ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

9. Ένας χώρος V περιβάλλεται από μια επιφάνεια S που αποτελείται από διάφορες αγώγιμες απιφάνειες S_k (μία μπορεί να βρίσκεται και στο άπειρο) που βρίσκονται στα αντίστοιχα δυναμικά V_k. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\Psi(\vec{x})$ που συμπεριφέρεται εξ υποθέσεως ομαλά στο V και στο S και ορίστε την ποσότητα

$$W[\Psi] \equiv \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x |\vec{\nabla}\Psi|^2.$$

Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα: Με την προϋπόθεση ότι η $\Psi(\vec{x})$ παίρνει τις τιμές V_k στις επιφάνειες S_k, το $W[\Psi]$ είναι απόλυτο ελάχιστο αν και μόνο αν η $\Psi(\vec{x})$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο V.

<u>Λύση:</u> Έστω ότι η $\Psi(\vec{x})$ παίρνει τις τιμές V_k στις επιφάνειες S_k και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο V. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Psi(\vec{x}) + \delta\Psi(\vec{x})$, όπου $\delta\Psi(\vec{x})|_{S_k} = 0$. Τότε

$$W = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x \left[(\vec{\nabla}\Psi)^2 + 2\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\delta\Psi + (\vec{\nabla}\delta\Psi)^2\right]$$

και η αλλαγή στο W θα είναι:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x \left[2\vec{\nabla}\Psi\cdot\vec{\nabla}\delta\Psi + (\vec{\nabla}\delta\Psi)^2\right] = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x \left[2\vec{\nabla}(\delta\Psi\vec{\nabla}\Psi) - 2\delta\Psi\nabla^2\Psi + (\vec{\nabla}\delta\Psi)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi k}\int_{S_1+S_2+\ldots+S_N} da\hat{n}\delta\Psi\vec{\nabla}\Psi + \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x\left[(\vec{\nabla}\delta\Psi)^2 - 2\delta\Psi\nabla^2\Psi\right].$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται, γιατί έχουμε υποθέσει ότι $\delta\Psi(\vec{x})|_{S_k} = 0$, συνεπώς η μεταβολή είναι:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x\left[(\vec{\nabla}\delta\Psi)^2 - 2\delta\Psi\nabla^2\Psi\right].$$

Αν επί πλέον κρατήσουμε μόνο τους όρους πρώτης τάξης στη μικρή ποσότητα $\delta\Psi$, η σχέση μεταστρέπεται στην

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi k}\int_V d^3x\left[\delta\Psi\nabla^2\Psi\right],$$

και η απαίτηση η μεταβολή να είναι μηδέν για οποιοδήποτε (μικρό) $\delta\Psi$ συνεπάγεται τη σχέση: $\nabla^2\Psi = 0$, όπως ζητάει η εκφώνηση. Συνεπώς η μεταβολή γράφεται: Αν $\delta W = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3x(\vec{\nabla}\delta\Psi)^2 \geq 0$, δηλαδή το W θα είναι ελάχιστο. Η ισότητα θα ισχύει αν $\vec{\nabla}\delta\Psi = 0$, οπότε το $\delta\Psi$ θα είναι σταθερό. Με το δεδομένο ότι $\delta\Psi(\vec{x})|_{S_k} = 0$ συμπεραίνουμε ότι $\delta\Psi = 0$, δηλαδή καταλήγουμε στην αρχική συνάρτηση.

10. Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα: Αν κάποιοι αγωγοί βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις και φέρουν δεδομένα φορτία, η εισαγωγή ενός πρόσθετου αφόρτιστου μονωμένου αγωγού στην περιοχή που περιβάλλεται από τους αγωγούς αυτούς χαμηλώνει την ηλεκτροστατική ενέργεια.

