ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΠΡΩΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Προσδιορίστε την πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{x})$ που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις ακόλουθες κατανομές φορτίου:

(α)Φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Φορτίο λ ανά μονάδα μήκους ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας b σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(γ) Φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε δίσκο ακτίνας R σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(δ) Το ίδιο με το (γ) σε σφαιρικές συντεταγμένες.

<u>Λύση:</u>

(α) Η τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\delta(r-R)}{r^2}\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi').$$

Στην περίπτωσή μας είναι προφανές ότι η πυκνότητα φορτίου δεν εξαρτάται από τα θ και ϕ. Μια κατάλληλη μετατροπή για τη συνάρτηση $\rho(\vec{x})$ είναι: (1) Να αντικατασταθεί η $\delta(\cos\theta - \cos\theta')$ με το $\frac{1}{2}$, ώστε να απλοποιηθεί το 2 που θα προκύψει όταν ολοκληρωθεί η πυκνότητα φορτίου ως προς θ από -1 μέχρι $+1$. (2) Να αντικατασταθεί η $\delta(\phi-\phi')$ με το $\frac{1}{2\pi}$, ώστε να απλοποιηθεί το 2π που θα προκύψει όταν ολοκληρωθεί η πυκνότητα φορτίου ως προς ϕ από 0 μέχρι 2π. Άρα:

$$\rho(\vec{x}) = Q\frac{\delta(r-R)}{r^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} = \frac{Q}{4\pi r^2}\delta(r-R).$$

Η επαλήθευση είναι και το κριτήριο για την ορθότητα της λύσης μας: το ολοκλήρωμα όγκου της πυκνότητας φορτίου πρέπει να δίνει το φορτίο.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{\infty} drr^2\frac{Q}{4\pi r^2}\delta(r-R) = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{Q}{4\pi} = Q,$$

οπότε η προσέγγισή μας είναι εντάξει.

(β) Με την ίδια λογική, αλλά χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\delta(r-b)}{r}\delta(\phi-\phi')\delta(z-z'),$$

προκύπτει:

$$\rho(\vec{x}) = Q\frac{\delta(r-b)}{r}\frac{1}{L}\frac{1}{2\pi} = \frac{Q}{L}\frac{\delta(r-b)}{2\pi r} = \lambda\frac{\delta(r-b)}{2\pi r},$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι σε μήκος L είναι κατανεμημένο φορτίο Q, οπότε προκύπτει η γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda \equiv \frac{Q}{L}$. Επαλήθευση:

$$\int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} drr\lambda\frac{\delta(r-b)}{2\pi r} = L\cdot 2\pi\cdot\lambda\cdot\frac{1}{2\pi} = Q.$$

(γ) Δοκιμάζουμε τη μορφή:

$$\rho(\vec{x}) = N\Theta(R-\rho)\delta(z)\frac{1}{2\pi},$$

όπου το N πρέπει να προσδιοριστεί ώστε η ολοκλήρωση να δίνει το συνολικό φορτίο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d\rho\rho N\Theta(R-\rho)\delta(z)\frac{1}{2\pi} = Q \Rightarrow 2\pi \int_0^R d\rho\rho N \frac{1}{2\pi} = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\frac{R^2}{2} = Q \Rightarrow N = \frac{2Q}{R^2} \Rightarrow \rho(\vec{x}) = \frac{2Q}{R^2}\Theta(R-\rho)\delta(z)\frac{1}{2\pi} = \frac{Q}{\pi R^2}\Theta(R-\rho)\delta(z).$$

(δ) Όπως προηγουμένως:

$$\rho(\vec{x}) = N\Theta(R-\rho)\delta(z)\frac{1}{2\pi} = N\Theta(R - r\sin\theta)\delta(r\cos\theta)\frac{1}{2\pi}.$$

