(\theta - \pi)\delta(\phi - \phi_0)\right][Y_{lm}(\theta,\phi)]^*.$$

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι το ϕ_0 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει μια οποιαδήποτε τιμή στις θέσεις $\theta = 0$ και $\theta = \pi$ που εμφανίζονται εδώ, αλλά αυτό δεν έχει σημασία, αφού η ολοκλήρωση της αντίστοιχης συνάρτησης δέλτα θα δώσει μονάδα ούτως ή άλλως. Επιπρόσθετα παρατηρούμε ότι τα Q_{lm} με $m \neq 0$ θα είναι μηδέν, λόγω των παραγόντων $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \equiv \sin^m\theta$ που υπεισέρχονται στον ορισμό των συναρτημένων "πολυωνύμων", και που μηδενίζονται στις θέσεις $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, που υπαγορεύονται από τις συναρτήσεις $\delta(\theta - 0)$ και $\delta(\theta - \pi)$, άρα $m = 0$ και $Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l$, συνεπώς $Q_{l0} = q(\frac{L}{2})^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[P_l(1) - P_l(-1)] = q(\frac{L}{2})^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[1 - (-1)^l]$. Παρατηρούμε ότι το χαμηλότερο l που δίνει μη μηδενική συνεισφορά είναι το $l = 1$. Αρα στο σύστημα αυτό των φορτίων η συνιστώσα που επικρατεί είναι του διπόλου.

(γ) $\rho(\vec{r}) = q[\delta(\vec{r} - L\hat{x}) - \delta(\vec{r} - L\hat{y}) + \delta(\vec{r} + L\hat{x}) - \delta(\vec{r} + L\hat{y})]$ άρα:

$$Q_{lm} = qL^l[Y_{lm}(\frac{\pi}{2}, 0) - Y_{lm}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + Y_{lm}(\frac{\pi}{2}, \pi) - Y_{lm}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})]^* =$$

$$= qL^l(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(0)[e^{-im0} - e^{-im\frac{\pi}{2}} + e^{-im\pi} - e^{-im\frac{3\pi}{2}}] =$$

$$= qL^l(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(0)(1 + (-1)^m)(1 - e^{-im\frac{\pi}{2}}).$$

Για να είναι μη μηδενικά τα πρέπει τα m να είναι όχι απλά άρτια, αλλά να είναι ειδικότερα της μορφής: $m = 4n + 2$, οπότε ο τελευταίος παράγοντας θα δίνει 2. Τότε: $Q_l^{4n+2} =$

$4qL^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-4n-2)!}{(l+4n+2)!}}P_l^{4n+2}(0)$. Η μικρότερη (απόλυτη) τιμή που μπορεί να πάρει το $4n+2$ είναι το 2, οπότε το l πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Αρα η επικρατούσα συνεισφορά είναι του τετραπόλου. Παρατήρηση: $P_{2,-2}=\frac{1}{24}P_{22}$ αλλά $Q_{2,-2}=Q_{22}$.

(δ) Διαλέγουμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο του κύβου και ακολουθούμε τη λογική της προηγούμενης απάντησης. Η διαφορά θα είναι ότι τα τέσσερα φορτία που βρίσκονται στις θέσεις με $z=\frac{L}{2}$ αντιστοιχούν σε γωνία θ_0 και όσα βρίσκονται στο $z=-\frac{L}{2}$ σε γωνία $\theta=\pi-\theta_0$. Το άθροισμα των σφαιρικών αρμονικών γίνεται:

$$[Y_{lm}(\theta_0,0)-Y_{lm}(\pi-\theta_0,0)]^*+[Y_{lm}(\theta_0,\frac{\pi}{2})-Y_{lm}(\pi-\theta_0,\frac{\pi}{2})]^*+$$

$$+[Y_{lm}(\theta_0,\pi)-Y_{lm}(\pi-\theta_0,\pi)]^*+[Y_{lm}(\theta_0,\frac{3\pi}{2})-Y_{lm}(\pi-\theta_0,\frac{3\pi}{2})]^*.$$