<u>Λύση:</u> Έστω ότι οι αγωγοί με επιφάνειες $S_1, S_2, \ldots, S_N$ φέρουν τα φορτία $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$, και εισάγεται ο αγωγός με επιφάνεια Σ_0. Ο όγκος πριν την εισαγωγή του νέου αγωγού με

όγκο V_0 ήταν, έστω, V και μετά μειώθηκε σε $V - V_0$. Τα πεδία πριν και μετά είναι $\vec{E}$ και $\vec{E}'$ και οι ηλεκτροστατικές ενέργειες $W = \frac{1}{8\pi k}\int_V d^3xE^2$ και $W' = \frac{1}{8\pi k}\int_{V-V_0} d^3xE'^2$.

$$\Delta W \equiv W' - W = \frac{1}{8\pi k}\left[\int_{V-V_0} d^3xE'^2 - \int_{V-V_0} d^3xE^2 - \int_{V_0} d^3xE^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi k}\left[\int_{V-V_0} d^3x(2E'^2 - 2\vec{E}\cdot\vec{E}') - \int_{V-V_0} d^3x(\vec{E}-\vec{E}')^2 - \int_{V_0} d^3xE^2\right].$$

Θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $I \equiv \int_{V-V_0} d^3x(E'^2 - \vec{E}\cdot\vec{E}') = \int_{V-V_0} d^3x\vec{E}'\cdot(\vec{E}'-\vec{E})$ μηδενίζεται, οπότε αυτόματα $\Delta W \leq 0$. Πράγματι,

$$I = \int_{V-V_0} d^3x\vec{E}'\cdot(\vec{E}'-\vec{E}) = -\int_{V-V_0} d^3x\vec{\nabla}\Phi'\cdot(\vec{E}'-\vec{E})$$

$$= -\int_{V-V_0} d^3x\vec{\nabla}[\Phi'(\vec{E}'-\vec{E})] + \int_{V-V_0} d^3x\Phi'[\vec{\nabla}\vec{E}' - \vec{\nabla}\vec{E}].$$

Όμως στην περιοχή ολοκλήρωσης $V - V_0$ ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{\nabla}\vec{E}' = \vec{\nabla}\vec{E} = 0$, άρα

$$I = -\int_{S_1+S_2+\ldots+S_N+\Sigma_0} dS\Phi'\hat{n}\cdot(\vec{E}'-\vec{E}) =$$

$$= -\sum_k \Phi'_k\left[\int_{S_k} dS\hat{n}\cdot\vec{E}' - \int_{S_k} dS\hat{n}\cdot\vec{E}\right] - \Phi'_\Sigma\left[\int_{\Sigma_0} dS\hat{n}\cdot\vec{E}' - \int_{\Sigma_0} dS\hat{n}\cdot\vec{E}\right].$$

Όμως

$$\int_{S_k} dS\hat{n}\cdot\vec{E}' = 4\pi kQ_k,\ \int_{S_k} dS\hat{n}\cdot\vec{E} = 4\pi kQ_k,$$

άρα η πρώτη αγκύλη μηδενίζεται. Εξ άλλου $\int_{\Sigma_0} dS\hat{n}\cdot\vec{E}' = 0$, αφού ο V_0 είναι αφόρτιστος και $\int_{\Sigma_0} dS\hat{n}\cdot\vec{E} = 0$, γιατί ο V_0 δεν περιείχε φορτίο ούτε πριν. Άρα $I = 0$.

11. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace για το εσωτερικό ενός κυλίνδρου με ακτίνα R με την οριακή συνθήκη $V(\rho = R, \phi, z) = f(\phi)$. Να αποδειχθεί ότι το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$V(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi' f(\phi')\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos[n(\phi-\phi')]\right\}.$$

Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς.

Λύση:

$$V(\rho,\phi) = A_0 + \sum_1^\infty(A_n\rho^n\cos n\phi + B_n\rho^n\sin n\phi) \rightarrow$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' f(\phi'),\ A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} d\phi' f(\phi')\cos n\phi',\ B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} d\phi' f(\phi')\sin n\phi'.$$

Άρα

$$V(\rho,\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi' f(\phi')\left[\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^\infty\frac{\rho^n}{\pi R^n}(\cos n\phi'\cos n\phi + \sin n\phi'\sin n\phi)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' f(\phi')\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos n(\phi-\phi')\right].$$

Η σειρά ανάγεται σε γεωμετρική και αθροίζεται:

$$\sum_1^\infty q^n e^{in(\phi-\phi')} = \sum_0^\infty [qe^{i(\phi-\phi')}]^n - 1 = \frac{1}{1-qe^{i(\phi-\phi')}} - 1 = \frac{qe^{i(\phi-\phi')-q^2}}{1+q^2-2q\cos(\phi-\phi')} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^\infty q^n \cos n(\phi-\phi') = \frac{q\cos(\phi-\phi')-q^2}{1+q^2-2q\cos(\phi-\phi')} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(\phi-\phi') = \frac{\rho}{R}\frac{1\cos(\phi-\phi')-\frac{\rho}{R}}{1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2-2\left(\frac{\rho}{R}\right)\cos(\phi-\phi')}.$$

12. Σημειακό φορτίο απέχει απόσταση d από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο. Με τη μέθοδο των ειδώλων βρείτε:

(α) Την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου που επάγεται στο επίπεδο.

