

Πλεγματική QCD

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΈΤΟΣ 2024-25

ΕΠΙΒΛΈΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΝΙΚΟΛΑΣ Μ'ΑΓΕΙΡΟΣ

Εισαγωγή στην Πλεγματική QCD

- Η QCD είναι η θεμελιώδης μη-αβελιανή θεωρία βαθμίδας $SU(3)$ που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κουάρκ και γλουονίων. Η QCD, εξασφαλίζει ότι τα κουάρκ αλληλεπιδρούν μέσω της ανταλλαγής γλουονίων.
- Σε υψηλές ενέργειες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαταρακτικές μεθόδους, αλλά σε χαμηλές ενέργειες εμφανίζεται το φαινόμενο της συγκράτησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε θεωρία διαταραχών για να κάνουμε υπολογισμούς.
- Διακριτοποιώντας το χωρό-χρόνο σε ένα πλέγμα αντικαθιστούμε το συνεχές πεδίο με πεπερασμένο δίκτυο σημείων. Αυτό μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε αριθμητικές μεθόδους Monte Carlo και να υπολογίσουμε μη-διαταρακτικά φαινόμενα.

Ιστορία της Πλεγµατικής QCD

- Το 1974, ο Kenneth Wilson πρότεινε τη διακριτοποίηση του χωροχρόνου σε ένα πλέγµα, επιτρέποντας την QCD να διατυπωθεί µε τρόπο που είναι κατάλληλος για υπολογιστικές προσοµοιώσεις. Σε αυτή τη διατύπωση, τα κουάρκ τοποθετούνται στις κορυφές του πλέγµατος, ενώ τα γλουόνια (που αντιπροσωπεύονται από πλεγµατικούς δεσµούς) ζουν στα συνδετικά στοιχεία µεταξύ των κορυφών.
- Εκ τότε η πλεγµατική QCD εξελίχθηκε στο κύριο εργαλείο για τη µελέτη της µη-διαταρακτικής περιοχής όπως , Φασµατοσκοπία αδρονίων (πρόβλεψη µαζών προτονίων, µεσονίων, κ.α.) πρόβλεψη µαζών κουάρκ, µέτρηση της εξέλιξης της ισχυρής σταθεράς σύζευξης, πληροφορίες για την δοµή νουκλεονίων.

Από τον Minkowski στον Ευκλείδειο χρόνο

- Στη Minkowski διατύπωση, ο πίνακα εξέλιξης δίνεται από τον τελεστή e^{-iHt} . Με την περιστροφή Wick $t \rightarrow -i\tau$ πηγαίνουμε στον Ευκλείδειο χρόνο και παίρνουμε τον πίνακα μεταφοράς ο οποίος δίνεται από τον τελεστή $e^{-H\tau}$. Αυτό καθιστά τη δράση θετικά ορισμένη και προσδίδει πιθανοκρατική ερμηνεία στα ολοκληρώματα διαδρομής.
- Το πλάτος μετάβασης μεταξύ δυο καταστάσεων στον Ευκλείδειο χρόνο $T = \tau_f - \tau_i$ γράφεται ως το στοιχείο πίνακα του $e^{-H\tau}$. Ο γεννήτορας συναρτήσεων συσχέτισης ορίζεται από :

$$Z = \int D\Phi e^{-S_E[\Phi]}$$

Όπου S_E είναι η Ευκλείδια δράση μετά την περιστροφή Wick

- Διακριτοποιώντας τον Ευκλείδειο χρόνο σε βήματα πάχους a , δημιουργούμε έναν πίνακα μεταφοράς $T = e^{-aH_{lattice}}$. Για να πάρουμε φάσμα φυσικών καταστάσεων, θέλουμε ο T να είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος, ώστε οι συσχετιστές να πέφτουν εκθετικά $e^{-E_n\tau}$.

