ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο Φορμαλισμός της 3+1 Αριθμητικής Σχετικότητας για τη Μελέτη της Μετρικής Schwarzschild

Αναστασία Ιωάννα Ισούκη

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

Καθηγητής
Τομέας Φυσικής

Abstract

For the study of most of the astrophysical systems it is impossible to derive analytic solutions to Einstein equations and it is necessary to solve them numerically. Computers cannot solve these equations in their covariant form so it is required to write them as an initial value problem. To achieve this 3+1 formalism is used, where the four-dimensional Manifold of spacetime is foliated into spatial hypersurfaces of constant time. Spatial metric and extrinsic curvature tensor $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ are used as variables. By utilizing the geometry of the hypersurfaces as well as Einstein's equations we derive a set of 10 equations, 4 of which are constraint equation which have to be held true for each hypersufrace and 6 dynamical equations. Four of those degrees of freedom are related to gauge conditions meaning lapse function and shift vector. This choice determines a slicing and is crucial for a successful simulation. This study is focused on this gauge condition choice for the Schwarzschild black hole, which is a great example to study 3+1 formalism since it's analytic solution is well known. It will be studied why geodesic slicing is not a good choice and why maximal slicing is preferred. In addition, it will be shown how initial data hypersurface coincides with the Einstein-Rosen bridge by assuming spherical and time symmetry.

Περίληψη

Για την μελέτη των περισσότερων αστροφυσικών συστημάτων η αναλυτική λύση των εξισώσεων Einstein είναι αδύνατη, για αυτό και είναι απαραίτητη η επίλυσή τους αριθμητικά. Ο υπολογιστής δεν μπορεί να επιλύσει εξισώσεις στην συναλλοίωτη μορφή όπου είναι γραμμένες και για αυτό απατείται η γραφή τους ως ένα δυναμικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιείται ο 3+1 φορμαλισμός όπου η τετραδιάστατη πολλαπλότητα του χωροχρόνου φυλλοποιείται σε χωρικές υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου. Οι μεταβλητές είναι η χωρική μετρική των χωρικών υπερεπιφανειών αλλά ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$. Αξιοποιώντας τόσο τη γεωμετρία των υπερεπιφανειών όσο και τις εξισώσεις Einstein λαμβάνουμε 10 εξισώσεις, οι 4 από τις οποίες είναι εξισώσεις περιορισμού που πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε χωρική υπερεπιφάνεια και 6 δυναμικές εξισώσεις. Από αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας, οι 4 σχετίζονται με την ελευθερία επιλογής συνθηκών βαθμίδος, δηλαδη της συνάρτησης lapse και του διανύσματος shift. Η επιλογή τους ορίζει μια διαμέριση και είναι κρίσιμη για μια επιτυχημένη προσομοίωση. Η μελέτη αυτή θα επικεντρωθεί στην επιλογή των συνθηκών αυτών για τη Schwarzschild μελανή οπή, η οποία αποτελεί τον κατάλληλο χωρόχρονο για τον έλεγχο των 3+1 εξισώσεων καθώς η αναλυτική της είναι γνωστή. Θα μελετηθεί γιατί η Γεωδαισιακή διαμέριση δεν αποτελεί μια καλή επιλογή και γιατι προτιμείται η Maximal διαμέριση. Ακόμα δείχνεται πως θεωρώντας σφαιρική και χρονική συμμετρία η υπερεπιφάνεια αρχικών δεδομένων ταυτίζεται με τη γέφυρα Einstein-Rosen της μελανής οπής.

Περιεχόμενα

1

Πρόλογος

Η θεωρία Βαρύτητας του Einstein αποτέλεσε μια μοναδική επανάσταση στη μελέτη των αστροφυσικών συστημάτων: από τον υπολογισμό της πτώσεως του Περιηλίου του Ερμή που η θεωρία του Νεύτωνα αδυνατούσε να εξηγήσει μέχρι τότε έως την πρόβλεψη ύπαρξης πιο εξωτικών αντικειμένων όπως οι μελανές οπές και οι αστέρες νετρονίων. Υπέδειξε ακόμα θεωρητικά την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων, η οποία τελικά επιβεβαιώθηκε από τη συνεργασία των πειραμάτων LIGO και VIRGO. Αυτά τα αστροφυσικά συστήματα είναι λύσεις των εξισώσεων Einstein. Ωστόσο, μόνο για ελάχιστα αστροφυσικά συστήματα όπου υπάρχει μεγάλη συμμετρία, οι εξισώσεις αυτές λύνονται ακριβώς αναλυτικά. Για τα περισσότερα αστροφυσικά συστήματα οι λύσεις του πεδίου μπορούν να εξαχθούν μονάχα υπολογιστικά. Η ανάγκη αυτή γέννησε ένα νέο κλάδο έρευνας από τα μέσα της δεκαετίας του 1960, αυτού της **Υπολογιστικής Σχετικότητας**.

Ο κλάδος αυτός καλείται να αντιμετωπίσει τις εξισώσεις Einstein ως ένα δυναμικό πρόβλημα αρχικών τιμών, καθώς οι υπολογιστές δεν μπορούν να λύσουν τις εξισώσεις Einstein στη συναλλοίωτη μορφή που γράφτηκαν από τον Einstein. Με άλλα λόγια, σκοπός είναι αν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι γνωστές, να μπορεί να ληφθεί η εξέλιξή του μποστά στο χρόνο. Η διαδικασία και ο τρόπος να γραφούν ωστόσο οι εξισώσεις αυτές σαν ένα δυναμικό πρόβλημα δεν είναι τετριμμένος. Πρώτον, είναι ένα απαιτητικό μαθηματικό πρόβλημα. Στη μελέτη αυτή θα παρουσιαστεί το 3+1 σπάσιμο του χωροχρόνου στο χρόνο και στο χώρο. Στο φορμαλισμό αυτό η πολλαπλότητα του χωρόχρονου φυλλοποιείται σε χωρικές υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου. Μια πολύ διαδεδομένη μορφή είναι αυτή των λεγόμενων ADM εξισώσεων που εξάχθηκαν από τους Arnowitt, Deser και Misner τη δεκαετία του 1960 [2] και μετέπειτα με διαφορετικό τρόπο από τον York τη δεκαετία του 1970 [22]. Ωστόσο, η δυσκολία δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάπτυξη των εξισώσεων αυτών. Πρέπει να ελεγχθεί και η αριθμητική ευστάθεια τους, γεγονός που βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας της αριθμητικής σχετικότητας. Οι εξισώσεις αυτές ακόμα παρέχουν την ελευθερία επιλογής βαθμίδας, η οποία μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια, την ταχύτητα αλλά ακόμα και τη "μακροζωία" του κώδικα.

Ένας τρόπος να δοκιμαστούν ο φορμαλισμός, οι εξισώσεις και η επιλογή συντεταγμένων είναι να μελετηθεί ένα αστροφυσικό σύστημα η αναλυτική λύση του οποίου είναι γνωστή. Το σύστημα αυτό θέλουμε να χαρακτηρίζεται από υψηλή συμμετρία ώστε να μπορεί να λυθεί γρήγορα τόσο σε ανθρώπινο όσο και σε υπολογιστικό χρόνο. Συνάμα, αναζητούμε να εμφανίζει μη τετριμμένα φαινόμενα όπως ισχυρό βαρυτικό πεδίο και φυσικές ιδιομορφίες του χωροχρόνου. Όλα αυτά τα στοιχεία τα πληροί μια μελανή οπή Schwarzschild. Η σφαιρικά συμμετρική λύση Schwarzschild είναι καλά μελετημένη και αποτελεί ένα ιδανικό τεστ. Οι 3+1 εξισώσεις απλοποιούνται σε 1+1 εξισώσεις όπου οι μεταβλητές αποτελούν συναρτήσεις μονάχα δύο παραμέτρων, μια χρονικής συντεταγμένης t και μιας χωρικής, ακτινικής συντεταγμένης r. Πολλές δημοσιεύσεις επικεντρώθηκαν στη μελέτη της φυλλοποίησης του Schwarzschild χωροχρόνου σε χωρικές υπερεπιφάνειες, όπως αυτές των Beig και Murchadha [5] [6], των Estabrook *et al.* [10], των Riemann και Bruegmann [18] κ.α.

Στην παρούσα ανάλυση, σκοπός είναι η αναλυτική παρουσίαση του 3+1 σπασίματος των εξισώσεων του βαρυτικού πεδίου με κύριο σημείο εστίασης μετέπειτα την περίπτωση των σφαιρικά συμμετρικών λύσεων όπου και ανάγονται σε 1+1 διαστάσεις. Θα μελετηθεί τόσο η κατασκευή των αρχικών δεδομένων που είναι απαραίτητα για την αντιμετώπιση του προβλήματος ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών όσο και η κατασκευή των εξισώσεων εξέλιξης.

2

Ο 3+1 φορμαλισμός

Ο Einstein ανέπτυξε την θεωρία της Γενικής Σχετικότητας με τέτοιο τρόπο όπου ο χώρος και ο χρόνος δεν ξεχωρίζουν a priori. Αυτό απορρέει καθώς στο Παράδειγμα που εισήγαγε ο Einstein, ο χωρόχρονος εξηγείται μέσω της διαφορικής γεωμετρίας ως μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα· το βαρυτικό πεδίο ταυτίζεται με αυτή τη γεωμετρία. Η γεωμετρία του χωρόχρονου συνδέεται με την ύλη μέσω των περίφημων εξισώσεων ως:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{2.0.1}$$

Είναι μόνο οι περιπτώσεις με υψηλή συμμετρία όπου αυτές οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Αυτό οδηγεί στην ανάγκη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Ωστόσο η συναλλοίωτη διατύπωση τους, αν και πολύ κομψή, δεν είναι κατάλληλη για να γίνει εφικτή η λύση τους από έναν υπολογιστή και απέχει και από τη φυσική διαίσθηση. Σκοπός είναι να μπορούμε να παρέχουμε δεδομένα που έχουμε συλλέξει από μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και να μπορέσουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη του συστήματος. Για την μελέτη ενός αστροφυσικού συστήματος ως ένα δυναμικό σύστημα, μπορούμε να σκεφτούμε τα στοιχεία της μετρικής $g_{\alpha\beta}$ ως γενικευμένες θέσεις ενώ τις χρονικές παραγώγους τους $\partial_t g_{\alpha\beta}$ ως γενικευμένες ορμές. Καθώς σκοπός είναι η μελέτη μπροστά στο χρόνο, για την μελέτη ενός τέτοιου συστήματος χρειάζεται η γνώση των $\partial_t g_{\alpha\beta}, \partial_t^2 g_{\alpha\beta}$. Αναδεικνύεται η ανάγκη να αντιμετωπιστεί ένα τέτοιο πρόβλημα ως **Πρόβλημα Cauchy** ή αλλιώς **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών**, όπου με τη γνώση των τιμών των μεταβλητών για ένα αρχικό χρόνο $t = t_0$, οι εξισώσεις δίνουν την εξέλιξη τους στον χρόνο. Ωστόσο, δεν εμπεριέχουν πράγματι όλες οι 10 εξισώσεις Einstein την εξέλιξη στο χρόνο αυτών των μεταβλητών[3]. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τις 4 εξισώσεις που περιέχουν τουλάχιστον ένα χρονικό δείκτη μέσω της ταυτότητας Bianchi για τον τανυστή του Einstein με τους εν λόγω δείκτες:

$$\partial_t G^{\alpha 0} = -\partial_i G^{\alpha i} - G^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} - G^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\mu} \tag{2.0.2}$$

όπου η απουσία από το δεξί μέλος παραγώγων της μετρικής τρίτης ή υψηλότερης τάξης, υποδηλώνει πως τα στοιχεία $G^{\alpha 0}$ δεν εμπεριέχουν δεύτερες παραγώγους της μετρικής και άρα πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο. Οι εξισώσεις θέτουν περιορισμούς που οφείλουν οι μελετώμενες μεταβλητές να πληρούν. Μια αναλογία είναι ο ηλεκτρομαγνητισμός [11]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.0.3}$$

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \quad , \quad \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{2.0.4}$$

Παρατηρούμε πως υπάρχουν 2 εξισώσεις περιορισμού που δεν περιέχουν καμιά πληροφορία για την εξέλιξη των πεδίων στον χρόνων, είναι όμως αναγκαία η ικανοποίηση τους. Αντίστοιχα στην Γενική Σχετικότητα, οι εξισώσεις είναι 4.

Καθίσταται πλέον αντιληπτή η ανάγκη να σπάσει ο χωρόχρονος σε χρόνο και χώρο ώστε να μπορεί ένα αστροφυσικό σύστημα να μελετηθεί ως ένα δυναμικό σύστημα. Ο φορμαλισμός που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτή την παρουσίαση και χρησιμοποιείται ευρέως ονομάζεται **3+1 Φορμαλισμός** . Θα θεωρήσουμε τρισδιάστατες χωρικές υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου, οι οποίες δεν τέμνονται μεταξύ τους, και είναι εμβαπτισμένες εντός του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Κάθε καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος μπορεί να διασπαστεί πλήρως σε τρισδιάστατες υπερεπιφάνειας κάθε μία από τις οποίες να είναι χωρική [11].

2.1 Η γεωμετρία των υπερεπιφανειών

Μια υπερεπιφάνεια μιας πολλαπλότητας $\mathscr{M}$ είναι η απεικόνιση μιας πολλαπλότητας $\hat{\Sigma}$ από τον εμβαπτισμό $\Phi : \hat{\Sigma} \to \mathscr{M}$ [13].

$$\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}) \tag{2.1.1}$$

Μία υπερεπιφάνεια μπορεί να οριστεί τοπικά ως τα σημεία για τα οποία ένα βαθμωτό πεδίο $f(x^\mu)$ είναι σταθερό.

$$f(x^\alpha) = \mu \tag{2.1.2}$$

Έστω δυο σημεία της υπερεπιφάνειας P, Q με συντεταγμένες $x, x+\epsilon$. Είναι:

$$f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha \mu \Rightarrow \epsilon^\alpha \partial_\alpha f = 0 \tag{2.1.3}$$

αφού από την παραμετροποίηση της υπερεπιφάνειας η βαθμωτή συνάρτηση f έχει ίδια τιμή για κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας. Συμπέρασμα αυτού είναι πως καθώς το ϵ είναι εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια, το συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $\partial_\alpha f$ είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια στο σημείο P.Ένα διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια όταν είναι ανάλογο του διανυσματικού πεδίου αυτού σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας, δηλαδή:

$$X_\alpha = \lambda(x)\partial_\alpha f \tag{2.1.4}$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$\begin{aligned} X_\alpha \partial_\mu X_\beta &= \lambda(\partial_\alpha f)(\partial_\mu \lambda \partial_\beta f) \\ &= (\partial_\alpha f)(\partial_\mu \lambda)(\partial_\beta f) + \lambda^2(\partial_\alpha f)(\partial_\mu \partial_\beta f) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Παρατηρούμε πως ο πρώτος όρος είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή $\alpha \leftrightarrow \beta$ ενώ ο δεύτερος υπό $\beta \leftrightarrow \mu$. Αναπτύσσουμε το πλήρες αντισυμμετρικό του όρου αυτού:

$$\begin{aligned} X_{[\alpha}\partial_\mu X_{\beta]} = \frac{1}{6}[\quad & X_\alpha \partial_\mu X_\beta + X_\mu \partial_\beta X_\alpha + X_\beta \partial_\alpha X_\mu \\ - \quad & X_\alpha \partial_\beta X_\mu - X_\beta \partial_\mu X_\alpha - X_\mu \partial_\alpha X_\beta] \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζουν οι όροι, παρατηρούμε πως απαλείφονται όλοι μεταξύ τους και επομένως:

$$X_{[\alpha}\partial_\mu X_{\beta]} = 0 \tag{2.1.7}$$

Ισοδύναμα αυτή η σχέση αντισυμμετρικότητας ισχύει και αν στη θέση της μερικής παραγώγου υπάρχει συναλλοίωτη παράγωγος. Είναι:

$$\begin{aligned} X_\alpha \partial_\mu X_\beta &= \lambda(\partial_\alpha f)(\partial_\mu \lambda \partial_\beta f) = \lambda(\partial_\alpha f)(\nabla_\mu \lambda \partial_\beta f) + \lambda^2(\partial_\alpha f)(\Gamma^\nu_{\mu\beta}\partial_\nu f) \\ &= X_\alpha \nabla_\mu X_\beta + \lambda^2(\partial_\alpha f)(\Gamma^\nu_{\mu\beta}\partial_\nu f) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

ή

$$X_\alpha \nabla_\mu X_\beta = X_\alpha \partial_\mu X_\beta - \lambda^2(\partial_\alpha f)(\Gamma^\nu_{\mu\beta}\partial_\nu f) \tag{2.1.9}$$

Για τους όρους που εμφανίζονται με την ανάπτυξη του πρώτο όρου, ισχύουν προφανώς όλες οι συμμετρίες που έχουν προαναφερθεί. Επίσης, ο όρος με το σύμβολο Christofell που εμφανίστηκε είναι λόγω αυτού συμμετρικος ως προς $\mu \leftrightarrow \beta$. Επομένως, αναπτύσσοντας αντίστοιχα το πλήρες αντισυμμετρικό της ποσότητας αυτής καταλήγουμε πως όλοι οι όροι θα απαλοίφονται και άρα για ένα διανυσματικό πεδίο κάθετο σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας ισχύει η ιδιότητα:

Πρόταση 2.1: Έλλειψη στρέψης για διανυσματικό πεδίο κάθε στην υπερεπιφάνεια

Για ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{X}$ που είναι κάθετο σε κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας ισχύει πως: $X_{[\alpha}\nabla_\mu X_{\beta]} = 0$

Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί πως καθώς $X_\alpha = \nabla_\alpha f$, για ένα διάνυσμα που είναι το grad μιας βαθμωτής συνάρτησης, το curl του πρέπει να είναι μηδενικό. Επομένως, για το διανυσματικό αυτό πεδίο ισχύει:

$$\nabla_{[\alpha}X_{\beta]} = 0 \tag{2.1.10}$$

Επίσης αποδεικνύεται πως αν ισχύει $X_{[\alpha}\nabla_\mu X_{\beta]} = 0$ για ένα μη φωτοειδές, δηλαδή $X^2 = X^\alpha X_\alpha \neq 0$ Killing διανυσματικό πεδίο, τότε αυτό είναι κάθετο σε υπερεπιφάνεια. Καθώς για ένα Killing διανυσματικό πεδίο ισχύει:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha = 0 \tag{2.1.11}$$

οι όροι της εξίσωσης της πλήρους αντιμετάθεσης μειώνονται ως:

$$X_{[\alpha}\nabla_\mu X_{\beta]} = 0 \Rightarrow X_\alpha \nabla_\mu X_\beta + X_\mu \nabla_\beta X_\alpha + X_\beta \nabla_\alpha X_\mu = 0 \tag{2.1.12}$$

Συστέλλοντας ώστε να εμφανιστεί το μέτρο του διανυσματικού πεδίου:

$$\begin{aligned} &X^\beta X_\alpha \nabla_\mu X_\beta + X^\beta X_\mu \nabla_\beta X_\alpha + X^\beta X_\beta \nabla_\alpha X_\mu = 0 \Rightarrow \\ &X^\beta X_\alpha \nabla_\mu X_\beta + X^\beta X_\mu \nabla_\beta X_\alpha + X^2 \nabla_\alpha X_\mu = 0 \Rightarrow \\ &X^\beta X_\alpha \nabla_\mu X_\beta - X^\beta X_\mu \nabla_\alpha X_\beta + X^2 \nabla_\alpha X_\mu = 0 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ξανά στο δεύτερο η ιδιότητα του Killing διανυσματικού πεδίου. Χρησιμοποιώντας τη ξανά για τους δείκτες $\mu \leftrightarrow \alpha$ του τελευταίου όρου (και αλλάζοντας την άνω και κάτω θέση των βουβών δεικτών), λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$X_\beta X_\alpha \nabla_\mu X^\beta - X^\beta X_\mu \nabla_\alpha X_\beta + X^2 \nabla_\mu X_\alpha = 0 \tag{2.1.14}$$

Προσθέτοντας τις (2.1.13) και (2.1.14) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} &X^2 X_\alpha \nabla_\mu X^2 - X^2 X_\mu \nabla_\alpha X^2 + X^2(\nabla_\alpha X_\mu - \nabla_\mu X_\alpha) = 0 \quad \text{ή καθώς το X δεν είναι φωτοειδές} \\ \Rightarrow\ &X_\alpha \nabla_\mu X^2 - X_\mu \nabla_\alpha X^2 + (\nabla_\alpha X_\mu - \nabla_\mu X_\alpha) = 0 \\ \Rightarrow\ &X_\alpha \partial_\mu X^2 - X_\mu \partial_\alpha X^2 + (\partial_\alpha X_\mu - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} X_\nu - \partial_\mu X_\alpha + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}) = 0 \\ \Rightarrow\ &X_\alpha \partial_\mu X^2 - X_\mu \partial_\alpha X^2 + (\partial_\alpha X_\mu - \partial_\mu X_\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την συμμετρία των συμβόλων Christoffel καθώς και την ιδιότητα ότι για βαθμωτό μέγεθος η συναλλοίωτη παράγωγος ισοδυναμεί με τη μερική. Σκοπός είναι να αποδείξουμε πως αυτό το διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο σε υπερεπιφάνεια, άρα πρέπει να δείξουμε πως είναι ανάλογο του grad μια βαθμωτής συνάρτησης. Οπότε, η τελευταία εξίσωση πρέπει να αναλυθεί κατάλληλα ώστε να εμφανιστεί το curl κατάλληλου όρου. Οπότε:

$$
\begin{aligned}
& X_\alpha \partial_\mu X^2 - \partial_\alpha X_\mu = X_\mu \partial_\alpha X^2 - \partial_\mu X_\alpha \quad \text{ή καθώς το X δεν είναι φωτοειδές διαιρούμε με } X^4 \\
\Rightarrow \quad & \partial_\alpha\left(\frac{X_\mu}{X^2}\right) = \partial_\mu\left(\frac{X_\alpha}{X^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.16}
$$

Πράγματι, εμφανίσαμε το curl που προβλέψαμε για την απόδειξη. Επομένως, η ποσότητα όντως μπορεί να γραφεί ως το grad μιας βαθμωτής συνάρτησης, όπου αποδείξαμε στην αρχή της παραγράφου αυτό συνεπάγεται πως το διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο σε υπερεπιφάνεια:

$$X_\alpha = X^2 \partial_\alpha f \tag{2.1.17}$$

με το X^2 να έχει το ρόλο του λ. Επιπρόσθετα, ανάλογα το είδος του κάθετου διανύσματος, μια υπερεπιφάνεια μπορεί να εμπίπτει στα παρακάτω είδη:

- Αν **X** χρονοειδές, δηλαδή $X^2 = X^\alpha X_\alpha < 0$,Σ χωροειδής
- Αν **X** χωροειδές, $X^2 = X^\alpha X_\alpha > 0$,Σ χρωνοειδής
- Αν **X** φωτοειδές, $X^2 = X^\alpha X_\alpha = 0$,Σ φωτοειδής

2.1.1 Υπερεπιφάνεια Σταθερού Χρόνου: Το κάθετο διάνυσμα

Στη μελέτη αυτή επιλέγουμε ως το βαθμωτό πεδίο που είναι σταθερό πάνω σε όλη την υπερεπιφάνεια τον καθολικό χρόνο t. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

$$\Omega_\alpha = \nabla_\alpha t = \partial_\alpha t \tag{2.1.18}$$

και κάθε διάνυσμα **u** εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια ισχύει:

$$\langle \mathbf{u}, \nabla t \rangle = 0 \tag{2.1.19}$$

Το t θέλουμε να είναι μια χρονική τοπική συντεταγμένη επομένως ισχύει:

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu t \partial_\nu t < 0 \tag{2.1.20}$$

Από το one-form μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα στην υπερεπιφάνεια ως:

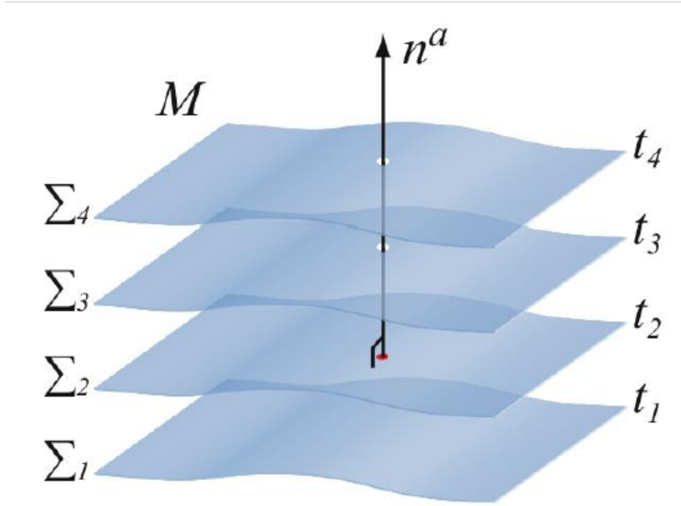
$$\omega^\alpha = g^{\alpha\mu} \Omega_\mu \tag{2.1.21}$$

το οποίο είναι χρονοειδές για χωροειδή υπερεπιφάνεια. Το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με κατεύθυνση προς το μέλλον υπολογίζεται ως:

$$n^\alpha = -(-g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t)^{-1/2} \nabla^a t \tag{2.1.22}$$

και καθώς μπορεί να οριστεί η νόρμα του one-form (2.1.18) ως:

$$||\Omega_\alpha|| = g^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t \equiv -\frac{1}{\alpha^2} \tag{2.1.23}$$



Σχήμα 2.1.1.1: Το διάνυσμα **n** είναι κάθετο στις χωρικές υπερεπιφάνειες [3]

το κάθετο διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως:

$$n^{\alpha} = -\alpha \nabla^{\alpha} t \tag{2.1.24}$$

Λόγω της κανονικοποίησης και της χρονοειδούς φύσης του, προκύπτει φυσικά για το κάθετο διάνυσμα πως:

$$n^{\mu} n_{\mu} = -1 \tag{2.1.25}$$

Λόγω της ιδιότητας αυτής μπορούμε να ερμηνεύσουμε το διάνυσμα αυτό ως την τετραταχύτητα ενός παρατηρητή που κινείται κάθετα στην χωρική υπερεπιφάνεια. Επιπλέον ορίζεται και η επιτάχυνση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος ως:

$$\alpha_{\alpha} = -n^{\beta} \nabla_{\beta} n_{\alpha} \tag{2.1.26}$$

Αποδεικνύεται πως:

$$\begin{aligned} n_{\alpha} \nabla_{\beta} n^{\alpha} &= \nabla_{\beta}(n_{\alpha} n^{\alpha}) - n^{\alpha} \nabla_{\beta} n_{\alpha} \\ &= -n_{\alpha} \nabla_{\beta} n^{\alpha} \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

επομένως καταλήγουμε στην ιδιότητα:

$$n_{\alpha} \nabla_{\beta} n^{\alpha} = 0 \tag{2.1.28}$$

η οποία υποδυκνύει πως η επιτάχυνση είναι πλήρως χωρική:

$$n^{\alpha} \alpha_{\alpha} = 0 \tag{2.1.29}$$

2.1.2 Χωρικός και Χρονικός Προβολικός Τελεστής

Για κάθε σημείο $p \in \Sigma$, ο χώρος όλων των χωροχρονικών διανυσμάτων μπορεί να αποσυντεθεί ως:

$$\mathscr{T}_p(\mathscr{M}) = \mathscr{T}_p(\Sigma) \oplus span(\mathbf{n}) \tag{2.1.30}$$

όπου **n** είναι ένας μονοδιάστατος υπόχωρος της πολλαπλότητας $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ που γεννάται από τον υπόχωρο **n**.

Ορισμός 2.1: Ο χωρικός προβολικός τελεστής

Ορίζεται τελεστής προβολής $\vec{\gamma}$ ορθογώνιος στην Σ που σχετίζεται με την παραπάνω αποσύνθεση ως:

$$\vec{\gamma} : \mathscr{T}_p(\mathscr{M}) \to \mathscr{T}_p(\Sigma) \tag{2.1.31}$$

$$\boldsymbol{v} \to (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{n} \tag{2.1.32}$$

τα στοιχεία του οποίου γράφονται ως:

$$\gamma^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} \tag{2.1.33}$$

Λαμβάνοτας υπόψη την (2.1.25) εύκολα αποδεικνύεται η ορθογώνια σχέση του τανυστή προβολής με το κάθετο διάνυσμα στην υπερεπιφάνεια:

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha}_{\beta} n^{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} n^{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} n^{\beta} \\ &= n^{\alpha} - n^{\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

ενώ για διάνυσμα **v** που ζει πάνω στην υπερεπιφάνεια ισχύει:

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha}_{\beta} v^{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} v^{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} v^{\beta} \\ &= v^{\alpha} \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

καθώς $n_{\beta} v^{\beta} = 0$. Αποδεικνύεται επίσης η ιδιότητα ενός τελεστή προβολής:

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha}_{\mu} \gamma^{\mu}_{\beta} &= (\delta^{\alpha}_{\mu} + n^{\alpha} n_{\mu})(\delta^{\mu}_{\beta} + n^{\mu} n_{\beta}) \\ &= \delta^{\alpha}_{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} n^{\mu} n_{\mu} + n^{\alpha} n_{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} \\ &= \delta^{\alpha}_{\beta} + n^{\alpha} n_{\beta} = \gamma^{\alpha}_{\beta} \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Για να προβάλλουμε ένα τανυστή στη χωρική υπερεπιφάνεια πρέπει να συστέλλουμε κάθε του δείκτη με τον προβολικό τανυστή:

$$\perp T_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\nu}_{\beta} T_{\mu\nu} \tag{2.1.37}$$

αντίστοιχα ορίζεται και ο χρονικός/κανονικός τελεστής προβολής:

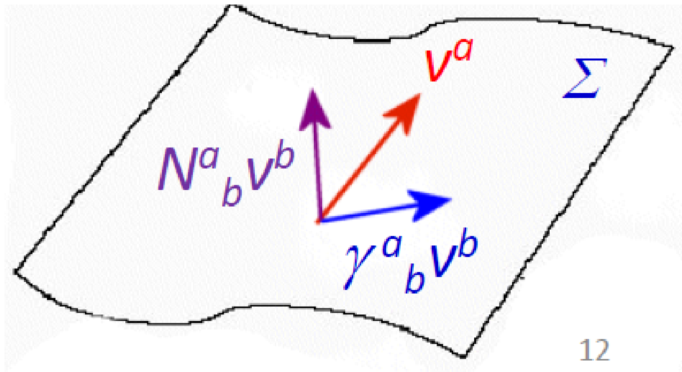
Ορισμός 2.2: Χρονικός/Κανονικός Τελεστής Προβολής

$N^{\alpha}_{\beta} = -n^{\alpha} n_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \gamma^{\alpha}_{\beta}$

Ένα διάνυσμα ή ένα one-form μπορεί να αναλυθεί στο χωρικό και στο χρονικό του μέρος ως:

$$u^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta} u^{\beta} = \perp u^{\alpha} - n^{\alpha} n_{\beta} u^{\beta} \tag{2.1.38}$$

$$\omega_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} \omega_{\beta} = \perp \omega_{\alpha} - n^{\beta} n_{\alpha} \omega_{\beta} \tag{2.1.39}$$



Σχήμα 2.1.2.1: Κάθε διάνυσμα μπορεί μέσω των τανυστών προβολής να διασπαστεί σε ένα χωρικό μέρος εφαπτόμενο στη χωρική υπερεπιφάνεια και σε ένα μέρος στην κατεύθυνση του χρόνου [16].