Προσδιορισμός του N :

$$Q = N\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} drr^2 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta\Theta(R - r\sin\theta)\delta(r\cos\theta)\frac{1}{2\pi} =$$

$$= N\int_0^{\infty} drr^2 \int_{-1}^{+1} dx\Theta(R - r\sqrt{1-x^2})\delta(rx) =$$

$$= N\int_0^{\infty} drr^2 \int_{-1}^{+1} dx\Theta(R - r\sqrt{1-x^2})\frac{1}{r}\delta(x) = N\int_0^{\infty} drr^2\Theta(R-r)\frac{1}{r} = N\frac{R^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{2Q}{R^2} \Rightarrow \rho(\vec{x}) = \frac{2Q}{R^2}\Theta(R - r\sin\theta)\delta(r\cos\theta)\frac{1}{2\pi} = \frac{Q}{\pi R^2}\Theta(R - r\sin\theta)\delta(r\cos\theta).$$

2. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss να βρείτε την ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου σ΄ όλο το χώρο για καθεμιά από τις εξής τρεις σφαίρες με ακτίνα a και ολικό φορτίο Q: (α) αγώγιμη, (β) ομογενώς φορτισμένη (γ) με πυκνότητα που μεταβάλλεται με το νόμο $r^n (n > -3)$. Σχεδιάστε τη συνάρτηση $E(r)$ για τις δύο πρώτες περιπτώσεις και για την τρίτη για τις τιμές $n = -2$ και $n = +2$.

   <u>Λύση:</u> (α)

$$E = \begin{cases} k\frac{Q}{r^2}, & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

   (β)

$$E = \begin{cases} k\frac{Q}{r^2}, & r \geq a \\ k\frac{Qr}{a^3} & r < a \end{cases}$$

   (γ) Αν $\rho(\vec{r}) = Cr^n$, το ολικό φορτίο θα είναι: $Q = \int_0^a 4\pi r^2 dr C r^n = 4\pi C \frac{a^{n+3}}{n+3}$, οπότε $C = \frac{(n+3)Q}{4\pi a^{n+3}}$. Για $r \geq a$ δεν αλλάζει τίποτα. Για $r < a$ ο Gauss δίνει: $4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{4\pi k}\int_0^r 4\pi r'^2 dr' C r'^n \Rightarrow E(r) = \frac{4\pi k C r^{n+1}}{n+3}$ και αντικαθιστώντας την τιμή του C βρίσκουμε τελικά: $E(r) = \frac{kQr^{n+1}}{a^{n+3}}$. Τελικά:

$$E = \begin{cases} k\frac{Q}{r^2}, & r \geq a \\ \frac{kQr^{n+1}}{a^{n+3}} & r < a \end{cases}$$

3. Το δυναμικό που προκύπτει από την κατανομή φορτίου ενός ατόμου υδρογόνου με συγκεκριμένη κυματοσυνάρτηση είναι: $\Phi = kq\frac{e^{-\frac{2r}{a_0}}}{r}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)$, όπου a_0 είναι η ακτίνα του Bohr. Να βρείτε την κατανομή φορτίου (συνεχή και διακριτή) που παράγουν αυτό το δυναμικό και ερμηνεύστε φυσικά τον κάθε όρο.

   Λύση: Βρίσκουμε την πυκνότητα φορτίου ξεκινώντας από την εξίσωση του Poisson: $\nabla^2\Phi = -4\pi k\rho$, με την πρόσθετη παρατήρηση ότι για μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το r, όπως η Φ, ισχύει η απλοποιημένη έκφραση: $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$. Έχουμε, διαδοχικά:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi k}\nabla^2\Phi = -\frac{1}{4\pi k}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[kq\frac{e^{-\frac{2r}{a_0}}}{r}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)\right]\right),$$

   που μετά τις παραγωγίσεις δίνει: $\rho(r) = -\frac{q}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$. Μπορεί κανείς να υπολογίσει το ολικό φορτίο $Q = \int d^3r\rho(r) = -q$. Οι πράξεις που μόλις κάναμε ισχύουν μόνο αν $r \neq 0$. Για $r \to 0$ το δυναμικό παίρνει την προσεγγιστική μορφή: $\Phi_0 = \frac{kq}{r}$ και με τη βοήθεια της $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$ βρίσκουμε ότι $\nabla^2\Phi_0 = -4\pi kq\delta(\vec{r})$, που πρέπει να ισχύει εκ παραλλήλου με την $\nabla^2\Phi_0 = -4\pi k\rho(\vec{r})$, οπότε: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$ στην περιοχή $r \to 0$. Τελικά

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) - \frac{q}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}.$$

   Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει το σημειακό φορτίο του πυρήνα, ενώ ο δεύτερος την πυκνότητα φορτίου του ηλεκτρονικού νέφους. Αν υπολογίσει κανείς το ολικό φορτίο περιλαμβάνοντας και το φορτίο του πυρήνα, το άτομο θα προκύψει αφόρτιστο.

