

**ΠΜΣ “ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ**  
**ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ - ΕΚΕΦΕ “ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”**  
**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι: ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

9. Ένας χώρος  $V$  περιβάλλεται από μια επιφάνεια  $S$  που αποτελείται από διάφορες αγωγίμες επιφάνειες  $S_k$  (μία μπορεί να βρίσκεται και στο άπειρο) που βρίσκονται στα αντίστοιχα δυναμικά  $V_k$ . Θεωρήστε τη συνάρτηση  $\Psi(\vec{x})$  που συμπεριφέρεται εξ υποθέσεως ομαλά στο  $V$  και στο  $S$  και ορίστε την ποσότητα

$$W[\Psi] \equiv \frac{1}{8\pi k} \int_V d^3x |\vec{\nabla}\Psi|^2.$$

Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα: Με την προϋπόθεση ότι η  $\Psi(\vec{x})$  παίρνει τις τιμές  $V_k$  στις επιφάνειες  $S_k$ , το  $W[\Psi]$  είναι απόλυτο ελάχιστο αν και μόνο αν η  $\Psi(\vec{x})$  ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο  $V$ .

10. Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα: Αν κάποιοι αγωγοί βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις και φέρουν δεδομένα φορτία, η εισαγωγή ενός πρόσθετου αφόρτιστου μονωμένου αγωγού στην περιοχή που περιβάλλεται από τους αγωγούς αυτούς χαμηλώνει την ηλεκτροστατική ενέργεια.
11. Να λυθεί η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace για το εσωτερικό ενός κυλίνδρου με ακτίνα  $R$  με την οριακή συνθήκη  $V(\rho = R, \phi, z) = f(\phi)$ . Να αποδειχθεί ότι το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi' f(\phi') \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos[n(\phi - \phi')] \right\}.$$

Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς.

12. Σημειακό φορτίο απέχει απόσταση  $d$  από αγωγίμο γειωμένο επίπεδο. Με τη μέθοδο των ειδώλων βρείτε:
- Την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου που επάγεται στο επίπεδο.
  - Τη δύναμη μεταξύ του φορτίου και του επιπέδου χρησιμοποιώντας το νόμο του Coulomb για τη δύναμη μεταξύ του φορτίου και του ειδώλου του.
  - Τη δύναμη που ασκείται στο επίπεδο ολοκληρώνοντας την ποσότητα  $2\pi k\sigma^2$  (που δίνει την πίεση προς τα έξω σε αγωγίμη επιφάνεια) σ' όλο το επίπεδο.
  - Το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί το φορτίο από τη θέση του στο άπειρο.
  - Τη δυναμική ενέργεια μεταξύ του φορτίου και του ειδώλου του. Συγκρίνετε με το ερώτημα (δ).
13. Με τη μέθοδο των ειδώλων μελετήστε το πρόβλημα ενός φορτίου  $q$  μέσα σε γειωμένη αγωγίμη σφαίρα με εσωτερική ακτίνα  $a$ . Βρείτε:
- Το δυναμικό μέσα στη σφαίρα.
  - Την επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.
  - Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο  $q$ .

Τι θα συμβεί αν η σφαίρα βρεθεί σε δυναμικό  $V_0$ ; Τι θα συμβεί αν η σφαίρα έχει συνολικό φορτίο  $Q$  στις εσωτερικές και εξωτερικές της επιφάνειες;

14. Θεωρήστε το πρόβλημα δυναμικού στον ημιχώρο  $z \geq 0$  με συνθήκες Dirichlet στο επίπεδο  $z = 0$  και στο άπειρο.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση Green;

(β) Αν, στο επίπεδο  $z = 0$ , το δυναμικό είναι  $\Phi = V_0$  μέσα σ' έναν κύκλο με ακτίνα  $a$  και κέντρο την αρχή των αξόνων και μηδενίζεται έξω από αυτό, να βρεθεί η ολοκληρωτική έκφραση για το δυναμικό σ' ένα τυχαίο σημείο.

(γ) Δείξτε ότι, πάνω στον άξονα του κύκλου, το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:  $\Phi = V_0 \left(1 - \frac{z}{a^2+z^2}\right)$ .

(δ) Δείξτε ότι σε μεγάλες αποστάσεις ( $\rho^2 + z^2 \gg a^2$ ) το δυναμικό μπορεί ν' αναπτυχθεί σε σειρά ως προς  $(\rho^2 + z^2)^{-1}$  με πρώτους όρους:

$$\Phi = \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right].$$

15. (α) Βρείτε το δυναμικό που οφείλεται σε ευθύγραμμη ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ .

(β) Θεωρήστε δύο κατανομές φορτίου όπως του προηγούμενου ερωτήματος, παράλληλες προς τον άξονα των  $z$ . Η μία τέμνει το επίπεδο  $xy$  στο σημείο  $(x = +x_0, y = 0)$  και έχει πυκνότητα φορτίου  $+\lambda$ , ενώ η άλλη τέμνει το επίπεδο  $xy$  στο σημείο  $(x = -x_0, y = 0)$  και έχει πυκνότητα φορτίου  $-\lambda$ . Να προσδιοριστούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες με δυναμικό  $\Phi$ . (Το  $x_0$  είναι θετικό).

(γ) Θεωρήστε τις ισοδυναμικές επιφάνειες για  $\Phi = +\frac{V_0}{2}$  και  $\Phi = -\frac{V_0}{2}$ . Υπολογίστε την ακτίνα τους  $R$  και την απόσταση των κέντρων τους  $D$ . Απαλείφοντας την παράμετρο  $x_0$  μεταξύ των  $D$  και  $R$  εκφράστε την ποσότητα  $\frac{\lambda}{V_0}$  συναρτήσει των  $D$  και  $R$ . Ποιά είναι η χωρητικότητα του συστήματος ανά μονάδα μήκους; (Το πρόβλημα είναι διδιάστατο).

16. Θεωρήστε κούφιο αγωγίμο κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα  $R$ . Ο κύλινδρος χωρίζεται στα δύο από επίπεδο που περνάει από τον άξονά του και τα δύο μισά βρίσκονται στα δυναμικά  $V_1$  και  $V_2$ .

(α) Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγού.

(β) Να υπολογιστεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου και στα δύο μισά του αγωγού.

17. Θεωρήστε το διδιάστατο πρόβλημα που σχετίζεται με έναν αγωγίμο κενό κύλινδρο που είναι χωρισμένος σε τέσσερα ίσα μέρη με δυναμικά  $+V_0, -V_0, +V_0, -V_0$ . (α) Αποδείξτε ότι το δυναμικό μέσα στον κύλινδρο δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά αθροίζεται και δίνει:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \left( \frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right).$$

(γ) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον κύλινδρο.

18. Με τη μέθοδο των ειδώλων ναδειχθεί ότι η συνάρτηση Green για το διδιάστατο εξωτερικό πρόβλημα ενός κυλίνδρου με ακτίνα  $b$  με συνθήκες Dirichlet είναι:

$$G_D(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left( \frac{(\rho^2 - b^2)(\rho'^2 - b^2) + b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2}{b^2 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2} \right).$$

Τί αλλαγές πρέπει να γίνουν για να λύσουμε το εσωτερικό πρόβλημα;