Χαμιλτονιανός φορμαλισμός της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Μιχάλης Αγάθος

24 Σεπτεμβρίου 2007

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή αποσκοπεί στην παρουσίαση της προσπάθειας που είχε γίνει τις προηγούμενες δεκαετίες για τη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας σε Χαμιλτονιανή μορφή, μέχρι και τα αποτελέσματα του φορμαλισμού των Arnowitt-Deser-Misner . Οι ιδιαιτερότητες της θεωρίας αυτής για τη βαρύτητα καθιστούν τη διαδικασία Χαμιλτονιανής διατύπωσής της αρκετά επίπονη καθώς πρέπει κανείς να επεξεργάζεται τις γεωμετρικές ιδιότητες του ίδιου του χωρόχρονου. Με αναλυτικά βήματα όμως θα δούμε πως η εύρεση μιας τέτοιας διατύπωσης είναι δυνατή, ένα σημαντικό αποτέλεσμα για την κατανόηση της θεωρίας, παρόλο που εκ πρώτης όψεως δε φαίνεται τόσο εκλυστικό και εύχρηστο.

Μετά από μια σχετικά συνοπτική εισαγωγή στη διαφορική γεωμετρία, θα προχωρήσουμε στη διατύπωση και ερμηνεία των εξισώσεων Einstein . Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της αιτιακής δομής του χωρόχρονου και θα εξετάσουμε πώς μπορεί να διατυπωθεί ένα καλά ορισμένο πρόβλημα αρχικών τιμών στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Τέλος θα συνεχίσουμε με το Λαγκρανζιανό φορμαλισμό τανυστικών πεδίων και τη μετάβαση στο Χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Έτσι τελικά θα αποκτήσουμε μια Χαμιλτονιανή διατύπωση για τη δυναμική της Γενικής Σχετικότητας με την εύρεση των αντίστοιχων εξισώσεων Hamilton για τη μετρική.

Ο συμβολισμός που επιλέξαμε στην εργασία αυτή ακολουθεί το συμβολισμό του R.M. Wald , με τα τανυστικά πεδία στον 4-διάστατο χωρόχρονο να συμβολίζονται με λατινικούς δείκτες πάνω και κάτω (a,b,...), ενώ για τις συνιστώσες των τανυστών χρησιμοποιούμε ελληνικούς δείκτες (μ,ν,...). Τα διανύσματα και οι τανυστές του τρισδιάστατου χώρου θα συμβολίζονται επίσης με λατινικούς δείκτες που ξεκινούν όμως από τη μέση του αλφαβήτου (i,j,k,...) για την αποφυγή σύγχησης. Το ίχνος της μετρικής Lorentz θα είναι 2, με το αρνητικό πρόσημο στη χρονική συντεταγμένη, δηλαδή η μετρική Minkowski θα έχει τη διαγώνια μορφή $diag(-1, 1, 1, 1)$.