2.1.3 Η χωρική μετρική

Επόμενο βήμα είναι η αποσύνθεση της χωροχρονικής μετρικής.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g^{\mu}_{\alpha} g^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} \\ &= (\gamma^{\mu}_{\alpha} - n^{\mu} n_{\alpha})(\gamma^{\nu}_{\mu} - n^{\nu} n_{\beta}) g_{\mu\nu} \\ &= \gamma^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} - n_{\alpha} n_{\beta} \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

δηλαδή

$$\gamma^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} + n_{\alpha} n_{\beta} \tag{2.1.41}$$

Ορίζεται επομένως η προβολή της χωροχρονικής μετρικής στη χωρική υπερεπιφάνεια, δηλαδή η χωρική μετρική ως:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_{\alpha} n_{\beta} \tag{2.1.42}$$

Ισχύει προφανώς η σχέση καθετότητας:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} n^{\alpha} &= g_{\alpha\beta} n^{\alpha} + n_{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha} \\ &= n_{\beta} - n_{\beta} = 0 \end{aligned} \tag{2.1.43}$$

Φυσικά προκύπτει και η αντίστροφη της χωρικής μετρικής ως:

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \gamma_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} + n^{\alpha} n^{\beta} \tag{2.1.44}$$

2.2 Η εσωτερική καμπυλότητα

2.2.1 Η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος D_μ

Ορισμός 2.3

Υπάρχει μια μοναδική σύνδεση **D** πάνω στην πολλαπλότητα Σ που είναι ελεύθερη από στρέψη και ικανοποιεί [13]:

$$\mathbf{D}\gamma = 0 \tag{2.2.1}$$

η οποία αποτελεί μια σύνδεση Levi-Civita της μετρικής γ. Συγκεκριμένα για τανυστικό πεδίο $\mathbf{T}$ πάνω στην Σ ορίζεται η συναλλοίωτη παράγωγός του σύμφωνα με την σύνδεση αυτή Levi-Civita και συνδέεται με την χωροχρονική συναλλοίωτη παράγωγο του ως:

$$\mathbf{DT} = \gamma \nabla \mathbf{T} \tag{2.2.2}$$

με τα στοιχεία της να γράφονται ως

$$D_\gamma T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} = \gamma^{\alpha_1}{}_{\mu_1} .. \gamma^{\nu_l}{}_{\beta_l} \gamma^\delta{}_\gamma \nabla_\delta T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \tag{2.2.3}$$

Πράγματι βάση του ορισμού των στοιχείων της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου ενός τανυστή επιβεβαιώνεται ο Levi-Civita χαρακτήρας της σύνδεσης:

Πρόταση 2.2: Ο Levi-Civita χαρακτήρας του D_μ

$D_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 0$

όπου αξιοποιώντας την συμβατότητα της μετρικής $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ και την ορθογώνια σχέση του τανυστή προβολής με το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} D_\mu \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma^{\nu_1}_\alpha \gamma^{\nu_2}_\beta \gamma^\delta_\mu \nabla_\delta \gamma_{\nu_1\nu_2} \\ &= \gamma^{\nu_1}_\alpha \gamma^{\nu_2}_\beta \gamma^\delta_\mu \nabla_\delta (g_{\nu_1\nu_2} + n_{\nu_1} n_{\nu_2}) \\ &= \gamma^{\nu_1}_\alpha \gamma^{\nu_2}_\beta \gamma^\delta_\mu \nabla_\delta g_{\nu_1\nu_2} + \gamma^{\nu_1}_\alpha \gamma^{\nu_2}_\beta \gamma^\delta_\mu n_{\nu_1} \nabla_\delta n_{\nu_2} + \gamma^{\nu_1}_\alpha \gamma^{\nu_2}_\beta \gamma^\delta_\mu n_{\nu_2} \nabla_\delta n_{\nu_1} = 0 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Η ύπαρξη εσωτερικής καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας υποδυκνύει την ύπαρξη χωρικών συμβόλων Christofell που λειτουργούν ως συντελεστές της σύνδεσης Levi-Civita. Από τη σχέση συμβατότητας προκύπτει πως για δεδομένο σύστημα αναφοράς τα σύμβολα Christofell δίνονται ως:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\delta} (\partial_\gamma \gamma_{\delta\beta} + \partial_\beta \gamma_{\delta\gamma} - \partial_\delta \gamma_{\beta\gamma}) \tag{2.2.5}$$

Για τη συναλλοίωτη παράγωγο μιας βαθμωτής πόσότητας της μορφής $v^\beta \omega_\beta$ ισχύει ο κανόνας Leibniz μόνο αν τα u^β, ω_β είναι χωρικά

Πρόταση 2.3: Κανόνας Leibnitz συναλλοίωτης παραγώγου για χωρικά u^β, ω_β

$D_\alpha (u^\beta \omega_\beta) = u^\beta D_\alpha \omega_\beta + \omega_\beta D_\alpha u^\beta$

Έστω ότι το διάνυσμα και το one-form δεν είναι πλήρως χωρικά. Τότε από τις σχέσεις (2.1.38), (2.1.39) μπορούν να αποσυντεθούν στο χωρικό και χρονικό μέρος τους. Αναπτύσσουμε την συναλοίωτη και αξιοποιώντας πως $n^\alpha \gamma^\beta_\alpha = 0$ αποδεικνύουμε πως ο κανόνας Leibniz δεν ισχύει:

$$\begin{aligned} D_\alpha (u^\beta \omega_\beta) &= \gamma^\beta_\mu \gamma^\nu_\beta \gamma^\delta_\alpha \nabla_\delta (u^\mu \omega_\nu) && (2.2.6) \\ &= \gamma^\beta_\mu \gamma^\nu_\beta \gamma^\delta_\alpha u^\mu \nabla_\delta \omega_\nu + \gamma^\beta_\mu \gamma^\nu_\beta \gamma^\delta_\alpha \omega_\alpha \nabla_\delta u^\mu \\ &= \gamma^\beta_\mu \gamma^\nu_\beta \gamma^\delta_\alpha (\perp u^\mu + n^\mu n_\kappa u^\kappa) \nabla_\delta \omega_\nu + \gamma^\beta_\mu \gamma^\nu_\beta \gamma^\delta_\alpha (\perp \omega_\nu + n^\kappa n_\nu \omega_\kappa) \nabla_\delta u^\mu \\ &= \perp u^\beta D_\alpha \omega_\beta + \perp \omega_\beta D_\alpha u^\beta && (2.2.7) \\ &\neq u^\beta D_\alpha \omega_\beta + \omega_\beta D_\alpha u^\beta \end{aligned}$$

Επιπλέον, χρήσιμη θα καταστεί στην συνέχεια η σύνδεση της επιτάχυνσης α_α με την συνάρτηση lapse α μέσω της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου:

Πρόταση 2.4: Σχέση μεταξύ επιτάχυνσης α_α και συνάρτησης lapse α

$\alpha_\alpha = D_\alpha \ln \alpha$

Είναι:

$$
\begin{aligned}
\alpha_\alpha &= n_\beta \nabla^\beta n_\alpha = n_\beta \nabla^\beta(-\alpha \nabla_\alpha t) = -n_\beta \nabla_\alpha t \nabla^\beta \alpha - \alpha n_\beta \nabla_\alpha \nabla^\beta t \\
&= \frac{1}{\alpha} n_\beta n_\alpha \nabla^\beta \alpha - \frac{1}{\alpha} n^\beta n_\beta \nabla_\alpha \alpha + n_\beta \nabla_\alpha n^\beta \\
&= \frac{1}{\alpha}(n^\beta n_\alpha + \delta^\beta_\alpha)\nabla_\beta \alpha = \frac{1}{\alpha} D_a \alpha = D_\alpha \ln \alpha
\end{aligned}
$$

2.2.2 Ο χωρικός τανυστής Riemann, Ricci και η χωρική καμπουλότητα Ricci

Η έλλειψη μεταθετικότητας μεταξύ των χωρικών συναλοίωτων παραγώγων οδηγεί στην ύπαρξη **Εσωτερικής Καμπυλότητας** της υπερεπιφάνειας (Σ, γ): [13]

Ορισμός 2.4: Ο χωρικός τανυστής Riemann

$\forall \mathbf{u} \in \mathscr{T}(\Sigma) : (D_\alpha D_\beta - D_\alpha D_\beta) u_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} u_\nu$

όπου εκφράζεται μέσω του χωρικού τανυστή Riemann, **Riem** τα στοιχεία του οποίου εκφράζονται στον παραπάνω ορισμό. Αντίστοιχα ορίζονται και ο χωρικός τανυστής Ricci **R** αλλά και η χωρική Ricci καμπυλότητα R [13] :

Ορισμός 2.5: Χωρικός τανυστής Ricci R και χωρική Ricci καμπυλότητα R

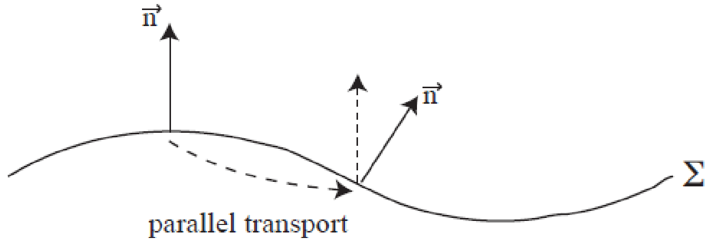
$$
\mathbf{R} \;:\; R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu} \tag{2.2.8}
$$

$$
R \;:\; R = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{2.2.9}
$$

Για δεδομένο σύστημα αναφοράς, ο χωρικός τανυστής Riemann μπορεί να γραφεί συναρτήσει των συμβόλων Christoffel ως:

$$
R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_\beta \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \Gamma^\delta_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\mu\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\delta_{\mu\alpha} \tag{2.2.10}
$$

Η χωρική καμπυλότητα εμπεριέχει πληροφορία για την εσωτερική καμπυλότητα της χωρικής υπερεπιφάνειας αλλά όχι για το σχήμα αυτής εμβαπτισμένης στο χωρόχρονο. Για να γραφούν ωστόσο οι εξισώσεις Einstein στη γλώσσα του 3+1 φορμαλισμού θα χρειαστεί και η πληροφορία για μεταβολή του σχήματός του μέσα στην πολλαπλότητα $\mathscr{M}$.



Σχήμα 2.3.1: Ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας ορίζεται ως η μεταβολή του κάθετου διανύσματος **n** κάτω από παράλληλη μετατόπιση [1].

2.3 Η εξωγενής καμπυλότητα

Αν μετακινήσουμε παράλληλα το κάθετο διάνυσμα **n** από ένα σημείο της χωρικής υπερεπιφάνειας σε ένα άλλο, θα πάψει να είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια. Η μεταβολή αυτή της κατεύθυνσης του προσφέρει πληροφορία για την Εξωγενή Καμπυλότητα, δηλαδή για τον τρόπο που εμβαπτίζεται η υπερεπιφάνεια στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Ως εξωγενή καμπυλότητα ορίζουμε τον τανυστή:

Ορισμός 2.6: Ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας $K_{\alpha\beta}$

$$K_{\alpha\beta} = -\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}n_{\nu}$$

Συναρτήσει της σχέσης (2.1.24) η εξωγενής καμπυλότητα εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= -\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}(-a\nabla_{\nu}t) \\ &= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}\alpha\nabla_{\nu}t + \alpha\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}t \\ &= \alpha\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}t \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

καθώς $\gamma^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}a = 0$. Αυτή η σχέση κάνει προφανή τον συμμετρικό χαρακτήρα του $K_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} K_{\beta\alpha} &= \alpha\gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}t \\ &= \alpha\gamma^{\nu}_{\beta}\gamma^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}t \\ &= \alpha\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}t \\ &= K_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

χρησιμοποιώντας τον torsion free χαρακτήρα της θεωρίας $\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}t = \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}t$ Ωστόσο χρειάζεται προσοχή στο γεγονός πως η συμμετρία αυτή δεν ισχύει αντίστοιχα για το $\nabla_{\alpha}n_{\beta}$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της εξωγενούς καμπυλότητας εξάγεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.1.28) και τον ορισμό της επιτάχυνσης (2.1.26)

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= -\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}n_{\nu} \\ &= -(\delta^{\mu}_{\alpha} + n^{\mu}n_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + n^{\nu}_{\beta})\nabla_{\mu}n_{\nu} \\ &= -(\delta^{\mu}_{\alpha} + n^{\mu}n_{\alpha})\delta^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}n_{\nu} \\ &= -\nabla_{\alpha}n_{\beta} - n_{\alpha}n^{\mu}\nabla_{\mu}n_{\beta} \\ &= -\nabla_{\alpha}n_{\beta} - n_{\alpha}\alpha_{\beta} \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Η ποσότητα $\nabla_\alpha n_\beta$ δεν είναι απαραίτητα συμμετρική καθώς από την (2.1.24) προκύπτει πως:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha n_\beta &= \nabla_\alpha(-\alpha\nabla_\beta t) = -\alpha\nabla_\alpha\nabla_\beta t - (\nabla_\alpha\alpha)(\nabla_\beta t)\\ &= -\alpha\nabla_\beta\nabla_\alpha t - (\nabla_\alpha\alpha)(\nabla_\beta t)\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Υπάρχει ένας ακόμα τρόπος έκφρασης της εξωγενούς καμπυλότητας που χρησιμοποιεί την παράγωγο Lie της χωρικής παραγώγο στην κατεύθυνση του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος (n).

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} &= n^\mu\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta n^\mu + \gamma_{\beta\mu}\nabla_\alpha n^\mu \qquad (2.3.5)\\ &= n^\mu\nabla_\mu(n_\alpha n_\beta) + n^\mu\nabla_\mu(g_{\alpha\beta}) + (g_{\alpha\mu}+n_\alpha n_\mu)\nabla_\beta n^\mu + (g_{\beta\mu}+n_\beta n_\mu)\nabla_\alpha n^\mu\\ &= n^\mu\nabla_\mu(n_\alpha n_\beta) + g_{\alpha\mu}\nabla_\beta n^\mu + g_{\beta\mu}\nabla_\alpha n^\mu\\ &= \nabla_\alpha n_\beta + n^\mu n_\alpha\nabla_\mu n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha + n^\mu n_\beta\nabla_\mu n_\alpha\\ &= -2K_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

δηλαδή

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} \tag{2.3.6}$$

Μια πολύ σημαντική ποσότητα που θα μας απασχολήσει αρκετά σε επόμενο κεφάλαιο είναι το ίχνος του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας. Το ίχνος αυτό προκύπτει από:

$$K = g^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \tag{2.3.7}$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3.3) εξάγεται η σχέση:

$$K = -\nabla^\alpha n_\alpha. \tag{2.3.8}$$

Το ίχνος αυτό έχει μια σημαντική γεωμετρική ερμηνεία καθώς συνδέεται με το κανονικό στοιχείο όγκου των χωρικών υπερεπιφανειών $\gamma^{1/2}$:

$$K = \gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\gamma}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma = \frac{1}{\gamma^{1/2}}\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma^{1/2} = -\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\ln\gamma^{1/2} \tag{2.3.9}$$

Συμπερασματικά λοιπόν, το $-K$ εκφράζει το κλασματικό ρυθμό μεταβολής του τρισδιάστατου όγκου κατά μήκος του $\boldsymbol{n}$.

2.4 Οι εξισώσεις Gauss-Codazzi, Gauss-Mainardi, Ricci

Η καμπυλότητα της χωρικής υπερεπιφάνειας πρέπει να συνδεθεί με την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Είναι απαραίτητο καθώς οι εξισώσεις Einstein εμπεριέχουν τη χωροχρονική καμπυλότητα και για να μπορούν να εκφραστούν στη γλώσσα του 3+1 φορμαλισμού θα πρέπει να εισάγουμε σε αυτές πληροφορία για την καμπυλότητα των υπερεπιφανειών. Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει να υπολογιστούν τρεις διαφορετικές προβολές του χωροχρονικού τανυστή Riemann :πρώτον η πλήρης προβολή όλων των δεικτών πάνω στις χωρικές υπερεπιφάνειες, η προβολή ενός δείκτη στην κανονική κατεύθυνση και των υπολοίπων στις χωρικές υπερεπιφάνειες και τέλος οι προβολή δύο δεικτών στη χρονική κατεύθυνση και δύο στις χωρικές υπερεπιφάνειες. Ο υπολογισμός αυτών των προβολών δεν είναι καθόλου προφανής και στην παράγραφο αυτή θα περάσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό τους. Οι προβολές αυτές θα συνδέσουν τον χωροχρονικό τανυστή Riemann με τον χωρικό που μελετήθηκε σε προηγούμενη παράγραφο.

2.4.1 Εξίσωση Gauss-Codazzi

Η εξίσωση που συνδέει το χωρικό τανυστή Riemann με τον πλήρως προβεβλημένο στην υπερεπιφάνεια χωροχρονικό τανυστή Riemann ονομάζεται Gauss-Codazzi.

Πρόταση 2.5: Η εξίσωση Gauss-Codazzi

$$\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\sigma_\nu {}^{(4)}R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}$$

Στην παρακάτω ανάλυση θα παρουσιάσουμε μια πιο αναλυτική απόδειξη βασιζόμενοι στην ανάλυση του [21]. Αρχικά θα λάβουμε υπόψη την έκφραση του χωρικού τανυστή Riemann συναρτήσει της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$D_\alpha D_\beta \omega_\mu - D_\beta D_\alpha \omega_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\omega_\nu \tag{2.4.1}$$

Θα αναλύσουμε τον πρώτο όρο και στη συνέχεια θα προκύψει φυσικά και ο δεύτερος όρος και επομένως και η διαφορά αυτή. Είναι:

$$\begin{aligned}
D_\alpha D_\beta \omega_\mu &= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \nabla_\delta (D_\kappa \omega_\lambda) \\
&= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \nabla_\delta (\gamma^\sigma_\kappa \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\sigma \omega_\zeta) \\
&= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\delta \gamma^\sigma_\kappa \nabla_\sigma \omega_\zeta && (2.4.2) \\
&+ \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\sigma_\kappa \nabla_\delta \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\sigma \omega_\zeta && (2.4.3) \\
&+ \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\sigma_\kappa \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\delta \nabla_\sigma \omega_\zeta && (2.4.4)
\end{aligned}$$

Είναι (2.4.2):

$$\begin{aligned}
\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\delta \gamma^\sigma_\kappa \nabla_\sigma \omega_\zeta &= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\delta (\delta^\sigma_\kappa + n^\sigma n_\kappa) \nabla_\sigma \omega_\zeta \\
&= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\zeta_\lambda n^\sigma \nabla_\delta (n_\kappa) \nabla_\sigma \omega_\zeta + \gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\zeta_\lambda n_\kappa \nabla_\delta (n^\sigma) \nabla_\sigma \omega_\zeta \\
&= -\gamma^\zeta_\mu K_{\alpha\beta} n^\sigma \nabla_\sigma \omega_\zeta && (2.4.5)
\end{aligned}$$

και αντίστοιχα η (2.4.3):

$$\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\sigma_\kappa \nabla_\delta \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\sigma \omega_\zeta = -\gamma^\sigma_\beta K_{\alpha\mu} n^\zeta \nabla_\sigma \omega_\zeta \tag{2.4.6}$$

ενώ για την (2.4.4) αξιοποιούμε απλά την ιδιότητα του τελεστή προβολής:

$$\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta \gamma^\lambda_\mu \gamma^\sigma_\kappa \gamma^\zeta_\lambda \nabla_\delta \nabla_\sigma \omega_\zeta = \gamma^\delta_\alpha \gamma^\sigma_\beta \gamma^\zeta_\mu \nabla_\delta \nabla_\sigma \omega_\zeta \tag{2.4.7}$$

Με περαιτέρω ανάλυση του όρου (2.4.6):

$$\begin{aligned}
\gamma^\sigma_\beta K_{\alpha\mu} n^\zeta \nabla_\sigma \omega_\zeta &= \gamma^\sigma_\beta K_{\alpha\mu} \nabla_\sigma (n^\zeta \omega_\zeta) - \gamma^\sigma_\beta K_{\alpha\mu} \omega_\zeta \nabla_\sigma n^\zeta \\
&= K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\zeta \omega_\zeta && (2.4.8)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση των όρων (2.4.5), (2.4.8), (2.4.7) η (2.4.1) θα γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\omega_\delta &= \gamma^\delta_\alpha \gamma^\sigma_\beta \gamma^\zeta_\mu \nabla_\sigma \omega_\zeta - \gamma^\zeta_\mu K_{\alpha\beta} n^\sigma \nabla_\sigma \omega_\zeta + K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\zeta \omega_\zeta \\
&- \gamma^\delta_\alpha \gamma^\sigma_\beta \gamma^\zeta_\mu \nabla_\delta \nabla_\sigma \omega_\zeta + \gamma^\zeta_\mu K_{\beta\alpha} n^\sigma \nabla_\sigma \omega_\zeta - K_{\beta\mu} K_\alpha{}^\zeta \omega_\zeta && (2.4.9)
\end{aligned}$$

Αξιοποιώντας την συμμετρία $K_{\alpha\beta}$ και πραγματοποιώντας την εναλλαγή δεικτών $\delta \leftrightarrow \sigma$ η σχέση γράφεται:

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\omega_{\nu} = \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}[\nabla_{\delta}, \nabla_{\sigma}]\omega_{\zeta} + K_{\alpha\mu}K_{\beta}{}^{\nu}\omega_{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha}{}^{\nu}\omega_{\nu} \tag{2.4.10}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να εισάγουμε πλέον τον χωροχρονικό τανυστή Riemann μέσω της σχέσης:

$$[\nabla_{\delta}, \nabla_{\sigma}]\omega_{\zeta} = {}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta}{}^{\nu}\omega_{\nu} \tag{2.4.11}$$

επομένως:

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\omega_{\nu} = \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}\gamma^{\nu}_{\xi}{}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta}{}^{\xi}\omega_{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta}{}^{\nu}\omega_{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha}{}^{\nu}\omega_{\nu} \tag{2.4.12}$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}\omega^{\nu} &= \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}\gamma_{\nu_{\xi}}{}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta}{}^{\xi}\omega^{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}\omega^{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha\nu}\omega^{\nu} \\
&= \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}(g_{\nu_{\xi}} + n_{\nu}n_{\xi})^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta}{}^{\xi}\omega^{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}\omega^{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha\nu}\omega^{\nu} \\
&= \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}{}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta\nu}\omega^{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}\omega^{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha\nu}\omega^{\nu} \\
&= \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}\delta^{\xi}_{\nu}{}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta\xi}\omega^{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}\omega^{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha\nu}\omega^{\nu} \\
&= \gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\beta}\gamma^{\zeta}_{\mu}\gamma^{\xi}_{\nu}{}^{(4)}R_{\delta\sigma\zeta\xi}\omega^{\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}\omega^{\nu} - K_{\beta\mu}K_{\alpha\nu}\omega^{\nu}
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

απαλείφοντας τις συνιστώσες ω^{ν} καταλήγουμε στην εξίσωση Gauss-Codazzi.

2.4.2 Εξίσωση Gauss-Mainardi

Η υποπαράγραφος αυτή είναι αφιερωμένη στην εξίσωση Gauss-Mainardi η οποία συνδέει τον χωρική τανυστή Riemann με την χωροχρονικό ο οποίος έχει τρεις δείκτες προβεβλημένους στην χωρική υπερεπιφάνεια και ο τέταρτος στην κανονική κατεύθυνση:

Πρόταση 2.6: Η εξίσωση Gauss-Mainardi

$$D_{\beta}K_{\alpha\delta} - D_{\alpha}K_{\beta\delta} = \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\gamma^{\lambda}_{\delta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

Για να αποδείξουμε την εν λόγω σχέση, θα ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας τον πρώτο όρο:

$$\begin{aligned}
D_{\beta}K_{\alpha\delta} &= \gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}D_{\mu}K_{\nu\kappa} \\
&= \gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\nabla_{\mu}(-\nabla_{\nu}n_{\kappa} - n_{\nu}\alpha_{\kappa}) \\
&= -\gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}n_{\kappa} - \gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}n_{\nu}\nabla_{\mu}\alpha_{\kappa} - \gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\alpha_{\kappa}\nabla_{\mu}n_{\nu} \\
&= -\gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}n_{\kappa} - \gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\alpha_{\kappa}\nabla_{\mu}n_{\nu}
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Καθώς η επιτάχυνση είναι καθαρά χωρική ο τελεστής προβολής δρα στους δείκτες και αξιοποιώντας ξανά τον ορισμό της εξωγενούς καμπυλότητας τελικά παίρνουμε:

$$D_{\beta}K_{\alpha\delta} = -\gamma^{\mu}_{\beta}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\delta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}n_{\kappa} + \alpha_{\delta}K_{\beta\alpha} \tag{2.4.15}$$

επομένως εκτελώντας $\mu \leftrightarrow \nu$ και αξιοποιώντας την συμμετρία του τανυστή καμπυλότητας:

$$\begin{aligned}
D_{\beta}K_{\alpha\delta} - D_{\alpha}K_{\beta\delta} &= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\gamma^{\lambda}_{\delta}[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]n_{\lambda} + \alpha_{\delta}K_{\beta\alpha} - \alpha_{\delta}K_{\beta\alpha} \\
&= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\gamma^{\lambda}_{\delta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma}
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

2.4.3 Εξίσωση Ricci

Υπάρχει μια τελευτεία προβολή του χωροχρονικού τανυστή Riemann που πρέπει να εξάγουμε, αυτή των δυο δεικτών προβεβλημένων στην υπερεπιφάνεια και δυο στην κανονική κατεύθυνση, δηλαδή την εξίσωση Ricci.

Πρόταση 2.7: Εξίσωση Ricci

$$\mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} = n^\mu n^\nu \gamma^\delta_\alpha \gamma^{\sigma}_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu\delta\sigma} - \tfrac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha - K_\beta{}^\mu K_{\alpha\mu}$$

Η απόδειξη ξεκινά αναπτύσσοντας την Lie παράγωγο της εξωγενούς καμπυλότητας στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} &= n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu + K_{\beta\mu} \nabla_\alpha n^\mu \\ &= -n^\mu \nabla_\mu \nabla_\alpha n_\beta - n^\mu \nabla_\mu (n_\alpha a_\beta) \\ &- K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta \alpha^\mu - K_{\beta\mu} K_\alpha^\mu - K_{\beta\mu} n_\alpha \alpha^\mu \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Υπενθυμίζεται η σχέση:

$${}^{(4)}R_{\alpha\beta\mu\nu} n^\nu = \nabla_\alpha \nabla_\beta n_\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha n_\mu \tag{2.4.18}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} = -n^\nu n^{\mu (4)} R_{\mu\alpha\beta\nu} - n^\mu \nabla_\alpha \nabla_\mu n_\beta - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta \alpha^\mu - K_{\beta\mu} K_\alpha^\mu - K_{\beta\mu} n_\alpha \alpha^\mu \tag{2.4.19}$$

Η σχέση απλοποιείται αν αναπτυχθεί ο όρος:

$$\begin{aligned} n^\mu \nabla_\alpha \nabla_\mu n_\beta &= \nabla_\alpha (n^\mu \nabla_\mu n_\beta) - \nabla_\mu n_\beta \nabla_\alpha n^\mu \\ &= \nabla_\alpha \alpha_\beta - K_{\mu\beta} K_\alpha^\mu - \cancel{n_\mu \alpha_\beta K_\alpha^\mu} - K_{\mu\beta} n_\alpha \alpha^\mu - n_\mu n^\mu \alpha_\alpha \alpha_\beta \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

καθώς απαλείφονται όροι οπότε η ζητούμενη παράγωγος Lie θα γραφεί:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} = -n^\nu n^{\mu (4)} R_{\mu\alpha\beta\nu} - K_{\beta\mu} K_\alpha^\mu - K_{\beta\mu} n_\alpha \alpha^\mu - \alpha_\alpha \alpha_\beta \tag{2.4.21}$$

Λίγα βήματα μείναν μέχρι την τελική εξαγωγή της ζητούμενης εξίσωσης. Στο σημείο αυτό θα αξιοποιήσουμε την σχέση (2.2.1) καθώς:

$$\begin{aligned} D_\alpha \alpha_\beta = D_\alpha \left(\frac{D_\beta \alpha}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha - \frac{1}{\alpha^2} D_\alpha \alpha D_\beta \alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha - \frac{1}{\alpha} D_\alpha \alpha \alpha_\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha - \alpha_\alpha \alpha_\beta \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

επομένως:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} = -n^\nu n^{\mu (4)} R_{\mu\alpha\beta\nu} - K_{\beta\mu} K_\alpha^\mu - K_{\beta\mu} n_\alpha \alpha^\mu + D_\alpha \alpha_\beta - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha \tag{2.4.23}$$

Ώστε να εξαχθεί η εξίσωση Ricci πρέπει να προβληθούν οι δυο ελεύθεροι δείκτες της παραπάνω σχέσης στην υπερεπιφάνεια. Οι χωρικοί όροι δεν θα υποστούν αλλαγή και οι όροι όπου θα υποστεί συστολή το κάθετο διάνυσμα με τον τελεστή προβολής θα μηδενιστούν. Η Lie παράγωγος στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος της εξωγενούς καμπυλότητας είναι επίσης χωρική. Προκύπτει άμεσα από την ανάπτυξη του ορισμού της παραγώγου:

$$\begin{aligned} n^\alpha n^\beta \mathscr{L}_{\mathbf{n}} K_{\alpha\beta} &= n^\alpha n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + \cancel{n^\alpha K_{\alpha\mu}} \nabla_\beta n^\mu + n^\alpha K_{\beta\mu} \nabla_\alpha n^\mu \\ &= \cancel{n^\alpha n^\mu \nabla_\mu (K_{\alpha\beta} n^\alpha)} - K_{\alpha\beta} \alpha^\alpha + K_{\beta\mu} \alpha^\mu = 0 \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

οπότε δρώντας με τους τελεστές $\gamma^\kappa_\alpha \gamma^\delta_\sigma$ εξάγεται εν τέλει η εξίσωση Ricci.

2.5 Φυλλοποίηση του Χωροχρόνου: Επιλέγοντας Κατάλληλο Σύστημα Συντεταγμένων

Η μελέτη έως εδώ περιορίστηκε στη γεωμετρία μιας υπερεπιφάνειας που χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό βαθμωτό πεδίο. Επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε το διαχωρισμό του χωρόχρονου σε πολλαπλά φύλλα κάθε ένα από τα οποία θα χαρακτηρίζεται από μια σταθερή τιμή του βαθμωτού πεδίου.