Ευκλείδεια Δράση και Ολοκλήρωμα Διαδρομής

- Μετά την περιστροφή Wick , η κλασική δράση της QCD σε Minkowski χώρο χρόνο:

$$S_M = \int d^4x E \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu + m_f) \psi_f \right]$$

Γίνεται η θετικά ορισμένη Ευκλείδεια δράση:

$$S_E = \int d^4x E \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (\gamma^\mu D_\mu + m_f) \psi_f \right]$$

η οποία χρησιμοποιείται για αριθμητικές προσομοιώσεις

- Το κεντρικό αντικείμενο είναι το ολοκλήρωμα διαδρομής

$$Z = \int DUD\bar{\psi} D\psi e^{-S_E[U,\psi,\bar{\psi}]}$$

και κάθε μετρήσιμο μέγεθος υπολογίζεται με τον τύπο :

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int DUD\bar{\psi} D\psi O e^{-S_E}$$

- Παρομοιάζουμε το πλέγμα με ένα σύστημα spin, όπου το e^{-S_E} λειτουργεί ως στατιστικό βάρος Boltzmann, οι πλεγματικές διαμορφώσεις είναι οι 'μικροκαταστάσεις' και οι αλγόριθμοι Monte Carlo δειγματοληπτούν αυτές τις καταστάσεις για να υπολογισθούν οι μέσες τιμές των μετρήσιμων μεγεθών.

Αλγόριθμος Metropolis και εξισορρόπηση

- Για να διασφαλίσουμε ότι η αλυσίδα Markov δειγματοληπτει κατανομές με βάρος $e^{-s[U]}$, απαιτούμε: $P(U \rightarrow U')e^{-s[U]} = P(U' \rightarrow U)e^{-s[U']}$

Επιλέγοντας συμμετρικά $P_0(U \rightarrow U') = P_0(U' \rightarrow U)$ ορίζουμε την πιθανότητα αποδοχής:

$$A(U \rightarrow U') = \min(1, e^{-[s(U') - s(U)]})$$

Εξασφαλίζοντας έτσι την λεπτομερή εξισορρόπηση.

- Για το Single-Link Update, σε κάθε επανάληψη επισκεπτόμαστε διαδοχικά όλες τις ζεύξεις $U_\mu(x)$ του πλέγματος. Εφαρμόζουμε μια μικρή μεταβολή σε κάθε ζεύξη μέσω ενός τυχαίου $SU(3)$ στοιχείου και την αποδεχόμαστε ή την απορρίπτουμε με βάση την πιθανότητα αποδοχής.
- Για την εξισορρόπηση, ξεκινάμε από μια αρχική τυχαία ή ομοιόμορφη διαμόρφωση, και κάνουμε αρκετές επαναλήψεις χωρίς να υπολογίζουμε τα μετρήσιμα μεγέθη, έως ότου το σύστημα να έχει μεταβληθεί αρκετά από την αρχική του κατάσταση και να έχει φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας.
- Οι διαδοχικές μετρήσεις δεν είναι ανεξάρτητες, ο χρόνος αυτοσυσχέτισης τ_{int} μετράει πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να έχουμε μια νέα ανεξάρτητη διαμόρφωση. Επιλέγουμε χρόνο δειγματοληψίας (Sampling interval) $\geq \tau_{int}$ για σωστό υπολογισμό σφαλμάτων

Monte Carlo: Heat Bath και Υβριδικός Monte Carlo

- Στον αλγόριθμο Heat Bath επιλέγουμε κάθε ζεύξη $U_\mu(x)$ και επαναδειγματοληπτούμε άμεσα από την ακριβή κατανομή με την προϋπόθεση $P(U_\mu(x)|U_{\neq\mu}(x))$. Με αυτό τον τρόπο εξαλείφουμε την ανάγκη για αποδοχή/ απόρριψη σε κάθε βήμα και μειώνουμε την αυτοσυσχέτιση.
- Στον Υβριδικό Monte Carlo (HMC) εισάγουμε φανταστικές ορμές $P_\mu(x)$ για κάθε ζεύξη και προσομοιώνουμε την Χαμιλτονιανή με leapfrog βήματα:
 1. Γεωμετρική ενημέρωσης (momentum refreshment)
 2. η leapfrog βήματα για δισδιάστατη κίνηση στο φάσμα (U,P)
 3. Η «ολική» αποδοχή/απόρριψη για ολόκληρη την τροχιά εξασφαλίζει ότι, παρά τα αριθμητικά σφάλματα διατηρείται η λεπτομερής εξισορρόπησηΆρα κάθε HMC βήμα μας μεταφέρει αρκετά 'μακριά' από την αρχική διαμόρφωση και μειώνει τον χρόνο αυτοσυσχέτισης
- Συγκριτικά, ο Heat Bath είναι απλούστερος αλλά αυστηρά τοπικός, με μεγαλύτερο χρόνο αυτοσυσχέτισης. Ο HMC απαιτεί υπολογιστικά βήματα ολοκλήρωσης αλλά μειώνει δραστικά την αυτοσυσχέτιση για μεγάλες διαμορφώσεις, ιδίως σε φερμιονικά συστήματα.