1.1 Βασικές αρχές της Θεωρίας της Σχετικότητας

Η έννοια της σχετικότητας έχει τις ρίζες της στις αρχές της φυσικής του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα. Σύμφωνα με την *Αρχή της Σχετικότητας* που διατυπώθηκε από το Γαλιλαίο τον 17ο αιώνα, η ταχύτητα ενός σώματος δε μπορεί να μετρηθεί απόλυτα, παρά μόνο σχετικά, ως προς το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή που πραγματοποιεί τη μέτρηση. Το γεγονός λοιπόν πως ένας παρατηρητής δε μπορεί ποτέ να γνωρίζει με απόλυτο τρόπο τη δική του ταχύτητα, υπαγορεύει πως όλοι οι παρατηρητές που βρίσκονται σε συστήματα μη επιταχυνόμενα το ένα ως προς το άλλο, βλέπουν τον κόσμο να διέπεται από τους ίδιους φυσικούς νόμους. Έτσι λοιπόν στην προσχετικιστική φυσική, μια κλασική θεωρία θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας του συστήματος αναφοράς. Τούτο έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τη Νευτώνεια φυσική η οποία αποτέλεσε το θεμέλιο κάθε κλασικής θεωρίας που ακολούθησε εώς και το τέλος του 19ου αιώνα. Η εξίσωση κίνησης του νεύτωνα δεν περιλαμβάνει όρους ταχύτητας παρά μόνο την επιτάχυνση και επομένως λέμε πως είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, οι οποίοι μεταφράζουν τις συντεταγμένες από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άλλο. Η ταχύτητα ενός σώματος όταν μετριέται από δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο των ταχυτήτων $v(t) \to v'(t) = v(t) + V$, όπου V η σχετική ταχύτητα των δύο παρατηρητών. Η Νευτώνεια φυσική εμμένει στην διασθητικά ευνόητη παραδοχή της ύπαρξης ενός απόλυτου χρόνου ο οποίος κυλά με τον ίδιο τρόπο σε όλο το σύμπαν και για όλους τους παρατηρητές.

Το πείραμα Michelson-Morley στα τέλη του 19ου αιώνα καθώς και οι εξισώσεις Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό έκαναν εμφανή την ανάγκη για τροποποίηση του κλασικού φυσικού μοντέλου που είχε καθιερωθεί για αιώνες, από την εποχή του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα. Τα αποτελέσματα έδειχναν ότι η ταχύτητα του φωτός c, μια πεπερασμένη ταχύτητα, είναι η ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς γεγονός που ερχόταν σε πλήρη αντίφαση με τον προσθετικό νόμο των ταχυτήτων. Έτσι το πεπερασμένο της ταχύτητας του φωτός αποτέλεσε ανώτατο όριο όλων των δυνατών ταχυτήτων στη φύση και δεν άφηνε περιθώριο για μια θεωρία που περιλαμβάνει ακαριαία δράση από απόσταση όπως ήταν η Νευτώνεια θεωρία βαρύτητας. Κανένα σώμα, καμία πληροφορία, καμία αλληλεπίδραση δε μπορεί να ταξιδεύει στο χώρο με ταχύτητα μεγαλύτερη από c. Οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου για τις σχετικές ταχύτητες έπρεπε να τροποποιηθούν, και μαζί να εγκαταλειφθεί η ιδέα του απόλυτου Ευκλείδιου χώρου και του απόλυτου παγκόσμιου χρόνου.

Η λύση δόθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα με τη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον A. Einstein (1905). Σύμφωνα με τους νέους μετασχηματισμούς συντεταγμένων που επέβαλε η θεωρία αυτή, χώρος και χρόνος μετασχηματίζονται γραμμικά μεταξύ τους σαν να μην ήταν ποτέ διαχωρισμένα ως μεγέθη. Αντιθέτως αποτελούν μια ενιαία 4-διάστατη δομή, το χωρόχρονο, τα σημεία του οποίου καλούμε 'γεγονότα'. Η θεωρία αρχικά δημιουργήθηκε για να περιγράψει την 'κινηματική' αδρανειακών συστημάτων, και να εξηγήσει με θεμελιώδη τρόπο τον λόγο για τον οποίο η ταχύτητα το φωτός φαίνεται ίδια από όλα τα συστήματα αναφοράς, το οποίο και έκανε με επιτυχία. Ο τετραδιάστατος χωρόχρονος είναι ένας χώρος Minkowski πάνω στον οποίο οι τροχιές που ακολουθούν ακτίνες φωτός είναι αναλλοίωτες.