(β) Τη δύναμη μεταξύ του φορτίου και του επιπέδου χρησιμοποιώντας το νόμο του Coulomb για τη δύναμη μεταξύ του φορτίου και του ειδώλου του.

(γ) Τη δύναμη που ασκείται στο επίπεδο ολοκληρώνοντας την ποσότητα $2\pi k\sigma^2$ (που δίνει την πίεση προς τα έξω σε αγώγιμη επιφάνεια) σ΄ όλο το επίπεδο.

(δ) Το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί το φορτίο από τη θέση του στο άπειρο.

(ε) Τη δυναμική ενέργεια μεταξύ του φορτίου και του ειδώλου του. Συγκρίνετε με το ερώτημα (δ).

Λύση: Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\Phi = kq\left[\frac{1}{|\vec{r}-\hat{z}d|} - \frac{1}{|\vec{r}+\hat{z}d|}\right] = kq\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right].$$

Έχοντας το δυναμικό μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο $z=0$:

$$E_x\big|_{z=0} = 0,\ E_y\big|_{z=0} = 0,\ E_z\big|_{z=0} = -\frac{2kqd}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(α) Η επιφανειακή πυκνότητα θα προκύψει από την $E_z = 4\pi k\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{E_z}{4\pi k}$, όπου, βέβαια, τα πάντα υπολογίζονται στο $z=0$:

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qd}{2\pi(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}},\ \rho^2 \equiv x^2+y^2.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ολικό φορτίο που επάγεται στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες:

$$\int_0^\infty 2\pi\rho d\rho\sigma(\rho) = -\frac{qd}{2}\int_0^\infty d(\rho^2)\frac{1}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qd}{2}\int_{d^2}^\infty dt t^{-\frac{3}{2}} = -q,$$

δηλαδή επάγεται συνολικά φορτίο αντίθετο του αρχικού.

(β) $F = \frac{kq^2}{4d^2}$.

(γ)

$$F = \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho 2\pi k\sigma^2 = \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho 2\pi k\frac{q^2d^2}{4\pi^2(\rho^2+d^2)^3} = \frac{kq^2d^2}{2}\int_{d^2}^\infty dt t^{-3} = \frac{kq^2}{4d^2},$$

όπως πριν.

(δ) $W = \int_d^\infty F dz = \int_d^\infty dz \frac{kq^2}{4z^2} = \frac{kq^2}{4d}$.

(ε) $U = -\frac{kq^2}{2d} = -2W$. Μπορούμε να τη βρούμε και απ΄ ευθείας: $U = kq\int_0^\infty 2\pi\rho \frac{\sigma}{(\rho^2+d^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{kq^2}{2d} = -2W$. Ο πρόσθετος παράγοντας 2 οφείλεται στο ότι χρειάζεται επί πλέον έργο για να απομακρύνει κανείς και το είδωλο, ή, ισοδύναμα, για να κρατάει το επίπεδο ακίνητο.

13. Με τη μέθοδο των ειδώλων μελετήστε το πρόβλημα ενός φορτίου q μέσα σε γειωμένη αγώγιμη σφαίρα με εσωτερική ακτίνα a. Βρείτε:

    (α) Το δυναμικό μέσα στη σφαίρα.

    (β) Την επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

    (γ) Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο q.

    Τι θα συμβεί αν η σφαίρα βρεθεί σε δυναμικό V_0; Τι θα συμβεί αν η σφαίρα έχει συνολικό φορτίο Q στις εσωτερικές και εξωτερικές της επιφάνειες;

    Λύση: Το είδωλο θα βρίσκεται στη θέση $r'_I = \frac{R^2}{r'}$ και θα έχει μέγεθος $\frac{r'}{R}$.

    (α) Το δυναμικό στο σημείο παρατήρησης $\vec{r}$ θα είναι: $\Phi(\vec{r}) = \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\frac{r'}{R}}{|\vec{r}-\vec{r}'_I|}\right]$.