Αλλά

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi},$$

οπότε

$$Y(\pi-\theta_0,\phi)=(-1)^{l+m}Y(\theta_0,\phi),$$

αφού $\cos(\pi-\theta_0)=-\cos(\theta_0)$ και $P_l^m(-x)=(-1)^{l+m}P_l^m(x)$. Το άθροισμα των σφαιρικών αρμονικών δίνει

$$(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\theta_0)(1+(-1)^m)(1-e^{-im\frac{\pi}{2}})(1-(-1)^{l+m}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόσταση r των φορτίων από την αρχή των αξόνων είναι $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$Q_{lm}=q(\frac{L\sqrt{3}}{2})^l(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\theta_0)$$

$$(1+(-1)^m)(1-e^{-im\frac{\pi}{2}})(1-(-1)^{l+m}).$$

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη περίπτωση (γ) πρέπει $m=4n+2$. Με αυτό το δεδομένο, για να μη μηδενίζεται ο τρίτος παράγων, πρέπει ο l να είναι περιττός. Επίσης, όπως είπαμε προηγουμένως, πρέπει $l>2$, οπότε η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο l είναι το 3, επομένως η επικρατέστερη συνεισφορά είναι του οκταπόλου ($l=3$).

(ε) Το $l=0$ δε θα συνεισφέρει, μια και το συνολικό φορτίο είναι μηδέν. Αρα ξεκινάμε με δεδομένο ότι $l\neq 0$. Η πυκνότητα φορτίου είναι: $\rho(\vec{r})=q[\delta(\vec{r}-L\hat{z})-2\delta(\vec{r})+\delta(\vec{r}+L\hat{z})]$, οπότε

$$Q_{lm}=\int d^3rq\delta(x)\delta(y)[\delta(z-L)-2\delta(z)+\delta(z+L)]r^l[Y_{lm}(\theta,\phi)]^*=$$

$$=qL^l\delta_{m0}[Y_{lm}(0,\phi_0)+Y_{lm}(\pi,\phi_0)]=qL^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[1+(-1)^l]\delta_{m0}.$$

Οπως και σε προηγούμενη περίπτωση, το ϕ_0 δεν προσδιορίζεται, αλλά δεν παίζει και ιδιαίτερο ρόλο. Η χαμηλότερη μη μηδενική συνεισφορά είναι το Q_{20}.

(στ) Γράφουμε την έκφραση για την πυκνότητα φορτίου:

$$\rho(\vec{r})=q[-\delta(\vec{r}+2L\hat{z})+2\delta(\vec{r}+L\hat{z})-2\delta(\vec{r}-L\hat{z})+\delta(\vec{r}-2L\hat{z})],$$

οπότε $Q_{lm} = q\delta_{m0}[-(2L)^l Y_{l0}(\pi,\phi_0) + 2L^l Y_{l0}(\pi,\phi_0) - 2L^l Y_{l0}(0,\phi_0) + (2L)^l Y_{l0}(0,\phi_0)] = qL^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[-2^l P_l(-1)+2P_l(-1)-2P_l(1)+2^l P_l(1)]\delta_{m0}$. Αλλά $P_l(1) = 1$ και $P_l(-1) = (-1)^l$, οπότε

$$Q_{lm} = qL^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}(2^l - 2)(1-(-1)^l)\delta_{m0}.$$

Η επικρατέστερη συνεισφορά είναι του οκταπόλου ($l = 3$).

35. Πυκνότητα φορτίου ρ βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^{(0)}$, που παράγεται από το δυναμικό $\Phi^{(0)}$, το οποίο μεταβάλλεται αργά στην περιοχή που η ρ δεν είναι μηδέν.