Ορισμός 2.7: Φυλλοποίηση του Χωροχρόνου

Με τον όρο φυλλοποίηση εννοούμε όταν υπάρχει λείο βαθμωτό πεδίο $\hat{t}$ στην πολλαπλότητα $\mathscr{M}$ το οποίο είναι κανονικό έτσι ώστε κάθε υπερεπιφάνεια να είναι μια στάθμη βαθμωτού πεδίου:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t := \{p \in \mathscr{M}, \hat{t}(p) = t\}. \tag{2.5.1}$$

με το $\hat{t}$ να είναι κανονικό να σημαίνει πως οι υπερεπιφάνειες Σ_t δεν τέμνονται:

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \quad \text{for } t \neq t'. \tag{2.5.2}$$

Όλες οι υπερεπιφάνειες Σ_t θεωρούμε είναι χωρικές και καλύπτουν όλη την πολλαπλότητα:

$$\mathscr{M} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t. \tag{2.5.3}$$

Ένα βασικό ερώτημα που γεννάται από τη (2.3.6) είναι αν η εξέλιξη μπορεί να μελετηθεί κατά μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{n}$. Αποδεικνύεται ως ακατάλληλη επιλογή καθώς δεν είναι δυικό στο one-form Ω_α που χαρακτηρίζει την υπερεπιφάνεια.

$$n^\alpha \Omega_\alpha = -\alpha \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t = \frac{1}{\alpha} \tag{2.5.4}$$

Αντί αυτού, θεωρούμε διάνυσμα **t** οι συνιστώσες του οποίου αποσυντεθειμένες στο χωρικό και χωρικό μέρος είναι:

$$t^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha \tag{2.5.5}$$

όπου $\beta^a = \gamma^\alpha_\beta t^\beta$ είναι οι συνιστώσες ενός χωρικού διανύσματος που καλείται **διάνυσμα shift**. Το διάνυσμα **t** είναι πράγματι δυικό στο one-form της υπερεπιφάνειας:

$$t^\alpha \Omega_\alpha = -\alpha^2 \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t + \beta^\alpha \nabla_\alpha t = 1 \tag{2.5.6}$$

Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{t}$ θα επιλεγεί ώστε οι καμπύλες που γεννά να προωθούν τις χωρικές συντεταγμένες από την μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη. Οι ποσότητες α και β^i μπορούν να επιλεχθούν ελεύθερα και αντικατοπτρίζουν το σύστημα αναφοράς της επιλογής μας. Συνιστούν τους 4 βαθμούς ελευθερίας βαθμίδας που είναι εγγενής στην γενική σχετικότητα [3].

Η σχέση δυικότητας υποδηλώνει πως η αλλαγή του βαθμωτού πεδίου t κατά μήκος των καμπυλών που γεννά το διανυσματικό πεδίο **t** για κάθε σημείο p της υπερεπιφάνειας Σ_t είναι ίδια και άρα ενώνει την υπερεπιφάνεια Σ_t με την Σ_{t+dt}. Αναλυτικότερα, έστω ένα σημείο $p \in \Sigma_t$ και μετατοπίζεται κατά $dt\boldsymbol{t}$ στο σημείο $p' = p + \boldsymbol{t}dt$[13]. Είναι:

$$\begin{aligned} t(p') &= t(p + \mathbf{t}dt) = t(p) + \langle \nabla t, \mathbf{t}dt \rangle \\ &= t(p) + dt \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

οπότε καταλήγουμε πως πράγματι $p' \in \Sigma_{t+dt}$. Άρα κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{t}dt$ που ξεκινά από ένα σημείο $p \in \Sigma_t$ καταλήγει στην ίδια υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt}. Αντιθέτως, τα διανύσματα $\boldsymbol{n}dt$ δεν θα κατέληγαν όλα στην ίδια υπερεπιφάνεια!.

Αποδεικνύεται πως κάνοντας Lie dragging ένα χωρικό διάνυσμα κατά μήκος του διανύσματος **t**, η παράγωγος Lie του παραμένει χωρική και εφαπτόμενη στην υπερεπιφάνεια.

Πρόταση 2.8: Η παράγωγος Lie διανύσματος εφαπτόμενου σε υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt}

$\forall \mathbf{u} \in \mathscr{T}(\Sigma_t) : \mathscr{L}_{\mathbf{t}}\mathbf{u} \in \mathscr{T}(\Sigma_t)$

Έστω σημεία p,q ανήκουν στην υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} που ορίζουν το διάνυσμα **u**. Σύμφωνα με την (2.5.7) τα σημεία t(p'=$p + \mathbf{t}dt$) και t(q'=$q + \mathbf{t}dt$) ανήκουν στην υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} και ορίζουν το διάνυσμα $t(\mathbf{u(t)})$, το οποίο είναι εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} καθώς τα σημεία που το ορίζουν ανήκουν σε αυτήν. Η παράγωγος Lie του χωρικού διανύσματος **u** κατά μήκος του **t** ορίζεται από την διαφορά του διανυσματικού πεδίου στο ζητούμενο σημείο t(p') και του διανύσματος $t(\mathbf{u(t)})$ που μεταφέραμε από την υπερεπιφάνεια Σ_t κατά τη διεύθυνση του **t** στην υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt}, δηλαδή:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{t}}\mathbf{u}(t + dt) = \lim_{dt \to 0}[u(t + dt) - t(u(t))]/dt \tag{2.5.8}$$

Καθώς $u(t + dt), t(u(t))$ ανήκουν στην Σ_{t+dt} , τότε και η παράγωγος Lie αυτή ανήκει στην ίδια υπερεπιφάνεια και άρα είναι χωρική.

2.5.1 Επιλέγοντας Σύστημα Συντεταγμένων

Αποκαλύπτεται η ανάγκη να εισαχθεί ένα σύστημα συντεταγμένων κατάλληλο να αντικατοπτρίζει τον τρόπο που έχουμε επιλέξει να διαχωρίσουμε το χωρόχρονο.

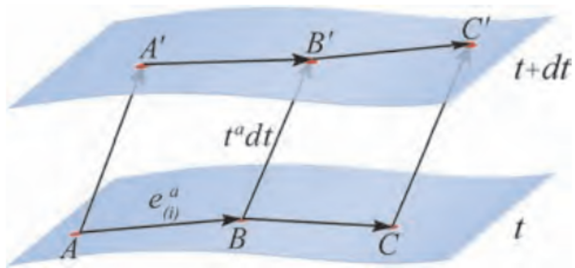
Ορίζονται τρία χωρικά διανύσματα βάσης τα οποία καθώς είναι εφαπτόμενα σε μια χωρικής υπερεπιφάνεια Σ_t ισχύει:

$$e^{\alpha}_{(i)}\Omega_{\alpha} = 0, \tag{2.5.9}$$

τα οποία γίνονται Lie dragged σε επόμενες υπερεπιφάνειες ως:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{t}}e^{\alpha}_{(i)} = 0. \tag{2.5.10}$$

Όπως αναλύθηκε και παραπάνω, η Lie παράγωγος ενός χωρικού διανύσματος κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{t}$ παραμένει χωρική.



Σχήμα 2.5.1.1: Τα διανύσματα βάσης e_i^α γίνονται Lie dragged κατά μήκος του διανύσματος t^α και συνδέουν σημεία με ίδιες χωρικές συντεταγμένες [3]

.

Σκοπός είναι οι καμπύλες που γεννούνται από το διάνυσμα t^α να είναι εφαπτόμενες σε αυτές που γεννούνται από το σύστημα συντεταγμένων ώστε να συνδέονται σημεία με ίδιες χωρικές συντεταγμένες. Άρα ως μηδενικό διάνυσμα βάσης επιλέγεται το $e^\alpha_{(0)} = t^\alpha$, τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση δυικότητας ως:

$$e^\alpha_{(0)} = t^\alpha = (1,0,0,0) \tag{2.5.11}$$

Στο σύστημα αυτό συντεταγμένων η Lie παράγωγος στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{t}$ απλοποιείται σε μερική παράγωγο ως προς t.

$$\mathscr{L}_{\mathbf{t}} = \partial_t \tag{2.5.12}$$

Το κάθετο διάνυσμα **n**, από την άλλη, γεννά καμπύλες που ονομάζονται κανονικές και ένας παρατηρητής που κινείται σύμφωνα με αυτά καλείται *Eulerian* παρατηρητής (ή κανονικός/normal). Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του παρατηρητή θα περιγράφονται από (2.1.26). Ως εκ τούτου μπορεί να αποδειχθεί πως η συνάρτηση α μετρά τον ιδιόχρονο που μετρά ένας Eulerian παρατηρητής για dt συντεταγμένο χρόνο.

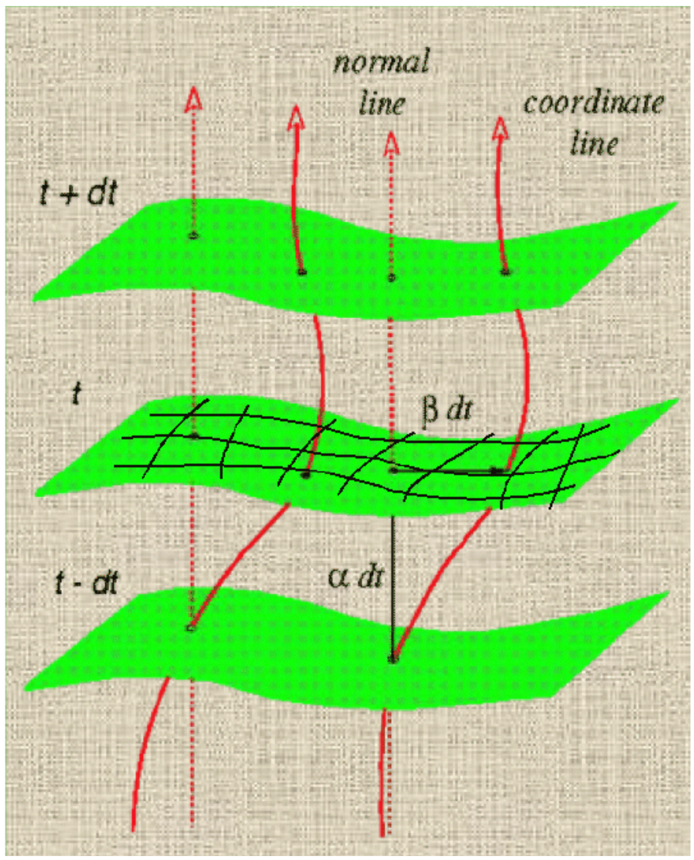
Πρόταση 2.9: Συσχετισμός dt και $d\tau$ μέσω lapse function α

$dt = \frac{d\tau}{\alpha}$

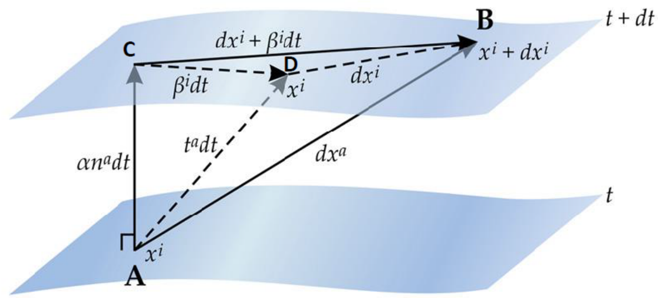
Πράγματι, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά στην τιμή μιας συνάρτησης μεταξύ 2 γεγονότων υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ του grad της συνάρτησης και του διανύσματος που συνδέει τα 2 γεγονότα αυτά. Για απειροστό ιδιόχρονο $d\tau$, τα σημεία του χωρόχρονου που βρίσκονται πάνω στις κανονικές καμπύλες συνδέονται με το διάνυσμα $\mathbf{n}d\tau$. Επομένως:

$$\begin{aligned} dt = (\frac{\partial t}{\partial x^\alpha})(n^\alpha d\tau) &= (\nabla_\alpha t)(n^\alpha d\tau) \\ &= -\frac{1}{\alpha} n_\alpha n^\alpha d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} d\tau \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Το δίανυσμα shift από την άλλη μετρά τη μεταβολή που υπόκινται τα χωρικά διανύσματα συντεταγμένων όταν γίνται Lie dragged σε επόμενη υπερεπιφάνεια κατά τη κατεύθυνση του $\alpha\boldsymbol{n}$ σε σχέση με όταν γίνονται Lie dragged κατά την κατεύθυνση του $\boldsymbol{t}$ οπότε και δεν μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα για τις χωρικές συνιστώσες του διανύσματος shift ισχύει:



Σχήμα 2.5.1.2: Το διάνυσμα **t** γεννά καμπύλες που συνδέουν σημεία με ίδιες χωρικές συντεταγμένες ενώ το κάθετο διάνυσμα **n** γεννά καμπύλες που είναι ορθογώνιες στις χωρικές υπερεπιφάνειες [16].



Σχήμα 2.5.1.3: Τα διανύσματα $\alpha \boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{t}$ ενώνουν σημεία μεταξύ δύο γειτονικών υπερεπιφανειών και το shift διάνυσμα μετρά τη διαφορά τους. Για απειροστό διάνυσμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία μεταξύ των γειτονικών υπερπειφανειών παρατηρείται πως ισχύει $dx^\alpha = t^\alpha dt + dx^i = (\alpha n^\alpha dt) + (dx^i + \beta^i dt)$ [3].

Πρόταση 2.10: Χωρικές Συνιστώσες Διανύσματος Shift

$x^i_{t+dt} = x^i_i - \beta^i dt$

Επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις ώστε να λάβουμε τα στοιχεία των διανυσμάτων και των one-forms που μελετούμε καθώς και της μετρικής συναρτήσει αυτών. Η σχέση (2.5.9) δίνει πως:

$$e^\alpha_{(i)} \Omega_\alpha = -\frac{1}{a} e^\alpha_{(i)} n_\alpha = 0 \tag{2.5.14}$$

άρα καθώς τα διανύσματα βάσης αυτά βρίσκονται πάνω στην υπερεπιφάνεια, οι χωρικές συνιστώσες σε συναλλοίωτη μορφή του κάθετου διανύσματος πρέπει να είναι ίσες με 0.

$$n_i = 0 \tag{2.5.15}$$

Απόρροια αυτού είναι πως καθώς η συστολή χωρικών τανυστών με το κάθετο διάνυσμα οδηγεί σε μηδενικό αποτέλεσμα, οι συνιστώσες με τουλάχιστον ένα μηδενικό ανταλλοίωτο δείκτη είναι μηδενικές. Δηλαδή:

$$\beta^\alpha = (0, \beta^i) \tag{2.5.16}$$

,

$$K^{0i} = 0, K^{00} = 0 \tag{2.5.17}$$

αλλά και

$$\gamma^{\alpha 0} = 0 \tag{2.5.18}$$

Η πληροφορία για τους χωρικούς τανυστές δίνεται εξ ολοκλήρου από τις χωρικές συνιστώσες τους, το οποίο καθιστάται σαφές από τις παραπάνω εξισώσεις για τις ανταλλοίωτες συνιστώσες αλλά ισχύει εξίσου και για τις συναλλοίωτες [3]. Από τις (2.5.5) και (2.5.16) εξάγονται και τα στοιχεία με ανταλλοίωτους δείκτες του κάθετου διανύσματος:

$$n^\alpha = (\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}) \tag{2.5.19}$$

ενώ χρησιμοποιώντας τις σχέση (2.5.19) , (2.1.25) , (2.5.15) εξάγουμε τα στοιχεία του διανύσματος με συναλλοίωτους δείκτες:

$$n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0) \tag{2.5.20}$$

Άμεσο συμπέρασμα αυτού είναι πως οι χωρικές συνιστώσες της χωροχρονικής μετρικής g_{ij} συμπίπτει με αυτές της χωρικής μετρικής της υπερεπιφάνειας:

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - n_i n_j = \gamma_{ij} \tag{2.5.21}$$

ενώ επιπλέον προκύπτει πως:

$$\gamma^{ik}\gamma_{kj} = (g^{ik} + n^i n^j)g_{kj} = g^{ik}g_{kj} + n^i n_k = \delta^i_j \tag{2.5.22}$$

δηλαδή η χωρική μετρική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανέβασμα και κατέβασμα δεικτών χωρικών τανυστών.

Τα στοιχεία της χωροχρονικής μετρικής υπολογίζονται πλέον ως:

$$g_{00} = g(e^\alpha_{(0)}, e^\beta_{(0)}) = (-\alpha^2 + \beta^i\beta_i) \tag{2.5.23}$$

$$g_{0i} = g(e^\alpha_{(0)}, e^\beta_{(i)}) = \beta_i \tag{2.5.24}$$

$$g_{ij} = g(e^\alpha_{(i)}, e^\beta_{(j)}) = \gamma_{ij} \tag{2.5.25}$$

και λαμβάνουμε την ανίστροφη μετρική $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta$:

$$g^{00} = \gamma^{00} - n^0 n^0 = -\frac{1}{\alpha^2} \tag{2.5.26}$$

$$g^{0i} = \gamma^{0i} - n^0 n^i = \frac{\beta^i}{\alpha^2} \tag{2.5.27}$$

$$g^{ij} = \gamma^{ij} - n^i n^j = \gamma^{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2} \tag{2.5.28}$$

καθώς $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ το στοιχείο μήκους εκφρασμένο συναρτήσει των μεγεθών του 3+1 φορμαλισμού είναι:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta^i\beta_i)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j \tag{2.5.29}$$

Επίσης η ορίζουσα g της μετρικής του τετραδιάστατου χωρόχρονου μπορεί να συσχετιστεί με την ορίζουσα γ της χωρικής μετρικής. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 2.11: Σχέση ορίζουσας g και γ

$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$

Στην γραμμική άλγεβρα για έναν τετραγωνικό πίνακα ισχύει πως [3]:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{i,j})\frac{1}{detA} \tag{2.5.30}$$

όπου $M_{i,j}$ η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν αφαιρεθούν η γραμμή i και η στήλη j. Θεωρώντας i=0 και j=0:

$$\gamma^{00} = \frac{M_{0,0}}{g}$$

όμως για τον πίνακα της μετρικής $M_{0,0} = \gamma$ επομένως αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη $g^{00} = -\frac{1}{\alpha^2}$ προκύπτει η σχέση (2.11).

Τέλος, καθώς οι συντελεστής της σύνδεσης $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ εξαρτώνται από την μετρική μπορούμε να λάβουμε υπόψη μονάχα αυτούς με χωρικούς δείκτες:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_k \gamma_{lj} + \partial_j \gamma_{lk} - \partial_l \gamma_{jk}). \tag{2.5.31}$$

καθώς και για τον τανυστή Ricci:

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk} \tag{2.5.32}$$

2.6 Δυναμικές Εξισώσεις και Εξισώσεις περιορισμού

Οι εξισώσεις του Einstein δίνουν λύσεις του βαρυτικού πεδίου, δηλαδή της γεωμετρίας, άρα της χωροχρονικής μετρικής. Στον 3+1 φορμαλισμό αντίστοιχα η γεωμετρία δίνεται από την χωρική μετρική που περιγράφει την εσωτερική γεωμετρία της χωρικής υπερεπιφάνειας και του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας που περιγράφει την γεωμετρία της υπερεπιφάνειας ούσα εμβαπτισμένη στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Τόσο η χωρική μετρική όσο και ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας αποτελούνται από 6 ανεξάρτητα στοιχεία και τα οποία λειτουργούν σαν γενικευμένες θέσεις και γενικευμένες ορμές αντίστοιχα. Από τους 10 βαθμούς ελευθερίας, οι υπόλοιποι 4 όπως έχει αναφερθεί και νωρίτερα σχετίζονται με την επιλογή συστήματος αναφοράς, δηλαδή από την επιλογή της συνάρτησης lapse και του shift διανύσματος, και άρα δεν είναι φυσικές μετρούμενες ποσότητες. Επομένως συνολικά χρειάζονται 12 εξισώσεις εξέλιξης, 6 για την χωρική μετρική και 6 για τον τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας αντίστοιχα. Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, θα εξαχθούν και 4 εξισώσεις περιορισμού. Έτσι αντικατροπτίζονται όλες οι εξισώσεις Einstein, καθώς στην συναλλοίωτη διατύπωσή τους υπάρχουν παράγωγοι δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο, ενώ στον 3+1 φορμαλισμό έχουμε τον ίδιο αριθμό βαθμών ελευθερία αλλά 2 σετ εξισώσεων εξέλιξης με πρώτης τάξης χρονικές παραγώγους.

2.6.1 Η εξέλιξη της χωρικής μετρικής

Η εξέλιξη της μετρικής είναι μια εξίσωση που απορρέει καθαρά από τη γεωμετρία και όχι από τις Εξισώσεις Einstein. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της εξωγενούς καμπυλότητας μέσω της παραγώγου Lie (2.3.6). Ισχύει η ιδιότητα:

$$\mathscr{L}_{\alpha\mathbf{n}} = \alpha\mathscr{L}_{\mathbf{n}} \tag{2.6.1}$$

άρα:

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\alpha}\mathscr{L}_{\alpha\mathbf{n}}\gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha}(\mathscr{L}_{\mathbf{t}}\gamma_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{\alpha\beta}) \tag{2.6.2}$$

όπου υιοθετώντας τον σύστημα συντεταγμένων που αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathbf{t}}\gamma_{ij} &= t^{\mu}\nabla_{\mu}\gamma_{ij} + \gamma_{i\mu}\nabla_j t^{\mu} + \gamma_{j\mu}\nabla_i t^{\mu} = t^0\partial_0\gamma_{ij} + \cancel{\gamma_{i0}\partial_j t^0} + \cancel{\gamma_{j0}\partial_i t^0} \\ &= \partial_t \gamma_{ij} \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

ενώ

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{ij} = \beta^{\mu}\nabla_{\mu}\gamma_{ij} + \gamma_{i\mu}\nabla_j\beta^{\mu} + \gamma_{j\mu}\nabla_i\beta^{\mu} \;=\; \beta^k D_k\gamma_{ij} + \gamma_{ik}D_j\beta^k + \gamma_{jk}D_i\beta^k, \tag{2.6.4}$$

όπου στη σχέση (2.6.3) χρησιμοποιείται η γνωστή ιδιότητα για τις Lie παραγώγους όπου λόγω των ιδιοτήτων των Christoffel συμβόλων η έκφραση μπορεί να γραφεί τόσο με συναλλοίωτες όσο και με μερικές παραγώγους. Στην (2.6.4) αξιοποιείται η δυνατότητα αντικατάστασης της συναλοίωτης παραγώγου με τη χωρική συναλλοίωτη παράγωγο για την έκφραση της Lie παραγώγου ενός χωρικού τανυστή ως προς μια χωρική κατεύθυνση [4]. Ακόμα,

$$\gamma_{ik} D_j \beta^k = D_j(\beta^k \gamma_{ik}) = D_j \beta_i \tag{2.6.5}$$

οπότε, τελικά η εξέλιξη της χωρικής μετρικής γράφεται σε μορφή εξισώσεων συναρτήσει των συνιστοσών της ως:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \tag{2.6.6}$$

2.6.2 Προβολές του Τανυστή Ενέργειας-Ορμής

Η προηγούμενη εξίσωση είναι απόρροια της γεωμετρίας, ωστόσο επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε πλέον παρατηρήσιμα μεγέθη που συνδέονται με την ύλη και την ενέργεια. Η κατανομή της ενέργειας και της ύλης στον χωρόχρονο περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής οι συνιστώσες του οποίου εκφράζουν:

$$T^{00} : \quad \text{Πυκνότητα Ενέργειας} \tag{2.6.7}$$
$$T^{0i} : \quad \text{Πυκνότητα Ορμής} \tag{2.6.8}$$
$$T^{ij} : \quad \text{Ροή της Ορμής i στην κατεύθυνση j} \tag{2.6.9}$$

Αντίστοιχα προβάλλοντας τους δείκτες του τανυστή στην χωρική υπερεπιφάνεια ή στην κανονική κατεύθυβση λαμβάνουμε τα εξής παραρητούμενα μεγέθη:

Ορισμός 2.8: Προβολές του τανυστή ενέργειας ορμής

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad \text{Κατά Euler μετρούμενη Πυκνότητα Ενέργειας} \tag{2.6.10}$$
$$j_\alpha = -\gamma^\mu_\alpha n^\nu T_{\mu\nu} \quad \text{Κατά Euler μετρούμενη Πυκνότητα Ενέργειας} \tag{2.6.11}$$
$$S_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu} \quad \text{Κατά Euler Χωρικός Τανυστής Ενέργειας Ορμής} \tag{2.6.12}$$

Οι φυσικές αυτές ποσότητες θα εμφανιστούν κατά την 3+1 αποσύνθεση των εξισώσεων Einstein.

2.6.3 Οι εξισώσεις περιορισμού

Προκειμένου να γραφούν οι εξισώσεις Einstein στην 3+1 μορφή τους θα πρέπει να αντικατασταθεί ο τετραδιάστατος τανυστής Riemann που εμφανίζεται στις εξισώσεις Einstein μέσω του τανυστή Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \tag{2.6.13}$$

με τον τριδιάστατο χωρικό. Πρώτο βήμα της μελέτης αυτής είναι η συστολή όλων των δεικτών του χωοχρονονικού τανυστή Riemann με την χωρική μετρική.

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta} &= (g^{\mu\alpha}+n^{\mu}n^{\alpha})(g^{\nu\beta}+n^{\nu}n^{\beta})^{(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&= (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+g^{\mu\alpha}n^{\nu}n^{\beta}+g^{\nu\beta}n^{\mu}n^{\alpha}+n^{\mu}n^{\alpha}n^{\nu}n^{\beta})^{(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&= {}^{(4)}R+2n^{\nu}n^{\beta(4)}R_{\nu\beta}
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Όμως:

$$\begin{aligned}
2n^{\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} &= 2n^{\mu}n^{\nu(4)}R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu(4)}R \\
&= 2n^{\mu}n^{\nu(4)}R_{\mu\nu}-(\gamma_{\mu\nu}-n_{\mu}n_{\nu})n^{\mu}n^{\nu(4)}R \implies \\
2n^{\mu}n^{\nu(4)}R_{\mu\nu} &= 2n^{\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu}+{}^{(4)}R
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

Οπότε συνδυάζοντάς τις (2.6.14) (2.6.15) καταλήγουμε:

$$\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta(4)}R_{\mu\nu\alpha\beta}=2n^{\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} \tag{2.6.16}$$

Δρώντας με την χωρική μετρική πάνω στην Gauss-Codazzi προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\beta}\gamma^{\lambda}_{\mu}\gamma^{\sigma(4)}_{\nu}R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}+\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}-\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}\Rightarrow \\
\gamma^{\delta\mu}\gamma^{\kappa\nu}\gamma^{\lambda}_{\mu}\gamma^{\sigma(4)}_{\nu}R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= R+K^2-K^{\mu\nu}K_{\mu\nu}\Rightarrow \\
\gamma^{\delta\lambda}\gamma^{\kappa\sigma(4)}R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= R+K^2-K^{\mu\nu}K_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

όπου $K=K^{\mu}_{\mu}$. Επομένως συνδυάζοντας τις (2.6.16) και τη συστολή της Gauss-Codazzi με την μετρική :

$$R+K^2-K^{\mu\nu}K_{\mu\nu}=2n^{\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} \tag{2.6.18}$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση Einstein:

$$R+K^2-K^{\mu\nu}K_{\mu\nu}=16\pi n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} \tag{2.6.19}$$

Παρατηρούμε πως καταφέραμε να εισάγουμε την ποσότητα (2.6.10). Καταλήγουμε λοιπόν στην πρώτη εξίσωση η οποία ονομάζεται **Χαμιλτονιανός Περιορισμός ή Περιορισμός Ενέργειας**:

$$R+K^2-K^{\mu\nu}K_{\mu\nu}=16\pi\rho \tag{2.6.20}$$

Τώρα, θα αξιοποιήσουμε την εξίσωση Gauss-Mainardi δρώντας με την μετρική, αφήνοντας έτσι ένα δείκτη ελεύθερο:

$$\gamma^{\alpha\delta}D_{\beta}K_{\alpha\delta}-D_{\alpha}K_{\beta\delta} = \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}\gamma^{\lambda}_{\delta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{2.6.21}$$

$$D_{\beta}K-D^{\delta}K_{\beta\delta} = \gamma^{\mu\lambda}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{2.6.22}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu\lambda}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= g^{\mu\lambda}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma}+\cancel{\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\mu}n^{\lambda}n^{\sigma(4)}R_{\mu\nu\lambda\sigma}} \\
&= \gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma(4)}R_{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{2.6.23}$$

Άρα

$$\gamma^{\mu\alpha}n^{\nu(4)}R_{\mu\nu} = D^{\alpha}K - D_{\mu}K^{\alpha\mu} \tag{2.6.24}$$

Από τον ορισμό του τανυστή Einstein προκύπτει αντίστοιχα πως :

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\alpha}n^{\nu(4)}R_{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\alpha}n^{\nu}G_{\mu\nu} + \cancel{\gamma^{\mu\alpha}n^{\nu}g_{\mu\nu}}R \\ &= \gamma^{\mu\alpha}n^{\nu}G_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.6.25}$$

Από το συνδυασμό λοιπόν των (2.6.24) (2.6.25) προκύπτει πως:

$$D^{\alpha}K - D_{\mu}K^{\alpha\mu} = \gamma^{\mu\alpha}n^{\nu}G_{\mu\nu} \tag{2.6.26}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση Einstein παρατηρούμε πως εμφανίζεται η δεύτερη ποσότητα (2.6.11)που ορίσαμε:

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}K - D_{\mu}K^{\alpha\mu} = 8\pi\gamma^{\mu\alpha}n^{\nu}T_{\mu\nu} \implies \\ &\gamma^{\mu\alpha}D_{\mu}K - D_{\mu}K^{\alpha\mu} = -8\pi j^{\alpha} \implies \\ &D_{\mu}(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\mu\alpha}K) = 8\pi j^{\alpha} \end{aligned} \tag{2.6.27}$$

Καθώς για $\alpha = 0$ λαμβάνουμε τετριμμένο αποτέλεσμα, ουσιαστικά η (2.6.27) δίνει 3 εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **Εξισώσεις Περιορισμού Ορμής**.

Όπως επισυμάνθηκε νωρίτερα, στο σύστημα συντεταγμένων που υιοθετήθηκε η πληροφορία των χωρικών τανυστών εμπεριέχεται αποκλειστικά στις χωρικές συνιστώσες τους, οπότε οι 4 αυτές εξισώσεις περιορισμού που μόλις εξάγαμε μπορούν να γραφούν ως:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \tag{2.6.28}$$

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i. \tag{2.6.29}$$

Οι 4 αυτές εξισώσεις δεν εμπεριέχουν πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος, αλλά αποτελούν το σετ των **εξισώσεων περιορισμού** που πρέπει σε κάθε υπερεπιφάνεια να ικανοποιούνται. Είχαμε προειδεαστεί για την ύπαρξή τους όταν μέσω τις ταυτότητας Bianchi διαπιστώθηκε πως οι 4 από τις 10 εξισώσεις Einstein δεν εμπεριέχουν χρονικές παραγώγους δεύτερης τάξης της μετρικής.

2.6.4 Η εξέλιξη του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας

Για την παραγωγή των υπόλοιπων 6, δυναμικών εξισώσεων θα αξιοποιήσουμε την εξίσωση Ricci η οποία εμπεριέχει Lie παράγωγο στην κανονική χρονική κατεύθυνση της εξωγενούς καμπυλότητας και έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, καθώς τα υπόλοιπα 4 από τα 10 ανεξάρτητα στοιχεία των χωρικών τανυστών που μελετάμε είναι τετριμμένα 0.