    (β) Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα δίδεται από τη σχέση: $\sigma = \frac{E_\perp}{4\pi k} = -\frac{1}{4\pi k}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R}$. Από τη σχέση $|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα ανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{r}'$, συμπεραίνουμε με απλές παραγωγίσεις ότι

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(r - r'\cos\theta), \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'_I|}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'_I|^3}(r - \frac{R^2}{r'}\cos\theta).$$

    Τελικά

$$\sigma = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{(R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\left[R - r'\cos\theta - \frac{r'^3}{R^3}(r' - R\cos\theta)\right].$$

    (γ) Η δύναμη θα είναι:

$$F = \frac{kq\left(q\frac{r'}{R}\right)}{|\vec{r}' - \vec{r}'_I|^2} = \frac{kq^2}{R}\frac{1}{\frac{R^2}{r'} - r'}.$$

14. Θεωρήστε το πρόβλημα δυναμικού στον ημιχώρο $z \geq 0$ με συνθήκες Dirichlet στο επίπεδο $z = 0$ και στο άπειρο.

    (α) Ποια είναι η συνάρτηση Green;

    (β) Αν, στο επίπεδο $z = 0$, το δυναμικό είναι $\Phi = V_0$ μέσα σ΄ έναν κύκλο με ακτίνα a και κέντρο την αρχή των αξόνων και μηδενίζεται έξω από αυτό, να βρεθεί η ολοκληρωτική έκφραση για το δυναμικό σ΄ ένα τυχαίο σημείο.

    (γ) Δείξτε ότι, πάνω στον άξονα του κύκλου, το δυναμικό δίνεται από τη σχέση: $\Phi = V_0\left(1 - \frac{z}{a^2+z^2}\right)$.

    (δ) Δείξτε ότι σε μεγάλες αποστάσεις ($\rho^2 + z^2 >> a^2$) το δυναμικό μπορεί ν΄ αναπτυχθεί σε σειρά ως προς $(\rho^2 + z^2)^{-1}$ με πρώτους όρους:

$$\Phi = \frac{V_0 a^2}{2}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2+z^2)} + \frac{5(3\rho^2a^2 + a^4)}{8(\rho^2+z^2)^2} + \dots\right].$$

Λύση: (α) Έστω $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}'=(x',y',z')$, $\vec{r}_I'=(x',y',-z')$. Τότε:

$$G_D(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_I'|}.$$

(β) Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\Phi(\vec{r})=\int_V d^3r' G_D(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')-\frac{1}{4\pi}\int_{S(V)}da'\Phi(\vec{r}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'}=-\frac{\partial G_D}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}=-\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)+(z-z')^2]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)+(z+z')^2]^{1/2}}\right]\bigg|_{z'=0}=\frac{2z}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)+z^2]^{3/2}}.$$

Για το συγκεκριμένο δυναμικό προκύπτει:

$$\Phi(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_0^R d\rho'\rho'\int_0^{2\pi}d\phi' V_0\frac{2z}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)+z^2]^{3/2}}=$$

$$=-\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^R d\rho'\rho'\int_0^{2\pi}d\phi'\frac{1}{[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)+z^2]^{3/2}}.$$

(γ) Έστω $\rho=0$. Η έκφραση που βρήκαμε απλοποιείται στην

$$\Phi(\vec{r})=-\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^a d\rho'\rho' 2\pi\frac{1}{[\rho'^2+z^2]^{3/2}}=-V_0\left(1-\frac{z}{a^2+z^2}\right).\ (1)$$

(δ) Το δυναμικό γράφεται:

$$\Phi(\vec{r})=-\frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^a d\rho'\rho'\int_0^{2\pi}d\phi'\frac{1}{[\rho^2+z^2]^{3/2}}\frac{1}{\left[1+\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)}{\rho^2+z^2}\right]^{3/2}}.$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί εύκολα η σχέση:

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}}=1-\frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x^2+\ldots.$$

