ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΤΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

19. Αποδείξτε ότι: $\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)t^l$.

Λύση: Ισχύουν οι:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum P_l t^l, \frac{\partial g}{\partial t} = \sum l P_l t^{l-1} \to t\frac{\partial g}{\partial t} = \sum l P_l t^l.$$

Αρα:

$$\sum(2l+1)P_l t^l = 2t\frac{\partial g}{\partial t} + g = 2t\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} =$$
$$= \frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

20. Αναπτύσσοντας τον παρονομαστή, υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I \equiv \int_0^{\pi} \frac{A\cos\theta+1}{(A^2+2A\cos\theta+1)^{\frac{1}{2}}}\sin\theta d\theta.$$

Λύση: $g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum P_l(x)t^l \to \frac{1}{\sqrt{1+2xA+A^2}} = \sum P_l(x)(-A)^l$

$$\to \int_0^{\pi} \tfrac{A\cos\theta+1}{\sqrt{1+2A\cos\theta+A^2}}\sin\theta d\theta = \int_{-1}^{+1} dx \tfrac{Ax+1}{\sqrt{1+2xA+A^2}} =$$
$$= \int_{-1}^{+1} dx(Ax+1)\sum P_l(x)(-A)^l =$$
$$= \sum(-1)^l A^l[\int_{-1}^{+1} dx AxP_l(x) + \int_{-1}^{+1} dxP_l(x)] =$$
$$= \sum(-1)^l A^{l+1}\int_{-1}^{+1} dx \tfrac{(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)}{2l+1} + \sum(-1)^l A^l \int_{-1}^{+1} dxP_l(x) =$$
$$= \sum(-1)^l A^{l+1}\left[\tfrac{2(l+1)}{2l+1}\delta_{l+1,0} + \tfrac{2l}{2l+1}\delta_{l-1,0}\right] + \sum(-1)^l A^l \tfrac{2}{2l+1}\delta_{l0} = -\tfrac{2A^2}{3} + 2.$$

21. (α)Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 dxP_{2l+1}(x)$.

(β) Να αναπτυχθεί σε σειρά Legendre η συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $[-1,+1]$.

Λύση: (α) $\int_0^1 dxP_{2l+1}(x) = \int_0^1 dx\frac{1}{2(2l+1)+1}[P'_{2l+2}(x) - P'_{2l}(x)]$

$$= \tfrac{1}{4l+3}[P_{2l+2}(1) - P_{2l+2}(0) - P_{2l}(1) + P_{2l}(0)] =$$
$$= \tfrac{1}{4l+3}[1 - \tfrac{(-1)^{l+1}(2l+1)!!}{(2l+2)!!} - 1 + \tfrac{(-1)^l(2l-1)!!}{(2l)!!}] = (-1)^l\tfrac{(2l-1)!!}{(2l+2)!!}.$$

Εχουμε χρησιμοποιήσει μια αναδρομική σχέση και τις τιμές των πολυωνύμων Legendre στο 0 και στο 1 που βρήκαμε στη θεωρία.

(β) Για πολυώνυμα άρτιας τάξης το ολοκλήρωμα $I \equiv \int_{-1}^{+1} dx|x|P_{2l}(x) = 2\int_0^1 dxxP_{2l}(x)$ ισούται, με βάση γνωστή αναδρομική σχέση, με

$$I = 2\frac{1}{2(2l)+1}\int_0^1 dx[(2l+1)P_{2l+1}(x) + 2lP_{2l-1}(x)].$$

Σ' αυτό το σημείο μπορούμε πια να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους της άσκησης και το αποτέλεσμα είναι:

$$I = -\frac{2(-1)^l(2l-3)!!}{(2l+2)!!}.$$

Εξ άλλου, για πολυώνυμα περιττής τάξης θα έχουμε: $\int_{-1}^{+1} dx|x|P_{2l+1}(x) = 0$, αφού ολοκληρώνουμε μια (άρτια × περιττή = περιττή) συνάρτηση μεταξύ αντίθετων ορίων.

22. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}\right] = -(l+1)\frac{P_{l+1}(\cos\theta)}{r^{l+2}}.$$

(Υπενθύμιση: $\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$)

Λύση: Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P_l}{r^{l+1}}\right) = -(l+1)\frac{P_l}{r^{l+2}}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P_l}{r^{l+1}}\right) = -\frac{\sin\theta}{r^{l+1}}\frac{\partial P_l}{\partial(\cos\theta)},$$

απ' όπου συνάγεται η ισότητα: $A \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_l}{r^{l+1}}\right) = (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{P_l}{r^{l+1}}) =, -(l+1)\cos\theta\frac{P_l}{r^{l+2}} - \frac{\sin\theta}{r}(-\frac{\sin\theta}{r^{l+1}})\frac{\partial P_l}{\partial(\cos\theta)}$. Με τη συνηθισμένη αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta, dx = -\sin\theta d\theta$ προκύπτει η ισότητα $A = -(l+1)x\frac{P_l}{r^{l+2}} + \frac{1-x^2}{r^{l+2}}P_l' = \frac{1}{r^{l+2}}[lP_{l-1}(x) - (2l+1)xP_l(x)]$. Τέλος η αναδρομική σχέση $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$ οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα: $A \equiv \frac{\partial}{\partial z}(\frac{P_l}{r^{l+1}}) = -\frac{l+1}{r^{l+2}}P_{l+1}(x)$.

23. Αποδείξτε ότι

$$P_l(\cos\theta) = (-1)^l\frac{r^{l+1}}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Μπορείτε να συγκρίνετε την ανάπτυξη της γεννήτριας συνάρτησης με ένα ανάπτυγμα Taylor του $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}}$ σε δυνάμεις του δz.

Λύση: Αφ' ενός έχουμε το ανάπτυγμα Taylor:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\delta z=0}(\delta z)^l.$$

Αφ' ετέρου:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+(\delta z)^2-2z\delta z}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\delta z}{r}\right)^2-2\left(\frac{z}{r}\right)\left(\frac{\delta z}{r}\right)}}.$$

Η τελευταία έκφραση παραπέμπει στη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre, οπότε, επισημαίνοντας ότι $\frac{z}{r} = \cos\theta$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(\frac{\delta z}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\,(\delta z)^l.$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις για την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{(-1)^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\delta z=0}(\delta z)^l = \frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\,(\delta z)^l \to P_l(\cos\theta) = (-1)^l\frac{r^{l+1}}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right).$$

24. Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel να δείξετε ότι:

$$(a) J_n(-x) = (-1)^n J_n(x),$$

$$(b) J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_{n-m}(y).$$

Ποιά σχέση προκύπτει για $x+y=0$;

Λύση: (α) Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$, για την οποία ισχύει προφανώς $g(-x,t) = g(x,-t)$. Αυτό δίνει $\sum J_n(-x)t^n = \sum J_n(x)(-1)^n t^n \to J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$.

(β) Οπως είναι προφανές, $g(x+y,t) = g(x,t)g(y,t)$. Αυτή η σχέση δίνει $\sum_n J_n(x+y)t^n = \sum_{l,m} J_l(x)t^l J_m(y)t^m = \sum_{l,m} J_l(x)J_m(y)t^{l+m}$. Θέτουμε $n \equiv l+m$ στο τελευταίο άθροισμα και η παραπάνω σχέση γίνεται: $\sum J_n(x+y)t^n = \sum_{n,m} J_{n-m}(x)J_m(y)t^n \to J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(x)J_m(y)$. Για $x+y=0:$

$$J_n(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{-m}(x)J_m(-x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}[(-1)^m J_m(x)][(-1)^m J_m(x)] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(x) = J_0^2(x) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} J_k^2(x).$$

Βγαίνει δηλαδή ένα είδος "αθροιστικού θεωρήματος" για τις συναρτήσεις Bessel.

25. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^x t[J_n(t)]^2 dt$.

(Αποδείξτε πρώτα ότι: $t[J_n(t)]^2 = \frac{d}{dt}[\frac{t^2}{2}(J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)])$.

Λύση: $A \equiv \frac{d}{dt}[\frac{t^2}{2}(J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t))] = t[J_n^2(t) - J_{n+1}(t)J_{n-1}(t)] + \frac{t^2}{2}[2J_n(t)J_n'(t) - J_{n+1}'(t)J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)J_{n-1}'(t)]$. Εδώ αντικαθιστούμε τις παραγώγους των συναρτήσεων Bessel από τις αναδρομικές σχέσεις: $2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$, $J_{n+1}' = J_n - \frac{n+1}{t}J_{n+1}$ και $J_{n-1}' = -J_n + \frac{n-1}{t}J_{n-1}$ και παίρνουμε: $A = tJ_n^2 - tJ_{n+1}J_{n-1} + \frac{t^2}{2}J_n(J_{n-1} - J_{n+1}) - \frac{t^2}{2}(J_n - \frac{n+1}{t}J_{n+1})J_{n-1} - \frac{t^2}{2}J_{n+1}(-J_n + \frac{n-1}{t}J_{n-1}) = tJ_n^2$. Αρα $\int_0^x dt t[J_n(t)]^2 = \frac{x^2}{2}[J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)]$.

26. Οι δύο επίπεδες επιφάνειες ενός κυλινδρικού κουτιού με ακτίνα R και ύψος H είναι γειωμένες και η κυλινδρική του επιφάνεια σε γνωστό δυναμικό $V_0(\phi, z)$.

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό μέσα στο κουτί δίνεται από τη σχέση:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_m\left(\frac{n\pi\rho}{H}\right) sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right)(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi).$$

(β) Δώστε την έκφραση για τα A_{mn}, B_{mn}.

Λύση: (α) Είναι γνωστό ότι:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{m,k} I_m(k\rho)(\tilde{A}_m\cos m\phi + \tilde{B}_m\sin m\phi)(C_k\cos kz + D_k\sin kz).$$

Προς το παρόν η άθροιση στο k έχει συμβολικό χαρακτήρα. Ομως $V|_{z=0} = 0$, άρα $C_k = 0$ και $V|_{z=H} = 0$, άρα $k_n = \frac{n\pi}{H}$ με ακέραια n, οπότε η άθροιση στο k γίνεται συγκεκριμένη $(D_k \to D_n)$. Συμβολίζοντας $A_{mn} \equiv \tilde{A}_m D_n, \quad B_{mn} \equiv \tilde{B}_m D_n$ προκύπτει το ζητούμενο:

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m \left(\frac{n\pi\rho}{H}\right) sin \left(\frac{n\pi z}{H}\right) (A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi).$$

(β) Αποδεικνύονται εύκολα οι ισότητες:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos m\phi \cos n\phi = \pi\delta_{mn}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi \sin m\phi \sin n\phi = \pi\delta_{mn},$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin m\phi \cos n\phi = 0, \quad \int_0^H dz \sin \frac{m\pi z}{H} \sin \frac{n\pi z}{H} = \frac{H}{2}\delta_{mn}.$$

Με τη βοήθειά τους η σχέση:

$$V_0(\phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m \left(\frac{n\pi R}{H}\right) sin \left(\frac{n\pi z}{H}\right) (A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi)$$

δίνει:

$$I_m \left(\frac{n\pi R}{H}\right) A_{mn} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos m\phi\right) \left(\frac{2}{H} \int_0^H dz \sin \frac{n\pi z}{H} V_0(\phi, z)\right)$$

και

$$I_m \left(\frac{n\pi R}{H}\right) B_{mn} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin m\phi\right) \left(\frac{2}{H} \int_0^H dz \sin \frac{n\pi z}{H} V_0(\phi, z)\right),$$

απ΄ όπου υπολογίζονται τα A_{mn} και B_{mn}.

