ΠΜΣ “ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ “ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΤΕΤΑΡΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

30. Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R έχει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ παντού, εκτός από τη σφαιρική περιοχή περί τον βόρειο πόλο, που ορίζεται από την εξίσωση $\theta \leq \alpha$.

    (α) Δείξτε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό της επιφάνειας δίνεται από την έκφραση:

$$\Phi = \frac{Q}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)]\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta),$$

    με τη σύμβαση: $P_{-1}(\cos\alpha) = -1$.

    (β) Να βρεθεί και το δυναμικό στο εξωτερικό της επιφάνειας.

    (γ) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων.

    (δ) Ποιες είναι οι οριακές μορφές του δυναμικού στο εσωτερικό και του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων στις περιπτώσεις (1) $\alpha = \epsilon$, (2) $\alpha = \pi - \epsilon$, όπου το ϵ είναι πολύ μικρό.

31. Λεπτός αγώγιμος δίσκος ακρίνας R βρίσκεται στο επίπεδο $x-y$ με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και έχει δυναμικό V_0. Θεωρήστε ως επί πλέον δεδομένο ότι η πυκνότητα φορτίου είναι ανάλογη της παράστασης $\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$, $\rho^2 = x^2 + y^2$.

    (α) Δείξτε ότι για $r > R$ το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{2V_0}{\pi}\frac{R}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta).$$

    (β) Βρείτε το δυναμικό και για $r < R$.

    (γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του δίσκου;

32. Θεωρήστε το χώρο μεταξύ δύο γειωμένων (άπειρων) επιπέδων (που βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$), ο οποίος μπορεί να περιέχει φορτία.

    (α) Δείξτε ότι μία δυνατή μορφή της συνάρτησης Green είναι η:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right)K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right).$$

    (β) Δείξτε ότι μια εναλλακτική μορφή της συνάρτησης Green είναι η:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\phi-\phi')}\int_0^{\infty}dkJ_m(k\rho)J_m(k\rho')\frac{\sinh(kz_<)\sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}.$$

33. (α) Δείξτε ότι το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου q στο σημείο $(0,0,z_0)$ μεταξύ δύο γειωμένων (άπειρων) επιπέδων στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$, είναι:

$$\Phi(z,\rho) = \frac{4kq}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

(β) Δείξτε ότι η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην κάτω πλάκα είναι:

$$\sigma_0(\rho) = \frac{q}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right) K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right).$$

Υπολογίστε το αντίστοιχο σ_L για την πάνω πλάκα.

(γ) Υπολογίστε το συνολικό επαγόμενο φορτίο στην κάτω πλάκα.

34. Να υπολογιστούν οι πολυπολικές ροπές των ακόλουθων διατάξεων: (α) Ενός φορτίου q στο (0,0,0). (β) Δύο αντίθετων φορτίων στα σημεία $+L/2, -L/2$. (γ) Δύο θετικών και δύο αρνητικών φορτίων με ίσο μέγεθος που βρίσκονται στο επίπεδο xy τοποθετημένα εναλλάξ στα σημεία $(L,0), (0,L)$, $(-L,0), (0,-L)$. (δ) Τεσσάρων θετικών και τεσσάρων αρνητικών φορτίων ίσου μεγέθους, τοποθετημένων εναλλάξ στις κορυφές ενός κύβου πλευράς L. (ε) Δύο φορτίων $+q$ στις θέσεις $z = +L, z = -L$ και ενός φορτίου $-2q$ στη θέση $z = 0$. (στ) Των φορτίων $-q, +2q, -2q, +q$, τοποθετημένων αντίστοιχα στις θέσεις $z = -2L, z = -L, z = +L, z = +2L$. Σχολιάστε για κάθε περίπτωση ποια είναι η χαμηλότερης τάξης πολυπολική ροπή που συνεισφέρει.

35. Πυκνότητα φορτίου ρ βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^{(0)}$, που παράγεται από το δυναμικό $\Phi^{(0)}$, το οποίο μεταβάλλεται αργά στην περιοχή που η ρ δεν είναι μηδέν.

(α)Αν μετατοπιστεί η κατανομή ως σύνολο κατά $\vec{dl}$, να δειχθεί ότι η δυναμική ενέργεια της κατανομής στο εξωτερικό πεδίο θα μεταβληθεί κατά $dW = -\vec{dl} \cdot \vec{F}$.

(β) Δείξτε ότι η συνιστώσα (έστω) 1 της ροπής που ασκείται στην κατανομή φορτίου είναι:

$$N_1 = [\vec{p} \times \vec{E}^{(0)}]_1 + \frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_j Q_{2j} E_j^{(0)}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_j Q_{3j} E_j^{(0)}\right)\right]_0 + \dots$$

36. Κυλινδρικά συμμετρικός πυρήνας με τετραπολική ροπή Q βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο κυλινδρικά συμμετρικό ως προς τον άξονά του με απόκλιση $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$ (0 είναι η θέση όπου βρίσκεται ο πυρήνας).

(α) Δείξτε ότι η ενέργεια της τετραπολικής αλληλεπίδρασης είναι: $W = -\frac{q}{4} Q \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$. (Υπενθύμιση: $Q \equiv \frac{Q_{33}}{q}$, $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$. Το q είναι το φορτίο του πρωτονίου).

(β) Υποθέτουμε ότι προσομοιώνουμε τον πυρήνα με μια σταθερή πυκνότητα φορτίου $\rho_0 = \frac{Zq}{V}$, που εκτείνεται στο ελλειψοειδές με εξίσωση $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ και όγκο $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$. Αν δίδεται ο ατομικός αριθμός Z και η μέση ακτίνα $R = \frac{a+b}{2}$, να υπολογιστεί η σχετική διαφορά ακτίνων $\frac{a-b}{R}$, ώστε να προκύπτει η δεδομένη τετραπολική ροπή.

37. Κατανομή φορτίου έχει πυκνότητα $\rho(\vec{x}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$.

(α) Να βρεθεί η πολυπολική ανάπτυξη και να γραφεί το δυναμικό σε μεγάλες αποστάσεις συναρτήσει πεπερασμένου αριθμού πολυπολικών ροπών.

(β) Υπολογίστε το δυναμικό παντού και δείξτε ότι κοντά στην αρχή των αξόνων: $\Phi(\vec{r}) \simeq k\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta)\right]$.

(γ) Αν στην αρχή των αξόνων υπάρχει πυρήνας με τετραπολική ροπή Q, υπολογίστε την ενέργεια αλληλεπίδρασης.