Αντικαθιστώντας και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $t=\rho'^2$ προκύπτει:

$$\Phi(\vec{r})=-\frac{V_0 z}{2\pi[\rho^2+z^2]^{3/2}}\int_0^a d\rho'\rho'\int_0^{2\pi}d\phi'\left[1-\frac{3}{2}\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)}{\rho^2+z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{15}{8}\left(\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)}{\rho^2+z^2}\right)^2\right]=-\frac{V_0 z}{[\rho^2+z^2]^{3/2}}\frac{1}{2}\int_0^{a^2}dt\left(1-\frac{3}{2}\frac{t}{\rho^2+z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{15}{8}\frac{t^2}{(\rho^2+z^2)^2}+\frac{15}{4}\frac{\rho^2 t}{(\rho^2+z^2)^2}\right)=-\frac{V_0 z a^2}{2[\rho^2+z^2]^{3/2}}.\left[1-\frac{3a^2}{4(\rho^2+z^2)}+\frac{5a^2(a^2+3\rho^2)}{8(\rho^2+z^2)^2}\right]\ (2)$$

Σημειώνουμε το ανάπτυγμα: $\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}}\approx 1-\frac{a^2}{2z^2}$. Στο όριο $\rho^2+z^2\to\infty$ θα ισχύει, για τη σχέση (1): $-V_0\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\approx -V_0\frac{a^2}{2z^2}$. Για τη σχέση (2): $\Phi(\vec{r})\approx -\frac{V_0 z a^2}{2z^3}\left[1-\frac{3a^2}{4z^2}\right]\approx -V_0\frac{a^2}{2z^2}$ που ταυτίζεται με την προηγούμενη.

15. (α) Βρείτε το δυναμικό που οφείλεται σε ευθύγραμμη ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

(β) Θεωρήστε δύο κατανομές φορτίου όπως του προηγουμένου ερωτήματος, παράλληλες προς τον άξονα των z. Η μία τέμνει το επίπεδο xy στο σημείο $(x = +x_0, y = 0)$ και έχει πυκνότητα φορτίου $+\lambda$, ενώ η άλλη τέμνει το επίπεδο xy στο σημείο $(x = -x_0, y = 0)$ και έχει πυκνότητα φορτίου $-\lambda$. Να προσδιοριστούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες με δυναμικό Φ. (Το x_0 είναι θετικό).

(γ) Θεωρήστε τις ισοδυναμικές επιφάνειες για $\Phi = +\frac{V_0}{2}$ και $\Phi = +\frac{V_0}{2}$. Υπολογίστε την ακτίνα τους R και την απόσταση των κέντρων τους D. Απαλείφοντας την παράμετρο x_0 μεταξύ των D και R εκφράστε την ποσότητα $\frac{\lambda}{V_0}$ συναρτήσει των D και R. Ποιά είναι η χωρητικότητα του συστήματος ανά μονάδα μήκους; (Το πρόβλημα είναι διδιάστατο).

Λύση: (α) Είναι γνωστό ότι $E = \frac{2k\lambda}{r}$, οπότε $\Phi = 2k\lambda \ln \frac{r}{r_0}$, όπου το r_0 είναι ένα σημείο αναφοράς.

(β)Συμβολίζουμε με r_+ την απόσταση του σημείου παρατήρησης από την κατανομή που βρίσκεται στο $+x_0$, με r_- την απόστασή του από την κατανομή που βρίσκεται στο $-x_0$, και με r την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Τότε το δυναμικό που οφείλεται και στις δύο κατανομές θα είναι:

$$\Phi = 2k\lambda \left[\ln \frac{r_+}{r_0} - \ln \frac{r_-}{r_0}\right] = 2k\lambda \ln \frac{r_+}{r_-}.$$

(γ) Αν απαιτήσουμε $\Phi = +\frac{V_0}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $\left.\frac{r_+^2}{r_-^2}\right|_{+\frac{V_0}{2}} = \exp\left[+\frac{V_0}{2k\lambda}\right]$, ενώ η επιλογή $\Phi = -\frac{V_0}{2}$ δίνει: $\left.\frac{r_+^2}{r_-^2}\right|_{-\frac{V_0}{2}} = \exp\left[-\frac{V_0}{2k\lambda}\right]$. Γράφοντας τις πιο πάνω εξισώσεις με μια ενιαία μορφή, συμβολίζοντας το δεξιό μέλος με α έχουμε:

$$\frac{(x-x_0)^2+y^2}{(x+x_0)^2+y^2} = \alpha \Rightarrow \left(x - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}x_0\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha x_0\sqrt{2}}{1-\alpha}\right)^2,$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων με συγκεκριμένη τιμή δυναμικού βρίσκονται σε περιφέρεια με κέντρο στο σημείο $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x_0, 0\right)$ και ακτίνα ίση με $\frac{\alpha x_0\sqrt{2}}{|1-\alpha|}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Για $\Phi = +\frac{V_0}{2}$, θα είναι $\alpha_+ = \exp\left[+\frac{V_0}{2k\lambda}\right]$, το κέντρο θα είναι στο $\left(-x_0 \coth \frac{V_0}{4k\lambda}, 0\right)$ και η ακτίνα $\frac{x_0}{\sinh \frac{V_0}{4k\lambda}}$.