Για να πάρουμε 6 βαθμούς ελευθερίας από την εξίσωση Gauss-Codazzi αντίστοιχα αφήνουμε 2 δείκτες ελεύθερους συστέλλοντας τους άλλους 2 ελεύθερους:

$$\begin{aligned} &\gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\beta}\gamma^{\lambda\sigma(4)}R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\lambda}K^{\lambda}_{\beta} \implies \\ &\gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\beta}(n^{\lambda}n^{\sigma} + g^{\lambda\sigma})^{(4)}R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\lambda}K^{\lambda}_{\beta} \implies \\ &\gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\kappa}_{\beta}(n^{\lambda}n^{\sigma(4)}R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + {}^{(4)}R_{\delta\kappa}) = R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\lambda}K^{\lambda}_{\beta} \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση Ricci και λαμβάνοντας υπόψη ότι $t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$ αλλά και αξιοποιώντας τις ιδιότητες της Lie παραγώγου παίρνουμε πως:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{t}} K_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha(-\gamma^\delta_\alpha \gamma^{\kappa(4)}_\beta R_{\delta\kappa} + R_{\alpha\beta} K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda} K^\lambda_\beta) \tag{2.6.31}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Einstein εκφρασμένες συναρτήσει του τανυστή Ricci:

$$^{(4)}R_{\alpha\beta} = 8\pi(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T) \tag{2.6.32}$$

εμφανίζεται ποσότητα (2.6.12). Οπότε αντικαθιστώντας:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{t}} K_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha(R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda} K^\lambda_\beta) + 4\pi\alpha[\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta g_{\delta\kappa} g^{\zeta\xi} T_{\zeta\xi} - 2\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta T_{\delta\kappa}] \tag{2.6.33}$$

όπου

$$\begin{aligned} &4\pi\alpha[\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta g_{\delta\kappa} g^{\zeta\xi} T_{\zeta\xi} - 2\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta T_{\delta\kappa}] \\ &= 4\pi\alpha[\gamma_{\alpha\beta}(\gamma^{\zeta\xi} - n^\zeta n^\xi) T_{\zeta\xi} - 2\gamma^\delta_\alpha \gamma^\kappa_\beta T_{\delta\kappa}] \\ &= 4\pi\alpha[\gamma_{\alpha\beta}(S - \rho) - S_{\alpha\beta}] \end{aligned} \tag{2.6.34}$$

Επομένως συνολικά καταλήγουμε πως:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{t}} K_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha(R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda} K^\lambda_\beta) + 4\pi\alpha[\gamma_{\alpha\beta}(S - \rho) - S_{\alpha\beta}] \tag{2.6.35}$$

Στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο στοιχεία με χωρικούς δείκτες, καθώς και $\mathscr{L}_{\boldsymbol{t}} K_{\alpha\beta} = \partial_t K_{\alpha\beta}$. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της Lie παραγώγου της εξωγενούς καμπυλότητας στη κατεύθυνση του shift διανύσματος και καθώς και το shift διάνυσμα αλλά και η εξωγενής καμπυλότητα είναι χωρικές οντότητες, οι συναλλοίωτες παράγωγοι στη έκφραση αυτής της παραγώγου Lie μπορούν να αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες μερικές. Έτσι τελικά οι 6 εξισώσεις της εξέλιξης της εξωγενούς καμπυλότητας γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} - 2K^k{}_j K_{ik} + K K_{ij}) \\ &- 8\pi\alpha(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S - \rho)) + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ik}\partial_j \beta^k + K_{kj}\partial_i \beta^k \end{aligned} \tag{2.6.36}$$

Επομένως μαζί με την εξίσωση εξέλιξης $\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i$ αλλά και τις εξισώσεις περιορισμού λαμβάνουμε την πλήρη περιγραφή του συστήματος ως πρόβλημα Cauchy. Οι εξισώσεις στη μορφή που λαμβάνονται όταν αξιοποιείται το σύστημα συνεταγμένων προσαρμοσμένο στη φυλλοποίηση καλούνται και **ADM εξισώσεις** και το όνομα οφείλεται στους Arnowitt, Deser and Misner, οι οποίο ωστόσο όπως θα αναλυθεί παρακάτω έγραψαν τις εξισώσεις αυτές σε διαφορετική μορφή και με διαφορετική μεθοδολογία. Δεν υπάρχουν εξισώσεις εξέλιξης για τις μεταβλητές α, β^i καθώς όπως έχει προαναφερθεί οι μεταβλητές αυτές μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα και αντικατροπτίζουν την ελευθερία επιλογής συστήματος συντεταγμένων.

2.6.5 Οι δυναμικές εξισώσεις για την ορίζουσα γ και το ίχνος K

Πολύ χρήσιμη θα αποδειχθεί στη συνέχεια η γραφή των εξισώσεων εξέλιξης για την ορίζουσα της χωρικής μετρικής γ αλλά και για το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας $K = \gamma^{ij} K_{ij}$. Συγκεκριμένα, οι δυο εξισώσεις που καλούμαστε να παραγάγουμε είναι:

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -\alpha K + D_i \beta^i \tag{2.6.37}$$

$$\partial_t K = -D^2\alpha + \alpha(K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho + S)) + \beta^i D_i K, \tag{2.6.38}$$

Ας προχωρήσουμε στην απόδειξή τους, βασιζόμενοι στις εξισώσεις εξέλιξης που εξάγαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Η παράγωγος Lie είναι:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{t}} \ln \gamma^{1/2} = \alpha \mathscr{L}_{\mathbf{n}} \ln \gamma^{1/2} + \mathscr{L}_{\beta} \ln \gamma^{1/2} \tag{2.6.39}$$

όπου υπενθυμίζεται πως για το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας ισχύει πως:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{n}} \ln \gamma^{1/2} = -K \tag{2.6.40}$$

ενώ για τον άλλο όρο ισχύει:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\beta} \ln \gamma^{1/2} &= \frac{1}{2}\gamma^{ij}\mathscr{L}_{\beta}\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{ij}(\beta^k D_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} D_i \beta^k + \gamma_{ik} D_j \beta^k) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{ij}(D_i\beta_j + D_j\beta_i) \\ &= D_i\beta^i\end{aligned} \tag{2.6.41}$$

οπότε συνολικά:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{t}} \ln(\gamma^{1/2}) = -\alpha K + D_i\beta^i \tag{2.6.42}$$

και καθώς για το σύστημα συντεταγμένων που επιλέχθηκε ισχύει $\mathscr{L}_{\mathbf{t}} = \partial_t$, πράγματι λαμβάνεται η εξίσωση (2.6.37). Για την εξίσωση εξέλιξης του ίχνους της εξωγενούς καμπυλότητας παρατηρούμε πως:

$$\partial_t K = \partial_t(\gamma^{ij}K_{ij}) = \gamma^{ij}\partial_t K + K_{ij}\partial_t\gamma^{ij} \tag{2.6.43}$$

όπου από τη χρονική εξέλιξη της χωρικής μετρικής λαμβάνεται:

$$\partial_t \gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\gamma^{jl}\partial_t\gamma_{kl} = 2\alpha K^{ij} - D^i\beta^j - D^j\beta^i \tag{2.6.44}$$

ενώ από την εξέλιξη της εξωγενούς καμπυλότητας λαμβάνουμε, θεωρώντας τον τελεστή Laplace $D^2\alpha = \gamma^{ij}D_iD_j\alpha$:

$$\begin{aligned}\gamma^{ij}\partial_t K = \quad & \alpha(R - 2K^{ik}K_{ik} + K^2) - \gamma^{ij}D_iD_j\alpha \\ & -8\pi\alpha(S - \frac{3}{2}(S-\rho)) + \beta^k\partial_k K + K_{jk}\partial^j\beta^k + K_{ik}\partial^i\beta^k \\ = \quad & -D^2\alpha + \alpha[R + K^2 - 2K^{ik}K_{ik} + K^2 - 8\pi\alpha(-\frac{1}{2}S - \frac{3}{2}\rho)] \\ & +\beta^k\partial_k K + K_{jk}\partial^j\beta^k + K_{ik}\partial^i\beta^k\end{aligned} \tag{2.6.45}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη (2.6.43) και λαμβάνοντας υπόψη $\partial^i\beta^j = D^i\beta^j$:

$$\partial_t K = -D^2\alpha + \alpha[R + K^2 + 4\pi\alpha S - 12\pi\alpha\rho] + \beta^k D_k K \tag{2.6.46}$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Χαμιλτονιανού περιορισμού $R+K^2 = K^{ij}K_{ij}+16\pi\rho$, καταλήγουμε πράγματι στη(2.6.38).

2.6.6 Προσθήκη περιορισμών στις εξισώσεις εξέλιξης: Μαθηματικές και αριθμητικές συνέπειες

Μπορούν να οριστούν οι παρακάτω ποσότητες:

$$\mathscr{H} := n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi\rho \tag{2.6.47}$$

$$\mathscr{M}_\alpha := -n^\mu \gamma^\nu_\alpha G_{\mu\nu} - 8\pi j_\alpha \tag{2.6.48}$$

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta} := \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta G_{\mu\nu} - 8\pi S_{\alpha\beta} \tag{2.6.49}$$

Παρατηρούμε πως αν τεθούν οι πρώτες δύο ποσότητες ίσες με 0, $\mathscr{H} = 0, \mathscr{M} = 0$ λαμβάνουμε τις εξισώσεις περιορισμού. Καθώς για το φυσικό μας σύστημα αυτές οφείλουν να ικανοποιούνται, παρατηρούμε πως μπορούμε να εξαλείψουμε από την εξέλιξη της εξωγενούς καμπυλότητας την πυκνότητα ενέργειας ρ αν προσθέσουμε "αυθαίρετα" τον παρακάτω όρο στην εξίσωση:

$$\partial_t K_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\boldsymbol{\beta}} K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha(R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda}K^\lambda_\beta) + 4\pi\alpha[\gamma_{\alpha\beta}(S-\rho) - S_{\alpha\beta}] - \frac{\alpha\gamma_{\alpha\beta}}{2}\mathscr{H} \tag{2.6.50}$$

Η ικανοποίηση των περιορισμών, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορούν να προστεθούν στις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης αυθαίρετα πολλαπλάσια των ποσοτήτων $\mathscr{H}, \mathscr{M}_\alpha$. Οι δυο αυτές θεωρήσεις προκύπτουν από διαφορετική οπτική στην μελέτη. Η πρώτη που αναλύσαμε και εκτενώς έπεται χρονικά ιστορικά και αναπύχθηκε το 1978 από τον York στο άρθρο [22] και απορρέουν από την γραφή των εξισώσεων Einstein συναρτήσει του τανυστή Ricci $R_{\alpha\beta}$. Η δεύτερη μορφή των εξισώσεων, είναι και η πρωταρχική χρονικά, και παρουσιάστηκαν από τους Arnowitt,Deser,Misner το 1959, αν και αυτή δεν είναι η μορφή με την οποία παρουσιάστηκαν στο άρθρο. Το άρθρο (του οποίου μια σύνοψη μπορεί να βρει κανείς στο [2]) αποτελεί μια χαμιλτονιανή γραφή της γενικής σχετικότητας συναρτήσει των γενικευμένων θέσεων και ορμών γ_{ij}, π_{ij} όπου:

$$\pi_{ij} = -\sqrt{\gamma}(K_{ij} - \gamma_{ij}K) \tag{2.6.51}$$

και απορρέουν από τη γραφή των εξισώσεων Einstein συναρτήσει του τανυστή Einstein. Οι μορφές αυτές των εξισώσεων μπορούν να ονομαστούν York ή Ricci και ADM ή Einstein σύστημα χρονικής εξέλιξης αντίστοιχα. Ωστόσο οι διαφορετικές μεταβλητές δεν είναι αυτές που διαφοροποιούν ουσιαστικά τις δυο γραφές μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές κατάλληλα παρατηρείται ο επιπλέον όρος στην εξίσωση (2.6.50). Για ένα φυσικό πρόβλημα, αυτός ή κάθε συνδυασμός των περιορισμών που μπορεί να προστεθεί φαίνεται να μην επηρεάζει το σύστημα, καθώς αυτοί οφείλουν να ισούνται με μηδέν. Ωστόσο, από μαθηματική σκοπιά, οι δυο γραφές δεν είναι ισοδύναμες. Οι όροι πολλαπλάσια των περιορισμών που μπορούν να προστεθούν αλλάζουν την μαθηματική δομή του προβλήματος, όπως πχ προσθέτοντας όρο πολλαπλάσιο του Χαμιλτονιανού Περιορισμού υπεισέρχονται στο σύστημα δεύτεροι παράγωγοι της χωρικής μετρικής [1]. Σκοπός αυτών των εξισώσεων είναι να χρησιμοποιηθούν από υπολογιστές ώστε να μελετηθούν συστήματα που δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Ωστόσο, όροι με διαφορετική μαθηματική δομή μπορεί να διαφέρουν σημαντικά ως προς την μαθηματική τους ευστάθεια. Έτσι, παρόλο που αναλυτικά για ένα φυσικό σύστημα οι όροι αυτοί πρέπει να μηδενίζονται, λύνοντας αριθμητικά μπορεί να δημιουργήσουν σημαντική αστάθεια και απόκλιση από τις πραγματικές λύσεις. Η εύρεση των εξισώσεων αυτών που χαρακτηρίζονται από καλύτερη ευστάθεια αποτελεί κομμάτι της έρευνας αιχμής στο κομμάτι της Αριθμητικής Σχετικότητας.

Επομένως, οι εξισώσεις εξέλιξη προκύπτουν με διαφορετικούς συνδυασμούς των ποσοτήτων που ορίσαμε παραπάνω:

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}\mathscr{H} + l^{\mu}_{\alpha\beta}\mathscr{M}_{\mu} = 0 \tag{2.6.52}$$

Στην ανάλυση αυτή [16] θεωρούμε $m_{\alpha\beta} = \mu\gamma_{\alpha\beta}, l^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$. Παρατηρούμε πως αν θεωρήσουμε $\mu = 0$, δηλαδή $\mathscr{E}_{\alpha\beta} = 0$, καταλήγουμε στο σύστημα Einstein των εξισώσεων εξέλιξης καθώς αυτό αποτελεί την προβολή των εξισώσεων Einstein συναρτήσει του τανυστή Einstein πάνω στην χωρική υπερεπιφάνεια. Στην εικόνα του York, όπου προβάλλονται οι εξισώσεις Einstein γραμμένες συναρτήσει του τανυστή Ricci πάνω στην χωρική υπερεπιφάνεια, αποδεικνύεται πως $\mu = 1$. Θεωρούμε την προβολή:

$$\begin{aligned}
y_{\alpha\beta} &= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}(R_{\mu\nu} - 8\pi T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}8\pi T) \\
&= \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}(R_{\mu\nu} - 8\pi T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}8\pi T + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R) \\
&= \mathscr{E}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu}_{\beta}g_{\alpha\beta}(8\pi T + R)
\end{aligned} \tag{2.6.53}$$

όπου [1]

$$-(8\pi T + R) = G - 8\pi T = g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) \tag{2.6.54}$$

οπότε η προβολή αυτή δίνει:

$$\begin{aligned}
y_{\alpha\beta} &= \mathscr{E}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) \\
&= \mathscr{E}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta})(\gamma^{\mu\nu} - n^{\mu}n^{\nu})(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) \\
&= \mathscr{E}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\mathscr{H} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\mu}_{\kappa}\gamma^{\nu}_{\lambda}\gamma^{\kappa\lambda}(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) \\
&= \mathscr{E}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\mathscr{H} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\kappa\lambda}\mathscr{E}_{\kappa\lambda}
\end{aligned} \tag{2.6.55}$$

Από τις εξισώσεις Einstein προκύπτει πως:

$$y_{\alpha\beta} = \mathscr{E}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\mathscr{H} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\kappa\lambda}\mathscr{E}_{\kappa\lambda} = 0 \tag{2.6.56}$$

όμως παίρνοντας το ίχνος προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\alpha\beta}\mathscr{E}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\mathscr{H} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\kappa\lambda}\mathscr{E}_{\kappa\lambda} = 0 \Rightarrow \\
&-\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\mathscr{E}_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\mathscr{H} = 0 \Rightarrow \gamma^{\mu\nu}\mathscr{E}_{\mu\nu} = 3\mathscr{H}
\end{aligned} \tag{2.6.57}$$

επομένως

$$y_{\alpha\beta} = \mathscr{E}_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\mathscr{H} = 0 \tag{2.6.58}$$

όπου πράγματι αντιστοιχεί για $\mu = 1$.

[1] $g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R \Rightarrow G = R - 2R = -R$

2.6.7 Η διατήρηση των περιορισμών

Επόμενο ερώτημα που γεννάται είναι πως αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται αρχικώς, αν θα συνεχίσουν να ικανοποιούνται κατά την εξέλιξη στο χρόνο. Η απάντηση θα δοθεί αναλύοντας την χρονική εξέλιξη των περιορισμών, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Bianchi σύμφωνα με την ανάλυση της Fritelli [12]. Η ταυτότητα Bianchi συναρτήσει των (2.6.47), (2.6.48), (2.6.49) γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\nabla^\alpha(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow \nabla^\alpha(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu})) = 0 \Rightarrow \\
&\nabla^\alpha((\gamma^\mu_\alpha - n^\mu n_\alpha)(\gamma^\nu_\beta - n^\nu n_\beta)(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu})) = 0 \Rightarrow \\
&\nabla^\alpha(\mathscr{E}_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathscr{M}_\beta + n_\beta \mathscr{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathscr{H}) = 0
\end{aligned} \tag{2.6.59}$$

Επόμενο βήμα είναι να αναπτύξουμε την προβολή της ταυτότητας τόσο στην χωρική υπερεπιφάνεια όσο και στην κανονική κατεύθυνση. Καθώς σκοπός είναι η μελέτη της εξέλιξης των περιορισμών, αναζητούμε να εμφανιστούν οι παράγωγοι τους κατά την κανονική κατεύθυνση. Για την εξαγωγή των παρακάτω αποτελεσμάτων θα αξιοποιηθούν οι σχέσεις $\gamma^\alpha_\beta n^\beta = 0, n^\alpha \mathscr{E}_{\alpha\beta} = 0, n^\alpha \mathscr{M}_\alpha = 0, n^\alpha n_\alpha = -1, D^\alpha n_\alpha = \nabla^\alpha n_\alpha, n^\alpha \nabla_\beta n_\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu_\alpha \nabla^\nu(\mathscr{E}_{\mu\nu} + n_\mu \mathscr{M}_\nu + n_\nu \mathscr{M}_\mu + n_\mu n_\nu \mathscr{H}) = 0 \Rightarrow \\
&D^\kappa \mathscr{E}_{\alpha\kappa} + \mathscr{E}_{\alpha\kappa} n^\nu \nabla_\nu n^\kappa + \mathscr{M}_\nu \nabla^\nu n_\alpha + n_\nu \nabla^\nu \mathscr{M}_\alpha - n_\alpha n_\nu \mathscr{M}_\mu \nabla^\nu n^\mu + n_\nu \mathscr{H} \nabla^\nu n_\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.6.60}$$

$$\begin{aligned}
&n^\nu \nabla^\mu(\mathscr{E}_{\mu\nu} + n_\mu \mathscr{M}_\nu + n_\nu \mathscr{M}_\mu + n_\mu n_\nu \mathscr{H}) = 0 \Rightarrow \\
&-\mathscr{E}_{\mu\nu} \nabla^\mu n^\nu + D^\nu \mathscr{M}_\nu - 2D^\nu M_\nu - 2M_\mu n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\nu \nabla_\nu \mathscr{H} - \mathscr{H} \nabla^\mu n_\mu = 0
\end{aligned} \tag{2.6.61}$$

ή συνοπτικά γράφουμε τις δύο εξισώσες ως:

$$n_\nu \nabla^\nu \mathscr{M}_\alpha = -D^\kappa \mathscr{E}_{\alpha\kappa} - \mathscr{E}_{\alpha\kappa} n^\nu \nabla_\nu n^\kappa + \mathscr{L}_\alpha(\mathscr{M}_\nu, \mathscr{H}) \tag{2.6.62}$$

$$n_\nu \nabla^\nu \mathscr{H} = -\mathscr{E}_{\mu\nu} D^\mu n^\nu - D^\nu M_\nu + \mathscr{L}(\mathscr{M}_\nu, \mathscr{H}) \tag{2.6.63}$$

όπου στις συναρτήσεις $\mathscr{L}, \mathscr{L}_\alpha$ έχουν συνοψιστεί όλοι οι όροι ανάλογοι των περιορισμών που δεν εμπεριέχουν παραγώγους τους. Από τις εξισώσεις αυτές γίνεται σαφές πως αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις εξέλιξης, δηλαδή $\mathscr{E}_{\alpha\beta} = 0$, και ικανοποιούνται και οι περιορισμοί στην αρχική υπερεπιφάνεια, τότε μηδενίζονται και οι παράγωγοί τους στην κανονική κατεύθυνση, άρα οι περιορισμοί θα ικανοποιούνται στις επόμενες υπερεπιφάνειες.

3

Οι λύσεις Schwarschild

Το σύμπαν έχει προτίμηση στην σφαιρική συμμετρία. Τα άστρα, οι πλανήτες χαρακτηρίζονται από σφαιρική συμμετρία. Αναρίθμητα αστροφυσικά συστήματα είναι σφαιρικά συμμετρικά και η μελέτη τους μέσω της υπολογιστικής σχετικότητας είναι εξαιρετικά χρήσιμη. Οπότε πρωτού προχωρήσουμε στην μελέτη αυτών των συστημάτων μέσα από το πρίσμα της υπολογιστικής σχετικότητας, απαραίτητη είναι η κατασκευή αυτών των λύσεων, δηλαδή να αναζητήσουμε τις λύσεις των εξισώσεων Einstein για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργούν σφαιρικά ουράνια σώματα. Στην μελέτη αυτή θα επικεντρωθούμε στις στατικές λύσεις. Ένα σφαιρικό ουράνιο σώμα δημιουργεί εκτός της ακτίνας του ένα βαρυτικό πεδίο, η μετρική του οποίου αναζητούμε να είναι:

- Στάσιμη
- Στατική
- Σφαιρικά Συμμετρική

Πρέπει να υπάρξει μια διευκρίνιση μεταξύ της στασιμότητας και της στατικότατης. Αν ένα σύστημα είναι στάσιμο, δεν έχει ρητή εξάρτηση από τον χρόνο αυτό δεν σημαίνει όμως ότι δεν εξελίσσεται με τον χρόνο, όπως ένας ρευστό που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ένα σωλήνα. Από την άλλη, ένα στατικό σύστημα δεν εξελίσσεται καθώς πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο υπό την αντιστροφή του χρόνου. Για μια στάσιμη και στατική μετρική θέλουμε να μην υπάρχει ρητή εξάρτηση από τον χρόνο στα στοιχεία της αλλά και να μην υπάρχουν μεικτοί όροι στο στοιχείο μήκους. Ωστόσο, αυτή η θεώρηση έχει εξάρτηση από το σύστημα αναφοράς, οπότε σκόπιμο είναι βασιζόμενοι σε καθαρά γεωμετρικές έννοιες ανεξάρτητες από το σύστημα αναφοράς, να καταλήξουμε στη θεώρηση αυτή.

3.1 Στάσιμος, Στατικός και Σφαιρικά Συμμετρικός Χωρόχρονος

3.1.1 Στασιμότητα

Ο πιο διαισθητικός τρόπος να εκφράσει κανείς την στατικότητα είναι η έλλειψη ρητής εξάρτησης της μετρικής από τον χρόνο:

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.1.1}$$

ή ισοδύναμα να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματικούς $t \to t' = t + c$. Μια αναλυτικότερη μελέτη ωστόσο απαιτεί μια πιο γεωμετρική διατύπωση που δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε το χρονοειδές διανυσματικό πεδίο:

$$X^\alpha = \delta_0^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{3.1.2}$$

Η Lie παράγωγος στην διεύθυνση του διανυσματικού αυτού πεδίου είναι:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} g_{\alpha\beta} = X^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}\partial_\beta X^\mu + g_{\beta\mu}\partial_\alpha X^\mu \tag{3.1.3}$$

αν ωστόσο χρησιμοποιήσουμε σύστημα αναφοράς προσαρμοσμένο στο διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{X}$:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} g_{\alpha\beta} = \partial_t g_{\alpha\beta} \tag{3.1.4}$$

Αν το διανυσματικό πεδίο είναι ένα Killing διανυσματικό πεδίο $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} g_{\alpha\beta} = 0$ άρα και $\partial_t g_{\alpha\beta} = 0$ σε κάποιο σύστημα αναφοράς, ενώ αν υπάρχει σύστημα αναφοράς $\partial_t g_{\alpha\beta}$ τότε ισχύει για κάθε σύστημα αναφοράς $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}} g_{\alpha\beta} = 0$, άρα καταλήγουμε πως:

Πρόταση 3.1: Στασιμότητα

Ένας χωρόχρονος είναι στάσιμος αν και μόνο αν επιδέχεται ένα χρονοειδές Killing διανυσματικό πεδίο

3.1.2 Στατικότητα

Επόμενο βήμα της ανάλυσης, είναι η επιβολή της συνθήκης της στατικότητας στον χωρόχρονο. Για μια ρητή γραφή της μετρικής η στατικότητα σημαίνει πως για τον χωρόχρονο η συμμετρία:

$$x^0 \to x'^0 = -x^0 \tag{3.1.5}$$

όπου:

$$dx^0 = -dx^0 \tag{3.1.6}$$

είναι ισομετρία. Είναι εύκολο να δειχθεί πως η συμμετρία αυτή ισοδυναμεί με την απαλοιφή των μεικτών όρων g_{0i} της μετρικής. Το στοιχείο μήκους πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη συμμετρία αντιστροφής του χρόνου. Για αυτό έστω σημεία P και Q με συντεταγμένες (x^0, x^1, x^2, x^3) και $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$ αντίστοιχα. Το στοιχείο μήκους είναι:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{01}dx^0dx^1 = \quad (3.1.7)\\ ds'^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 - g_{01}dx^0dx^1 \quad (3.1.8)\end{aligned}$$

συνεπώς ο μεικτός όρος της μετρικής $g_{01} = 0$ και άρα στο στοιχείο μήκους όρος ανάλογος του dx^0dx^1. Με την ίδια διαδικασία δείχνουμε πως μηδενίζονται και τα στοιχεία g_{02}, g_{03}.

Ας προχωρήσουμε και σε μια πιο γεωμετρική και αυστηρή ερμηνεία της στατικότητας. Στο σημείο αυτό η ανάλυση για τις υπερεπιφάνειες που έγινε στο κεφάλαιο για τον 3+1 φορμαλισμό θα φανεί εξαιρετικά χρήσιμη! Μελετάμε ένα σταθερό χωρόχρονο, για τον οποίο δηλαδή ορίζεται ένα χρονοειδές διανυσματικό πεδίο όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο και για το οποίο αποδεικνύεται πως ισχύει η σχέση $X_{[\alpha}\nabla_\mu X_{\beta]} = 0$. Επομένως το χρονοειδές αυτό διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο στην χωρική υπερεπιφάνεια και καθώς $X^\alpha \neq 0$, σε μια γειτονιά της υπερεπιφάνειας Σ κάθε σημείο p θα βρίσκεται πάνω σε μια καμπύλη που γεννά το διανυσματικό πεδίο αυτό και σχίζει κάθετα την υπερεπιφάνεια. Αυτή η υπερεπιφάνεια παραμετροποιείται από μια βαθμωτή συνάρτηση που ταυτίζουμε με τον καθολικό χρόνο t:

$$f(x^\alpha) = t \tag{3.1.9}$$

Διαλέγουμε σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο $X^\alpha = \delta^\alpha_0$.

$$\begin{aligned} X_\alpha &= g_{\alpha\beta}X^\beta = g_{\alpha\beta}\delta^\beta_0 = g_{\alpha 0} \quad (3.1.10)\\ X^2 &= X_\alpha X^\alpha = g_{\alpha 0}\delta^\alpha_0 = g_{00}. \quad (3.1.11)\end{aligned}$$

Καθώς X^α είναι ορθωγόνιο στην υπερεπιφάνεια $X_\alpha = X^2\partial$ επομένως:

$$g_{0\alpha} = g_{00}\partial_\alpha t \tag{3.1.12}$$

και ολοκληρώνοντας:

$$t = x^0 + h(x^i) \tag{3.1.13}$$

Θα γράψουμε το στοιχείο μήκους του χωροχρόνου σε σύστημα συνταγμένων όπου η χρονική συντεταγμένη ταυτίζεται με τον καθολικό χρόνο και οι χωρικές συντεταγμένες είναι ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων που ζει πάνω στην υπερεπιφάνεια. Συγκεκριμένα:

$$ds^2 = X^2 dt^2 + h(x^j)(dx^i)^2 + X_i dx^i dx^t \tag{3.1.14}$$

Καθώς όμως τα dx^i ζουν πάνω στην υπερεπιφάνεια, οι μεικτοί όροι αυτοί απαλείφονται και επομένως λαμβάνουμε τον στατικό χαρακτήρα του χωρόχρονου.

Πρόταση 3.2: Στατικότητα

Ένας χωρόχρονος είναι στατικός αν είναι στάσιμος και αν υπάρχει χωρική υπερεπιφάνεια κάθετη στις καμπύλες που γεννά το χρονοειδές διανυσματικο πεδίο

3.1.3 Σφαιρική Συμμετρία

Η πιο διαισθητική έκφραση της σφαιρικής συμμετρίας είναι η αναλλοιωτότητα του χωρόχρονου κάτω από χωρικές στροφές γύρω από ένα κέντρο O. Ωστόσο μπορεί και είναι χρήσιμο να εκφραστεί και με πιο γεωμετρικούς όρους. Πιο αυστηρά, ένας χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός αν εμπεριέχει ισομμετρίες ισομορφικές με αυτές της ομάδας SO(3). Στη διαφορική γεωμετρία αυτό εκφράζεται με την ύπαρξη τριών Killing διανυσματικών πεδίων ως:

Πρόταση 3.3: Σφαιρική Συμμετρία

Ένας χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός αν υπάρχουν τρία γραμμικά ανεξάρτητα χωρικά Killing διανυσματικά πεδία τα οποία θα γεννούν κλειστές καμπύλες και οι μεταθέτες τους θα ικανοποιούν: $[R, S] = T, [S, T] = R, [T, R] = S$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, σύμφωνα με το οποίο όταν ένα σετ Killing διανυσματικών πεδίων χαρακτηρίζεται από κλειστές μεταθέσεις, τότε οι ολοκληρωτικές καμπύλες που γεννούν δημιουργούν μια υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας πάνω στην οποία ορίζονται, με διάσταση ίση ή μικρότερη του αριθμού των διανυσματικών πεδίων [8]. Στην περίπτωση του σετ που χαρακτηρίζει στη σφαιρική συμμετρία, οι ολοκληρωτικές καμπύλες των πεδίων αυτών γεννούν 2-σφαίρες, δηλαδή ένας σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονος μπορεί να φυλλοποιηθεί σε σφαίρες. Κάθε σημείο του χωρόχρονου ή μάλλον *σχεδόν* κάθε σημείο βρίσκεται σε μια από αυτές τις 2-σφαίρες. Η μετρική που επάγεται πάνω σε κάθε 2-σφαίρα είναι πολλαπλάσιο της μετρικής της μοναδιαίας σφαίρας. Καθώς μια τέτοια 2-σφαίρα χαρακτηρίζεται από την επιφάνειά της A, για σφαιρικά συμμετρικούς χωρόχρονους εισάγουμε την συνάρτηση[21]:

$$r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.15}$$

Στην περίπτωση του Ευκλείδιου χώρο η συνάρτηση αυτή συμπίπτει με την ακτίνα της σφαίρας, όμως αυτό δεν είναι απαραίτητο για καμπυλωμένους χωρόχρονους. Η σφαιρική συμμετρία δεν επιβάλει την ύπαρξη απαραίτητα κάποιου κέντρου, ωστόσο μπορούμε να αναφερόμαστε στην συνάρτηση αυτή ως μια ακτινική συντεταγμένη της σφαίρας.

