

ΠΜΣ “ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ “ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΕΚΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

49. (α) Να δείξετε ότι στον κενό χώρο η ενέργεια μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στην πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(\vec{x})$ δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

- (β) Αν το ρεύμα αποτελείται από επί μέρους κυκλώματα με ρεύματα I_1, I_2, \dots, I_n , να δείξετε ότι η ενέργεια μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j.$$

Δώστε τις εκφράσεις για τους συντελεστές αυτεπαγωγής L_i και αμοιβαίας επαγωγής M_{ij} .

50. Μια γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δύο σύρματα ακτίνων a και b που απέχουν απόσταση $d > a + b$. Ρεύμα ομοιόμορφα κατανομημένο στις διατομές ρέει σε κάποια κατεύθυνση στο ένα σύρμα και επιστρέφει μέσω του άλλου. Να αποδειχθεί ότι η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους είναι:

$$c^2 L = 1 + 2 \ln \left(\frac{d^2}{ab} \right).$$

51. Κύκλωμα αποτελείται από λεπτό κυλινδρικό έλασμα ακτίνας a που περιέχει ομοαξονικό σύρμα ακτίνας b . Υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή ρεύματος στον εσωτερικό αγωγό, υπολογίστε την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους. Πώς αλλάζει το αποτέλεσμα αν ο εσωτερικός αγωγός είναι λεπτός και κοίλος;
52. Γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δύο παράλληλα σύρματα αυθαίρετης, αλλά σταθερής, διατομής. Οι αγωγοί υποτίθενται τέλειοι. Δείξτε ότι το γινόμενο της αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους και της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\frac{\delta C}{\delta z} \frac{\delta L}{\delta z} = \frac{\mu \epsilon}{c^2},$$

όπου τα μ και ϵ αναφέρονται στο μέσον που περιβάλλει τους αγωγούς.

53. Πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλους επίπεδους οπλισμούς με διαστάσεις a (κατά το x) και b (κατά το y) και απέχουν απόσταση d , που υποτίθεται μικρή συγκριτικά με τα a και b . Η τροφοδοσία ρεύματος γίνεται από τις πλευρές με μήκος a ομογενώς, δηλαδή δεν υπάρχει εξάρτηση από το x , και το ρεύμα κατευθύνεται κατά το y .

(α) Υπολογίστε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στον πυκνωτή. Να αμεληθούν φαινόμενα παραμόρφωσης που συμβαίνουν κοντά στα άκρα των οπλισμών.

(β) Δείξτε ότι το ανάπτυγμα της σύνθετης αντίστασης σε δυνάμεις της συχνότητας είναι ίδιο με το ανάπτυγμα κυκλώματος με εντοπισμένη χωρητικότητα $C = \frac{\epsilon_0 ab}{d}$ σε σειρά με αυτεπαγωγή $L = \frac{\mu_0 ad}{3b}$.

54. Πυκνωτής με οπλισμούς κυκλικού σχήματος ακτίνας a και διάκενο $d \ll a$ συνδέεται με πηγή ρεύματος μέσω καλωδίων, στα οποία το ρεύμα δίνεται από τη σχέση: $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Να υπολογιστούν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μεταξύ των οπλισμών, αμελώντας φαινόμενα παραμόρφωσης που ίσως συμβαίνουν κοντά στα άκρα των οπλισμών.
55. Διηλεκτρική σφαίρα με διηλεκτρική σταθερά ϵ και ακτίνα a βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Ομογενές πεδίο E_0 έχει φορά κατά τον άξονα των x . Η σφαίρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα των z . Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο δίδεται από τη σχέση $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$, όπου

$$\Phi_M = \frac{9}{10} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \epsilon_0 E_0 \omega \left(\frac{a}{r_{>}} \right)^5 xz,$$

όπου το $r_{>}$ είναι το μεγαλύτερο μεταξύ των r και a . Οι ταχύτητες δεν είναι σχετικιστικές. Υπενθυμίζεται ότι η πόλωση διηλεκτρικής σφαίρας σε εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση: $P = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \epsilon_0 E_0$.