(2) Για $\Phi = -\frac{V_0}{2}$, θα είναι $\alpha_- = \exp\left[-\frac{V_0}{2k\lambda}\right]$, το κέντρο θα είναι στο $\left(+x_0 \coth \frac{V_0}{4k\lambda}, 0\right)$ και η ακτίνα $\frac{x_0}{\sinh \frac{V_0}{4k\lambda}}$.

Συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα είναι η κοινή τιμή $R = \frac{x_0}{\sinh \frac{V_0}{4k\lambda}}$, ενώ η απόσταση των κέντρων είναι η $D = 2x_0 \coth \frac{V_0}{4k\lambda}$. Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{D}{R} = 2\cosh \frac{V_0}{4k\lambda} = \exp\left[\frac{V_0}{4k\lambda}\right] + \exp\left[-\frac{V_0}{4k\lambda}\right] \equiv x + \frac{1}{x}$, όπου $x \equiv \exp\left[\frac{V_0}{4k\lambda}\right]$. Λύνοντας την εξίσωση $x^2 - \frac{D}{R}x + 1 = 0$ καταλήγουμε στην

$$\exp\left[\frac{V_0}{4k\lambda}\right] = \frac{\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2R} \Rightarrow \frac{V_0}{4k\lambda} = \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{V_0} = \frac{1}{4k \ln \frac{D+\sqrt{D^2-4R^2}}{2R}}.$$

Αυτή η έκφραση αντιπροσωπεύει τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, αφού $C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{\frac{Q}{L}}{V_0} = \frac{\lambda}{V_0}$.

16. Θεωρήστε κούφιο αγώγιμο κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα R. Ο κύλινδρος χωρίζεται στα δύο από επίπεδο που περνάει από τον άξονά του και τα δύο μισά βρίσκονται στα δυναμικά V_1 και V_2.

(α) Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγού.

(β) Να υπολογιστεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου και στα δύο μισά του αγωγού.

Λύση: (α) Η γενική λύση είναι:

$$\Phi = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_1^\infty (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(f_m \cos m\phi + g_m \sin m\phi),$$

αλλά για το εσωτερικό πρόβλημα πρέπει να μηδενίσουμε ορισμένους συντελεστές και η επιτρεπτή μορφή είναι:

$$\Phi = c_0 + \sum_1^\infty \rho^m (c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi),$$

και αν είναι γνωστή η συνάρτηση $\Phi(\rho = R) \equiv V_R$, όπως εδώ, προκύπτει η απαίτηση:

$$V_R = c_0 + \sum_1^\infty R^m (c_m \cos m\phi + d_m \sin m\phi),$$

που συνεπάγεται τις ισότητες

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi V_R = \frac{V_1 + V_2}{2},\ c_m = \frac{1}{\pi R^m}\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi V_R \cos m\phi = 0,$$

$$d_m = \frac{1}{\pi R^m}\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi V_R \sin m\phi = \frac{V_1 - V_2}{m\pi R^m}(1 - (-1)^m).$$

Τελικά:

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + \sum_1^\infty \frac{V_1 - V_2}{m\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m (1 - (-1)^m)\sin m\phi.$$

Παρατηρούμε ότι επιζούν μόνο οι περιττοί όροι $(m = 2n+1)$:

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi}\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n+1}\sin(2n+1)\phi.$$

Το άθροισμα που εμφανίζεται είναι το φανταστικό μέρος του αθροίσματος:

$$A \equiv \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n+1}\frac{e^{i(2n+1)\phi}}{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ z \equiv \frac{\rho}{R}e^{i\phi}.$$