Καθώς λόγω της $SO(3)$ συμμετρίας ο χωρόχρονος φυλλοποιείται σε 2-σφαίρες, κάθε μία από τις οποίες αποτελεί μια υποπολλαπλότητα διάστασης 2, το σει όλων των 2-σφαιρών δημιουργεί επίσης μια υποπολλαπλότητα διάστασης 2 [8]. Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{X}$ οφείλει να είναι κάθετο πάνω στη 2-σφαίρες, καθώς δεν πρέπει να έχει προτιμηταία κατεύθυνση λόγω της σφαιρικής συμμετρίας κάτι που θα εμφανιζόταν αν υπήρχε μη μηδενική συνιστώσα της προβολής του στις συντεταγμένες. Επομένως οι 2-σφαίρες ζουν πάνω στις χωρικές υπερεπιφάνειες Σ_t. Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων κατάλληλο για την υπόλοιπη ανάλυση . Θεωρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες (θ, ϕ) σε μια 2-σφαίρα $\Sigma = \Sigma_0$. Θα λάβουμε τις άλλες 2 συνταγμένες (a, b) μεταφέροντας τις σφαιρικές συντεταγμένες στις υπόλοιπες σφαίρες. Καθώς $\nabla_\alpha r \neq 0$ επιλέγονται εν τέλει τα (r, θ, ϕ) ως οι συνταγμένες που ζουν πάνω στη χωρική υπερεπιφάνεια και εν τέλει επιλέγεται ο καθολικός χρόνος t ως χρονική συντεταγμένη και άρα $(a, b) = (t, r)$ [21]. Για σταθερές τιμές των t, r λαμβάνεται όπως είναι αναμενόμενο από την ανάλυση η μετρική μιας 2-σφαίρας:

$$ds^2 = r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi) \tag{3.1.16}$$

ενώ για σταθερές σφαιρικές συντεταγμένες λαμβάνω:

$$ds^2 = -A(r)dt + B(r)dr \tag{3.1.17}$$

Οι συντελεστές A, B εξαρτώνται μονάχα από τη συντεταγμένη r, καθώς έχουμε επιβάλλει ήδη τη συνθήκη της στασιμότητας/στατικότητας και άρα της ανεξαρτησίας από τον χρόνο και οποιαδήποτε εξάρτηση από τις σφαιρικές συντεταγμένες θα κατέστρεφε τη σφαιρική συμμετρία. Ωστόσο, χρειάζεται προσοχή, υπάρχουν και οι μεικτοί όροι της μετρικής της μορφής:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2g_{r\theta}(r)drd\theta + 2g_{r\phi}(r)drd\phi + 2g_{\theta\phi}(r)d\theta d\phi \tag{3.1.18}$$

Αποδεικνύεται πως η σφαιρική συμμετρία μηδενίζει τους μεικτούς αυτούς όρους. Το στοιχείο μήκους πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από ανακλάσεις, όπως η:

$$r' = r, \theta' = \pi - \theta, \phi' = \phi + \pi \tag{3.1.19}$$

όπου

$$dr' = dr, d\theta' = -d\theta, d\phi' = d\phi \tag{3.1.20}$$

Η απόσταση μεταξύ (t, r, θ, ϕ) και $(t, r, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ είναι

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2g_{\theta\phi}(r)d\theta d\phi = && (3.1.21)\\ ds'^2 &= r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta - \pi)d\phi^2) - 2g_{\theta\phi}(r)d\theta d\phi && (3.1.22)\\ &= r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) - 2g_{\theta\phi}(r)d\theta d\phi \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει πως $g_{\theta\phi} = 0$. Αντίστοιχα τώρα μελετάμε την απόσταση μεταξύ (t, r, θ, ϕ) και $(t, r +$

$dr, \theta + d\theta, \phi)$ όπου αντίστοιχα:

$$ds^2 = B(r)dr + r^2 d\theta + 2g_{r\theta}(r)drd\theta = \tag{3.1.23}$$
$$ds'^2 = B(r)dr + r^2 d\theta - 2g_{r\theta}(r)d_d\theta \tag{3.1.24}$$

επομένως αντίστοιχα $g_{r\theta} = 0$. Για να απαλείψουμε και τον τελευταίο μεικτό όρο της μετρική θα πάρουμε την ανάκλαση:

$$r' = r, \theta' = \theta, \phi' = -\phi \tag{3.1.25}$$

όπου

$$dr' = dr, d\theta' = d\theta, d\phi' = -d\phi \tag{3.1.26}$$

Παρομοίως για απόσταση μεταξύ (t, r, θ, ϕ) και $(t, r + dr, \theta, \phi + d\phi)$

$$ds^2 = B(r)dr + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) + 2g_{r\phi}(r)drd\phi = \tag{3.1.27}$$
$$ds'^2 = B(r)dr + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) - 2g_{r\phi}(r)drd\phi \tag{3.1.28}$$

και τελικά μηδενίζεται και ο τελευταίος μεικτός όρος $g_{r\phi} = 0$.

Η ανάλυση του σταθερού, στατικού και σφαιρικά συμμετρικού χωροχρόνου οπότε δίνει μια μετρική της μορφής:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.1.29}$$

Η μετρική του χωροχρόνου πρέπει να διατηρεί την υπογραφή της, επομένως επιλέγουμε να γράψουμε τις συναρτήσεις στην εκθετική μορφή:

$$ds^2 = -e^{2a(r)}dt^2 + e^{2b(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.1.30}$$

όπου η ύπαρξη του 2 στην δύναμη του εκθετικού έχει σκοπό την διευκόλυνση των επερχόμενων υπολογισμών.

3.2 Η λύση Schwarzschild

Εφόσον εξήχθη η μορφή της μετρικής για έναν χωρόχρονο στάσιμο, στατικό και σφαιρικά συμμετρικό, επόμενο βήμα ώστε να εξάγουμε τις λύσεις του χωροχρόνου αυτού είναι να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein. Ενδιαφέρον της μελέτης μας αποτελεί μόνο ο χωρόχρονος στο εξωτερικό της μάζας επομένως καλούμαστε να λύσουμε την εξίσωση [2]:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2.1}$$

επομένως πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα όλα σύμβολα Christoffel. Για να προκύψουν άμεσα όλα τα σύμβολα, και ποια είναι μηδενικά, σκόπιμο για αυτή τη μελέτη είναι να αποφύγουμε τους πολλούς υπολογισμούς και να επιλέξουμε την εξαγωγή τους μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης και συγκρίνοντας με τις εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπύλων:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \tag{3.2.2}$$

[2] Στο κεφάλαιο αυτό επειδή η ανάλυση αφορά το χωρόχρονο παραλείπεται η σημείωση $^{(4)}$ για τους χωροχρονικούς τανυστές Riemann και Ricci

Η δράση που μελετάμε είναι:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}ds \tag{3.2.3}$$

οπότε επιβάλλοντας την αρχή της ελάχιστης δράσης:

$$\delta I = 0 \tag{3.2.4}$$

εξάγονται οι εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{3.2.5}$$

με λαγκρανζιανή:

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \tag{3.2.6}$$

Ωστόσο παρατηρούμε από το στοιχείο μήκους ότι ισχύει:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1 \tag{3.2.7}$$

Η δράση δηλαδή μπορεί να γραφεί ως:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}ds \tag{3.2.8}$$

επομένως εξάγουμε ξανά τις (3.2.5) ωστόσο με λαγκρανζιανή πλέον την:

$$L = g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1 = -e^{\alpha(r)}\dot{t}^2 + e^{\beta(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \tag{3.2.9}$$

Συγκεκριμένα:

- για $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{d}{ds}\left(-2e^{2a}\dot{t}\right) = 0 \Rightarrow \\
&\ddot{t} + 2\partial_r a\dot{r}\dot{t} = 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

και άρα:

$$\Gamma^t_{tr} = \partial_r a \tag{3.2.11}$$

- για $\mu = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{d}{ds}\left(2e^{2b}\dot{r}\right) + 2e^{2a}\partial_r a\dot{t}^2 - 2e^{2b}\partial_r b\dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \\
&\ddot{r} + e^{2(a-b)}\partial_r a\dot{t}^2 + \partial_r b\dot{r}^2 - re^{-2b}\dot{\theta}^2 - e^{-2b}r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

και άρα:

$$\Gamma^r_{tt} = e^{2(a-b)}\partial_r a \tag{3.2.13}$$
$$\Gamma^r_{rr} = \partial_r b \tag{3.2.14}$$
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r\sin^2\theta \tag{3.2.15}$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2b}\sin^2\theta \tag{3.2.16}$$

• για $\mu = 2$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{ds}\left(2r^2\dot{\theta}\right) - 2r^2\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\ddot{\theta} + 2\frac{1}{r}\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{3.2.17}$$

και άρα:

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \tag{3.2.18}$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{3.2.19}$$

• για $\mu = 3$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{ds}\left(2r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\ddot{\phi} + 2\frac{1}{r}\dot{\phi}\dot{r} + 2\cot\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{3.2.20}$$

και άρα:

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \tag{3.2.21}$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \tag{3.2.22}$$

όπου σε όλες τις εξισώσεις η εξάρτηση των συναρτήσεων a, b από την μεταβλητή r εννοείται και έτσι εξάγαμε όλα τα σύμβολα Christoffel ενώ όλα όσα δεν εμφανίζονται στις γεωδαισιακές εξισώσεις που παραγάγαμε είναι μηδενικά. Αφού πλέον γνωρίζουμε όλα τα Christoffel είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του τανυστή Riemann. Ο τανυστής Riemann υπολογίζεται από τα σύμβολα Christoffel ως:

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = \partial_\beta\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\Gamma^\nu_{\beta\mu} + \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\Gamma^\nu_{\kappa\beta} - \Gamma^\kappa_{\beta\mu}\Gamma^\nu_{\kappa\alpha} \tag{3.2.23}$$

Οι αναλυτικοί υπολογισμοί των συνιστωσών του τανυστή θα παρουσιαστούν πλήρως για τις συνιστώσες $R_{rtr}{}^{t}, R_{trt}{}^{r}$ και για λόγους οικονομίας της ανάλυσης για τις υπόλοιπες θα παρατεθούν κατευθείαν τα αποτελέσματα. Όσες συνιστώσες δεν γραφούν είναι μηδενικές. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} R_{rtr}{}^{t} = \cancel{\partial_t \Gamma^t_{rr}} - \partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^\kappa_{rr}\Gamma^t_{\kappa t} - \Gamma^\kappa_{tr}\Gamma^t_{\kappa r} &= -\partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^t_{rt} - \Gamma^t_{tr}\Gamma^t_{tr} \\ &= -\partial_r a + \partial_r a \partial_r b - (\partial_r a)^2 \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

$$\begin{aligned} R_{trt}{}^{r} &= g^{ra}R_{trta} = g^{rr}R_{rtrt} = g^{rr}R_{rtr} = g^{rr}g_{ta}R_{rtr}{}^{a} = g^{rr}g_{tt}R_{rtr}{}^{t} \\ &= e^{2(a-b)}(-\partial_r a + \partial_r a \partial_r b - (\partial_r a)^2) \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο, παράγουμε όλα τα στοιχεία του τανυστή Riemann:

$$R_{rtr}{}^{t} = \partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 \qquad R_{trt}{}^{r} = e^{(2(a-b)}(\partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2) \tag{3.2.26}$$

$$R_{\theta t\theta}{}^{t} = -re^{-2\beta}\partial_r\alpha \qquad R_{t\theta t}{}^{\theta} = -\frac{1}{r}e^{-2\beta}\partial_r\alpha \tag{3.2.27}$$

$$R_{\phi t\phi}{}^{t} = -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha \qquad R_{t\phi t}{}^{\phi} = -\frac{1}{r}e^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha \tag{3.2.28}$$

$$R_{\theta r\theta}{}^{r} = re^{-2\beta}\partial_r\beta \qquad R_{r\theta r}{}^{\theta} = \frac{1}{r}e^{-2\beta}\partial_r\beta \tag{3.2.29}$$

$$R_{\phi r\phi}{}^{r} = re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\beta \qquad R_{r\phi r}{}^{\phi} = re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\beta \tag{3.2.30}$$

$$R_{\phi\theta\phi}{}^{\theta} = (1-e^{-2\beta})\sin^2\theta \qquad R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} = 1-e^{-2\beta} \tag{3.2.31}$$

Ο τανυστής Ricci ορίζεται ως:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu} \tag{3.2.32}$$

επομένως χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του τανυστή Riemann που υπολογίστηκαν παραπάνω, τα μη μηδενικά στοιχεία του τανυστή Ricci είναι:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \tag{3.2.33}$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta \tag{3.2.34}$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}\left[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1\right] + 1 \tag{3.2.35}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \tag{3.2.36}$$

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $a(r), b(r)$ και άρα και να εξάγουμε πλήρως την μετρική του χωροχρόνου απομένει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein θέτοντας όλα τα παραπάνω στοιχεία του τανυστή Ricci ίσα με το μηδέν. Λόγω του ότι κάθε ένα στοιχείο λοιπόν είναι ίσο με μηδέν, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} &e^{2(b-a)}R_{tt} + R_{rr} = 0 \Rightarrow \\ &\frac{2}{r}(\partial_r a + \partial_r b) = 0 \Rightarrow \\ &a(r) = -b(r) + c \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Επαναπροσδιορίζοντας την χρονική συντεταγμένη ως:

$$t \to e^{-c}t \tag{3.2.38}$$

μηδενίζουμε τη σταθερά αυτή επομένως λαμβάνουμε:

$$a(r) = -b(r) \quad \text{ή} \quad e^a = e^{-b} \tag{3.2.39}$$

Ενσωματώνοντας τη σχέση αυτή στη συνιστώσα $R_{\theta\theta}$ και θέτοντας στην ίση με 0, δημιουργούμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} &e^{2a}(\partial_r(2a(r)) + 1) = 1 \Rightarrow \\ &\partial_r(re^{2a}) = 1 \Rightarrow \\ &re^{2a} = r + C \Rightarrow \\ &e^{2a} = 1 + \frac{C}{r} \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

άρα και

$$e^{2b} = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} \tag{3.2.41}$$

Τελευταίο βήμα είναι να προσδιορίσουμε με φυσικούς όρους την σταθερά C. Καθώς ο χωρόχρονος αυτός για $r \to +\infty$ είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, μπορούμε να συγκρίνουμε το εξωτερικό βαρυτικό πεδίο της μελέτης μας με αυτό που δημιουργείται από μια σημειακή μάζα στα πλαίσια της Νευτώνιας θεώρησης. Για μεγάλες τιμές της ακτινικής συντεταγμένης r, το στοιχείο μήκους του Schwarzschild χωρόχρονου μπορεί να γραφεί ως:

$$ds^2 \approx -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.2.42}$$

ενώ το στοιχείο μήκους του Νευτώνιου βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από σημειακή μάζα M είναι:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.2.43}$$

επομένως η σταθερά $-\frac{C}{2}$ ερμηνεύεται ως η συνολική μάζα του Schwarzschild πεδίου που μετράται μελετώντας τις τροχιές σε μεγάλες ακτινικές αποστάσεις από την πηγή. Πλέον αποκαλύψαμε κάθε συνάρτηση και παράμετρο που εξαρτάται ο Schwarzschild χωρόχρονος και είμαστε σε θέση να γράψουμε την τελική μορφή του στοιχείου μήκους του:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.2.44}$$

Ορίζουμε ως **Ακτίνα Schwarzschild** την ποσότητα:

$$R_S = 2M \tag{3.2.45}$$

και θα αποτελέσει ένα από τα βασικά σημεία της μελέτης μας στις επόμενες παραγράφους.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω μετρική μπορεί να εξαχθεί απλά επιβάλλοντας σφαιρική συμμετρία και από την λύση των εξισώσεων Einstein η στατικότητα θα προέκυπτε οργανικά. Η διαπίστωση αυτή διατυπώθηκε και αποδείχθηκε το 1923 από τον Birkhoff [7]και είναι γνωστή ως *Θεώρημα Birkhoff*.

3.3 Ιδιομορφίες

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι υπάρχουν τιμές των μεταβλητών από τις οποίες εξαρτάται η μετρική του χωρόχρονου, για τις οποίες ο χωρόχρονος δεν ορίζεται καλά. Είναι όμως υψίστης σημασίας να μελετήσουμε την φύση αυτών των ιδιομορφιών: είναι εγγενείς μοναδικότητες του χωροχρόνου ή είναι απλά προβληματικές περιοχές που οφείλονται στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει. Ας επικεντρωθούμε για αρχή στο στοιχείο της αντίστροφης μετρικής $g^{\phi\phi}$. Ούσα η μετρική εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων (t, r, θ, ϕ) παρουσιάζει ιδιομορφία στους πόλους. Ωστόσο η ιδιομορφία αυτή αίρεται αν μετασχηματίσουμε τις σφαιρικές χωρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές. Επομένως δεν αποτελεί μια πραγματική ιδιομορφία του συστήματος αλλά έγκειται στην επιλογή των συντεταγμένων. Τα στοιχεία της μετρικής εξαρτώνται ρητά επίσης και από τις τιμές της συντεταγμένης r και η μελέτη των τιμών της συντεταγμένης αυτής για τις οποίες εμφανίζονται ιδιομορφίες θα αποτελέσει πυρήνα της ανάλυσης αυτής. Παρατηρούνται λοιπόν ιδιομορφίες για:

$$r = 0 \quad \text{και} \quad r = 2M \tag{3.3.1}$$

Φυσικά προκύπτει το ερώτημα αν αυτές είναι πραγματικές ιδιομορφίες του χωροχρόνου ή αν επίσης οφείλονται στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων. Αναζητούμε αν αυτοί οι απειρισμοί επηρεάζουν πράγματι την καμπύλωση του χωρόχρονου, η οποία εκφράζεται μέσα από τον τανυστή Riemann, τα στοιχεία του οποίου ωστόσο εξαρτώνται από τις συντεταγμένων που κάθε φορά επιλέγονται και άρα δεν αποτελούν ενδεικτικό για την φύση των ιδιομορφιών. Αντ' αυτού θα πρέπει να μελετήσουμε ποσότητες που είναι αμετάβλητες κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, δηλαδή βαθμωτές ποσότητες. Μια επιλογή αποτελεί:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 48M^2r^{-6} \tag{3.3.2}$$

Η βαθμωτή αυτή ποσότητα αυτή απειρίζεται πράγματι για $r = 0$ ωστόσο είναι καθόλα καλά ορισμένη για $r = 2M$. Αυτό καταδεικνύει πως η ιδιομορφία αυτή είναι απόρροια της επιλογής συστήματος συντεταγμένων. Ας μελετήσουμε τις υπερεπιφάνειες σταθερής ακτινικής συντεταγμένης r. Το κάθε διάνυσμα σε αυτές είναι το :

$$n_\alpha = \partial_\alpha r = \delta^r_\alpha \tag{3.3.3}$$

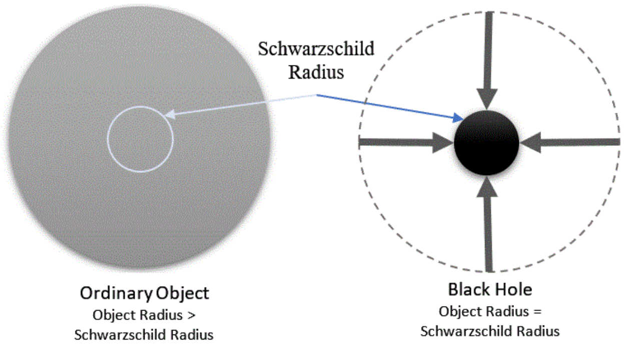
Το είδος της υπερεπιφάνειας αυτής καθορίζεται από:

$$N^2 = \partial^\alpha r \partial_\alpha r = g^{\alpha\beta}\delta^r_\alpha\delta^r_\beta = g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{3.3.4}$$

Για $r = 2M$ η υπερεπιφάνεια αυτή γίνεται φωτοειδής καθώς $N = 0$. Για $r > 2M$ οι υπερεπιφάνειες σταθερού r είναι χρονοειδείς ενώ για $r < 2M$ χωροειδείς. Αυτό συνεπάγεται πως αλλάζει και η φύση της συντεταγμένης και ενώ στην πρώτη περιοχή είναι μια χωροειδής συντεταγμένη, στην δεύτερη αποτελεί μια χρονοειδή. Σε αυτές τις περιοχές αλλάζει και το πρόσημο του στοιχείου της μετρικής $g_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ και επομένως και η φύση της συντεταγμένης: από μια χρονοειδής συντεταγμένη στην πρώτη περιοχή γίνεται μια χωροειδής στην δεύτερη περιοχή. Επομένως το $r = 2M$ μπορεί να μην αποτελεί μια πραγματική ιδιομορφία ωστόσο χωρίζει τον χωρόχρονο σε δυο περιοχές:

$$\begin{array}{ll} I & 2M < r < +\infty \\ II & 0 < r < 2M \end{array}$$

Νωρίτερα ονομάσαμε την ποσότητα $R_s = 2M$ ακτίνα Schwarzschild και είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι καθώς οι λύσεις αυτές αφορούν τον χωρόχρονο εξωτερικά της σφαιρικής μάζας, η μελέτη



Σχήμα 3.3.1: Η ακτίνα Schwarzschild καθώς θεωρήσαμε λύσεις στο κενό έχει νόημα αν βρίσκεται εκτός της ακτίνας της σφαιρικής μάζας

του αφορά σώματα με μάζα κατάλληλη ώστε η ακτίνα Schwarschild να είναι εξωτερική της ακτίνας τους. Ένα σώμα η ακτίνα Schwarzschild του οποίου βρίσκεται εκτός της μάζας θα δούμε πως είναι αυτό που αργότερα θα ονομάσουμε μελανή οπή.

3.4 Schwarzschild Μελανές Οπές

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις γεωδαισιακές καμπύλες ενός φωτονίου ή ενός σωμάτιου με μάζα που κινείται προς την ακτίνα Schwarzschild. Για την μελέτη αυτή θα θεωρήσουμε σταθερές τις τιμές των συντεταγμένων θ, ϕ και θα μελετήσουμε τις φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες. Σε κάθε σημείο (t, r) στην απεικόνιση του χωροχρόνου επομένως θα αντιστοιχεί μια 2-σφαίρα. Είναι:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{3.4.1}$$

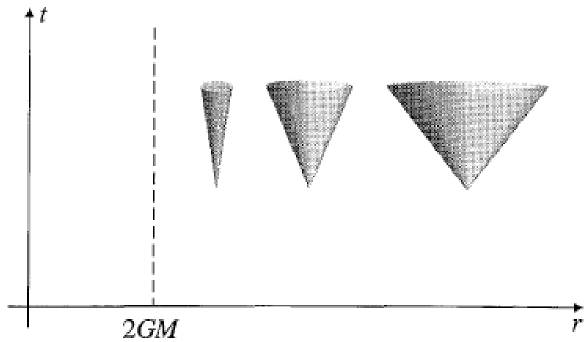
οπότε οι κώνοι φωτός θα έχουν κλίση:

$$\frac{dt}{dr} = \pm\left(\frac{r}{r - 2M}\right) \tag{3.4.2}$$

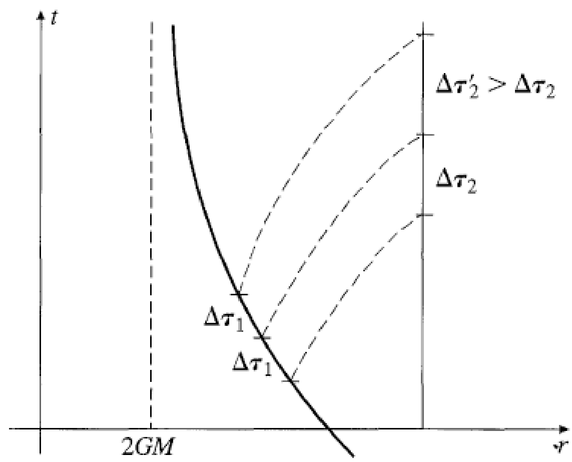
όπου για $r > 2M$ το + αντιστοιχεί για εξερχόμενα φωτόνια ενώ το - για εισερχόμενα. Για $r \to +\infty$ όπως είναι αναμενώμενο λαμβάνουμε προσεγγιστικά κώνους φωτός που αντιστοιχούν στον επίπεδο χωρόχρονο. Λύνοντας την διαφορική για τις δύο περιπτώσεις παίρνουμε:

$$t = r + 2M \ln |r - 2M| + C \tag{3.4.3}$$
$$t = -\left(r + 2M \ln |r - 2M|\right) + C \tag{3.4.4}$$

Η κλίση των κώνων φωτός τείνει στο άπειρο όσο το φωτόνιο πλησιάζει την ακτίνα Schwarschild από την περιοχή Ι: οι κώνοι φωτός κλείνουν σαν το φωτόνια να πλησιάζει όλο και πιο κοντά στην ακτίνα αλλά να μην την ξεπερνά ποτέ. Οι εισερχόμενες γεωδαισιακές καμπύλες προσεγγίζουν την ακτίνα ασυμπτωτικά. Επιπλέον έστω ένας παρατηρητής 2 σε μια θέση $r = r_2$ λαμβάνει σήματα από ένα παρατηρητή 1 που πλησιάζει την ακτίνα Schwarzschild. Ο παρατηρητής στέλνει σήματα ανά σταθερά διαστήματα του ιδιόχρονού του $d\tau_1$. Ο παρατηρητής 2 θα λαμβάνει τα σήματα μεταξύ όλο και μεγαλύτερων διαστημάτων του δικού του ιδιόχρονου $d\tau_2$. Τα σήματα που λαμβάνει ο παρατηρητής 2 τείνουν όλο



Σχήμα 3.4.1: Η κλίση των φωτοειδών γεωδαισιακών καμπύλων τείνει στο άπειρο καθώς το φωτόνιο προσεγγίζει την ακτίνα Schwarzschild και άρα οι κώνοι φωτός κλείνουν [8]

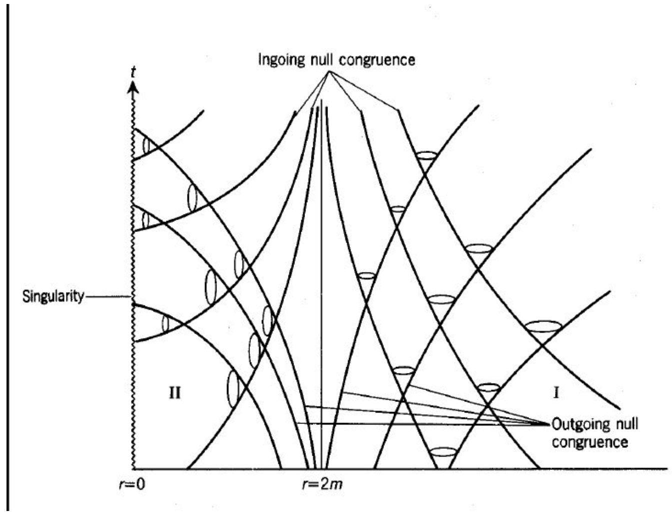


Σχήμα 3.4.2: Ο παρατηρητής 2 λαμβάνει τα σήματα από τον παρατηρητή σε ολο ένα και μεγαλύτερα χρονική διαστήματα, παρόλο που ο παρατηρητής 1 στέλνει τα σήματα σε σταθερά διαστήματα του δικού του ιδιόχρονου [8].

και παραπάνω προς το ερυθρό όσο ο παρατηρητής 1 πλησιάζει κινείται προς την ακτίνα.

$$\omega_2 = \left(\frac{1 - 2M/r_1}{1 - 2M/r_2}\right)^{1/2} \omega_1 \tag{3.4.5}$$

Πράγματι ο παρατηρητής 1 δεν καταφέρνει ποτέ να ξεπεράσει την ακτίνα Schwarzschild; Η απάντηση είναι πως όχι! Ο παρατηρητής 1 θα φτάσει και θα ξεπεράσει την ακτίνα αυτή σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα του ιδιόχρονου του και το πρόβλημα αυτό οφείλεται στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Όσον αφορά την περιοχή II, οι συντεταγμένες (t,r) αλλάζουν όπως εξηγήθηκε παραπάνω χαρακτήρα. Οι κώνοι φωτός δηλαδή σε κάθε σημείο στην περιοχή II ανατρέπονται, και καθώς λόγω της αιτιότητας κανένα σωματίδιο δεν μπορεί να ξεφύγει από την μελλοντική κατεύθυνση της χρονοειδούς συντεταγμένης, δηλαδή του r, η κίνηση και τελικά σύγκρουση πάνω στην ιδιομορφία $r = 0$ είναι αναπόφευκτη.



Σχήμα 3.4.3: Στις Schwarzwild συντατεγμένες, ένα φωτόνιο από την περιοχή I φαίνεται να μην καταφέρνει πότε να φτάσει την υπερεπιφάνεια r=2M. Στην περιοχή II οι κώνοι φωτός αντιστρέφονται [9].