4. Υπολογίστε, με τη βοήθεια του νόμου του Gauss τη χωρητικότητα των εξής πυκνωτών:

   (α) Δύο επίπεδων παράλληλων αγώγιμων φύλλων με εμβαδόν A που απέχουν το ένα από το άλλο μια μικρή απόσταση d.

   (β) Δύο ομόκεντρων αγώγιμων σφαιρικών επιφανειών με ακτίνες a και b ($b > a$).

   (γ) Δύο ομόκεντρων αγώγιμων κυλινδρικών επιφανειών με ακτίνες a και b ($b > a$) και μήκος L, που είναι πολύ μεγαλύτερο από τις ακτίνες.

   Λύση: (α) Με κατάλληλο κουτί του Gauss συμπεραίνουμε ότι:

$$EA = 4\pi k\sigma A \Rightarrow E = 4\pi k\sigma \Rightarrow \Delta\Phi = 4\pi k\sigma d \Rightarrow C \equiv \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{\sigma A}{4\pi k\sigma d} = \frac{A}{4\pi kd}.$$

   (β) Στο διάκενο το ηλεκτρικό πεδίο είναι $E = \frac{kQ}{r^2}$, οπότε η διαφορά δυναμικού είναι $\Delta\Phi = kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ και

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{ab}{k(b-a)}.$$

   (γ) Με κατάλληλο κουτί του Gauss με μήκος L συμπεραίνουμε ότι:

$$2\pi rLE(r) = 4\pi k\lambda L \Rightarrow E(r) = \frac{2k\lambda}{r} \Rightarrow \Delta\Phi = 2k\lambda\ln\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{C}{L} \equiv \frac{\frac{Q}{L}}{\Delta\Phi} = \frac{\lambda}{2k\lambda\ln\frac{b}{a}} = \frac{1}{2k\ln\frac{b}{a}}.$$

   Επισημαίνουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση έχουν νόημα μόνο οι ποσότητες (χωρητικότητα, φορτίο) ανά μονάδα μήκους. Για παράδειγμα $\lambda \equiv \frac{Q}{L}$.

5. Δύο κυλινδρικοί αγωγοί με ακτίνες a_1 και a_2 είναι παράλληλοι και απέχουν απόσταση d, που είναι πολύ μεγαλύτερη από οποιαδήποτε ακτίνα. Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους ισούται προσεγγιστικά από τη σχέση: $C \approx \left(4 \ln \frac{d}{a}\right)^{-1}$, όπου $a \equiv \sqrt{a_1 a_2}$.

   Λύση: Θεωρούμε ότι ο ένας αγωγός φέρει γραμμική πυκνότητα φορτίου $+\lambda$ και ο άλλος $-\lambda$. Επιχειρούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ τους. Για απλότητα θεωρούμε ένα σημείο παρατήρησης πάνω στο επίπεδο που περιλαμβάνει τους δύο άξονες. Το ηλεκτροστατικό πεδίο θα είναι: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$, όπου r και R οι αποστάσεις του σημείου παρατήρησης από τους αντίστοιχους άξονες και έχουμε υποθέσει ότι οι άξονες απέχουν κατά $d = r + R$. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών βρίσκεται ολοκληρώνοντας την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των επιφανειών τους:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{a_1}^{d-a_2} dr \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{(d-a_1)(d-a_2)}{a_1 a_2}.$$

   Τέλος κάνουμε τις προσεγγίσεις $d - a_1 \approx d,\ d - a_2 \approx d$ και χρησιμοποιούμε τον ορισμό του a, οπότε:

$$V \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d^2}{(\sqrt{a_1 a_2})^2} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{a}.$$

   Η χωρητικότητα για τμήμα των κυλίνδρων με μήκος L είναι:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{\frac{Q}{L}}{\Delta V} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{a}} = \pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\frac{d}{a}}.$$

6. Να υπολογιστεί η ελκτική δύναμη μεταξύ των οπλισμών (1) επίπεδου πυκνωτή (2) του πυκνωτή που σχηματίζεται μεταξύ δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών (α) για σταθερό φορτίο σε κάθε οπλισμό (β) για σταθερή διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.