Οι σχέσεις $\ln(1 \pm z) = \pm z - \frac{z^2}{2} \pm \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \ldots$ συνεπάγονται την

$$\sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Η σχέση αυτή εξειδικεύεται στην

$$A = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \frac{\rho}{R}e^{i\phi}}{1 - \frac{\rho}{R}e^{i\phi}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(1 + \frac{\rho}{R}e^{i\phi}\right)\left(1 - \frac{\rho}{R}e^{-i\phi}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\rho}{R}\sin\phi\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 - \frac{\rho^2}{R^2} + i\frac{2\rho}{R}\sin\phi}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{\rho}{R}\sin\phi\right)^2}.$$

Χρειαζόμαστε το φανταστικό μέρος του λογαρίθμου, δηλαδή το

$$\arctan\frac{\frac{2\rho}{R}\sin\phi}{1-\frac{\rho^2}{R^2}} = \arctan\frac{2\rho R\sin\phi}{R^2-\rho^2}.$$

Τελικά:

$$\Phi = \frac{V_1+V_2}{2} + \frac{V_1-V_2}{\pi}\arctan\frac{2\rho R\sin\phi}{R^2-\rho^2}.$$

Η συνάρτηση arctan πρέπει να δίνει τόξα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε, π.χ., να έχουμε το σωστό αποτέλεσμα για $\phi=\frac{\pi}{2},\ \rho\to R$.

17. Θεωρήστε το διδιάστατο πρόβλημα που σχετίζεται με έναν αγώγιμο κενό κύλινδρο που είναι χωρισμένος σε τέσσερα ίσα μέρη με δυναμικά $+V_0, -V_0, +V_0, -V_0$. (α) Αποδείξτε ότι το δυναμικό μέσα στον κύλινδρο δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\rho,\phi) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2}\frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά αθροίζεται και δίνει:

$$\Phi(\rho,\phi) = \frac{2V_0}{\pi}arctan\left(\frac{2\rho^2b^2\sin 2\phi}{b^4-\rho^4}\right).$$

(γ) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον κύλινδρο.

Λύση: (α) Η συνάρτηση δυναμικού είναι περιττή στο διάστημα$[-\pi,+\pi]$, οπότε δεν υπάρχουν συνημιτονικοί όροι και το ανάπτυγμα απλοποιείται στο:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\rho^m\sin m\phi \Rightarrow b_mR^m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi V|_{\rho=R}\sin m\phi =$$

$$= -\frac{V_0}{m\pi}\left[\cos m\phi|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} - \cos m\phi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \cos m\phi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \cos m\phi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] = \frac{2V_0(1+\cos m\pi - 2\cos\frac{m\pi}{2})}{m\pi}.$$

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι τα b_m μηδενίζονται για $m=4n,\ m=4n+1$ και $m=4n+3$, ενώ για $m=4n+2$ δίνει: $\frac{8V_0}{(4n+2)\pi R^{4n+2}}$. Με αυτά υπόψη το ανάπτυγμα του δυναμικού είναι:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4V_0}{(2n+1)\pi R^{4n+2}}\rho^{4n+2}\sin(4n+2)\phi = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{4n+2}\frac{\sin(4n+2)\phi}{2n+1}.$$

(β) Για να αθροίσουμε τη σειρά μας χρειάζεται μια κλειστή έκφραση για την ποσότητα: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. Όμως ξέρουμε ότι $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$ και $\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots$ άρα: $\ln\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \ldots\right) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$. Για $z = a^2e^{2i\phi}$ θα προκύψει: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(4n+2)}\sin(4n+2)\phi}{2n+1} = \frac{1}{2}Im\left[\ln\frac{1+a^2e^{2i\phi}}{1-a^2e^{2i\phi}}\right] = \frac{1}{2}Im\left[\ln\frac{1-a^4+2ia^2\sin 2\phi}{(1-a^2\cos 2\phi)^2+(a^2\sin 2\phi)^2}\right]$. Το φανταστικό κομμάτι του λογαρίθμου, αν λάβουμε υπόψη ότι $a\equiv\frac{\rho}{R}$, ισούται με

$$arctan\frac{2a^2\sin 2\phi}{1-a^4} = arctan\frac{2R^2\rho^2\sin 2\phi}{R^4-\rho^4},$$

οπότε το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\Phi = \frac{4V_0}{\pi} arctan \frac{2R^2\rho^2 \sin 2\phi}{R^4 - \rho^4}.$$

(γ) Οι δύο συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$E_\rho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{16V_0}{\pi} \frac{\rho R^4 (R^2 + \rho^2) \sin 2\phi}{(R^4 - \rho^4)^2 + 2\rho^4 R^4 \sin^2 2\phi}$$