Σφάλματα Διακριτοποίησης και Βελτίωση Symanzik

- Στη μη-βελτιωμένη δράση Wilson:
 1. Το βαθμωτό μέλος έχει σφάλματα τάξης $O(a^2)$
 2. Το φερμιονικό μέλος φέρει σφάλματα τάξης $O(a)$ λόγω του διπλασιασμού WilsonΑυτά τα σφάλματα διακριτοποίησης μετρήσιμων μεγεθών εμφανίζονται κατά την μεταβολή του πλάτους a
- Αν στην δράση Wilson προσθέσουμε τον όρο 'clover':

$$S_{SW} = S_W - i c_{SW} \kappa \sum_x \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \psi(x)$$

Εξαλείφουμε τα σφάλματα τάξης $O(a)$ στο φερμιονικό μέλος και παραμένουν μόνο τα σφάλματα διακριτοποίησης τάξης $O(a^2)$, βελτιώνοντας έτσι την ταχύτητα σύγκλισης στο όριο του συνεχούς.

- Στην βελτίωσης Symanzik, προσθέτουμε όρους υψηλότερης τάξης στο πλέγμα για να εξαλείψουμε τα σφάλματα διακριτοποίησης χαμηλότερης τάξης στην δράση. Το clover είναι η πρώτη και πιο διαδεδομένη βελτίωση, αλλά υπάρχουν και άλλες (π.χ. Lüscher–Weisz βελτιώσεις βαθμίδας)

Υπολογισμός στο όριο $a \rightarrow 0$

- Στη βελτίωση Symanzik, κάθε μετρήσιμο μέγεθος $O(a)$ γράφεται ως:

$$O(a) = O_{cont} + c_1 a^p + c_2 a^{p+1} + \dots$$

με $p=1$ για τη μη-βελτιωμένη δράση Wilson και $p=2$ για τη βελτίωση clover

- Τρέχουμε τον αλγόριθμο για πλέγματα με διαφορετικά βήματα $a_1, a_2, \dots$. Από το κάθε ένα λαμβάνουμε ένα $O(a_i)$, έτσι έχουμε αρκετά σημεία για τη προσαρμογή (fitting).
- Προσαρμόζουμε τα δεδομένα στην παραπάνω πολυωνυμική μορφή (π.χ. γραμμική ή γκαουσιανή προσαρμογή), και έτσι υπολογίζουμε τη τιμή O_{cont} ως προς την τομή στο $a = 0$. Ελέγχουμε την προσαρμογή και προσθέτουμε τα συστηματικά σφάλματα ανάλογα τον τύπο προσαρμογής που εφαρμόσαμε.

Λαγκρατζιανή QCD και Συμμετρίες Βαθμίδας

- Η δράση της συνεχούς QCD ορίζεται :

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f \right]$$

Όπου $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^\alpha T^\alpha$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος και $F_{\mu\nu}^\alpha$ ο τανιστής πεδίου χρώματος (field strength tensor) των γλουονίων

- Υπό τον μετασχηματισμό βαθμίδας:

$$\psi(x) \rightarrow \Omega(x)\psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x) + \frac{i}{g}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x)$$

η δράση παραμένει αναλλοίωτη.

- Για άμαζα κουάρκ, η δράση έχεις καθολικές χειρόμορφες συμμετρίες $SU(N_f) \times SU(N_f)_R$. Αυτές σπάνε δυναμικά σε $SU(N_f)_V$ και μας οδηγούν σε χειρόμορφη συμπίκνωση και σε ψεύδο-goldstone μεσόνια.
- Η συνάρτηση β περιγράφει την εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης g από την ενεργειακή κλίμακα μ . Αυτή είναι αρνητική σε μικρές αποστάσεις, $\beta(g) \approx -b_0 g^3$, με αποτέλεσμα σε μεγάλες τιμές της κλίμακας ($\mu \gg \Lambda_{QCD}$) η σταθερά σύζευξης τείνει προς το μηδέν και αρά έχουμε ασυμπτωτική ελευθερία.