(α)Αν μετατοπιστεί η κατανομή ως σύνολο κατά $\vec{dl}$, να δειχθεί ότι η δυναμική ενέργεια της κατανομής στο εξωτερικό πεδίο θα μεταβληθεί κατά $dW = -\vec{dl}\cdot\vec{F}$.

(β) Δείξτε ότι η συνιστώσα (έστω) 1 της ροπής που ασκείται στην κατανομή φορτίου είναι:

$$N_1 = [\vec{p}\times\vec{E}^{(0)}]_1 + \frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_j Q_{2j}E_j^{(0)}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_j Q_{3j}E_j^{(0)}\right)\right]_0 + \ldots$$

<u>Λύση:</u> Εξ ορισμού:

$$\vec{F} = \int d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{E}^{(0)}(\vec{x}') \Rightarrow F_k = \int d^3x'\rho(\vec{x}')E_k^{(0)}(\vec{x}') =$$

$$= \int d^3x'\rho(\vec{x}')\ \left[E_k^{(0)}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + x'_m\left(\partial'_m E_k^{(0)}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}\right) + \frac{1}{2}x'_m x'_n\left(\partial'_m\partial'_n E_k^{(0)}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}\right) + \ldots\right] =$$

$$\simeq E_k^{(0)}\int d^3x'\rho(\vec{x}') + x'_m\left(\partial_m E_k^{(0)}\right)\int d^3x'\rho(\vec{x}')x'_m + \frac{1}{6}\left(\partial_m\partial_n E_k^{(0)}\right)\int d^3x'\rho(\vec{x}')3x'_m x'_n =$$

$$= qE_k^{(0)} + \left(\partial_m E_k^{(0)}\right)p_m + \frac{1}{6}\left(\partial_m\partial_n E_k^{(0)}\right)\tilde{Q}_{mn},$$

με τους ορισμούς:

$$q \equiv \int d^3x'\rho(\vec{x}'),\ p_m \equiv \int d^3x'\rho(\vec{x}')x'_m,\ \tilde{Q}_{mn} \equiv \int d^3x'\rho(\vec{x}')3x'_m x'_n.$$

Έχουμε επιλέξει την αρχή των αξόνων κάπου στο εσωτερικό της κατανομής φορτίου. Σημειώνουμε επίσης ότι το εξωτερικό πεδίο είναι ηλεκτροστατικό και ότι οι πηγές του βρίσκονται εκτός της κατανομής φορτίου που θεωρούμε, οπότε:

$$\partial_m E_m^{(0)} = 0,\ \partial_m E_n^{(0)} = \partial_n E_m^{(0)}\ \ (m \neq n).$$

Αυτές οι σχέσεις μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε την έκφραση για τη δύναμη:

$$F_k = qE_k^{(0)} + \partial_k\left(p_m E_m^{(0)}\right) + \frac{1}{6}\tilde{Q}_{mn}\left(\partial_m\partial_k E_n^{(0)}\right).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\tilde{Q} \equiv Tr\tilde{Q}_{mn} = \int d^3x'\rho(\vec{x}')Tr\delta_{mn} \Rightarrow TrQ_{mn} = Tr[\tilde{Q}_{mn} - \tilde{Q}\delta_{mn}] = 0,$$

όπου

$$Q_{mn} \equiv \tilde{Q}_{mn} - \tilde{Q}\delta_{mn} = \int d^3x'\rho(\vec{x}')[3x'_m x'_n - r'^2\delta_{mn}],$$

που ταυτίζεται με τον ορισμό της τετραπολικής ροπής. Απομονώσαμε δηλαδή το ίχνος του πίνακα. Επισημαίνουμε ότι

$$\tilde{Q}\delta_{mn}\partial_k\partial_m E_n^{(0)} = \tilde{Q}\partial_k(\partial_m E_m^{(0)}) = 0 \Rightarrow \tilde{Q}_{mn}\partial_m\partial_k E_n^{(0)} = Q_{mn}\partial_m\partial_k E_n^{(0)}.$$