και

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{16V_0}{\pi} \frac{\rho R^2 (R^4 - \rho^4) \sin 2\phi}{(R^4 - \rho^4)^2 + 2\rho^4 R^4 \sin^2 2\phi}.$$

18. Με τη μέθοδο των ειδώλων να δειχθεί ότι η συνάρτηση Green για το διδιάστατο <u>εξωτερικό</u> πρόβλημα ενός κυλίνδρου με ακτίνα b με συνθήκες Dirichlet είναι:

$$G_D(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left(\frac{(\rho^2 - b^2)(\rho'^2 - b^2) + b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2}{b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2} \right).$$

Τί αλλαγές πρέπει να γίνουν για να λύσουμε το <u>εσωτερικό</u> πρόβλημα;

<u>Λύση:</u> Η πρωταρχική λύση της εξίσωσης $\nabla^2 G_0 = -4\pi\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho'})$ είναι η $G_0 = -2\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho'}|$. Αν τώρα θεωρήσουμε το είδωλο στη θέση $\vec{\rho'}_I$, η συνάρτηση Green που ψάχνουμε θα είναι:

$$G_D = C + (-2\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho'}|) - (-2\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho'}_I|) = C + \ln \frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho'}_I|^2}{|\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2}.$$

Η απαίτηση $G_D|_{\rho=b} = 0$, αν υποθέσουμε για απλότητα ότι $\phi = 0$ και χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $\vec{\rho} = \rho\vec{n}$, $\vec{\rho'} = \rho'\vec{n}'$, $\vec{\rho'}_I = \rho'_I \vec{n}'$ δίνει:

$$C + \ln \left. \frac{\rho^2 \left| \vec{n} - \frac{\rho'_I}{\rho}\vec{n}' \right|^2}{\rho'^2 \left| \frac{\rho}{\rho'}\vec{n} - \vec{n}' \right|^2} \right|_{\rho=b} = 0 \Rightarrow C + \ln \frac{b^2 \left| \vec{n} - \frac{\rho'_I}{b}\vec{n}' \right|^2}{\rho'^2 \left| \frac{b}{\rho'}\vec{n} - \vec{n}' \right|^2} = 0.$$

Αν επιλέξουμε $\rho'_I = \frac{b^2}{\rho'}$ μπορούμε να δούμε εύκολα ότι οι δύο απόλυτες τιμές εξισώνονται, οπότε $C + \ln \frac{b^2}{\rho'^2} = 0 \Rightarrow C = \ln \frac{\rho'^2}{b^2}$ και η συνάρτηση Green γίνεται:

$$G_D = C + \frac{\rho^2 \left| \vec{n} - \frac{\rho'_I}{\rho}\vec{n}' \right|^2}{\rho'^2 \left| \frac{\rho}{\rho'}\vec{n} - \vec{n}' \right|^2} = \ln \frac{\rho'^2}{b^2} + \frac{\rho^2 \left| \vec{n} - \frac{b^2}{\rho\rho'}\vec{n}' \right|^2}{\rho'^2 \left| \frac{\rho}{\rho'}\vec{n} - \vec{n}' \right|^2} = \ln \frac{\rho'^2}{b^2} + \ln \frac{\rho^2 \left(1 + \frac{b^4}{\rho^2\rho'^2} - 2\frac{b^2}{\rho\rho'}\cos\phi\right)}{\rho'^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho'^2} + 1 - 2\frac{\rho}{\rho'}\cos\phi\right)} =$$

$$= \ln \frac{\rho'^2}{b^2} + \ln \frac{\rho^2 + \frac{b^4}{\rho'^2} - 2\frac{b^2\rho}{\rho'}\cos\phi}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\phi} = \ln \frac{\rho^2\rho'^2 + b^4 - 2b^2\rho\rho'\cos\phi}{b^2|\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2}.$$

Η ϕ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{n}$ και $\vec{n}'$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι: $\rho^2\rho'^2 + b^4 - 2b^2\rho\rho'\cos\phi = (\rho^2 - b^2)(\rho'^2 - b^2) + b^2|\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2$, άρα:

$$G_D(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left(\frac{(\rho^2 - b^2)(\rho'^2 - b^2) + b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2}{b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho'}|^2} \right).$$