Ασυμπτωτική Ελευθερία και μη Διαταρακτικά Φαινόμενα

- Όπως είπαμε σε υψηλές ενέργειες όσο αυξάνεται η ενεργειακή κλίμακα η σταθερά σύζευξης φθίνει και στο όριο το $\mu \rightarrow \infty$ το $g \rightarrow 0$ και άρα έχουμε το φαινόμενο της ασυμπτωτικής ελευθερίας
- Σε χαμηλές ενέργειες η QCD γίνεται ισχυρή και τα κουάρκ δεν παρατηρούνται ελεύθερα. Το χαρακτηριστικό του εγκλωβισμού είναι ο νόμος του εμβαδού για την κλειστή καμπύλη Wilson:

$$\langle W(C) \rangle \propto \exp(-\sigma \text{Area}(C))$$

όπου σ είναι η τάση της χορδής και $\text{Area}(C)$ το εμβαδό που περικλείει η καμπύλη C

- Παρά την χειρόμορφη συμμετρία όταν $m_f = 0$, σε χαμηλές θερμοκρασίες παρατηρείται δυναμική θραύση της συμμετρίας με αποτέλεσμα να έχουμε και χειρόμορφη συμπίκνωση $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$

Διακριτοποίηση Πεδίων και Μεταβλητές Σύνδεσης

- Στο πλέγμα, το βαθμωτό πεδίο γλουονίων $A_\mu(x)$ αντικαθίσταται από τα στοιχεία του μεταβλητού συνδέσμου $U_\mu(x) = \exp[iagA_\mu(x)] \in SU(3)$, που συνδέουν τον κόμβο x με τον γείτονα του στη διεύθυνση μ .
- Το βασικό αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας στοιχείο είναι η πλακέτα (plaquette):

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$$

Η οποία παίζει ανάλογο ρόλο με αυτόν του τανυστή πεδίου $F_{\mu\nu}$ στο συνεχές.

- Οι μεταβλητές σύνδεσης $U_\mu(x)$ μετασχηματίζονται :

$$U_\mu(x) \rightarrow \Omega(x)U_\mu(x)\Omega^\dagger(x + \hat{\mu})$$

έτσι διασφαλίζεται ότι η πλακέτα και η δράση Wilson $S_W = \sum tr[1 - U_{\mu\nu}]$ μένουν αναλλοίωτα. Αυτή η τοπική αβελιανή συμμετρία επιτρέπει τοπικές ενημερώσεις στους συνδέσμους χωρίς να παραβιάζεται η βαθμίδα.

Δράση Βαθμίδας Wilson

Όπως είπαμε το θεμελιώδες αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας αντικείμενο στο πλέγμα είναι η πλακέτα που αντιστοιχεί στον μικρό τετραγωνισμένο βρόχο γύρω από το κόμβο x

- Η δράση βαθμίδας Wilson παίρνει τη μορφή:

$$S_W[U] = \frac{\beta}{N} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{ReTr} \left[[1 - U_{\mu\nu}(x)] \right],$$

Όπου για ομάδα $SU(N)$ το $\beta = \frac{2N}{g^2}$ και η συνάρτηση $\text{ReTr} \left[[1 - U_{\mu\nu}(x)] \right]$ είναι θετικά ορισμένη.

- Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από το $\alpha \rightarrow 0$ το $\text{tr}[1 - U_{\mu\nu}]$, αποδεικνύεται ότι :

$$S_W \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + O(\alpha^2)$$

Έτσι η δράση Wilson μας δίνει την κλασική YM δράση με σφάλματα διακριτοποίησης $O(\alpha^2)$.

Βελτιωμένες Δράσεις και Βελτίωση Symanzik

- Η δράση Wilson με την βελτίωση clover προσθέτει στον φερμιονικό όρο της δράσης Wilson έναν τοπικό συνδυασμό τεσσάρων πλακετών γύρω από κάθε κόμβο,

$$S_{SW} = S_W - ic_{sw}\kappa \sum_x \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \psi(x)$$

Όπου $F_{\mu\nu}(x)$ σχηματίζει το clover leaf τεσσάρων πλακετών. Με κατάλληλο c_{sw} εξαλείφονται οι όροι $O(a)$ στο φερμιονικό μέρος.