   Λύση: Θεωρούμε πρώτα τον επίπεδο πυκνωτή με επιφάνεια οπλισμών S και διάστημα x μεταξύ των οπλισμών:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x E^2 = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 Sx = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{\epsilon_0 S}\right)^2 = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}.$$

   Αν το φορτίο διατηρείται σταθερό η φύναμη θα είναι:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

   Για να δούμε τι γίνεται για σταθερό δυναμικό αντικαθιστούμε το Q με το CV και βρίσκουμε: $U = \frac{xC^2V^2}{2\epsilon_0 S}$. Αλλά $C = \epsilon_0\frac{S}{x}$, οπότε:

$$U = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x} \Rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2},$$

   οπότε έχει την αντίθετη κατεύθυνση απ' ό,τι στην προηγούμενη περίπτωση.

   Θεωρούμε στη συνέχεια τους δύο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς. Ξεκινάμε από την περίπτωση για σταθερό φορτίο, οπότε εκκινούμε από τη σχέση $U = \frac{Q^2}{2\tilde{C}}$, όπου $\tilde{C} = \pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}$ είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος. Τότε:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2\tilde{C}}\right) = -Q^2\left(-\frac{1}{2\tilde{C}^2}\right)\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = \left(\frac{Q^2}{2\left(\pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}\right)^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}\right) =$$

$$= \left(\frac{Q^2}{2\left(\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln\frac{x}{a}}\right)^2} \right) (-\pi\epsilon_0) \left(\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{x}{a}\right) = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 x}.$$

Για την κατάσταση σταθερού δυναμικού είναι πιο κατάλληλη η σχέση $U = \frac{1}{2}\tilde{C}V^2$, η οποία συνεπάγεται:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}V^2 = -\frac{V^2}{2}\frac{\partial\left(\pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}\right)}{\partial x} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{2x(\ln\frac{x}{R})^2}.$$

7. Αποδείξτε ότι, για περιοχή χωρίς φορτία, η μέση τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια μιας σφαίρας ισούται με την τιμή του δυναμικού στο κέντρο της σφαίρας.

   Λύση: Ξεκινάμε από τη σχέση

   $$\int_V d^3r(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) = \int_{S(V)} da\hat{n}(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)$$

   και αντικαθιστούμε $f = \Phi,\ g = \frac{1}{|\vec{r}|}$, όπου θεωρούμε ότι αρχή των αξόνων είναι το κέντρο της σφαίρας. Θα σταθούν χρήσιμες οι ταυτότητες: $\vec{\nabla}g = -\frac{\vec{r}}{r^3},\ \nabla^2 g = -4\pi\delta(\vec{r})$. Η αντικαταστάσεις θα δώσουν:

   $$\int_V d^3r\left(\Phi\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}|}\nabla^2\Phi\right) = \int_{S(V)} da\hat{n}\left(\Phi\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{\nabla}\Phi\right) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \int_V d^3r\left(\Phi(-4\pi\delta(\vec{r})) - \frac{1}{|\vec{r}|}\nabla^2\Phi\right) = \int_{S(V)} da\hat{n}\left(\Phi\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{\nabla}\Phi\right) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow -4\pi\Phi(\vec{0}) - 0 = \int_{S(V)} da\left(-\frac{\Phi}{r^2}\right) + \int_{S(V)} da\frac{\hat{n}\cdot(-\vec{\nabla}\Phi)}{r} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow -4\pi\Phi(\vec{0}) = \int_{S(V)} da\left(-\frac{\Phi}{r^2}\right) + \int_{S(V)} da\frac{\hat{n}\cdot\vec{E}}{R} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \Phi(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} da\frac{\Phi}{R^2},$$

   όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι δεν υπάρχουν φορτία μέσα στη σφαίρα, άρα $\nabla^2\Phi = 0$ και $\int_{S(V)} da\hat{n}\cdot\vec{E} = 0$.