27. Η περίθλαση Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα καθορίζεται από την ποσότητα που δίνεται στην εξίσωση:

$$F_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] = \frac{\Lambda}{4\pi^2} \int_0^R dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[-ikr' \sin\theta \cos(\phi' - \phi)].$$

Να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός (που περιλαμβάνει συναρτήσεις Bessel.)

Λύση: Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι $\int_0^{2\pi} d\phi' \exp[-ikr' \sin\theta \cos(\phi' - \phi)] = 2\pi J_0(kr' \sin\theta)$, από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης Bessel. Αντικαθιστώντας:

$$F_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] = \frac{\Lambda}{4\pi^2} \int_0^R dr' r' 2\pi J_0(kr' \sin\theta) = \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2\theta} \int_{r'=0}^R d(kr' \sin\theta)(kr' \sin\theta) J_0(kr' \sin\theta).$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $z \equiv kr' \sin\theta$ προκύπτει:

$$F_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] = \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2\theta} \int_{z=0}^{kR\sin\theta} dz z J_0(z) = \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2\theta} \int_{z=0}^{kR\sin\theta} dz \frac{d}{dz}(z J_1(z)) =$$

$$= \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2\theta} [kR \sin\theta J_1(kR \sin\theta)] = \frac{\Lambda R}{2\pi k \sin\theta} J_1(kR \sin\theta).$$

28. (α) Να επαληθευθεί η σχέση του Rayleigh:

$$\exp[ikr \cos\theta] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta),$$

που εκφράζει την ανάλυση ενός επίπεδου κύματος σε άθροισμα σφαιρικών κυμάτων. (Υπόδειξη: παραγωγίστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς r και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε αναδρομικές σχέσεις για να αντικαταστήσετε τα $\cos\theta P_l(\cos\theta)$ και j_l'.)

(β) Δείξτε ότι

$$j_l(kr) = \frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{1} dx P_l(x)\exp[ikrx].$$

Λύση: (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ένα βοηθητικό αποτέλεσμα. Ξεκινώντας από τις αναδρομικές σχέσεις

$$\frac{d}{dz}(z^{l+1}j_l) = z^{l+1}j_{l-1}, \quad \frac{d}{dz}(z^{-l}j_l) = -z^{-l}j_{l+1},$$

βρίσκουμε τις

$$lj_{l-1} = \frac{l(l+1)j_l}{z} + lj_l', \quad -(l+1)j_{l+1} = -\frac{l(l+1)j_l}{z} + (l+1)j_l',$$

οι οποίες με άθροιση δίνουν:

$$lj_{l-1} - (l+1)j_{l+1} = (2l+1)j_l'. \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας την αποδεικτέα σχέση ως προς r βρίσκουμε:

$$ik\cos\theta\exp[ikr\cos\theta] = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l k j_l'(kr)P_l(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ik\cos\theta\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l k j_l'(kr)P_l(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)\cos\theta P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l'(kr)P_l(\cos\theta).$$

Για να συνεχίσουμε υπενθυμίζουμε ότι $\cos\theta P_l(\cos\theta) \equiv xP_l(x) = \frac{1}{2l+1}[(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)]$, οπότε εξετάζουμε κατά πόσο ισχύει η

$$i\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)\frac{1}{2l+1}[(l+1)P_{l+1}(\cos\theta) + lP_{l-1}(\cos\theta)] = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l'(kr)P_l(\cos\theta),$$

δηλαδή η

$$i\sum_l[i^{l-1}j_{l-1}(kr)lP_l(\cos\theta) + i^{l+1}j_{l+1}(kr)(l+1)P_l(\cos\theta)] = \sum_l(2l+1)i^l j_l'(kr)P_l(\cos\theta),$$

