

ΠΜΣ “ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ “ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΠΕΜΠΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

38. Μακρύς κυλινδρικός φλοιός με διηλεκτρική σταθερά ϵ και ακτίνες a και $b > a$ τοποθετείται σε (μέχρι τότε) ομογενές πεδίο E_0 με τον άξονά του κάθετο στο πεδίο. Έξω από τον φλοιό υπάρχει κενό (η διηλεκτρική σταθερά είναι μονάδα).
- (α) Προσδιορίστε το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στις τρεις παριοχές, αγνοώντας τις παραμορφώσεις περί τις βάσεις του κυλίνδρου.
- (β) Εξετάστε τα δύο όρια: του διηλεκτρικού κυλίνδρου σε ομογενές εξωτερικό πεδίο και της κυλινδρικής κοιλότητας σε διηλεκτρικό υλικό.
39. Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο διηλεκτρικής σφαίρας με ακτίνα $a < d$ και διηλεκτρική σταθερά ϵ .
- (α) Να υπολογιστεί το δυναμικό παντού.
- (β) Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στο κέντρο της σφαίρας.
- (γ) Να επαληθευθεί ότι, στο όριο $\epsilon \rightarrow \infty$ το αποτέλεσμα ταυτίζεται με το αντίστοιχο της αγωγίμης σφαίρας.
40. Δύο ομόκεντρες αγωγίμες σφαίρες με ακτίνες a και $b > a$ φέρουν φορτία $+Q$ (η μέσα) και $-Q$ (η έξω). Το πάνω ημισφαίριο είναι γεμάτο με διηλεκτρικό σταθεράς ϵ .
- (α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον φλοιό.
- (β) Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική σφαίρα.
- (γ) Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων για $r = a$.
41. Δύο ομοαξονικές κυλινδρικές επιφάνειες μεγάλου μήκους και ακτίνων a και $b > a$ βυθίζονται κάθετα σε διηλεκτρικό υγρό. Αν το υγρό ανυψωθεί κατά h όταν εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού V , να δείχθεί ότι η επιδεκτικότητα του υγρού είναι:

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho g h \ln \frac{b}{a}}{V^2},$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

42. (α) Να αποδειχθεί ότι το μαγνητικό πεδίο στον άξονα ενός σωληνοειδούς με N σπείρες ανά μονάδα μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I δίνεται, στο όριο $N \rightarrow \infty$ από τη σχέση:

$$B_z = 2\pi KNI[\cos \theta_1 + \cos \theta_2],$$

για κατάλληλα ορισμένες γωνίες θ_1 και θ_2 .

(β) Για ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους L και ακτίνας a να δείχτεί ότι το μαγνητικό πεδίο κοντά στον άξονα και στο κέντρο είναι βασικά παράλληλο στον άξονα, αλλά έχει μια μικρή ακτινική συνιστώσα με μέγεθος

$$B_\rho \simeq \frac{96\pi NI}{c} \left(\frac{a^2 z \rho}{L^4} \right),$$

για $z \ll L$, $\rho \ll a$.

(γ) Ναδειχτεί ότι στο άκρο ενός μακρού σωληνοειδούς κοντά στον άξονα οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$B_z \simeq \frac{2\pi NI}{c}, \quad B_\rho = \pm \frac{\pi NI \rho}{ca}.$$

43. Παράλληλα στον άξονα κυλινδρικού αγωγού ακτίνας a και σε απόσταση d από αυτόν υπάρχει μια κυλινδρική κοιλότητα ακτίνας b ($d + b < a$). Στο υπόλοιπο υλικό του κυλίνδρου κυκλοφορεί ρεύμα παράλληλο με τον άξονα με ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στην κοιλότητα.
44. Κυκλικός βρόχος ακτίνας a βρίσκεται στο επίπεδο xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων.

(α) Δείξτε ότι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού είναι:

$$A_\phi = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty dk \cos kz I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>), \quad \rho_> \equiv \max(a, \rho), \quad \rho_< \equiv \min(a, \rho).$$

(β) Δείξτε ότι μια εναλλακτική έκφραση για το A_ϕ είναι η:

$$A_\phi = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho).$$

(γ) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο πάνω στον άξονα των z χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εκφράσεις για το δυναμικό.

45. Κυκλικός βρόχος με ρεύμα I έχει το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και το διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδό του έχει γωνίες θ και ϕ . Το μαγνητικό πεδίο που υπάρχει στην περιοχή δίνεται από τις σχέσεις: $B_x = B_0(1 + \beta y)$, $B_y = B_0(1 + \beta x)$.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στον βρόχο.

(β) Υπολογίστε τη ροπή στην πιό χαμηλή τάξη. Τί συμβαίνει με τις ανώτερες τάξεις;

46. Σφαίρα ακτίνας a φέρει φορτίο με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ . Η σφαίρα περιστρέφεται περί μία διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο μέσα κι έξω από τη σφαίρα.

47. Ένα μαγνητικά “σκληρό” υλικό έχει το σχήμα ορθού κυκλικού κυλίνδρου μήκους L και ακτίνας a . Ο κύλινδρος έχει ομογενή μαγνήτιση M_0 παράλληλη στον άξονά του. (α) Προσδιορίστε τα πεδία \vec{H} και \vec{B} σ’ όλα τα σημεία του άξονα του κυλίνδρου, μέσα κι έξω από το υλικό. (β) Σχεδιάστε τα πηλίκα $\frac{B_z}{\mu_0 M_0}$ και $\frac{H_z}{M_0}$ στον άξονα συναρτήσει του z για $\frac{L}{a} = 5$.

48. Ένα μαγνητοστατικό πεδίο οφείλεται αποκλειστικά σε μια μόνιμη μαγνήτιση εντοπισμένη στο χώρο.

(α) Δείξτε ότι

$$\int d^3x \vec{B} \cdot \vec{H} = 0.$$

(β) Δείξτε ότι η μαγνητοστατική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{H} \cdot \vec{H} = -\frac{\mu_0}{2} \int d^3x \vec{M} \cdot \vec{H}.$$