- Στην βελτίωση βαθμίδας Luscher-Weisz, στο βαθμωτό μέλος προσθέτουμε και όρους παραλληλόγραμμους και ορθογώνιους με αποτέλεσμα η δράση να παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} S_{LW} = & \beta \sum_x \left(c_0 \sum_{\text{τετράγωνο}} \text{ReTr}[1 - U_{\text{τετράγωνο}}] + c_1 \sum_{\text{παραλληλόγραμμο}} \text{ReTr}[1 \right. \\ & \left. - U_{\text{παραλληλόγραμμο}}] + c_2 \sum_{\text{παραλληλόγραμμο}} \text{ReTr}[1 - U_{\text{παραλληλόγραμμο}}] \right) \end{aligned}$$

και έχει σφάλματα τάξης $O(a^4)$ στο όριο του συνεχούς

Επιλογή Κλίμακας και παραμετρικές μεταβλητές

- Για να επιλέξουμε τη κλίμακα μέσω μετρήσιμων μεγεθών, επιλέγουμε ένα πειραματικά γνωστό μετρήσιμο μέγεθος, π.χ. την παράμετρο sommer r_0 που ορίζεται από το:

$$r^2 \frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 1.65$$

Και υπολογίζουμε την φυσική τιμή του πλέγματος a συγκρίνοντας r_0/a με το πειραματικό r_0 .

- Οι απογυμνωμένες (Bare) παράμετροι ελέγχουν το ρυθμό σύζευξης και τη μάζα των φερμιονίων
 - $\beta = 2N/g^2$ καθορίζει την σύζευξη
 - Η μεταβλητή κ συνδέεται με τη φερμιονική μάζα μέσω του $m_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right)$.
 - Ο συντελεστής c_{sw} επιλέγεται για βελτίωση clover

Αριθμητικές Προσομοιώσεις και Αλγόριθμοι

- Ο αλγόριθμος Metropolis-Hastings επιλέγει τοπικές προτάσεις σε κάθε σύνδεσμο και αποδέχεται\απορρίπτει με βάση το εκθετικό βάρος $\exp(-\Delta S)$. Είναι εύκολος στην υλοποίηση του, αλλά έχει σχετικά μεγάλο χρόνο αυτοσυσχέτισης.
- Ο αλγόριθμος Heat Bath επαναδειγματοληπτεί άμεσα από την καθορισμένη κατανομή σε κάθε σύνδεσμο, χωρίς να πρέπει να την αποδεχτεί\απορρίψει. Μειώνει την αυτοσυσχέτιση, αλλά μπορεί να εμφανίσει δυσκολίες εφαρμογής σε μεγάλα συστήματα λ.χ. φερμιονικά συστήματα.
- Ο Υβριδικός Monte Carlo (HMC) εισάγει φανταστικές ορμές και προσομοιώνει τη χαμιλτονιανή με leapfrog βήματα, ακολουθούμενο από ένα καθολικό βήμα metropolis σε όλη την τροχιά. Παρά το υψηλό κόστος ανά τροχιά, παράγει δείγματα με χαμηλή αυτοσυσχέτιση.
- Η τεχνική Overrelaxation επιταχύνει την προσέγγιση στην ισορροπία εφαρμόζοντας ντετερμινιστικές ενημερώσεις που ωθούν τη διαμόρφωση μακριά από την «θερμική» ποσότητα και μετά την επαναφέρουν, μειώνοντας έτσι την αυτοσυσχέτιση
- Κάθε αλγόριθμος απαιτεί βέλτιστη επιλογή βημάτων:
 1. Διαδοχή βημάτων
 2. Μήκος τροχιάς
 3. Βήμα ολοκλήρωσης (leapfrog)
 4. Κριτήρια εξισορρόπησης πριν τη λήψη δεδομένων

Αυτοσυσχέτιση και Εκτίμηση Σφαλμάτων

- Για ένα μετρήσιμο μέγεθος θ , η αυτοσυσχέτιση $\Gamma(t)$ ορίζεται ως:

$$\Gamma(t) = \langle \theta_i \theta_{i+t} \rangle - \langle \theta \rangle^2$$

Όπου θ_i η μέτρηση της i -οστής επανάληψης. Ο χρόνος αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον τύπο :

$$\tau_{int} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)}$$

Το τ_{int} μας προσδιορίζει σε κάθε πόσες επαναλήψεις λαμβάνουμε ανεξάρτητα δείγματα.