8. Δύο παράλληλα γειωμένα αγώγιμα επίπεδα απέχουν απόσταση d. Ένα φορτίο q βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα της αντιστρεπτότητας του Gauss για να δείξετε ότι το συνολικό φορτίο σ' ένα από τα επίπεδα ισούται με $-q$ επί το πηλίκο της απόστασης του φορτίου από το άλλο επίπεδο δια το d.

   Λύση: Υπενθυμίζουμε το θεώρημα και μια σύντομη απόδειξή του: Θεωρούμε διακριτά φορτία, οπότε το δυναμικό στη θέση $\vec{r}_k$ του φορτίου q'_k ίσο με: $\Phi_m = k\sum'_n \frac{q_n}{r_{mn}}$, όπου ο τόνος σημαίνει ότι ο όρος $m = n$ παραλείπεται και $r_{mn} = |\vec{r}_m - \vec{r}_n|$. Άρα $\sum_n q'_m\Phi_m = k\sum'_{m,n}\frac{q'_m q_n}{r_{mn}}$. Παρόμοια: $\sum_n q_m\Phi'_m = k\sum'_{m,n}\frac{q_m q'_n}{r_{mn}}$, συνεπώς:

   $$\sum_n q_m\Phi'_m = \sum_n q'_m\Phi_m.$$

Αυτή η σχέση για συνεχείς κατανομές γράφεται:

$$\int_V d^3r\rho\Phi' + \int_{S(V)} da\sigma\Phi' = \int_V d^3r\rho'\Phi + \int_{S(V)} da\sigma'\Phi.$$

Το επίπεδο 1 βρίσκεται στη θέση $z = 0$ και το επίπεδο 2 στη θέση $z = d$. Το φορτίο στη θέση $(0, 0, z_0)$ αντιστοιχεί στην πυκνότητα φορτίου $\rho = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$. Τα δύο δυναμικά είναι: $\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0$, αφού τα επίπεδα είναι γειωμένα. Θεωρούμε τώρα την τονούμενη διάταξη: ομογενώς φορτισμένα επίπεδα με επιφανειακές πυκνότητες φορτίου $\sigma_1',\ \sigma_2'$ και δυναμικά $\Phi_1' = \Phi_0 + \phi_0,\ \Phi_2' = \phi_0$. Σημειώνουμε ότι για ομογενές πεδίο θα ισχύει: $\Phi(0, 0, z) = \Phi_0\left(1 - \frac{z}{d}\right) + \phi_0$. Η ποσότητα ϕ_0 είναι αυθαίρετη και καθορίζει απλά τη στάθμη του δυναμικού, ενώ το Φ_0 είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των επιπέδων. Επίσης θεωρούμε ότι η πυκνότητα φορτίου μεταξύ των επιπέδων μηδενίζεται: $\rho' = 0$. Το θεώρημα θα δώσει:

$$\int d^3r\rho\Phi' + \int da_1\sigma_1\Phi_1' + \int da_2\sigma_2\Phi_2' = \int d^3r\rho'\Phi + \int da_1\sigma_1'\Phi_1 + \int da_2\sigma_2'\Phi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d^3rq\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)\Phi' + \int da_1\sigma_1\Phi_1' + \int da_2\sigma_2\Phi_2' = \int d^3r0\cdot\Phi + \int da_1\sigma_1'\cdot 0 + \int da_2\sigma_2'\cdot 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q\Phi'(0, 0, z_0) + Q_1\Phi_1' + Q_2\Phi_2' = 0 \Rightarrow q\left[\Phi_0\left(1 - \frac{z}{d}\right) + \phi_0\right] + Q_1(\Phi_0 + \phi_0) + Q_2\phi_0.$$

Τώρα μπορούμε να θέσουμε στην τελευταία σχέση $\phi_0 = 0$ και να πάρουμε $Q_1 = -q\frac{d-z_0}{d}$, ή να θέσουμε $\phi_0 = -\Phi_0$ και να πάρουμε: $Q_2 = -q\frac{z_0}{d}$, όπως ζητάει η άσκηση. Σημειώνουμε ότι τα φυσικά αποτελέσματα πρέπει να είναι ανεξάρτητα του ϕ_0, οπότε η σχέση που βγάλαμε συνεπάγεται ότι $q\phi_0 + Q_1\phi_0 + Q_2\phi_0 = 0 \Rightarrow q + Q_1 + Q_2 = 0$, που ισχύει.