Δηλαδή το ίχνος δεν συνεισφέρει στη δύναμη, την οποία μπορούμε να εκφράσουμε με τη μορφή:

$$F_k = qE_k^{(0)} + \partial_k\left(\vec{p}\cdot\vec{E}^{(0)}\right) + \frac{1}{6}Q_{mn}\left(\partial_m\partial_k E_n^{(0)}\right).$$

Αλλά $Q_{mn}\left(\partial_m\partial_k E_n^{(0)}\right) = \partial_k\left(Q_{mn}\partial_m E_n^{(0)}\right)$, οπότε:

$$F_k = qE_k^{(0)} + \partial_k\left(\vec{p}\cdot\vec{E}^{(0)}\right) + \frac{1}{6}\partial_k\left(Q_{mn}\partial_m E_n^{(0)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \vec{F} = q\vec{E}^{(0)}\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}^{(0)}\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{6}Q_{mn}\partial_m E_n^{(0)}\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{0}}.$$

(β) Ξεκινάμε από την προσεγγιστική έκφραση της ενέργειας:

$$W = \int d^3x'\rho(\vec{x}')\Phi(\vec{x}') = \int d^3x'\rho(\vec{x}')\left[\ \Phi|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \vec{x}'\cdot\vec{\nabla}'\Phi\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2}x'_m x'_n\partial'_m\partial'_n\Phi\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}\right] =$$

$$= q\Phi(\vec{0}) - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{1}{6}Q_{mn}\partial_m E_n,$$

όπου επαναλάβαμε τα προηγούμενα βήματα και χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Αν μετατοπίσουμε την κατανομή ως σύνολο κατά $\vec{dl}$, δηλαδή $\rho(\vec{x}'') = \rho(\vec{x}')$ με $\vec{x}'' = \vec{x}' + \vec{dl}$, η ενέργεια της κατανομής θα μεταβληθεί κατά:

$$dW = \int d^3x''\rho(\vec{x}'')\Phi(\vec{x}'') - \int d^3x'\rho(\vec{x}')\Phi(\vec{x}') = \int d^3x''\rho(\vec{x}')[\Phi(\vec{x}') + \vec{dl}\cdot\vec{\nabla}\Phi] - \int d^3x'\rho(\vec{x}')\Phi(\vec{x}') =$$

$$= \int d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{dl}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\int d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{dl}\cdot\vec{E}(\vec{x}') = -\vec{dl}\cdot\vec{F}.$$

Δηλαδή, αν $\vec{F}\uparrow\uparrow\vec{dl}$, το dW θα είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη $\vec{F}$ τείνει να μεταθέσει την κατανομή σε κατεύθυνση που θα μειώσει τη δυναμική ενέργεια.

(γ) Η ροπή θα σχετίζεται με τη στοιχειώδη δύναμη $d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{E}^{(0)}(\vec{x}')$:

$$\vec{N} = \int d^3x'\rho(\vec{x}')[\vec{x}'\times\vec{E}^{(0)}(\vec{x}')] \Rightarrow N_1 = \int d^3x'\rho(\vec{x}')[x'_2E_3^{(0)}(\vec{x}') - x'_3E_2^{(0)}(\vec{x}')] \simeq$$

$$\simeq \int d^3x'\rho(\vec{x}')[x'_2(E_3^{(0)} + x'_m\partial'_m E_3^{(0)}) - x'_3(E_2^{(0)} + x'_m\partial'_m E_2^{(0)})] =$$

$$= \int d^3x'\rho(\vec{x}')[x'_2E_3^{(0)} - x'_3E_2^{(0)}] + \int d^3x'\rho(\vec{x}')x'_m[x'_2\partial'_3E_m^{(0)} - x'_3\partial'_2E_m^{(0)}],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το πεδίο είναι ηλεκτροστατικό. Συνεχίζοντας:

$$N_1 = \int d^3x'\rho(\vec{x}')[\vec{x}'\times\vec{E}^{(0)}]_1 + \int d^3x'\rho(\vec{x}')x'_m[x'_2\partial'_3E_m^{(0)} - x'_3\partial'_2E_m^{(0)}] =$$

$$= \left[\left(\int d^3x'\rho(\vec{x}')\vec{x}'\right)\times\vec{E}^{(0)}\right]_1 + \frac{1}{3}\partial_3E_m^{(0)}\int d^3x'\rho(\vec{x}')3x'_mx'_2 - \frac{1}{3}\partial_2E_m^{(0)}\int d^3x'\rho(\vec{x}')3x'_mx'_3 -$$

$$-\frac{1}{3}\partial_3 E_m^{(0)} \int d^3x' \rho(\vec{x}') r'^2 \delta_{2m} + \frac{1}{3}\partial_2 E_m^{(0)} \int d^3x' \rho(\vec{x}') r'^2 \delta_{3m}.$$

Οι δύο τελευταίοι όροι αλληλοαναιρούνται, αφού $\partial_3 E_2^{(0)} = \partial_2 E_3^{(0)}$. Τελικά:

$$N_1 = \left[\vec{p} \times \vec{E}^{(0)}\right]_1 + \frac{1}{3}\left[Q_{2m}\frac{\partial E_m^{(0)}}{\partial x_3} - Q_{3m}\frac{\partial E_m^{(0)}}{\partial x_2}\right].$$

36. Κυλινδρικά συμμετρικός πυρήνας με τετραπολική ροπή Q βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικό ως προς τον άξονά του με απόκλιση $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$ (0 είναι η θέση όπου βρίσκεται ο πυρήνας).

(α) Δείξτε ότι η ενέργεια της τετραπολικής αλληλεπίδρασης είναι: $W = -\frac{q}{4}Q\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$. (Υπενθύμιση: $Q \equiv \frac{Q_{33}}{q}$, $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$. Το q είναι το φορτίο του πρωτονίου).

(β) Υποθέτουμε ότι προσομοιώνουμε τον πυρήνα με μια σταθερή πυκνότητα φορτίου $\rho_0 = \frac{Zq}{V}$, που εκτείνεται στο ελλειψοειδές με εξίσωση $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ και όγκο $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$. Αν δίδεται ο ατομικός αριθμός Z και η μέση ακτίνα $R = \frac{a+b}{2}$, να υπολογιστεί η σχετική διαφορά ακτίνων $\frac{a-b}{R}$, ώστε να προκύπτει η δεδομένη τετραπολική ροπή.

Λύση: (α) Υπενθυμίζουμε ότι η ενέργεια κατανομής φορτίου σε εξωτερικό πεδίο $\vec{E}$ δίνεται από τη σχέση:

$$W = q\Phi(\vec{0}) - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{1}{6}Q_{mn}\partial_m E_n + \dots$$

Απομονώνουμε την τετραπολική συνεισφορά:

$$W_Q \equiv -\frac{1}{6}Q_{mn}\partial_m E_n,\ Q_{mn} \equiv \int d^3x \rho(\vec{x})[3x_m x_n - r^2\delta_{mn}].$$

Θεωρούμε το $Q_{12} \equiv \int d^3x \rho_q(\vec{x}) 3x_1x_2 = \int d\rho\rho d\phi dz \rho_q(\rho,z) 3(\rho\cos\phi)(\rho\sin\phi) = 0$, λόγω της ολοκλήρωσης στο ϕ και του γεγονότος ότι η ρ δεν εξαρτάται από το ϕ. Όμοια $Q_{mn} = 0, m \neq n$. Εξ άλλου: $Q_{11} \equiv \int d^3x \rho_q(\vec{x})[3x_1^2 - (\rho^2+z^2)] = \int d^3x\rho_q(\vec{x})[3x_2^2 - (\rho^2+z^2)] \equiv Q_{22}$, επειδή διαφέρουν μόνο κατά την ολοκλήρωση στο ϕ και $\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\phi$. Άρα

$$2Q_{11} = -Q_{33} \Rightarrow Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2} = -\frac{qQ}{2}, Q_{33} = -qQ.$$