οπότε η γραμμική ανεξαρτησία των πολυωνύμων Legendre ανάγει το πρόβλημα στο κατά πόσον ισχύει η

$$ii^l j_{l-1}(kr)l + i^{l+2}j_{l+1}(kr)(l+1) = (2l+1)i^l j_l'(kr),$$

δηλαδή η

$$lj_{l-1} - (l+1)j_{l+1} = (2l+1)j_l',$$

που όμως δεν είναι άλλη από την εξίσωση (1), που έχει ήδη αποδειχθεί.

(β) Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $\exp[ikrx] = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(x)$ με $P_L(x)$ και ολοκληρώνουμε, οπότε, με τη βοήθεια της σχέσης ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre βρίσκουμε:

$$\int_{-1}^{1} dx\exp[ikrx]P_L(x) = i^L j_L(kr)(2L+1)\frac{2}{2L+1} = 2i^L j_L(kr).$$

29. (α) Αν $B_{\mu 1}(x)$ και $B_{\mu 2}(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel $x^2 B''_\mu + x B'_\mu + (x^2 - \mu^2) B_\mu = 0$, να αποδειχθεί η σχέση:

$$B_{\mu 1}(x) B'_{\mu 2}(x) - B'_{\mu 1}(x) B_{\mu 2}(x) = \frac{K_\mu}{x},$$

όπου η K_μ είναι σταθερά. Υπόδειξη: ορίζουσα Wronski. (β) Υπολογίστε τη σταθερά K_μ στην περίπτωση που οι δύο λύσεις είναι οι $J_\mu(x)$ και $N_\mu(x)$.

Λύση: Υπενθύμιση: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

και δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της, οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις

$$y_2(y''_1 + P(x) y'_1 + Q(x) y_1) = 0, \; y_1(y''_2 + P(x) y'_2 + Q(x) y_2) = 0$$

βρίσκουμε: $[y_1 y''_2 - y''_1 y_2] + P(x)[y_1 y'_2 - y'_1 y_2] = 0$, οπότε, με τον συμβολισμό

$$W \equiv y_1 y'_2 - y'_1 y_2,$$

καταλήγουμε στην απλή εξίσωση $W' + P(x) W = 0$ με λύση:

$$W = C \exp[-P(x) dx].$$

Παρατηρούμε ότι, αν οι δύο λύσεις ήταν γραμμικά εξαρτημένες, η παράσταση W, που λέγεται ορίζουσα του Wronski, θα μηδενιζόταν. Μία μή μηδενική W σηματοδοτεί γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Εξ άλλου, η W μπορεί να υπολογιστεί, αν γνωρίζουμε απλά το $P(x)$, δηλαδή δεν απαιτείται η γνώση του ζεύγους των λύσεων.

(α) Στην περίπτωσή μας γράφουμε την εξίσωση Bessel με τη μορφή:

$$B''_\mu + \frac{1}{x} B'_\mu + (1 - \frac{\mu^2}{x^2}) B_\mu = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow W(x) = \frac{K_\mu}{x} \Rightarrow y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = \frac{K_\mu}{x}.$$

(β) Στην περίπτωση $y_1 = J_\mu(x), \; y_2 = N_\mu(x)$ ξέρουμε ότι ισχύει: $J_\mu N'_\mu - J'_\mu N_\mu = \frac{K_\mu}{x}$. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά K_μ, θεωρούμε το όριο $x \to \infty$, οπότε:

$$J_\mu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right), \quad J'_\mu(x) \to -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$N_\mu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right), \quad J'_\mu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right),$$

όπου έχουμε παραλείψει στις παραγώγους όρους που συμπεριφέρονται σαν $\frac{1}{x^{3/2}}$. Αντικαθιστώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά βρίσκουμε: $K_\mu = \frac{2}{\pi}$.