3.5 Συντεταγμένες Eddigton-Finkelstein

Αναζητούμε ένα καλύτερο σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε να άρουμε την ιδιομορφία στο $r = 2M$. Η ιδέα είναι να διαλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στις φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες. Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε πως αυτές περιγράφονται από $t = \pm\left(r + 2M\ln|r-2M|\right) + C$ όπου ορίζουμε:

$$r^* = r + 2M\ln|r-2M| \tag{3.5.1}$$

όπου

$$dr = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dr^* \tag{3.5.2}$$

Για να λάβουμε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στις καμπύλες αυτές κάνουμε τους μετασχηματιμούς:

$$t \to v = t + r^* \tag{3.5.3}$$
$$t \to u = t - r^* \tag{3.5.4}$$

και για αρχή επιλέγουμε να εργαστούμε με την συντεταγμένη v. Είναι:

$$dv = dr^* + dt = dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow$$
$$dt^2 = dv^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} dr^2 - 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dvdr \tag{3.5.5}$$

οπότε ξανά γράφουμε το στοιχείο μήκους συναρτήσει της νέας συντεταγμένης:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv + 2dvdr + r^2 d\Omega \tag{3.5.6}$$

Κανείς με μια πρώτη ματιά ίσως σκεφτόταν πως θα αντιμετωπίσουμε πρόβλημα στο στοιχείο της αντίστροφης μετρικής g^{vv} καθώς το στοιχείο g_{vv} μηδενίζεται πάνω στην ακτίνα Schwarzschild. Η μετρική ωστόσο είναι κανονικά ανιστρέψιμη καθώς για $r = 2M$ η ορίζουσά της είναι μη μηδενική:

$$g = -r^4 \sin\theta \tag{3.5.7}$$

Θεωρώντας ξανά σταθερές τιμές για τις συντεταγμένες (θ, ϕ) λαμβάνουμε το στοιχείο μήκους των φωτοειδών καμπυλών:

$$dv = 0 \tag{3.5.8}$$

όπου αυτό καταδεικνύει πως κάποιες φωτοειδείς καμπύλες χαρακτηρίζονται από:

$$v = \text{const} \tag{3.5.9}$$

ή

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv + 2dr = 0 \tag{3.5.10}$$

όπου για $dr \neq 0$ αυτό δίνει τη λύση:

$$v = 2(r + 2M \ln|r - 2M|) + C \tag{3.5.11}$$

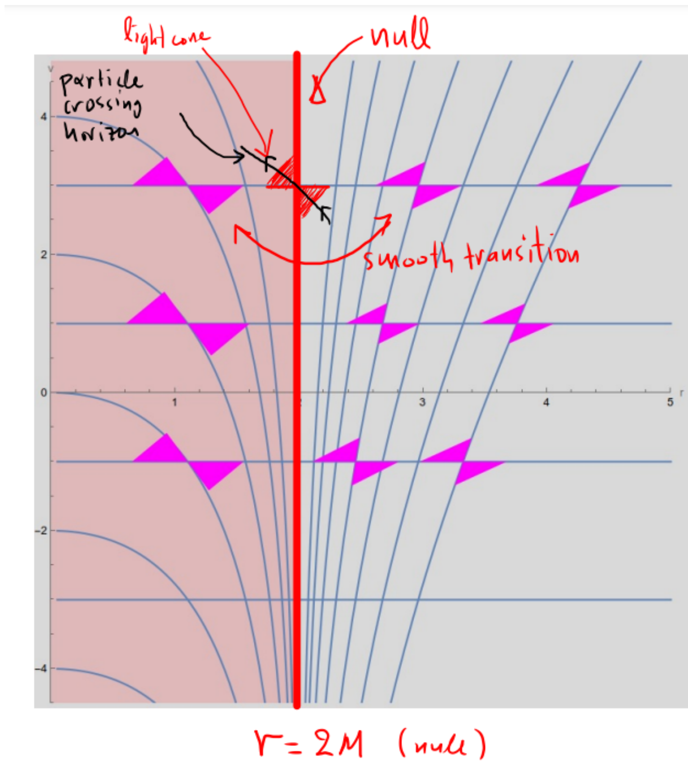
όπου περιγράφει καμπύλες που απομακρύνονται από τη μοναδικότητα είτε προς την ιδιομορφία $r = 0$ στην περιοχή II είτε προς το $+\infty$ στην περιοχή I. Από την ανάλυση αυτή συμπεραίνουμε πως οι κώνοι φωτός δεν κλείνουν, απλώς γυρίζουν με τέτοιο τρόπο ώστε αφού ένα φωτόνιο ή ένα σωματίδιο περάσει την ακτίνα Schwarzschild, όλα τα μελλοντικά μονοπάτια να έχουν κατεύθυνση προς αυτή του φθίνοντος r. Πράγματι για σταθερό v, Έμεινε μια ακόμα λύση. Αν $dr = 0$ λαμβάνουμε:

$$r = 2M \tag{3.5.12}$$

όπου παρόλο που η επιφάνεια αυτή χαρακτηρίζεται από σταθερή τιμή της ακτινικής συντεταγμένης, όπως έχει δειχθεί παραπάνω το μέτρο του κάθετου διανύσματος $n_\alpha = \partial_\alpha r$ για $r = 2M$ είναι μηδέν και άρα αποτελεί μια φωτοειδή επιφάνεια. Η επιφάνεια αυτή διαχωρίζει τον χωρόχρονο σε δυο περιοχές με τέτοιο τρόπο ώστε να αφήνει την προσπέραση φωτονίων ή σωματιδίων από την περιοχή I στην περιοχή II, αλλά απαγορεύει την διεύλευση τους από την περιοχή II στην περιοχή I. Η περιοχή αυτή του χωροχρόνου είναι απόλυτη, και διαχωρίζει πλήρως κάθε γεγονός που βρίσκεται εντός της από κάθε εξωτερικό παρατηρητή. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται **Ορίζοντας Γεγονότων** και η περιοχή εντός του, καθώς ως παρατηρητές εκτός αυτής δεν έχουμε καμία πρόσβαση, θα την ονομάσουμε **μελανή οπή**. Θεωρήσαμε πως ο χρόνος μας είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς $t \to t' = -t$. Ωστόσο ο η μεμβράνη που ονομάσαμε ορίζοντα γεγονότων επιτρέπει τη διέλευση των καμπύλων με κατεύθυνση προς το μέλλον. Ήρθε λοιπόν η στιγμή να αξιοποιήσουμε τη δεύτερη συντεταγμένη u που ορίσαμε παραπάνω. Ακολουθώντας ίδια διαδικασία για τον μετασχηματισμό τώρα $t \to u = t - r^*$ λαμβάνουμε το στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega \tag{3.5.13}$$

και παρατηρούμε πως αποτελεί την χρονική αντιστροφή της προηγούμενης λύσης του προηγμένου χρόνου v. Για αυτό, τώρα ο ορίζοντας γεγονότων επιτρέπει τη διέλευση καμπυλών με κατεύθυνση προς το παρελθόν. Ανάλογα λοιπόν αν ακολουθήσουμε καμπύλες με κατεύθυνση προς το μέλλον ή το παρελθόν, καταλήγουμε σε διαφορετικές περιοχές. Θα δούμε, πως αν ακολουθήσουμε χωροειδείς



Σχήμα 3.5.1: Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται πως από κάθε σημείο διέρχονται δυο φωτεινές ακτίνες. Η μια χαρακτηρίζεται από $v = \text{const}$. Αυτές ξεκινάνε από το $+\infty$. Η άλλη κατηγορία χαρακτηρίζονται από $v = 2(r + 2M \ln |r - 2M|) + C$ και στην περιοχή I διαφεύγουν προς το $+\infty$ ενώ στην περιοχή II πέφτουν πάνω στην ιδιομορφία. Προφανώς, και τα σωματίδια με μάζα είναι υποχρεωμένα να κινούνται σε τροχιές που περιορίζονται από τις φωτεινές ακτίνες. Κανένα σωματίδιο ή φωτόνιο δεν μπορεί να επιστρέψει στην περιοχή I αφού έχει ξεπεράσει την $r = 2M$ από την περιοχή I. [23]

τροχιές, θα αποκαλυφθεί μια ακόμα περιοχή...

Μια ακόμα μορφή της μετρικής που θα χρειαστεί και σχετίζεται με τις συντεταγμένες Eddigton-Finkelstein που ονομάζεται $\boldsymbol{Kerr - Schield}$ λαμβάνεται αν γίνει ο μετασχηματισμός:

$$\tilde{t} = v - r \tag{3.5.14}$$

οπότε από την (3.5.6) λαμβάνεται:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.5.15}$$

3.6 Kruskal-Szekeres

Η ιδέα είναι να αξιοποιήσουμε ταυτόχρονα την προχωρημένη και την καθυστερημένη συντεταγμένη. Συναρτήσει αυτών τα t, r εκφράζονται ως:

$$r = \frac{1}{2}(v - u) - 2M \ln(r - 2M) \tag{3.6.1}$$

$$t = \frac{1}{2}(v + u) \tag{3.6.2}$$

Η μετρική επομένως θα γραφεί ως:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv du + r^2 d\Omega \tag{3.6.3}$$

Θεωρούμε τις συντεταγμένες θ, ϕ σταθερές. Μια δισδιάστατη πολλαπλότητα είναι συμμορφικά επίπεδη [12]. Θεωρούμε τον γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$v \to v' = v'(v) \qquad u \to u' = u'(u) \tag{3.6.4}$$

τότε το στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{dv'} \frac{du}{du'} dv' du' \tag{3.6.5}$$

και εισάγοντας τις συντεταγμένες:

$$R = \frac{1}{2}(v' + u') \tag{3.6.6}$$

$$T = \frac{1}{2}(v' - u') \tag{3.6.7}$$

επομένως η μορφή του στοιχείου μήκους θα είναι:

$$ds^2 = F^2(T, R)(-dT^2 + dR^2) \tag{3.6.8}$$

Ο Kruskal έκανε την επιλογή συναρτήσεων:

$$v' = e^{v/4M} = e^{t+r+2M\ln(r-2M)/4M} = (r - 2M)^{1/2} e^{(r+t)/4M} \tag{3.6.9}$$

$$u' = -e^{-u/4M} = e^{-t+r+2M\ln(r-2M)/4M} = (r - 2M)^{1/2} e^{(r-t)/4M} \tag{3.6.10}$$

και άρα το νέο ζεύγος συντεταγμένων T, R εκφράζεται συναρτήσει των Schwarzschild συντεταγμένων είναι:

$$T = (r - 2M)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(\frac{t}{4M})$$
$$R = (r - 2M)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(\frac{t}{4M}) \quad (3.6.11)$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για $r > 2M$. Για $r < 2M$ φαίνεται οι συντεταγμένες να λαμβάνουν μιγαδικές τιμές, αυτό όμως δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα˙. Οι Schwarzschild συντεταγμένες δεν είναι καλά ορισμένες στην περιοχή αυτή για αυτό αλλάζουμε τα πρόσημα ως:

$$T = (2M - r)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(\frac{t}{4M})$$
$$R = (2M - r)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(\frac{t}{4M}) \quad (3.6.12)$$

Σε κάθε περίπτωση οι συντεταγμένες T, R ικανοποιούν:

$$T^2 - R^2 = -(r - 2M) e^{r/2M} \quad (3.6.13)$$

και η συνάρτηση $F(T, R)$ δίνεται ως:

$$F^2 = \frac{16M^2}{r^2} e^{-r/2M} \quad (3.6.14)$$

όπου προφανώς το r σχετίζεται με τις συντεταγμένες T, R σύμφωνα με τη σχέση (3.6.13). Αυτό το σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται **Kruskal-Szekeres**. Ας μελετήσουμε στο σύστημα αυτό τις φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες. Θεωρούμε ξανά σταθερές τις συντεταγμένες θ, ϕ. Θέτοντας το στοιχείο μήκους ίσο με μηδέν προκύπτει:

$$dT = dR \quad (3.6.15)$$

δηλαδή οι φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες είναι ευθείες που περιγράφονται από τη σχέση:

$$T = \pm R + const. \quad (3.6.16)$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων που μόλις εισάγαμε, η επιφάνεια $r = 2M$ είναι καθόλα καλά ορισμένη και αποτελεί μια φωτοειδή επιφάνεια η οποία από την (3.6.13) ικανοποιεί:

$$T = \pm R \quad (3.6.17)$$

ενώ από την ίδια σχέση ορίζονται επιφάνειες και για κάθε σταθερή τιμή του r οι οποίες στο επίπεδο R-T αποτελούν υπερβολές που περιγράφονται από τη σχέση:

$$T^2 - R^2 = const. \quad (3.6.18)$$

Επιπλέον, συγκεκριμένα, για $r = 0$ θα λάβουμε:

$$T = +\sqrt{R^2 + 2M} \quad (3.6.19)$$

όπου λαμβάνεται μόνο το θετικό πρόσημο καθώς από τον ορισμό της συντεταγμένης T για $r < 2M$ είναι μη αρνητική.

Αντίστοιχα, από τις σχέσεις (3.6.11) και (3.6.12) ορίζονται οι επιφάνειες σταθερού t οι οποίες στο επίπεδο R-T αναπαριστώνται από ευθείες και συγκεκριμένα από:

$$T = \tanh(\frac{t}{4M})R \quad r > 2M \tag{3.6.20}$$

$$R = \tanh(\frac{t}{4M})T \quad r < 2M \tag{3.6.21}$$

Οι ευθείες αυτές διέρχονται από την αρχή των αξόνων και έχουν κλίση $\tanh(\frac{t}{4M})$. Παρατηρούμε πως για $t = 0$ για $r > 2M$ αντιστοιχεί η ευθεία $T = 0$ ενώ ανάλογα για $r < 2M$ η $R = 0$. Επιπλέον, για $t \to +\infty$ λαμβάνουμε ξανά την ευθεία $T = R$ ενώ για $t \to -\infty$ την ευθεία $T = -R$, οι οποίες είναι οι ευθείες σταθερού r με $r = 2M$. Πλέον, με το νέο σύστημα συντεταγμένων, καταφέραμε να καλύψουμε όλες τις περιοχές της πολλαπλότητας. Οι ευθείες αυτές αντιστοιχούν στον ορίζοντα γεγονότων. Οπότε τελικά λαμβάνουμε ένα χωρόχρονο που διακρίνεται σε 4 περιοχές. Η περιοχή I είναι το "σύμπαν μας", ο χωρόχρονος εκτός της μελανής οπής που μελετάται με ακρίβεια και από τις συντεταγμένες Schwarzschild. Η περιοχή II είναι η μελανή οπή. Αν μια φωτεινή ακτίνα ή ένα σωματίδιο περάσει σε αυτή, είναι αναπόφευκτη η συνάντησή του με την ιδιομορφία $r = 0$. Σε κάθε σημείο ορίζεται ένας κώνος φωτός κλίσης 45^o. Όλες οι μελλοντικές κοσμικές γραμμές, φωτοειδείς και χρονοειδής, φθίνοντος r οδηγούν στην περιοχή II ενώ οι παρελθοντικές στην περιοχή III, όπου εδώ ο ορίζοντας γεγονότων λειτουργεί ως μια μεμβράνη που επιτρέπει την διέλευση προς την περιοχή I αλλά ποτέ το αντίστροφο. Μια τέτοια περιοχή που "γεννά" φως και ύλη προς το σύμπαν ονομάζεται **λευκή οπή**. Ωστόσο, ένα τέτοιο αντικείμενο μπορεί θεωρητικά να οριστεί για μια αυθύπαρκτη μελανή οπή· αν η μελανή οπή έχει ημερομηνία γέννησης από κάποια βαρυτική κατάρρευση, η περιοχή αυτή δεν μπορεί να οριστεί. Μπορεί ως όντα να είμαστε περιορισμένοι σε κάθε σημείο από τους κώνους φωτός μας στην κίνησή μας, αλλά τα μαθηματικά μας επιτρέπουν ένα "ταξίδι σε παράλληλο σύμπαν"! Ακολουθώντας χωροδειδείς καμπύλες ξεπροβάλλετε η περιοχή IV, μια περιοχή όπου καμιά πληροφορία δεν μπορεί να φτάσει από αυτή σε εμάς και ούτε από εμάς σε αυτή. Αποτελεί ουσιαστικά μια περιοχή ασυμπτωτικά επίπεδη πανομοιότυπη με το σύμπαν που γνωρίζουμε και βιώνουμε εκτός της μελανής οπής.

3.6.1 Γέφυρα Einstein-Rosen

Η γεωμετρία που ενώνει τις δύο αυτές περιοχές ονομάζεται **Γέφυρα Einstein-Rosen**. Θα μελετήσουμε την υποπολλαπλότητα $dT = 0$. Τότε το στοιχείο μήκους είναι:

$$ds^2 = F^2 dR^2 + r^2 d\Omega \tag{3.6.22}$$

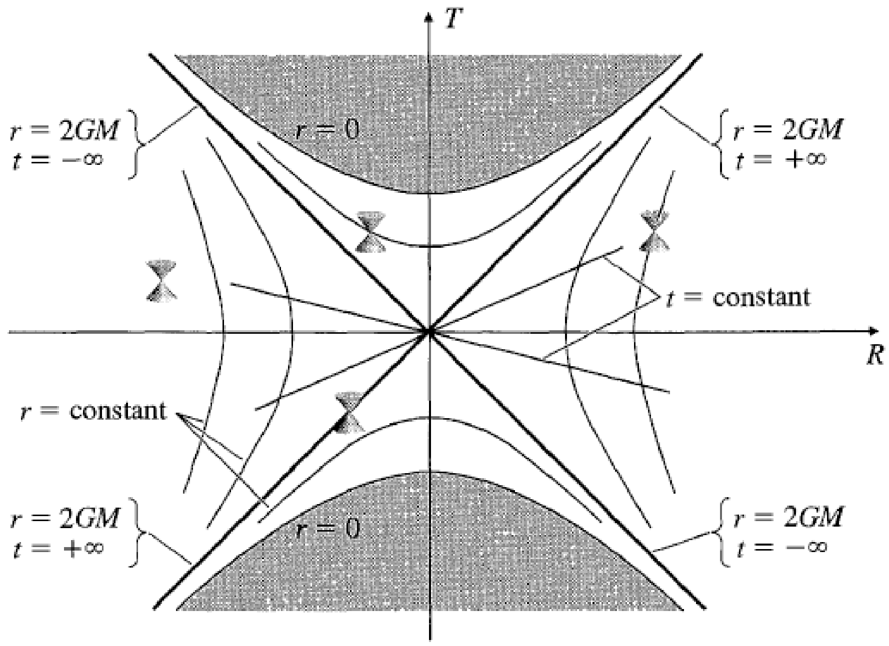
Για να μπορέσουμε να απεικονίσουμε την πολλαπλότητα θα μελετήσουμε την επιφάνεια όπου η μια σφαιρική συντεταγμένη είναι σταθερή, πχ $\theta = \pi/2$ και θα την εμβαπτίσουμε στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο:

$$ds^2 = F^2 dR^2 + r^2 d\phi \tag{3.6.23}$$

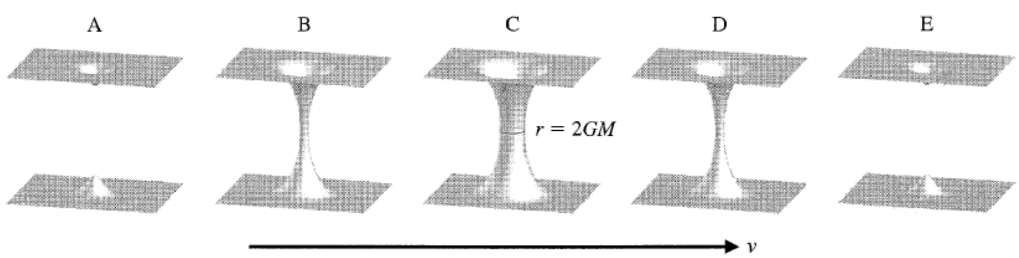
Για σταθερή τιμή της συντεταγμένης T, οι συντεταγμένες r, R συνδέονται ως:

$$R^2 - T_0^2 = (r - 2M)\, e^{r/2M} \tag{3.6.24}$$

Για $T = 0$ παρατηρούμε πως για τιμές της συντεταγμένης R από το $+\infty$ στο $-\infty$ η συντεταγμένη r παίρνει τιμές που ελλατώνονται έως ότου φθάσει την ελάχιστη τιμή $r = 2M$ για $R = 0$ και μετά αυξάνεται ξανά. Η απεικόνιση της πολλαπλότητας μοιάζει με δύο ξεχωριστούς αλλά πανομοιότυπους ασυμπτωτικά επίπεδους Schwarzschild χωρόχρονους να συνδέονται με έναν "λαιμό" που χαρακτηρίζε-



Σχήμα 3.6.1: Το διάγραμμα Kruskal: μια δυσδιάστατη τομή της γεωμετρίας μιας Schwarzschild συναρτήσει των συντετεγμώνων (R, T) συμπιέζοντας τις γωνιακές συντεταγμένες. Οι καμπύλες σταθερού t αποτελούν ευθείες διερχόμενες από την αρχή των αξόνων ενώ οι σχεδιασμένες υπερβολές χαρακτηρίζονται από σταθερό r. [8]



Σχήμα 3.6.1.1: Για $T = 0$ τα δύο σύμπαντα συναντούνται στον λαιμό $r = 2M$. Για μεγαλύτερες τιμές της συντεταγμένης T ο λαιμός στενεύει έως ότου οι δυο περιοχές αποκολληθούν τελείως. [8]

ται από r=2M. Η ίδια συμπεριφορά εμφανίζεται και για μεγαλύτερες τιμές της συντεταγμένης T απλά παρουσιάζοντας στενότερο λαιμό έως ότου αυτή πάρει την τιμή $T = 1$ όπου τα δυο σύμπαντα ίσα που ακουμπούν το ένα το άλλο την ομοιομορφία $r = 0$. Για μεγαλύτερες τιμές του T οι δυο ασυμπτωτικά επίπεδοι χώροι δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Η γέφυρα αυτή κλείνει αρκετά γρήγορα ώστε κανένας χρονοειδής παρατηρητής δεν προλαβαίνει να την διασχίσει. Για αυτό και δεν μπορεί να υπάρχει επικοινωνία μεταξύ των δύο συμπάντων. Λόγω χρονικής συμμετρίας, η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται αν κινηθούμε από το $T = 0$ πίσω στο χρόνο.

3.7 Ισοτροπικές Συντεταγμένες

Στην Αριθμητική Σχετικότητα είναι σε πολλές περιπτώσεις βοηθητικό να εκφράσουμε την μετρική με τρόπο ώστε το χωρικό της κομμάτι να είναι *Συμμορφικά Επίπεδο*. Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων που πράγματι δίνει μια τέτοια μετρική είναι:

$$r = \tilde{r}\left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^2 \tag{3.7.1}$$

όπου $\tilde{r}$ η ισοτροπική ακτίνα. Το σύστημα αυτό συντεταγμένων καλείται **Ισοτροπικό Σύστημα Συντεταγμένων**. Πράγματι αυτός ο μετασχηματισμός δίνει το στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - 2M/\tilde{r}}{1 + 2M/\tilde{r}}\right)^2 dt^2 + \psi^4(dr^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2) \tag{3.7.2}$$

καθώς από $r = \tilde{r} + M + \frac{M^2}{4\tilde{r}}$ βρίσκουμε πως:

$$dr = \left(1 - M/2\tilde{r}^2\right) d\tilde{r} \tag{3.7.3}$$

και

$$1 + \frac{M}{2r} = 1 + \frac{M/2\tilde{r}}{(1 + M/2\tilde{r})^2} = \left(\frac{1 - 2M/\tilde{r}}{1 + 2M/\tilde{r}}\right)^2 \tag{3.7.4}$$

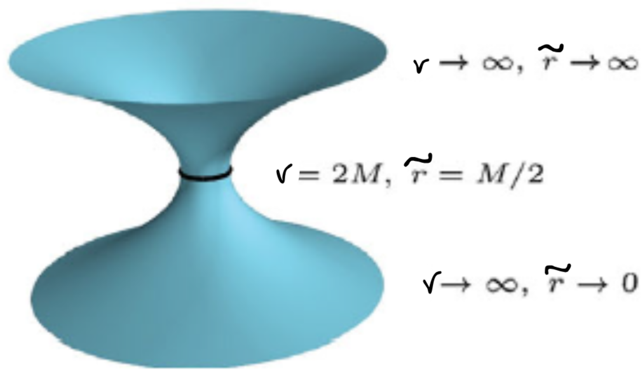
Ο σύμμορφος παράγοντας είναι $\psi = 1 + 2M/\tilde{r}$. Πρώτον, παρατηρούμε πως η μετρική σε αυτές τις συντεταγμένες ορίζεται κανονικά στον ορίζοντα γεγονότων όπου σε αυτές τις συντεταγμένες αντιστοιχεί για $\tilde{r} = M/2$. Ωστόσο η μετρική φαίνεται να παρουσιάζει ιδιομορφία στο $\tilde{r} = 0$. Η τιμή αυτή βέβαια αντιστοιχίζεται στο $r = \infty$ επομένως η ιδιομορφία οφείλεται στο σύστημα συντεταγμένων. Για να κατανοήσουμε καλύτερα το σύστημα αυτό συντεταγμένων, θα μελετήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Η συντεταγμένη $\tilde{r}$ εκφρασμένη συναρτήσει της r θα δοθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$\tilde{r}^2 + (M - r)\tilde{r} + \frac{M^2}{4} = 0 \tag{3.7.5}$$

όπου η διακρίνουσα είναι $\Delta = (r - M)^2 - M = r(r - 2M)$ οπότε τελικά:

$$\tilde{r} = \frac{1}{2}\left(r - M \pm \sqrt{r^2 - 2Mr}\right) \tag{3.7.6}$$

Από αυτή την έκφραση καθίσταται σαφές ότι αυτό το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να περιγράψει την περιοχή $r \geq 2M$. Αν γράψουμε τώρα τον αντίστροφο αυτό μετασχηματισμό στην μορφή $\tilde{r} = \frac{1}{2}\left(r - M \pm r\sqrt{1 - 2M/r}\right) \approx \frac{1}{2}\left(r - M \pm r\left[1 - \frac{M}{r} - \frac{M^2}{2r^2}\right]\right)$ κατανοούμε πως το ∞ των Schwarzschild συντεταγμένων αντιστοιχεί τόσο στο $\tilde{r} = 0$ όσο και στο ∞ των ισοτροπικών συντεταγμένων, δηλαδή το σύστημα αυτό συντεταγμένων μπορεί να περιγράψει τις δυο ασυμπτωτικά πανομοιότυπες περιοχές που αντιστοιχούν στα δύο ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα. Το ένα σύμπαν μάλιστα έχει συμπιεστεί στην περιοχή $\tilde{r} \in [0, M/2]$.



Σχήμα 3.7.1: Τόσο το ∞ όσο και το $\tilde{r} = 0$ αντιστοιχούν στο $r \to \infty$. Αυτές οι δυο περιοχές αντιστοιχούν στα δύο πανομοιότυπα σύμπαντα που επικοινωνούν μέσω της γέφυρας Rosen-Einstein [4]

4

Κατασκευή Αρχικών Δεδομένων

Η ανασκόπηση στη θεωρία των Schwarzschild μελανών οπών λειτουργεί σαν πέρασμα στα επόμενα κεφάλαια της μελέτης αυτής, όπου οι λύσεις αυτές θα μελετηθούν υπό το πρίσμα της αριθμητικής σχετικότητας. Για να διεξαχθεί δυναμική μελέτη, πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τα πεδία $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ σε μια αρχική υπερεπιφάνεια ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις περιορισμού. Πιο συγκεκριμένα ενδιαφέρον μας αποτελεί η εξαγωγή αρχικών δεδομένων για σφαιρικά συμμετρικές και χρονικά συμμετρικές λύσεις. Επομένως, τα στοιχεία της μετρικής πρέπει να μην εξαρτώνται από τον χρόνο και ταυτόχρονα το στοιχείο μήκους να μην εμπεριέχει μεικτούς όρους $dtdx^i$, άρα πρέπει τα διανύσματα $\beta^i = 0$. Από την εξίσωση της εξέλιξης της χωρικής μετρικής οι απαιτήσεις αυτές οδηγούν στο:

$$K_{ij} = 0 \tag{4.0.1}$$

και συμπέρασμα αυτού είναι πως οι εξισώσεις περιορισμού ορμής ικανοποιούνται ταυτοτικά. Η εξίσωση που καλούμαστε άρα να λύσουμε είναι η εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού. Για να απλοποιήσουμε την λύση της εξίσωσης, θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο όπου η μετρική θα γραφεί ως το γινόμενο μιας μετρικής που θα προσδιορίσουμε εμείς βάση των χαρακτηριστικών του χωροχρόνου που μελετάμε επί μια βαθμωτή ποσότητα την λύση της οποίας θα εξάγουμε μέσω της υπό μελέτης εξίσωσης. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται σύμμορφος μετασχηματισμός.