Συνεπώς

$$W_Q \equiv -\frac{1}{6}[Q_{11}\partial_1 E_1 + Q_{22}\partial_2 E_2 + Q_{33}\partial_3 E_3] = -\frac{qQ}{6}\frac{3}{2}\partial_3 E_3 = -\frac{qQ}{4}\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

(β) Προκαταρκτικά υπολογίζουμε τον όγκο του ελλειψοειδούς: αφού $x^2 + y^2 \equiv \rho^2$, από την εξίσωση βρίσκουμε ότι: $\rho = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$. Άρα:

$$V = \int d^3x = 2\pi \int_0^a dz \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}} d\rho\rho = 2\pi\int_0^a dz b^2(1 - \frac{z^2}{a^2}) = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

Εξ άλλου

$$Q = \frac{1}{q}\int d^3x(3z^2 - \rho^2 - z^2)\rho_0 = \frac{2\pi}{q}\int_0^a dz \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}} d\rho\rho(2z^2 - \rho^2)\frac{Zq}{V}.$$

Αντικαθιστώντας τον όγκο με το ίσο του και κάνοντας τις ολοκληρώσεις καταλήγουμε στην

$$Q = \frac{2Z}{5}(a^2 - b^2) \Rightarrow a - b = \frac{5Q}{4ZR}.$$

37. Κατανομή φορτίου έχει πυκνότητα $\rho(\vec{x}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$.

(α) Να βρεθεί η πολυπολική ανάπτυξη και να γραφεί το δυναμικό σε μεγάλες αποστάσεις συναρτήσει πεπερασμένου αριθμού πολυπολικών ροπών.

(β) Υπολογίστε το δυναμικό παντού και δείξτε ότι κοντά στην αρχή των αξόνων: $\Phi(\vec{r}) \simeq k\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta)\right]$.

(γ) Αν στην αρχή των αξόνων υπάρχει πυρήνας με τετραπολική ροπή Q, υπολογίστε την ενέργεια αλληλεπίδρασης.

Υπενθύμιση: Μπορεί κανείς να αποδείξει (με επαγωγή ή αλλιώς) ότι:

$$\int_r^\infty dr' r'^n e^{-r'} = n! e^{-r} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!}.$$

Λύση: (α) Υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις για την πολυπολική ανάπτυξη:

$$\Phi(\vec{x}) = 4\pi k \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \left[\int d^3x' \rho(\vec{x}') Y^*_{lm}(\theta',\phi') r^l_<\right] \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r_>^{l+1}},\ r_< \equiv min(r,r'),\ r_> \equiv max(r,r').$$

Οι παραστάσεις στις αγκύλες αντιπροσωπεύουν τις πολυπολικές ροπές. Είναι απλό να δεί κανείς ότι

$$\sin^2\theta' = 1 - \cos^2\theta' = 1 - \frac{2P_2 + P_0}{3} = \frac{2}{3}(P_0 - P_2) = \frac{2}{3}(\sqrt{4\pi} Y_{00} - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{20}),$$

οπότε η πυκνότητα γράφεται:

$$\rho(\vec{x}') = \frac{1}{48\sqrt{\pi}} r'^2 e^{-r'} \left[Y_{00}(\theta',\phi') - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{20}(\theta',\phi')\right].$$

