ΠΜΣ "ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΤΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

19. Αποδείξτε ότι: $\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)t^l$.

20. Αναπτύσσοντας τον παρονομαστή, υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I \equiv \int_0^{\pi} \frac{A\cos\theta + 1}{(A^2 + 2A\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta d\theta.$$

21. (α)Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 dx P_{2l+1}(x)$.

    (β) Να αναπτυχθεί σε σειρά Legendre η συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $[-1, +1]$.

22. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}\right] = -(l+1)\frac{P_{l+1}(\cos\theta)}{r^{l+2}}.$$

    (Υπενθύμιση: $\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$)

23. Αποδείξτε ότι

$$P_l(\cos\theta) = (-1)^l \frac{r^{l+1}}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right).$$

    Μπορείτε να συγκρίνετε την ανάπτυξη της γεννήτριας συνάρτησης με ένα ανάπτυγμα Taylor του $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta z)^2}}$ σε δυνάμεις του δz.

24. Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel να δείξετε ότι:

$$(a) J_n(-x) = (-1)^n J_n(x),$$

$$(b) J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_{n-m}(y).$$

    Ποιά σχέση προκύπτει για $x + y = 0$;

25. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^x t[J_n(t)]^2 dt$.

    (Αποδείξτε πρώτα ότι: $t[J_n(t)]^2 = \frac{d}{dt}[\frac{t^2}{2}(J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)])$.

26. Οι δύο επίπεδες επιφάνειες ενός κυλινδρικού κουτιού με ακτίνα R και ύψος H είναι γειωμένες και η κυλινδρική του επιφάνεια σε γνωστό δυναμικό $V_0(\phi, z)$.

    (α) Δείξτε ότι το δυναμικό μέσα στο κουτί δίνεται από τη σχέση:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_m\left(\frac{n\pi\rho}{H}\right) sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right)(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi).$$

    (β) Δώστε την έκφραση για τα A_{mn}, B_{mn}.

27. Η περίθλαση Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα καθορίζεται από την ποσότητα που δίνεται στην εξίσωση:

$$F_{\vec{K}_\perp}[\epsilon(\vec{r}')] = \frac{\Lambda}{4\pi^2}\int_0^R dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \exp[-ikr'\sin\theta\cos(\phi'-\phi)].$$

Να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός (που περιλαμβάνει συναρτήσεις Bessel.)

28. (α) Να επαληθευθεί η σχέση του Rayleigh:

$$\exp[ikr\cos\theta] = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta),$$

που εκφράζει την ανάλυση ενός επίπεδου κύματος σε άθροισμα σφαιρικών κυμάτων. (Υπόδειξη: παραγωγίστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς r και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε αναδρομικές σχέσεις για να αντικαταστήσετε τα $\cos\theta P_l(\cos\theta)$ και j_l'.)

(β) Δείξτε ότι

$$j_l(kr) = \frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{1} dx P_l(x)\exp[ikrx].$$

29. (α) Αν $B_{\mu 1}(x)$ και $B_{\mu 2}(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel $x^2 B_\mu'' + xB_\mu' + (x^2-\mu^2)B_\mu = 0$, να αποδειχθεί η σχέση:

$$B_{\mu 1}(x)B_{\mu 2}'(x) - B_{\mu 1}'(x)B_{\mu 2}(x) = \frac{K_\mu}{x},$$

όπου η K_μ είναι σταθερά. Υπόδειξη: ορίζουσα Wronski. (β) Υπολογίστε τη σταθερά K_μ στην περίπτωση που οι δύο λύσεις είναι οι $J_\mu(x)$ και $N_\mu(x)$.