4.1 Σύμμορφος Μετασχηματισμός

Επιλέγουμε τον σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \tag{4.1.1}$$

ενώ η αντίστροφη μετρική ικανοποιεί:

$$\gamma^{ij} = \psi^{-4} \bar{\gamma}_{ij} \tag{4.1.2}$$

Ο παράγοντας ψ ονομάζεται **Σύμμορφος Παράγοντας** και η δύναμη στην οποία είναι υψωμένος αποτελεί μια τυχαία επιλογή. Θέλουμε η σύμμορφη μετρική να έχει ορίζουσα ίση με 1 και καθώς $det(aA) = a^n detA$ για a βαθμωτό και A $n \times n$ πίνακα:

$$\begin{aligned}&\gamma = \psi^{12}\bar{\gamma} \Rightarrow \psi^{12} = \gamma \Rightarrow \\ &\psi^4 = \gamma^{1/3}\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\gamma_{ij} = \gamma^{1/3}\bar{\gamma}_{ij} \tag{4.1.4}$$

Με βάση αυτά, επόμενο βήμα είναι η μελέτη της σύμορφης μορφής των συμβόλων Christoffel αλλά και του χωρικού τανυστή Ricci και της Ricci χωρικής καμπυλότητας. Αντικαθιστώντας την χωρική μετρική με την σύμμορφη στην έκφραση των συμβόλων Chrisoffel και με κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στον συσχετισμό τους με την σύμμορφη μορφή τους:

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_k\gamma_{lj} + \partial_j\gamma_{lk} - \partial_l\gamma_{jk}) \\
&= \frac{1}{2}\psi^{-4}\bar{\gamma}^{il}(\partial_k(\psi^4\bar{\gamma}_{lj}) + \partial_j(\psi^4\bar{\gamma}_{lk}) - \partial_l(\psi^4\bar{\gamma}_{jk})) \\
&= \frac{1}{2}\psi^{-4}\psi^4\bar{\gamma}^{il}(\partial_k\bar{\gamma}_{lj} + \partial_j\bar{\gamma}_{lk} - \partial_l\bar{\gamma}_{jk}) + \\
&\quad \frac{1}{2}\psi^{-4}\bar{\gamma}^{il}(\partial_k\psi^4\bar{\gamma}_{lj} + \partial_j\psi^4\bar{\gamma}_{lk} - \partial_l\psi^4\bar{\gamma}_{jk}) \Rightarrow \\
\Gamma^i_{jk} &= \bar{\Gamma}^i_{jk} + 2(\delta^i_j\bar{D}\ln\psi + \delta^i_k\bar{D}_j\ln\psi - \bar{\gamma}^{il}\bar{\gamma}_{jk}\bar{D}_l\ln\psi)
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Με παρόμοιο τρόπο εξάγουμε αντίστοιχη σχέση για τον χωρικό τανυστή Ricci:

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\left(\bar{D}_i\bar{D}_j\ln\psi + \bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}\bar{D}_l\bar{D}_m\ln\psi\right) + 4\left((\bar{D}_i\ln\psi)(\bar{D}_j\ln\psi) - \bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}(\bar{D}_l\ln\psi)(\bar{D}_m\ln\psi)\right) \tag{4.1.6}$$

Συστέλλοντας τώρα τη σχέση αυτή με την αντίστροφη σύμμορφη χωρική μετρική εξάγεται η σχέση που συνδέει την χωρική Ricci καμπυλότητα με την σύμμορφη μορφή της:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^{ij}R_{ij} &= \bar{\gamma}^{ij}\bar{R}_{ij} - 2\left(\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_i\bar{D}_j\ln\psi + \bar{\gamma}^{ij}\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}\bar{D}_l\bar{D}_m\ln\psi\right) \\
&+ 4\left(\bar{\gamma}^{ij}(\bar{D}_i\ln\psi)(\bar{D}_j\ln\psi) - \bar{\gamma}^{ij}\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{lm}(\bar{D}_l\ln\psi)(\bar{D}_m\ln\psi)\right) \Rightarrow \\
\psi^4 R &= \bar{R} - 8\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_i\bar{D}_j\ln\psi - 8\bar{\gamma}^{ij}(\bar{D}_i\ln\psi)(\bar{D}_j\ln\psi) \\
&= \bar{R} - \frac{8}{\psi}\bar{D}_i\bar{D}_j\psi + \frac{8}{\psi^2}(\bar{D}_i\psi)(\bar{D}_j\psi) - \frac{8}{\psi^2}(\bar{D}_i\psi)(\bar{D}_j\psi)
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

επομένως η χωρική Ricci καμπυλότητα συνδέεται με την σύμμορφη μορφή της ως:

Πρόταση 4.1: Σύνδεση χωρικής Ricci καμπυλότητα με την σύμμορφη μορφή της

$R = \psi^{-4}\bar{R} - 8\psi^{-5}\bar{D}^2\psi$

όπου $\bar{D}^2$ ο συναλλοίωτος τανυστής Laplace $\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_i\bar{D}_j$ που συνδέεται με την σύμμορφη μετρική. Σκοπός της εξαγωγής της σχέσης αυτής είναι να γραφεί η εξίσωση του χαμιλτονιανού περιορισμού συναρτήσει του σύμμορφου παράγοντα ψ. Αντικαθιστώντας προκύπτει πως:

Πρόταση 4.2: Χαμιλτονιανός Περιορισμός συναρτήσει σύμμορφου παράγοντα ψ

$8\bar{D}^2\psi - \psi\bar{R} - \psi^5K^2 + \psi^5K^{ij}K_{ij} = -16\pi\rho\psi^5$

4.2 Αρχικά Δεδομένα για Schwarzschild Μελανές Οπές

Στην παράγραφο αυτό θα λύσουμε την εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού στην μορφή που εξάγαμε παραπάνω για χρονικά συμμετρικά αρχικά δεδομένα. Όπως αναλύθηκε προηγουμένως, για χρονικά συμμετρικές λύσεις είναι $K_{ij} = 0$ και επομένως και $K = 0$. Επιπλέον αναζητούμε λύσεις στο κενό οπότε $\rho = 0$. Μια σημαντική υπόθεση ακόμα που επιβάλλεται είναι η μετρική να είναι συμμορφικά επίπεδη, δηλαδή:

$$\bar{\gamma}_{ij} = \eta_{ij} \tag{4.2.1}$$

Υπό αυτή την συνθήκη η καμπυλότητα Ricci που συσχετίζεται με την συμμορφική μετρική μηδενίζεται. Η εξίσωση που καλούμαστε να επιλύσουμε τελικά είναι η εξίσωση Laplce:

$$\bar{D}^2\psi = 0 \tag{4.2.2}$$

Ο τελεστής Laplace επομένως είναι ο τελεστής Laplace του τρισδιάστατου επίπεδου χώρου και καθώς αναζητούμε λύσεις σφαιρικά συμμετρικές $\psi = \psi(r)$ αναπτύσσοντας τον τελεστή Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες το πρόβλημα θα πάρει την μορφή:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0 \tag{4.2.3}$$

η λύση της οποίας έχει την μορφή:

$$\psi = A + \frac{B}{r^2} \tag{4.2.4}$$

Ως συνοριακή συνθήκη επιβάλουμε η μετρική να είναι ασυμπτωτικά επίπεδη, δηλαδή για $r \to +\infty$ ο συμμορφικός παράγοντας $\psi \to 1$. Η συνοριακή συνθήκη αυτή δίνει πως η σταθερά $A = 1$. Το στοιχείο μήκους θα γραφεί επομένως:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{B}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega) \tag{4.2.5}$$

Η μετρική αυτή είναι η χωρική μετρική μιας Schwarschild μελανής οπής εκφρασμένη στις ισοτροπικές συντεταγμένες. Η μάζα της μελανής οπής επομένως ταυτοποιείται ως $M = 2B$. Δηλαδή το στοιχείο μήκους που αντιστοιχεί στα αρχικά δεδομένα του προβλήματος δίνεται τελικά ως:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega) \tag{4.2.6}$$

Η μετρική παρουσιάζει ιδιομορφία για $r = 0$. Ωστόσο μπορεί να δειχθεί πως αυτή η ιδιομορφία δεν αποτελεί μια φυσική ιδιομορφία αλλά οφείλεται στο σύστημα συντεταγμένων. Μετασχηματίζουμε την ισοτροπική ακτινική συντεταγμένη ως:

$$r = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \frac{1}{\hat{r}} \tag{4.2.7}$$

Είναι:

$$dr = -\left(\frac{M}{2}\right)^2 \frac{1}{\hat{r}} d\hat{r}$$

$$\left(1 + \frac{M}{2r}\right) = \left(1 + \frac{2\hat{r}}{M}\right)$$

αντικαθιστώντας αποδεικνύεται ότι υπό αυτό τον μετασχηματισμό το στοιχείο μήκους παραμένει αμετάβλητο:

$$\begin{aligned} dl^2 &= \left(1 + \frac{2\hat{r}}{M}\right)^4 \left(\frac{M}{2\hat{r}}\right)^4 (d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega) \\ &= \left(1 + \frac{M}{2\hat{r}}\right)^4 (d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Δηλαδή η γεωμετρία που λαμβάνεται από την μετρική για $r = a$ είναι ίδια με αυτή που λαμβάνεται από την μετρική για $\hat{r} = a$, δηλαδή ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί μια ισομμετρία του χώρου της μελέτης μας. Η αρχή $r = 0$ είναι ισομορφική με το χωρικό άπειρο, το οποίο είναι καλά ορισμένο. Η επιφάνεια μιας σφαίρας σταθερού r δίνεται ως:

$$A(r) = 4\pi r^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \tag{4.2.9}$$

με ακτίνα:

$$r_s(r) \equiv \sqrt{\frac{A(r)}{4\pi}} = r\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2 \tag{4.2.10}$$

Αναζητούμε την τιμή του r όπου η επιφάνεια γίνεται πιο στενή. Η λύση του $\frac{dr_s}{dr} = 0$ δίνει $r = \frac{M}{2}$ και αυτό περιγράφει τον *λαιμό της μελανής οπής*. Η ισομετρία που μελετούμε για $r = \frac{M}{2}$ παρατηρούμε δίνει $\hat{r} = \frac{M}{2}$. Επιπλέον είναι:

$$\hat{r} = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \frac{1}{\hat{r}'} \Rightarrow \hat{r}' = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \frac{1}{\hat{r}} = r \tag{4.2.11}$$

άρα η ισομετρία μπορεί να περιγραφεί ως κατροπτισμός ως προς τον λαιμό. Οι εξισώσεις περιορισμού επομένως για την αρχική χρονικά συμμετρική επιφάνεια έδωσαν ως λύση τη γεωμετρία Schwarzschild για $T = 0$, όπου όπως αναλύθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η υποπολλαπλότητα αυτή μπορεί να απεικονιστεί ως δυο ασυμπτωτικά επίπεδα και πανομοιότυπα σύμπαντα που ενώνονται από έναν λαιμό που ονομάσαμε Einstein-Rosen γέφυρα.

5

Επιλογή Συνθηκών Βαθμίδας

Ο καθορισμός των αρχικών δεδομένων δεν αποτελεί το μοναδικό προαπαιτούμενο πρωτού χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τις μεταβλητές του προβλήματος $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$. Πρέπει ακόμα να προσδιοριστούν και οι μεταβλητές βαθμίδας $\{\alpha, \beta^i\}$, η επιλογή των οποίων είναι ελεύθερη. Κάθε επιλογή οδηγεί και σε μια διαφορετική διαμέριση του χωροχρόνου. Ωστόσο αυτό δεν σημαίνει πως κάθε επιλογή αποτελεί και μια καλή επιλογή. Η ελευθερία της επιλογής εγείρει τη δυσκολία ότι αυτή πρέπει να γίνει έπειτα από προσεχτική μελέτη, καθώς μια όχι καλή επιλογή μπορεί να οδηγήσει στην κατάρρευση του κώδικα. Για αυτό μια απαίτηση είναι η επιλογή αυτή να μην οδηγεί σε ιδιομορφίες συντεταγμένων.

Αν αντικείμενο της μελέτης αποτελεί ένα αστροφυσικό σύστημα που περιέχει μια μελανή οπή, πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της διαμέρισης είναι *η αποφυγή σύγκρουσης με την φυσική ιδιομορφία*. Αν κάτι τέτοιο συμβεί, οι εξισώσεις και ο κώδικας θα καταρρεύσει. Επιπλέον, για να μπορέσει η προσομοίωση να καλύψει όλο τον χωρόχρονο πρέπει οι επιφάνειες να *διαπερνούν τον ορίζοντα*, αλλιώς το εσωτερικό της μελανής οπής δεν θα μπορέσει να μελετηθεί αριθμητικά. Πρωτού παρουσιαστούν και εξεταστούν αναλυτικότερα μέθοδοι που μπορούν να δώσουν μια διαμέριση για μια Schwarzschild μελανή οπή, είναι σκόπιμο να υπολογιστούν οι μεταβλητές βαθμίδας αυτοί που δίνουν διάφορες γνωστές μορφές της μετρικής που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αρχικά, επιλέγεται η τομή χρονικής συμμετρίας για να οριστούν τα αρχικά δεδομένα, που αποτελεί την επιφάνεια $v = 0$ για $0 \leq u \leq \infty$ για τις u, v συντεταγμένες ή ισοδύναμα στην επιφάνεια $t = 0$ για $2M \leq r \leq \infty$ για τις Schwarzschild συντεταγμένες. Οι συναρτήσεις βαθμίδας:

$$\alpha(r) = (1 - 2M/r)^{1/2}, \quad \beta^r(r) = 0, \tag{5.0.1}$$

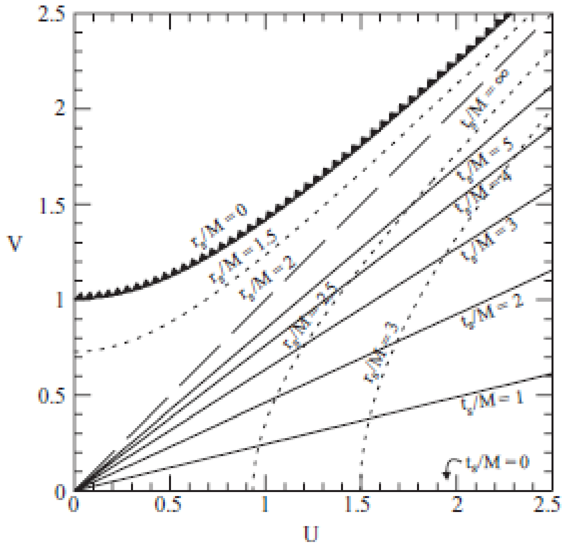
δίνουν την λύση του Schwarzschild χωρόχρονου σε Schwarzschild συντεταγμένες. Η διαμέριση αυτή δεν θα συναντήσει ποτέ την μοναδικότητα καθώς δεν θα καταφέρει αρχικά να διαπεράσει τον ορίζοντα καθώς εκεί η συνάρτηση lapse μηδενίζεται. Η ίδια ακριβώς διαμέριση λαμβάνεται αν γίνει μετασχηματισμός συντεταγμένων στις ισοτροπικές συντεταμένες οπότε συναρτήσει αυτών οι συναρτήσεις βαθμίδας δίνονται ως:

$$\alpha(\tilde{r}) = \frac{1 - M/2\tilde{r}}{1 + M/2\tilde{r}}, \quad \beta^{\tilde{r}}(\tilde{r}) = 0, \tag{5.0.2}$$

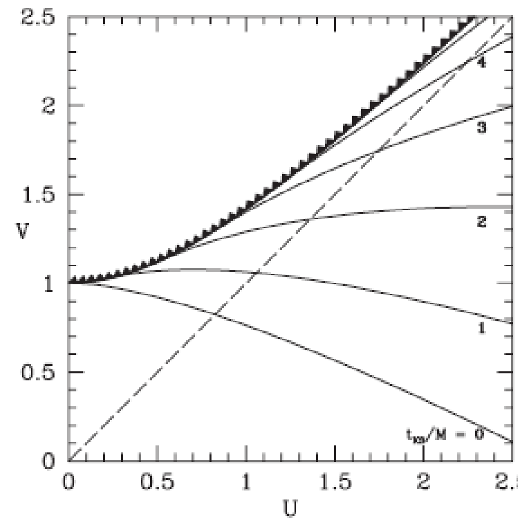
Μια διαφορετική διαμέριση είναι αυτή που δίνει τη μετρική στη μορφή Kerr-Schild. Εδώ τα αρχικά δεδομένα δεν ορίζονται στην επιφάνεια χρονικής συμμετρίας που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά σε μια επιφάνεια σταθερού Eddigton-Finkelstein χρόνου $\tilde{t} = const.$, η οποία δεν είναι χρονικά συμμετρική όπως και καμιά τομή σταθερού Eddigton-Finkelstein χρόνου, καθώς τα διαγώνια στοιχεία του K_{ij} δεν μηδενίζονται. Οι μεταβλητές βαθμίδας δίνονται εδώ ως:

$$\alpha(r) = \left(\frac{r}{r + 2M}\right)^{1/2}, \quad \beta^r(r) = \frac{2M}{r + 2M}. \tag{5.0.3}$$

Αν κανείς απεικονίσει σε διάγραμμα Kruskal-Szekeres τις επιφάνειες σταθερού Eddigton-Finkelstein



Σχήμα 5.0.1: Η Schwarzschild διαμέριση



Σχήμα 5.0.2: Η Kerr-Schield διαμέριση

Στην πρώτη περίπτωση, η διαμέριση σταματά όταν οι επιφάνειες σταθερού Schwarzschild χρόνου συναντήσουν τον ορίζοντα $r = 2M$. Αντίθετα, οι επιφάνειες σταθερού Eddigton-Finkelstein χρόνου, διαπερνούν τον ορίζοντα αλλά η σύγκρουσή τους με την φυσική ιδιομορφία στο r=0 είναι αναπόφεκτη. [3]

χρόνου, λαμβάνει μια διαμέριση που έχει την ικανότητα να διαπερνά τον ορίζοντα αλλά δεν αποφεύγει τη σύγκρουση με την ιδιομορφία.

5.1 Γεωδαισιακή Διαμέριση

Η πιο διαισθητική επιλογή θα ήταν:

$$\alpha = 1 \quad \beta^i = 0 \tag{5.1.1}$$

και αυτό γιατί με αυτή την επιλογή η ταχύτητα των κανονικών παρατηρητών ταυτίζεται με αυτή των συντεταγμένων παρατηρητών και ο ιδιόχρονος που μετρούν οι κανονικοί παρατηρητές ισούται με τον συντεταγμένο χρόνο. Η επιτάχυνση των κανονικών παρατηρητών για αυτή την επιλογή της lapse συνάρτησης είναι:

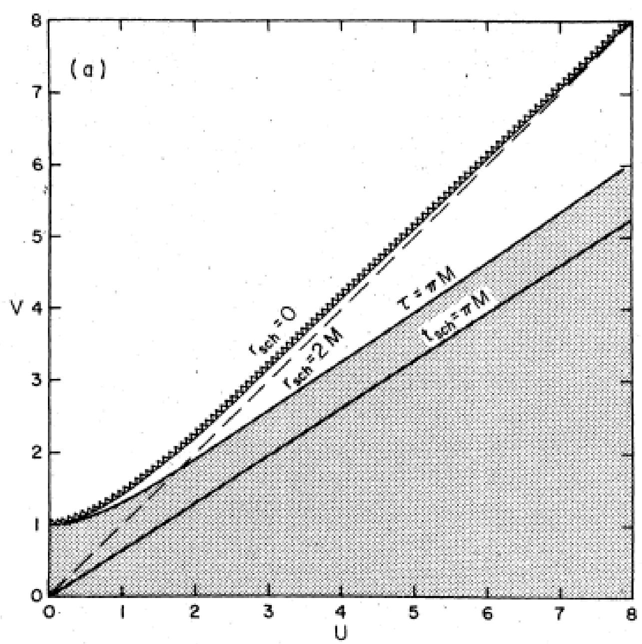
$$\alpha_\beta = D_\beta \ln \alpha = 0 \tag{5.1.2}$$

άρα αφού η επιτάχυνση μηδενίζεται, οι κανονικοί παρατηρητές ακολουθούν τις γεωδαισικές τροχιές. Για αυτό αυτή η διαμέριση αυτή αποκαλείται **Γεωδαισιακή**. Η διαμέριση αυτή μελετήθηκε αναλυτικά από τους Hahn και Lindquist [14]. Μπορεί να φαίνεται ως μια φυσική επιλογή ωστόσο εύκολα μπορεί να αποδειχθεί πως εμφανίζει σημαντικά προβλήματα. Για αυτή την επιλογή βαθμίδας το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας εξελίσσεται ως:

$$\partial_t K = K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho + S) \geq 0 \tag{5.1.3}$$

Η ποσότητα αυτή είναι μη αρνητική καθώς η ποσότητα $K^{ij}K_{ij}$ είναι μη αρνητική όπως και η ποσότητα $\rho + S$ για συνθήκη ισχυρής ενέργειας. Αυτό συνεπάγεται πως το ίχνος K αυξάνεται χωρίς σύνορο. Θεωρούμε τώρα τον στοιχειώδη τρισδιάστατο κανονικό όγκο:

$$\Delta V(t) = \sqrt{\gamma(t, \boldsymbol{x})} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{5.1.4}$$



Σχήμα 5.1.1: Οι τομές κατά την γεωδαισιακή διαμέριση θα χτυπήσουν πάνω στην ιδιομορφία $r_s = 0$ μετά από συντεταγμένο χρόνο $t = \pi M$. Η τελευταία αυτή τομή πλησιάζει ασυμπτωτικά $t_{sch} = \pi M$ επομένως καλύπτεται μόνο ένα μικρό κομμάτι της εξωτερικής λύσης επιλέγοντας αυτή τη διαμέριση. [19]

για τον οποίο ο κλασματικός ρυθμός μεταβολής είναι:

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{d}{dt}[\Delta V] = \partial_t(\ln\sqrt{\gamma}) \tag{5.1.5}$$

όπου για την Γωεδαισιακή Διαμέριση ισούται:

$$\partial_t(\ln\sqrt{\gamma}) = -K \tag{5.1.6}$$

Το K αυξάνεται απεριόριστα και επομένως ο τριασδιάστατος κανονικός όγκος θα καταρρεύσει στο μηδέν οδηγώντας σε ιδιομορφία των συντεταγμένων.

Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, η οποία αφορά τις μελανές οπές Schwarzschild, μπορεί να δειχθεί ότι η γεωδαισιακή διαμέριση οδηγεί όχι μόνο σε ιδιομορφία συντεταγμένων, αλλά και σε σύγκρουση με τη φυσική ιδιομορφία του χωροχρόνου εντός πεπερασμένου ιδιοχρόνου. Ένας κανονικός παρατηρητής, ο οποίος ξεκινά από την ηρεμία στην υπερεπιφάνεια $v = 0$ και στο σημείο $u = 0$, φτάνει στην ιδιομορφία στο $r = 0$ εντός ιδιοχρόνου $\tau = \pi M$.Εφόσον επιλέξουμε lapse $\alpha = 1$, οι υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου t ταυτίζονται με υπερεπιφάνειες σταθερού ιδιοχρόνου. Έτσι, η υπερεπιφάνεια $t = \pi M$ χτυπά αναπόφευκτα την ιδιομορφία, προκαλώντας κατάρρευση της διαμέρισης και καθιστώντας τις εξισώσεις εξέλιξης μη ορισμένες πέρα από αυτό το σημείο.Συνεπώς, μόνο μια μικρή περιοχή του χωροχρόνου μπορεί να καλυφθεί από κανονικές γεωδαισιακές τομές, γεγονός που συνεπάγεται ότι ο αριθμητικός μας κώδικας θα σταματήσει να εξελίσσεται σε σύντομο χρόνο, έχοντας προσομοιώσει μόνο περιορισμένη περιοχή του εξωτερικού χωροχρόνου.

5.2 Maximal Διαμέριση

Προφανώς, πρέπει να αναζητηθεί μια άλλη διαμέριση. Η γεωδαισιακή διαμέριση οδηγούσε σε ιδιομορφίες συντεταγμένων καθώς οι γεωδαισιακές συγκλίνουν εξαιτίας της ελκτικής φύσης της βαρύτητας, γεγονός που καταδεικνύεται από το μηδενισμό του στοιχείου όγκου που σχετίζεται με τους κανονικούς παρατηρητές όταν το K αυξάνεται χωρίς όριο. Για αυτό μια ιδέα είναι να είναι να επιβληθεί το στοιχείο όγκου αυτό να παραμένει σταθερός, δηλαδή:

$$\frac{\mathscr{L}_{\boldsymbol{n}} \Delta V}{\Delta V} = -K \tag{5.2.1}$$

όπου κατ' επέκταση για να παραμένει ο ρυθμός αυτός μεταβολής σταθερός, επιβάλλουμε το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας να είναι μηδενικό:

$$K = 0 \tag{5.2.2}$$

αλλά και να παραμένει σταθερό καθόλη την εξέλιξη:

$$\partial_t K = 0 \tag{5.2.3}$$

Για αυτή την επιλογή διαμέρισης, από την εξίσωση της εξέλιξης του ίχνους K δίνεται:

$$D^2\alpha = \alpha[K^{ij}K_{ij} + 4\pi(\rho + S)] \tag{5.2.4}$$

Επομένως για αυτή τη διαμέριση, η επιλογή της lapse συνάρτησης προκύπτει από την λύση αυτή της ελλειπτικής εξίσωσης, ανεξάρτητα από τα shift διανύσματα β^i. Η διαμέριση αυτή καλείται **Maximal Διαμέριση**. Αποδεικνύεται πως όταν $K = 0$, ο όγκος των χωρικών υπερεπιφανειών είναι μέγιστος ως προς μικρές διαταραχές στην υπερεπιφάνεια. Πράγματι, έστω μια τομή Σ η οποία είναι απειροστά παραμορφωμένη στην κατεύθυνση $d^\alpha = cn^\alpha + b^\alpha$, όπου c απειροστά μικρό και $b^\alpha n_\alpha = 0$. S είναι περιοχή της τομής στο σύνορο της οποίας ισχύει $b^\alpha = 0, c = 0$. Ο όγκος της περιοχής αυτής μεγιστοποιείται για $K = 0$ καθώς:

Πρόταση 5.1: Μεγιστοποίηση Όγκου περιοχής S της τομής Σ για $K = 0$

$\delta \mathrm{vol}(S) = -\int_S d^3x\, \sqrt{\gamma}\, cK$

Προχωρούμε σε αναλυτική απόδειξη. Ως γνωστό, είναι vol$(S) = \int_S d^3x\, \sqrt{\gamma}$. Η μεταβολή του όγκου αυτού λοιπόν γράφεται ως:

$$\delta \mathrm{vol}(S) = \int_S d^3x\, \delta\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2}\int_S d^3x\, \sqrt{\gamma}\, \gamma^{ij}\delta\gamma_{ij} \tag{5.2.5}$$

όπου η μεταβολή της χωρικής μετρικής μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{ij} = \mathscr{L}_{\mathbf{d}}\gamma_{ij} = \mathscr{L}_{c\mathbf{n}+\mathbf{b}}\gamma_{ij} &= c\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{ij} + \mathscr{L}_{\mathbf{b}}\gamma_{ij} \\ &= -2K_{ij} + \nabla_i b_j + \nabla_j b_i \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Αντικαθιστώντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στο σύνορο της περιοχής S:

$$\begin{aligned} \delta\text{vol}(S) &= \frac{1}{2}\int_S d^3x\,\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ij}(-2cK_{ij} + \nabla_i b_j + \nabla_j b_i) \\ &= -\int_S d^3x\,\sqrt{\gamma}\,cK + \int_{\partial S}\sqrt{h}\,s_i b^i \\ &= -\int_S d^3x\,\sqrt{\gamma}\,cK \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

καθώς το b^α μηδενίζεται στο σύνορο. Αποδείχτηκε το ζητούμενο, ότι η μεταβολή του όγκου της περιοχής S μηδενίζεται για $K = 0$ και επομένως τότε ο όγκος αυτός μεγιστοποιείται.

Μια εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα της Maximal διαμέρισης είναι πως αποφεύγεται η σύγκρουση με την φυσική ιδιομορφία. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Χαμιλτονιανού Περιορισμού στην εξίσωση (6), λαμβάνουμε πως η lapse συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την ελλειπτική εξίσωση:

$$D^2\alpha = \alpha R \tag{5.2.8}$$

Οι Smarr και York μελέτησαν αναλυτικά την κατάρρευση της συνάρτησης lapse στο μηδέν στην φυσική ιδιομορφία [19]. Θεώρησαν τη μετρική γ_{ij} να είναι επίπεδη σε πολικές συντεταγμένες και ένα σφαιρικό όγκο ακτίνας a στο εσωτερικό του οποίου η καμπυλότητα είναι $R = R_o$ ενώ εξωτερικά είναι $R = 0$. Δείξαν πως η συνάρτηση lapse τείνει στο μηδέν στο κέντρο εκθετικά ως:

$$\alpha_{min} \sim e^{-a\sqrt{R_o}} = e^{-x_o} \tag{5.2.9}$$

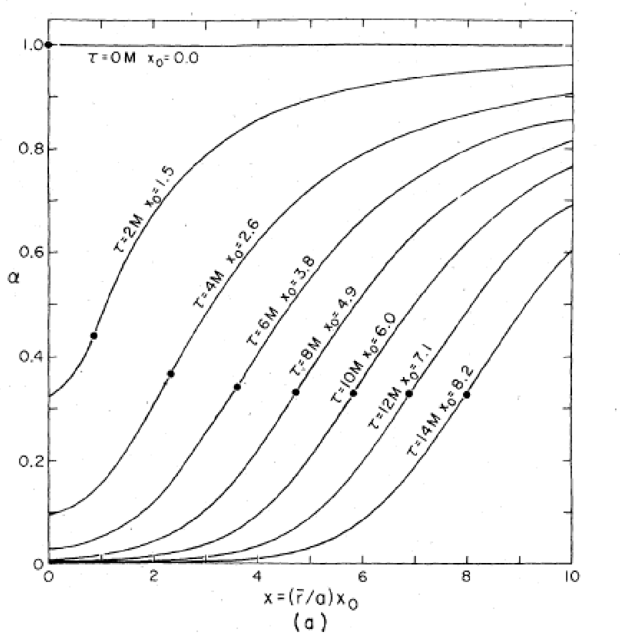
όπου x_o η παράμετρος ισχύς. Αναφέρεται μάλιστα και παρουσιάζεται γραφικά η αριθμητική μελέτη αυτής της συμπεριφοράς για τη γεωμετρία Schwarzschild όπως μελετήθηκε από τους EWCDST (6) και τελειοποιήθηκε μετέπειτα από τους Smarr και Eppley. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η συνάρτηση lapse συναρτήσει της αδιάστατης ισχύς της καμπυλότητας, η οποία εξαρτάται από την γενίκευση σε σφαιρικές συντεταγμένες της παραμέτρου ισχύς, την οποία οι Smarr και York ορίζουν ως:

$$x_0 = \int_0^\infty R^{1/2}\,\gamma_{rr}^{1/2}\,dr \equiv a\,[R(r=0)]^{1/2} \tag{5.2.10}$$

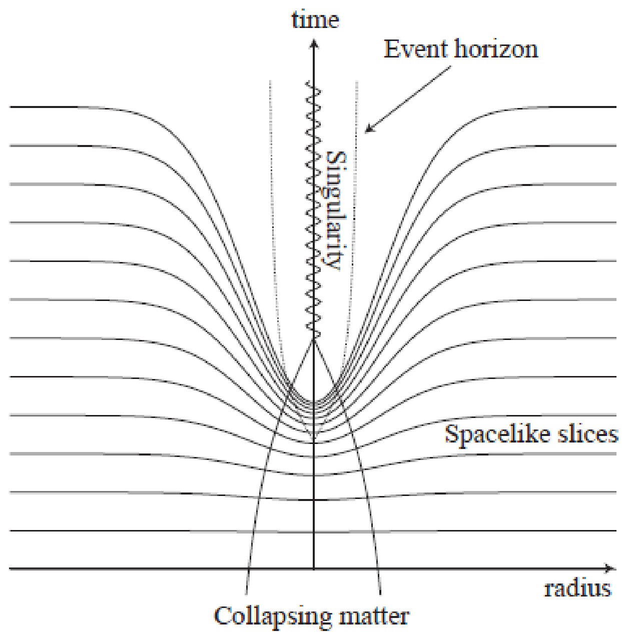
η οποία είναι πάντα πραγματική και πεπερασμένη καθώς $R \geq 0, \quad R = \mathscr{O}(r^{-4}), \quad \gamma_{rr} = 1 + \mathscr{O}(r^{-1})$. Στο διάγραμμα παρουσιάζονται maximal τομές παραμετροποιημένες από τον ιδιόχρονο που μετράται σε μακρυνή απόσταση. Μελετήθηκε πως καθώς η lapse συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο που τείνει στο μηδέν κοντά στην φυσική ιδιομορφία για μεγάλους χρόνους. Συγκεκριμένα, υπολογίσαν πως για μεγάλους χρόνους:

$$\alpha_{min} \sim e^{-0.97x_o}. \tag{5.2.11}$$

Με αυτό τον τρόπο η εξέλιξη παύει όταν το x_o αυξάνεται ραγδαία πρωτού οι εξισώσεις έρθουν αντιμέτωπες με την ιδιομορφία και επομένως καταρρεύσουν. Λόγω του ελλειπτικού χαρακτήρα της εξίσωσης (5.2.8), η τιμή α_{min} επηρεάζεται όχι μόνο από την τοπική συμπεριφορά της ισχύς της καμπυλότητας, αλλά από την ολική συμπεριφορά της και επομένως και την ραγδαία αύξησή της.



Σχήμα 5.2.1: Η συνάρτηση lapse συναρτήσει της αδιάστατης ακτίνας, $x = (\bar{r}/a)x_o$, όπου $\bar{r}$ η απόσταση από τον λαιμό.



Σχήμα 5.2.2: Εικόνα 2: Το "πάγωμα" της συνάρτησης lapse κοντά στην ιδιομορφία.

Στην εικόνα 5.2.1 παρουσιάζεται η συνάρτηση lapse για μεγάλους χρόνους, η συνάρτηση lapse καταρρέει γρήγορα κοντά στον λαιμό. Σε κάθε καμπύλη σημειώνεται με τελεία ο ορίζοντας γεγονότων $r_{event\_horizon} = 2M$. Στην εικόνα 5.2.2 παρουσιάζεται το "πάγωμα" της συνάρτησης lapse κοντά στην ιδιομορφία. Η εξέλιξη σταματά κοντά στην ίδιομορφία, αλλά πραγματοποιείται κανονικά μακριά από αυτή.