Για να υπολογίσουμε τις πολυπολικές ροπές είναι καλύτερα να κάνουμε πρώτα τις ολοκληρώσεις στις γωνίες: τότε φαίνεται αμέσως ότι επιζούν μόνο οι ροπές Q_{00} και Q_{20}. Για μεγάλες αποστάσεις r μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι $r_< = r'$, $r_> = r$ και τα σχετικά ολοκληρώματα γίνονται:

$$Q_{lm} = \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^1 d\cos\theta' \frac{1}{48\sqrt{\pi}} r'^2 e^{-r'} \left[Y_{00}(\theta',\phi') - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{20}(\theta',\phi')\right] Y^*_{lm}(\theta',\phi') r'^l =$$

$$= \frac{1}{48\sqrt{\pi}} \delta_{l0}\delta_{m0} \int_0^\infty dr' r'^4 e^{-r'} - \frac{1}{48\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{5}} \delta_{l2}\delta_{m0} \int_0^\infty dr' r'^6 e^{-r'} =$$

$$= \frac{1}{48\sqrt{\pi}} \delta_{l0}\delta_{m0} 4! - \frac{1}{48\sqrt{5\pi}} \delta_{l2}\delta_{m0} 6! \Rightarrow Q_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},\quad Q_{20} = -\frac{15}{\sqrt{5\pi}},$$

και βέβαια όλες οι υπόλοιπες ροπές είναι μηδέν. Το δυναμικό θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\vec{x}) = 4\pi k \left[Q_{00} \frac{Y_{00}(\theta,\phi)}{r} + \frac{1}{5} Q_{20} \frac{Y_{20}(\theta,\phi)}{r^3}\right] =$$

$$= 4\pi k \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right) \frac{\sqrt{\frac{1}{4\pi}}}{r} + \frac{1}{5}\left(-\frac{15}{\sqrt{5\pi}}\right) \frac{\sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos\theta)}{r^3}\right] \Rightarrow \Phi(\vec{x}) = k\left[\frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos\theta)\right].$$

Εδώ πρέπει να σχολιάσουμε ότι οι μονάδες είναι περίεργες, γιατί από την αρχή τις έχουμε υπονομεύσει, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα στην πυκνότητα φορτίου έναν εκθέτη $-r$, που θα έπρεπε να είναι αδιάστατος. Είμαστε, λοιπόν σ΄ ένα σύστημα μονάδων όπου π.χ. τα μήκη είναι αδιάστατα... Επίσης η πυκνότητα δεν έχει πουθενά μονάδες φορτίου, άρα και τα φορτία έχουν επιλεγεί αδιάστατα! Αν θελήσουμε να κάνουμε αριθμητικές εφαρμογές σε πρακτικά προβλήματα, αυτές οι εκκρεμότητες πρέπει να ρυθμιστούν.

(β) Για θέσεις κοντά στην αρχή πρέπει να ολοκληρώσουμε πιο προσεκτικά ως προς την ακτινική μεταβλητή:

$$
\begin{aligned}
I_r(l) \equiv \int_0^\infty dr' r'^4 \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} e^{-r'} &= \int_0^r dr' r'^4 \frac{r'^l}{r^{l+1}} e^{-r'} + \int_r^\infty dr' r'^4 \frac{r^l}{r'^{l+1}} e^{-r'} = \\
&= \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r dr' r'^{l+4} e^{-r'} + r^l \int_r^\infty dr' r'^{3-l} e^{-r'} = \\
&= \frac{1}{r^{l+1}} \left[(l+4)! - \int_r^\infty dr' r'^{l+4} e^{-r'} \right] + r^l \int_r^\infty dr' r'^{3-l} e^{-r'} = \\
&= \frac{1}{r^{l+1}} \left[(l+4)! - (l+4)! e^{-r} \sum_{k=0}^{l+4} \frac{r^k}{k!} \right] + r^l (3-l)! e^{-r} \sum_{k=0}^{3-l} \frac{r^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε: $I_r(0) = \frac{24}{r} - e^{-r}\left\{\frac{24}{r} + 18 + 6r + r^2\right\}$ και $I_r(2) = \frac{720}{r^3} - e^{-r}\left\{\frac{720}{r^3} + \frac{720}{r^2} + \frac{360}{r} + 120 + 30r + 5r^2\right\}$. Το δυναμικό μ΄ αυτά τα δεδομένα γράφεται:

$$
\Phi(\vec{x}) = 4\pi k \left[\frac{1}{48\sqrt{\pi}} I_r(0) \sqrt{\frac{1}{4\pi}} - \frac{1}{5} \frac{1}{48\sqrt{\pi}} I_r(2) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos\theta) \right] =
$$

$$
= k \left[\frac{1}{r} - e^{-r} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{3}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r^2}{24} \right\} - \left(\frac{6}{r^3} - e^{-r} \left\{ \frac{6}{r^3} + \frac{6}{r^2} + \frac{3}{r} + 1 + \frac{r}{4} + \frac{5r^2}{120} \right\} \right) P_2(\cos\theta) \right].
$$

Για μεγάλα r παραλείπουμε τους όρους με το e^{-r} και προκύπτει: $\Phi(\vec{x}) \simeq k\left[\frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos\theta)\right]$, που είναι το αποτέλεσμα που είχαμε βρεί και προηγουμένως στο ίδιο όριο. Για $r \to 0$ αναπτύσσουμε το εκθετικό: $e^{-r} \simeq 1 - r + \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6} + \frac{r^4}{24} - \frac{r^5}{120} + \ldots$, κάνουμε τις πράξεις και κρατάμε τις πρώτες μη τετριμένες συνεισφορές:

$$
\frac{1}{r} - e^{-r} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{3}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r^2}{24} \right\} \simeq \frac{1}{4},
$$

$$
\frac{6}{r^3} - e^{-r} \left\{ \frac{6}{r^3} + \frac{6}{r^2} + \frac{3}{r} + 1 + \frac{r}{4} + \frac{5r^2}{120} \right\} \simeq \frac{r^2}{120},
$$

οπότε:

$$
\Phi(\vec{r}) \simeq k \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta) \right].
$$

(γ) Ξεκινάμε από την έκφραση της ενέργειας

$$
W = q\Phi - \vec{p} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \ldots,
$$

απ΄ όπου είναι ορατή η τετραπολική συνεισφορά. Γράφουμε το δυναμικό κοντά στην αρχή χρησιμοποιώντας (βλ. παρατήρηση στο τέλος της απάντησης στα (α» ως μονάδα μήκους την ακτίνα του Bohr a_0 και μονάδα φορτίου το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο q :

$$
\Phi(\vec{r}) \simeq kq \left[\frac{1}{4a_0} - \frac{1}{120a_0} \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 P_2(\cos\theta) \right] = \frac{kq}{a_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{120a_0^2} r^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right] =
$$

$$= \frac{kq}{a_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{240a_0^2}[3z^2 - (x^2+y^2+z^2)]\right].$$

Από την έκφραση σε ορθογώνιες συντεταγμένες υπολογίζονται εύκολα οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{kqx}{120a_0^3},\ E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{kqy}{120a_0^3},\ E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = +\frac{kqz}{60a_0^3}.$$

Προχωρούμε υπολογίζοντας τις μόνες μη μηδενικές παραγώγους του ηλεκτρικού πεδίου που θα χρειαστούμε για τον υπολογισμό της ενέργειας:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{kq}{120a_0^3},\quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = +\frac{kq}{60a_0^3}.$$

Η (τετραπολική συνεισφορά στην) ενέργεια θα γίνει:

$$W = -\frac{1}{6}\left(Q_{11}\frac{\partial E_x}{\partial x} + Q_{22}\frac{\partial E_y}{\partial y} + Q_{33}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Όμως, από τον ορισμό της τετραπολικής ροπής:

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{qQ}{2},\ Q_{33} = +qQ,$$

οπότε

$$W = \frac{qQ}{12}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} - 2\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = -\frac{kq^2Q}{240a_0^3}.$$