- Για να μειώσουμε την επίδραση της αυτοσυσχέτισης στο σφάλμα, χωρίζουμε τα δεδομένα σε μπλόκ μεγέθους $n_{blk} \gg \tau_{int}$ και υπολογίζουμε τον μέσο όρο για κάθε μπλόκ (Block Averaging). Το στατιστικό σφάλμα της εκτίμησης είναι :

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var(\overline{\theta}_{blk})}{N_{blk} - 1}}$$

- Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους επαναδειγματοληψείας όπως οι jackknife ή bootstrap για την εκτίμηση σφαλμάτων σε μη-γραμμικά μετρήσιμα μεγέθη, εξασφαλίζοντας έτσι αξιόπιστες εκτιμήσει ακόμη και όταν ο διαχωρισμός σε μπλόκ είναι δύσκολος.

Φερμιόνια στο Πλέγμα

- Διπλασιασμός φερμιονίων: η διακριτοποίηση της εξίσωσης Dirac οδηγεί σε 16 φερμιονικά modes στο 4-διάστατο πλέγμα αντί ενός στο συνεχές.
- Θεώρημα Nielsen-Ninomiya λέει ότι δεν μπορείς να διατηρήσεις ταυτόχρονα την τοπικότητα, τη χειρόμορφη συμμετρία, το μοναδικό φερμιονικό mode, την ερημιτιότητα του τελεστή Dirac, χωρίς να προκύψει το φαινόμενο του διπλασιασμού. Για να μην προκύψει ο διπλασιασμός πρέπει να θυσιάσουμε ένα από τα παραπάνω στοιχεία (π.χ. προσθέτεις τον όρο Wilson).
- Πλεγματικός τελεστής Dirac και όρος Wilson. Η δράση Wilson εισάγει έναν όρο εξάρτησης από τη λαπλασιανή διακριτοποίηση $\bar{\psi}(x)\Delta\psi(x)$ ο οποίος δίνει μάζα στους διπλασιασμούς και σπάει τη χειρόμορφη συμμετρία σε $O(a)$, εξαλείφοντας τα περιττά modes στο όριο $a \rightarrow 0$.

Φερμιόνια Wilson και Clover

- Απλοϊκά φερμιόνια και διπλασιασμός. Η διακριτοποίηση της εξίσωσης Dirac δίνει τον απλοποιημένο τελεστή Dirac ο οποίος παράγει 16 διπλασιασμούς στο 4-διάστατο πλέγμα.
- Όρος Wilson και η ακύρωση των διπλασιασμών.

Προσθέτουμε τον όρο:

$$S_W^{ferm} = -\frac{r}{2} \sum_{x,\mu} \bar{\psi}(x) [U_\mu(x)\psi(x + \hat{\mu}) - 2\psi(x) + U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\psi(x - \hat{\mu})],$$

Έτσι δίνουμε μάζα στα διπλασιασμένα φερμιόνια, ακυρώνοντας τα. Αυτό όμως προκαλεί θραύση της χειρόμορφης συμμετρίας.

- Βελτίωση Clover (Sheikholeslami-wohlert)

Για να ακυρώσουμε τα $O(\alpha)$ στο φερμιονικό όρο προσθέτουμε τον όρο clover:

$$S_{SW} = S_W^{ferm} - i c_{SW} \kappa \sum_x \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(x) \psi(x),$$

Όπου $\hat{F}_{\mu\nu}$ σχηματίζει το “clover leaf” γύρω από το x στην πλακέτα. Έτσι διατηρούμε τα σφάλματα διακριτοποίησης τάξης $O(\alpha^2)$.

- Ρύθμιση c_{SW} και μη-διαταρακτική ρύθμιση.

Ο συντελεστής c_{SW} επιλέγεται είτε διαταρακτικά είτε μη-διαταρακτικά ώστε να ακυρώνονται οι όροι πρώτης τάξης.

Χειρόμορφη Συμμετρία και Φερμιόνια

Domain Wall

- Χειρόμορφη συμμετρία και σφάλματα διακριτοποίησης.