5.3 Maximal Διαμέριση μιας Schwarzschild μελανής οπής

Η μελέτη τώρα θα επικεντρωθεί στην συμπεριφορά της συνάρτησης lapse κατά τη maximal διαμέριση για μια Schwarzschild μελανή οπή. Η ανάλυση θα βασιστεί στη δουλειά των Beig και Murchadha [5], [6]. Αρχικά θεωρούμε τη Schwarzschild μετρική μιας Schwazschild μελανής οπής:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.3.1}$$

Για την περιοχή $r < 2M$ όπως εξηγήθηκε και παραπάνω, το t αποτελεί μια χρονική συντεταγμένη ενώ το r την χρονική συντεταγμένη. Από αυτό μπορεί εύκολα να υπολογιστεί πως θεωρούσαμε τομές σταθερού r, η συνάρτηση lapse θα ήταν:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}} \tag{5.3.2}$$

ενώ η ορίζουσα της χωρικής μετρικής δίνεται:

$$\gamma = r^4 \sin^2\theta \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \tag{5.3.3}$$

και από αυτά υπολογίζουμε το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας:

$$\frac{d}{dr}\ln\gamma = 2\alpha K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{3M-2r}{r^2\sqrt{2M/r-1}} \tag{5.3.4}$$

Μια τέτοια διαμέριση θα ήταν maximal μόνο για $r = 3M/2$, που όπως θα δειχθεί στη συνέχεια αποτελεί μια οριακή τομή για την maximal φυλλοποίηση. Θα αναζητήσουμε αρχικά τέτοια διαμέριση ώστε οι επιφάνειες να χαρακτηρίζονται από σταθερό:

$$\sigma(t,r) = t - F(r) = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad t = F(r) + \sigma \tag{5.3.5}$$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής της υπερεπιφάνειας είναι:

$$n_\mu = -N\nabla_\mu\sigma = -N(1, -F') \tag{5.3.6}$$

όπου N ένας παράγοντας κανονικοποίησης ώστε το διάνυσμα αυτό να είναι μοναδιαίο. Επίσης με F' συμβολίζουμε την παραγώγιση $F' = \frac{dF}{dr}$. Ως χρονοειδές διάνυσμα πρέπει να ικανοποιεί:

$$n_\mu n^\mu = N^2\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)F'^2\right] = -1 \Rightarrow \tag{5.3.7}$$

$$F'^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{1}{N^2} \tag{5.3.8}$$

Ταυτόχρονα επιβάλουμε η τομή να είναι maximal οπότε πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$K = -\nabla_\mu n^\mu = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}n^\mu\right) \tag{5.3.9}$$

ή πιο συγκεκριμένα για τη Schwarzschild γεωμετρία και για το n^μ η εξίσωση αυτή δίνει:

$$0 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left[r^2NF'\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right] \Rightarrow r^2NF'\left(1-\frac{2M}{r}\right) = 0 \tag{5.3.10}$$

όπου C μια σταθερά. Συνδυάζοντας τις (5.3.8) και (5.3.10) εξάγουμε τη σχέση για το N:

$$N = \frac{1}{r^2}\left(r^4 - 2Mr^3 + C^2\right)^{1/2} \tag{5.3.11}$$

και εισάγοντας αυτό το αποτέλεσμα στην (5.3.8) λαμβάνουμε:

$$F' = \pm\frac{C}{(1-2M/r)\sqrt{r^4-2Mr^3+C^2}} \tag{5.3.12}$$

Δεν πρέπει να παραληφθεί πως το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ πρέπει να δείχνει προς το μέλλον. Για $r > 2M$ χρονική συντεταγμένη είναι ο χρόνος Schwarzschild t, οπότε ανεξάρτητα του προσήμου του F', το διάνυσμα είναι προσανατολισμένο προς το μέλλον. Για $r < 2M$ ωστόσο η χρονική συντεταγμένη είναι το r άρα πρέπει $n_r = NF' > 0$. Προφανώς για $r < 2M$ η έκφραση F' είναι θετική για το αρνητικό πρόσημο.

Υπενθυμίζεται πως για να μελετηθεί σωστα ο χωρόχρονος Schwarzschild πρέπει η διαμέριση και να *αποφεύγει την ιδιομορφία.* Για να μην υπάρχει σύγκρουση με την ιδιομορφία, οι τομές πρέπει να έρχονται από το άπειρο, να εμφανίζουν μια ελάχιστη τιμή του r μέσα στο λαιμό της γέφυρας Einstein-Rosen και μετά να συνεχίζουν προς το άπειρο του ασυμπτωτικά πανομοιότυπου σύμπαντος. Στο σημείο αυτό πρέπει $F' = \frac{dt}{dr}$ να απειρίζεται καθώς οι τομές στο σημείο αυτό γίνονται εφαπτόμενες στις επιφάνειες σταθερού r. Επομένως επόμενο βήμα είναι η μελέτη των πόλων της F'. Ο απειρισμός της F' στο $r = 2M$ οφείλεται στη ιδιομορφία που παρουσιάζουν οι συντεταγμένες Schwarzschild σε αυτή την τιμή του r, άρα για να μπορούν οι maximal τομές να παρουσιάζουν τη συμπεριφορά που αναφέρθηκε παραπάνω, πρέπει η F' να παρουσιάζει πόλους εκτός του $r = 2M$. Με άλλα λόγια, πρέπει να έχει λύσεις το πολυώνυμο:

$$P(r) = r^4 - 2Mr^3 + C^2 \tag{5.3.13}$$

Η ακραία τιμή του πολυωνύμου υπολογίζεται από:

$$P'(r_*) = 4r_*^3 - 6Mr_*^2 = 2r_*^2(2r_* - 3M) = 0 \Rightarrow r_* = 3M/2 \tag{5.3.14}$$

το οποίο σχετίζεται με την οριακή maximal τομή. Το πολυώνυμο εμφανίζεται σε αυτή την τιμή ελάχιστο καθώς για $r > 0$ το $P'(r, C)$ είναι αρνητικό για τιμές $r < r_*$ και θετικό για $r > r_*$. Επομένως, για να μπορεί το πολυώνυμο να έχει δυο θετικές ρίζες πρέπει να ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} P(3M/2) &< 0 \Rightarrow \frac{81M^4}{16} - \frac{54M^4}{8} + C^2 < 0 \\ C^2 &< \frac{27M^4}{16} \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Ονομάζουμε την μεγαλύτερη ρίζα r_C. Καθώς:

$$0 < C^2 < \frac{27M^4}{16} \tag{5.3.16}$$

Για την τιμή $C^2 = 0$ ο πόλος $r_C = 2M$ ενώ για όταν $C^2 \to \frac{27M^4}{16}$ η ρίζα του πολυωνύμου προσεγγίζει $r \to r_* = \frac{3M}{2}$. Ολοκληρώνοντας:

$$F(r, C) = -\int_{r_C}^{r} \frac{C}{\left(1 - \frac{2M}{x}\right)\sqrt{P(x)}}\, dx \tag{5.3.17}$$

όπου το ολοκλήρωμα στον πόλο $r = 2M$ λαμβάνεται υπό το πρίσμα της μεθόδου του Cauchy. Υπάρχει και μια δεύτερη οικογένεια λύσεων, όπου τα όρια του ολοκληρώματος κυμαίνονται από το $r = 0$ στη μικρότερη ρίζα του πολυωνύμου, η οποία ωστόσο δεν μελετάται καθώς χτυπά τη φυσική ιδιομορφία.

Οι maximal τομές είναι πράγματι ομαλές τον ορίζοντα και αυτό γίνεται ξεκάθαρο αν μελετήσουμε τη μετρική στη μορφή Kerr-Schild. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$H(r, C) := F(r, C) + 2M \ln(r - 2M) \tag{5.3.18}$$

η οποίο πράγματι συνδέεται με τον χρόνο Eddigton-Finkelstein ως:

$$H(r, C) = t - \sigma + 2M \ln(2M - r) = \tilde{t} - \sigma \tag{5.3.19}$$

Η συνάρτηση $H(r, C)$ ορίζεται ομαλά στον ορίζοντα γεγονότων καθώς:

$$\frac{dH}{dr} = \frac{Cr - 2M}{(r - 2M)\sqrt{P(r)}} \tag{5.3.20}$$

και άρα καθώς προσεγγίζει τον ορίζοντα:

$$\lim_{r \to 2M} \frac{dH}{dr} = \frac{8M^4}{C^2} - 1 \tag{5.3.21}$$

Θεωρούμε, τώρα, μια αρχική επιφάνεια $\sigma = 0$. Υπάρχουν δυο τρόπου να εξαχθούν τώρα οι maximal επιφάνειες. Αν θεωρηθεί $C = 0$, τότε $\sigma = t = const.$. Αυτές οι επιφάνειες χαρακτηρίζονται από σταθερό Schwarzschild χρόνο t, και είναι πράγματι maximal καθώς $K_{ij} = 0$, αφού για τη Schwarzschild μετρική $\partial_t \gamma_{ij} = 0$ καθώς και β^i=0. Ωστόσο, αυτή η διαμέριση δεν αποτελεί μια καθολική φυλλοποίηση του χωρόχρονου. Εδώ η αρχική επιφάνεια προωθείται κατά μήκος των καμπυλών που γεννά το διανυσματικό πεδίο $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$. Στο $r = r_C$ η συνάρτηση σ δεν είναι διαφορίσιμη στο r_C και άρα αποτελεί μονάχα μια τοπική φυλλοποίηση αφού δεν ικανοποιείται στο σημείο αυτό ο ορισμός (2.7). Η συνάρτηση N λειτουργεί ως μια συνάρτηση προώθησης του ∂_t ως προς τη $\sigma = 0$. Επίσης από το διάγραμμα Kruskal-Szekeres (5.3.2.1) καθίσταται σαφές πως οι επιφάνειες τέμνονται στο $(T, R) = (0, 0)$. Η διαμέριση αυτή καλείται *περιττή* καθώς η συνάρτηση N έχει τιμή 1 στο ένα άπειρο και -1 στο άλλο.

Ο τρόπος διαμέρισης που θα επιλεχθεί τελικά απορρέει μεταβάλλοντας την παράμετρο C. Για τιμές της παραμέτρου στο διάστημα $0 < C < \frac{3\sqrt{3}M^2}{4}$, το μελλοντικό ήμισυ από το Kruskal-Szekeres διάγραμμα φυλλοποιείται με maximal τρόπο για $r > 3M/2$. Ωστόσο αντί να επιλεγεί η παράμετρος C ως αυτή που θα ορίζει τις υπερεπιφάνειες, επιλέγουμε αυτές απλά να χαρακτηρίζονται από την παράμετρο αυτή αλλά να ορίζονται από τον ιδιόχρονο που μετράται στο άπειρο:

$$\tau(C) = t_\infty(C) = F(\infty, C) = -\int_{r_C}^{\infty} \frac{C}{(1 - 2M/x)\,[P(x)]^{1/2}}\, dx \tag{5.3.22}$$

με το κάθετο διάνυσμα να ορίζεται ως:

$$n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \tau \tag{5.3.23}$$

όπου α η συνάρτηση lapse. Εκφράζοντας το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{\xi}$ ως:

$$\xi^\mu = N n^\mu + X^\mu, \quad X^\mu n_\mu = 0 \tag{5.3.24}$$

και καθώς:

$$N = -n_\mu \xi^\mu \tag{5.3.25}$$

και

$$\xi^\mu \nabla_\mu \tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{5.3.26}$$

οι συναρτήσεις N και α σχετίζονται ως:

$$N = \alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{5.3.27}$$

Πιο συγκριμένα καλούμαστε να υπολογίσουμε το:

$$\alpha = N \frac{\partial t}{\partial \tau} = N \frac{\partial F}{\partial r} = N \frac{\partial F}{\partial C} \frac{dC}{d\tau} \tag{5.3.28}$$

Ο υπολογισμός του $\frac{\partial F}{\partial C}$ αποτελεί μια χρονοβόρα διαδικασία όπου παρουσιάζεται πλήρης στο Παράρτημα Β του [5]. Αυτό τελικά δίνεται ως:

$$\frac{\partial F(r,C)}{\partial C} = \frac{r^2}{2\left(r-\frac{3M}{2}\right)[P(r)]^{1/2}} - \frac{1}{2}\int_{r_C}^{r} \frac{x(x-3M)}{\left(x-\frac{3M}{2}\right)^2 [P(x)]^{1/2}}\,dx \tag{5.3.29}$$

οπότε η συνάρτηση lapse, χρησιμοποιώντας και την έκφραση του N (5.3.11), δίνεται ως:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{dC}{d\tau}\left[\frac{1}{r-\frac{3M}{2}}\frac{[P(r)]^{1/2}}{r^2} - \int_{r_C}^{r}\frac{x(x-3M)}{\left(x-\frac{3M}{2}\right)^2[P(x)]^{1/2}}\,dx\right] \tag{5.3.30}$$

Τόσο η συνάρτηση N όσο και η α είναι σφαιρικές λύσεις της maximal εξίσωσης:

$$(D^2 - K_{ij}K^{ij}) = 0 \tag{5.3.31}$$

απλά ενώ το N είναι αντισυμμετρικό ως προς τον λαιμό $r = r_C$, η συνάρτηση α είναι συμμετρική και άρα έχει τιμή +1 και στα δύο άπειρα και για αυτό καλείται *άρτια* συνάρτηση lapse.

5.3.1 Μελέτη της συνάρτησης α στο r_C για μεγάλους χρόνους τ

Καθώς το C προσεγγίζει την οριακή τιμή $3\sqrt{3}M^2/4$, το r_C προσεγγίζει την τιμή $3M/2$ και το $\tau(C)$ το άπειρο. Όπως φαίνεται και από την έκφραση (5.3.30), η α ορίζεται κανονικότητα στο r_C και μάλιστα ισούται με:

$$\alpha(r_C) = \frac{dC}{d\tau}\left(\frac{1}{2\delta}\right) \tag{5.3.32}$$

Αρχικά ορίζουμε τη διαφορά μεταξύ του r_C και της ακραίας τιμής $r = 3M/2$ ως:

$$\delta := r_C - \frac{3M}{2} \tag{5.3.33}$$

ενώ μετέπειτα ορίζουμε και τα αδιάστατα μεγέθη:

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{M}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{M}, \quad \tilde{C} = \frac{C}{M} \tag{5.3.34}$$

όπου πιο αναλυτικά:

$$\tilde{\tau}(\tilde{\delta}) = -\tilde{C}\int_{\tilde{\delta}+3/2}^{\infty}\frac{y}{(y-2)\,(y^4-2y^3+\tilde{C}^2)^{1/2}}dy \tag{5.3.35}$$

$$\tilde{C} = \left(\tilde{\delta}+\frac{3}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}-\tilde{\delta}\right)^{1/2} \tag{5.3.36}$$

Για $\tilde{\delta} \to 0$ το πολυώνυμο $P(y) = y^4 - 2y^3 + \tilde{C}^2$ παρουσιάζει διπλή ρίζα $y = 3/2$ στο ελάχιστο. Παρομοίως, με μακρούς υπολογισμούς που παρουσιάζονται στο [5], η λύση δίνεται ως:

$$\tilde{\tau}(\tilde{\delta}) = -\Omega\ln\tilde{\delta} + A + O(\tilde{\delta}) \tag{5.3.37}$$

όπου:

$$\Omega = \frac{3\sqrt{6}}{4} \simeq 1.8371 \tag{5.3.38}$$

$$A = \frac{3\sqrt{6}}{4} \ln\left[18\left(3\sqrt{2}-4\right)\right] - 2\ln\left[\frac{3\sqrt{3}-5}{9\sqrt{6}-22}\right] \simeq -0.2181 \tag{5.3.39}$$

επομένως με βάση αυτά υπολογίζουμε:

$$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{C}} = \frac{d\tau}{dC} = \frac{d\tau}{d\delta}\frac{d\delta}{dC} \simeq \left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{M}{\delta}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{6}\delta}}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{M}{\delta^{3/2}} \tag{4.2.39}$$

και τελικά η συνάρτηση lapse στο $r = r_C$ υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\alpha(r_C) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\delta}{M} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3}\exp\left(\frac{A}{\Omega}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{\Omega M}\right) \tag{5.3.40}$$

Από την έκφραση αυτή διαφαίνεται πως η συνάρτηση lapse καταρρέει εκθετικά με τον (κανονικοποιημένο) χρόνο καθώς οι υπερεπιφάνειες μέσα στον λαιμό προσεγγίζουν την οριακή επιφάνεια $r = 3M/2$, με τη χρονική κλίμακα της κατάρρευσης αυτής να δίνεται ως από το $\Omega \simeq 1.8371$. Οι Smarr και York [19] αντίστοιχα χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους και προβλήματα-μοντέλα υπολόγισαν τη χρονική κλίμακα αυτή ως ~ 1.82.

5.3.2 Μελέτη της συνάρτησης α στο $r = 2M$ για μεγάλους χρόνους τ

Ενδιαφέρουσα είναι και η μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης lapse για μεγάλους χρόνους στον ορίζοντα. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε από τους Riemann και Bruegmann [18] και παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω. Από την έκφραση (5.3.30) ορίζουμε την ποσότητα:

$$K_C(r) := \int_{r_C}^{r} \frac{x(x-3M)}{(x-3M/2)^2 P(x)^{1/2}} dx \tag{5.3.41}$$

ενώ το $d\tau/dC$ ορίζεται ως:

$$\frac{d\tau}{dC} = \frac{\partial F(\infty, C)}{\partial C} \tag{5.3.42}$$

το οποίο από την (5.3.29) δίνεται ως:

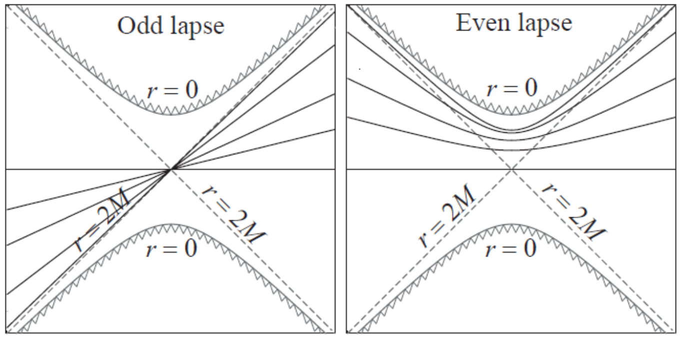
$$\frac{\partial F(\infty, C)}{\partial C} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{2r\left(1-\frac{3M}{2r}\right) r^2 \left[1 - 2M/r + C^2/r^4\right]^{1/2}} - \frac{1}{2}K_C(\infty) = -\frac{1}{2}K_C(\infty) \tag{5.3.43}$$

επομένως η συνάρτηση lapse στον ορίζοντα δίνεται ως:

$$\alpha_{r=2M} = -\frac{1}{K_C(\infty)}\left[\frac{2}{M} - \frac{C}{4M^2}K_C(2M)\right]. \tag{5.3.44}$$

Τώρα σκοπός είναι να μελετηθεί η έκφραση αυτή για μεγάλους χρόνους. Για μεγάλους χρόνους το $K_C(\infty)$ εκτινάσσεται στο άπειρο ενώ η έκφραση $K_C(2M)$ μπορεί να εκφραστεί ως [18]:

$$K_C(2M) \simeq K_C(\infty) + \eta + \mathscr{O}(\delta^2) \tag{5.3.45}$$



Σχήμα 5.3.2.1: Περιττή και Άρτια συνάρτηση lapse:Για περιττό lapse οι τομές είναι οι επιφάνειες σταθερού Schwarzschild χρόνου. Για άρτιο lapse φαίνεται πως οι επιφάνειες πλησιάζουν η μια την άλλη στον λαιμό οδηγώντας τη συνάρτηση lapse να καταρρεύσει ενώ επεκτείνονται κανονικά στα δυο άπειρα, με τη συνάρτηση lapse να είναι ίση με 1 και στα δύο. Το σχήμα αυτό είναι από το βιβλίο του [1] αλλά είναι αποτέλεσμα της μελέτης των [18].

όπου η σταθερά η στη μελέτη αυτή μπορεί να αγνοηθεί. Εν τέλει προσεγγιστικά η συνάρτηση lapse στον ορίζοντα για μεγάλους χρόνους είναι:

$$\alpha_{r=2M} = \frac{C_{\text{lim}}}{4M^2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 0.3248 \tag{5.3.46}$$

Συνολικά, το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται οι maximal διαμερίσεις του χωροχρόνου για περιττό και άρτιο lapse.

6

Συμπεράσματα

Με τη χρήση του 3+1 φορμλισμού, οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου γράφτηκαν ως ένα πρόβλημα Cauchy. Προέκυψαν 4 εξισώσεις Περιορισμού:

$$
\begin{aligned}
R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \\
D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i
\end{aligned}
$$

και 6 δυναμικές εξισώσεις για την χωρική μετρική και τον τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i \\
\partial_t K_{ij} &= -D_iD_j\alpha + \alpha(R_{ij} - 2K^k{}_jK_{ik} + KK_{ij}) \\
&- 8\pi\alpha(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S-\rho)) + \beta^kD_kK_{ij} + K_{ik}D_j\beta^k + K_{kj}D_i\beta^k
\end{aligned}
$$

όπου εμφανίζονται και 4 βαθμοί ελευθερίας που σχετίζονται με την επιλογή των συναρτήσεων $\{\alpha, \beta^i\}$ και συνιστούν ουσιαστικά επιλογή συνθηκών βαθμίδας που σχετίζονται με τις συντεταγμένες. Το στοιχείο μήκους δίνεται συναρτήσει των στοιχείων της χωρικής μετρικής και αυτών των συναρτήσεων ως:

$$
ds^2 = (-\alpha^2 + \beta^i\beta_i)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j
$$

Η επιλογή των συνθηκών βαθμίδος καθορίζουν την διαμέριση και είναι κρίσημη για την επιτυχία της προσομοίωσης. Η γεωμετρία της μελανής οπής Schwarzschild αποτελεί ιδανική επιλογή για μελέτη και έλεγχο των εξισώσεν και των μεθόδων διαμέρισης, καθώς η αναλυτική λύση είναι γνωστή. Πράγματι, λύνοντας τις εξισώσεις περιορισμού για την αρχική υπερεπιφάνεια για το κενό, και επιβάλλοντας χρονική και σφαιρική συμμετρία, επανακτείται η χωρική μετρική γραμμένη στις ισοτροπικές συντεταγμένες:

$$
dl^2 = \left(1 + \frac{M}{2\hat{r}}\right)^4 (d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega)
$$

όπου αντιστοιχεί στην υποπολλαπολότητα $T = 0$, όπου τα δυο ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα ενώνονται μέσω της γέφυρας Einstein-Rosen στο λαιμό $r = 2M$.

Στη συνέχεια, μελετήθηκε η επιλογή κατάλληλης διαμέρισης ώστε να φυλλοποιηθεί επαρκώς η πολλαπλότητα της μελέτης μας. Για αυτό αναζητήσαμε κατάλληλη διαμέριση ώστε οι τομές να εισχωρούν μέσα στον ορίζοντα και να μην διακόπτεται η διαμέριση εκεί αλλά και να μην υπάρχει σύγκρουση με την φυσική ιδιομορφία $r = 0$. Η *Γεωδαισιακή Διαμέριση*:

$$
\alpha = 1 \quad \beta^i = 0
$$

αποδείχτηκε μια όχι καλή επιλογή καθώς οι καμπύλες που γεννούνται από το κάθετο διάνυσμα είναι γεωδαισιακές, γεγονός που οδηγεί στη γρήγορη σύγκλισή τους παρουσίας βαρυτικών πηγών και άρα και στη δημιουργία ιδιομορφιών συντεταγμένων. Ακόμα, καθώς ο ένας παρατηρητής αρχικά σε ηρεμία στον ορίζοντα $r = 2M$ χρειάζεται χρόνο $t = \pi M$ για να συγκρουστεί με την φυσική ιδιομορφία, τόσο είναι και ο χρόνος όπου ο κώδικας θα καταρρεύσει θεωρώντας αρχικά δεδομένα στις ισοτροπικές συντεταγμένες. Εν αντιθέσει, η *Maximal Διαμέριση* αποφεύγει την σύγκρουση με την πολλαπλότητα και ακόμα οι τομές είναι ομαλές στον ορίζοντα. Ουσιαστικά, με επιβολή της maximal συνθήκης $K = 0$, η συνάρτηση lapse δίνεται από την ελλειπτική εξίσωση:

$$D^2\alpha = \alpha[K^{ij}K_{ij} + 4\pi(\rho + S)]$$

Για την μετρική Schwarzschild μπορεί να παραχθούν διαφορετικές οικογένειες maximal διαμερίσεων. Στην ανάλυση αυτή μελετήθηκαν δυο περιπτώσεις για διαφορετικές οριακές συνθήκες: οι λύσεις που αντιστοιχούν σε περιττή συνάρτηση lapse όπου στο ένα άπειρο λαμβάνει τιμή +1 ενώ στο άλλο -1 και σε αυτές που αντιστοιχούν σε άρτια συνάρτηση lapse όπου και στα δυο άπειρα έχει την τιμή +1. Με την περιττή επιλογή λαβάνονται επιφάνειες σταθερού Schwarzschild χρόνου, αλλά η διαμέριση αυτή αποτελεί μια τοπική φυλλοποίηση και δεν προτιμάται. Η άρτια περίπτωση ελέγχθηκε αναλυτικά και αποδείχθηκε πως προσφέρει μια καλή διαμέριση καθώς η συνάρτηση lapse στο λαιμό φθίνει εκθετικά καθώς προσεγγίζεται οριακή επιφάνεια $r = 3M/2$:

$$\alpha(r_C) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\delta}{M} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \exp\left(\frac{A}{\Omega}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\Omega M}\right). \tag{6.0.1}$$

Η maximal διαμέριση προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα, με κυριότερο περιορισμό της να αποτελεί ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για τη λύση μιας ελλειπτικής εξίσωσης [1]. Η μελέτη της μετρικής Schwarzschild μέσα από το πρίσμα του 3+1 φορμαλισμού είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της Αριθμητικής Σχετικότητας αλλά και για τον έλεγχο των κώδικων που χρησιμοποιούνται.Η περαιτέρω ανάπτυξη αυτής της ερευνητικής πορείας οδηγεί φυσικά σε πιο πολύπλοκα αστροφυσικά συστήματα, όπως η συγχώνευση μελανών οπών και η παραγωγή βαρυτικών κυμάτων | φαινόμενα για τα οποία δεν είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση των εξισώσεων Einstein. Η Αριθμητική Σχετικότητα ήταν αυτή που μάλιστα έδωσε τις προβλέψεις των κυματομορφών τις οποίες μετά πειράματα όπως τα LIGO και VIRGO παρατήσαν. Το γεγονός πως ακόμα και για ένα αστροφυσικό σύστημα η αναλυτική λύση του οποίου είναι γνωστή, η περιγραφή του μέσα από την Αριθμητική Σχετικότητα δεν είναι καθόλου τετριμμένη καταδεικνύει πως αποτελεί ένα απαιτητικό κλάδο της έρευνας όπου πέρα την βαθειάς μαθηματικής κατανόησης απαιτείται και ο έλεγχος της υπολογιστικής ευστάθειας και ακρίβειας των εξισώσεων και των μεθόδων που παράγονται. Χωρίς καμία αμφιβολία, η ερευνητική αυτή κατεύθυνση διανοίγει προοπτικές για βαθύτερη κατανόηση των αστροφυσικών συστημάτων και είναι το μέσο οι επιστήμονες να φθάσουν εκεί που το ανθρώπινο χέρι και μολύβι αδυνατεί να φθάσει.

Bibliography

[1] Miguel Alcubierre. Introduction to 3+1 numerical relativity. Introduction to 3+1 Numerical Relativity, 4 2006. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199205677.001.0001.

[2] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. General Relativity and Gravitation, 40(9):1997{2027, August 2008. ISSN 1572-9532. doi: 10.1007/s10714-008-0661-1. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1.

[3] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Cambridge University Press, 2010. doi: 10.1017/CBO9781139193344.

[4] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. Numerical Relativity: Starting from Scratch. Cambridge University Press, 2 2021. ISBN 978-1-108-93344-5, 978-1-108-84411-6, 978-1-108-92825-0. doi: 10.1017/9781108933445.

[5] R. Beig and N. Ó Murchadha. Late time behavior of the maximal slicing of the schwarzschild black hole. Phys. Rev. D, 57:4728–4737, Apr 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.4728. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.4728.

[6] Robert Beig. The maximal slicing of a schwarzschild black hole, 2000. URL https://arxiv.org/abs/gr-qc/0005078.

[7] George David Birkhoff. Relativity and Modern Physics. Harvard University Press, Cambridge, 1923.

[8] Sean M. Carroll. Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity. Cambridge University Press, 7 2019. ISBN 978-0-8053-8732-2, 978-1-108-48839-6, 978-1-108-77555-7. doi: 10.1017/9781108770385.

[9] Ray D'Inverno. Introducing Einstein's Relativity. Clarendon Press, 1992.

[10] Frank Estabrook, Hugo Wahlquist, Steven Christensen, Bryce DeWitt, Larry Smarr, and Elaine Tsiang. Maximally slicing a black hole. Phys. Rev. D, 7:2814–2817, May 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.7.2814. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2814.

[11] Jorg Frauendiener. Miguel Alcubierre: Introduction to 3 + 1 numerical relativity. Gen. Rel. Grav., 43:2931–2933, 2011. doi: 10.1007/s10714-011-1195-5.

[12] Simonetta Frittelli. Note on the propagation of the constraints in standard 3+1 general relativity. Phys. Rev. D, 55:5992–5996, May 1997. doi: 10.1103/PhysRevD.55.5992. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.5992.

[13] Eric Gourgoulhon. 3+1 Formalism in General Relativity. Lecture Notes in Physics. Springer, 2012. doi: 10.1007/978-3-642-24525-1.

[14] Susan G. Hahn and Richard W. Lindquist. The two-body problem in geometrodynamics. Annals of Physics, 29:304–331, 1964. URL `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119880901`.

[15] J. B. Hartle. Gravity: An introduction to Einstein's general relativity. 2003. ISBN 978-0-8053-8662-2.

[16] Vasileios Paschalidis. Numerical relativity illinois lectures.

[17] Eric Poisson. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge University Press, 12 2009. doi: 10.1017/CBO9780511606601.

[18] Bernd Reimann and Bernd Brügmann. Maximal slicing for puncture evolutions of schwarzschild and reissner-nordström black holes. Physical Review D, 69(4), February 2004. ISSN 1550-2368. doi: 10.1103/physrevd.69.044006. URL `http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.69.044006`.

[19] Larry Smarr and James W. York. Kinematical conditions in the construction of spacetime. Phys. Rev. D, 17:2529–2551, May 1978. doi: 10.1103/PhysRevD.17.2529. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.2529`.

[20] Larry L. Smarr, editor. Proceedings, Sources of Gravitational Radiation: Seattle, WA, USA, July 24 - August 4, 1978, Cambridge, 1979. Cambridge Univ. Press.

[21] Robert M. Wald. General Relativity. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984. doi: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

[22] James W. York, Jr. Kinematics and Dynamics of General Relativity. In Workshop on Sources of Gravitational Radiation, pages 83–126, 1978.

[23] Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος. Σημειώσεις Γενικής Σχετικότητας και Κοσμολογίας, 8ο εξάμηνο, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.