Στην απλοποιημένη διακριτοποίηση, η δράση Dirac διατηρεί την χειρόμορφη συμμετρία για άμαζα φερμιόνια, αλλά μαζί με το φαινόμενο του διπλασιασμού αλλά χάνεται η έννοια της δεξιόστροφης ή αριστερόστροφης χειρομορφίας. Ο όρος Wilson αφαιρεί τους διπλασιασμούς αλλά σπάει την χειρόμορφη συμμετρία.

- Σχέση Ginsparg-Wilson:

Η σχέση αντιμετάθεσης $\{\gamma_5, D\} = \alpha D \gamma_5 D$

Είναι γενίκευση της χειρόμορφης συμμετρίας στο πλέγμα. Ο τελεστής Dirac του πλέγματος (D) ικανοποιεί αυτή τη σχέση, διατηρεί μια «παραμορφωμένη» χειρόμορφη συμμετρία χωρίς διπλασιασμούς.

- Φερμιόνια Domain Wall

Στην προσέγγιση Domain Wall επεκτείνουμε κατά μία διάσταση το πλέγμα και τοποθετούμε τα «φυσικά» φερμιόνια στις ακμές αυτού του $(4+1)$ -διάστατου χώρου, ενώ οι διπλασιασμοί μαζεύονται στο κέντρο. Στο όριο μεγάλου μήκους της 5^{ης} διάστασης η χειρόμορφη συμμετρία διατηρείτε.

- Ενώ τα Domain wall προσφέρουν διατήρηση της χειρόμορφης συμμετρίας και μειώνουν σημαντικά τα σφάλματα διακριτοποίησης, απαιτούν αυξημένο υπολογιστικό κόστος λόγω της επέκτασης του πλέγματος με επιπλέον διάσταση

Συμπεράσματα και Επόμενα Βήματα

Συμπερασματικά:

- Αναδείξαμε την κεντρική σημασία της διακριτοποίησης της δράσης μέσω της πλακέτας Wilson και των βελτιώσεων Symanzik, που επιτυγχάνουν μείωση των σφαλμάτων διακριτοποίησης και διατηρούν τη συμμετρία της θεωρίας.
- Είδαμε την μέθοδο Monte Carlo (Metropolis, Heat Bath, HMC) συγκρίνοντας τους αλγόριθμους δειγματοληψίας και αξιολογώντας την ακρίβεια των αποτελεσμάτων με τις τεχνικές Jackknife και bootstrap.
- Εξετάσαμε διαφορετικές διακριτοποιήσεις φερμιονίων σε συνδυασμό με σύγχρονους επιταχυντικούς αλγόριθμους όπως deflation, adaptive multigrid solvers, αποδεικνύοντας την χρησιμότητά τους στην επίλυση του τελεστή Dirac.
- Η χρήση Wilson και Polyakov Loop απέδωσε έναν αξιόπιστο τρόπο επιλογής κλίμακας .

Τα επόμενα βήματα:

- Η μελέτη της εφαρμογής των φερμιονίων στρεπτής μάζας (Twisted-mass) , με σκοπό να περιοριστούν τα σφάλματα διακριτοποίησης και να βελτιωθεί η χειρόμορφη συμπεριφορά.
- Η μελέτη των χειρόμορφων δράσεων Ginsparg-Wilson ή domain wall θα επιτρέψουν να έχουμε αυστηρότερο έλεγχο της χειρόμορφης συμμετρίας, ενώ η ροή Wilson θα συμβάλει συνολικά σε πιο ακριβείς επιλογή κλίμακας και μείωση των διακυμάνσεων.
- Η ενσωμάτωση πολυεπίπεδων αλγορίθμων και hardware θα συμβάλει στην επιτάχυνση του υπολογιστικού φόρτου.

Βιβλιογραφία

1. C. Gattringer και C. B. Lang, Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Intriductory Presentation, Lecture Notes in Physics 788, Springer, 2010
2. F. Knechtli, M. Gunther και M. Peardon, Lattice Quantum Chromodynamics: Practical Essentials, SprigerBriefs in Physics, 2017
3. H. J. Rothe, Lattice Gauge Theories: An Introduction, 4^η έκδοση, World Scientific Lecture Notes in Physics 82, 2012



Σας Ευχαριστώ