Εύλογα όμως εμφανίσθηκε το ερώτημα, 'τι σημαίνει αδρανειακός παρατηρητήσ' και πώς ορίζει κανείς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σίγουρα πρέπει ένα τέτοιο σύστημα να είναι απαλλαγμένο από κάθε είδους δύναμη και επιτάχυνση. Ως αδρανειακός παρατηρητής λοιπόν ορίστηκε ένας παρατηρητής που 'πέφτει ελεύθερα' χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων ή αντιδράσεων. Υπό αυτή την έννοια κανένας επίγειος παρατηρητής δεν είναι αδρανειακός καθώς δεν πέφτει ελεύθερα αλλά στέκεται 'ακίνητοσ' ως προς την επιφάνεια της γής λόγω της δύναμης (αντίδρασης) του εδάφους.

Αναζητώντας μία νέα θεωρία για τη βαρύτητα, συμβατή με τις αρχές της Ειδικής Σχετικότητας, ο Einstein συνέχισε το συλλογισμό ρωτώντας 'τι θα βλέπει ένας παρατηρητής που πέφτει ελεύθερα μέσα σε ένα πεδίο βαρύτητασ'. Παρατήρησε ότι σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη 'κινηματική' δύναμη, η βαρύτητα διαφέρει σε ένα ουσιαστικό σημείο, και αυτό είναι η αρχή της ισοδυναμίας. Η αρχή αυτή αξιώνει ότι *όλα τα υλικά σώματα πέφτουν με τον ίδιο τρόπο όταν βρίσκονται υπό την επίδραση ενός βαρυτικού πεδίου*, και εκφράζεται με κλασικούς όρους από την πρόταση ότι η βαρυτική μάζα ενός σώματος (που συναντάμε στο νόμο του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη) είναι ίση με την αδρανειακή μάζα του (που συναντάμε στο 2ο νόμο του Νεύτωνα). Με βάση την κλασική αρχή της ισοδυναμίας ο Einstein κατέληξε σε μια νέα διατύπωση η οποία θα γινόταν η βάση για τη νέα θεωρία βαρύτητας, τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Η ιδέα είναι ότι σε ένα βαρυτικό πεδίο, όλα τα σώματα που πέφτουν ελεύθερα ακολουθούν τις ίδιες ακριβώς τροχιές, γεγονός το οποίο ξεχωρίζει κατά φυσικό τρόπο μία ειδική οικογένεια καμπυλών στο χωρόχρονο, τις λεγόμενες *γεωδαισιακές καμπύλες*. Οι καμπύλες αυτές χαρακτηρίζουν τη γεωμετρία του χωρόχρονου και αποτελούν τις νέες 'ευθείες ' πάνω στις οποίες κινούνται τα αδρανειακά συστήματα. Ένα σώμα που κινείται υπό την επίδραση κάποιας δύναμης αποκτά μια επιτάχυνση και αποκλίνει από τη φυσική του γεωδαισιακή τροχιά. Έτσι στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ο χωρόχρονος δεν έχει την απλή επίπεδη δομή του χωρόχρονου Minkowski αλλά τη γενικότερη γεωμετρική δομή μιας *καμπυλωμένης πολλαπλότητας*. Συνοψίζοντας τα παραπάνω η ΓΘΣ καταλήγει στο συμπέρασμα ότι *ο χωρόχρονος είναι μια 4-διάστατη πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μία Lorentz μετρική g_{ab}, επάνω στην οποία όλα τα σώματα που πέφτουν ελεύθερα ακολουθούν γεωδαισιακές τροχιές. Σε κάθε σημείο του χωρόχρονου μπορεί να οριστεί ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η μετρική να είναι τοπικά Minkowski* . Η τελευταία πρόταση εκφράζει στην ουσία την τοπική ισχύ της Ειδικής Θεωρίας της σχετικότητας σε μια περιοχή του χώρου όπου υπάρχει βαρύτητα. Έτσι ένας αδρανειακός παρατηρητής στη ΓΘΣ ο οποίος βρίσκεται σε ένα κλειστό δωμάτιο που αφήνεται να πέσει ελεύθερα, δε θα αντιληφθεί την επίδραση κανενός βαρυτικού πεδίου και θα μπορεί να ερμηνεύει τις κινήσεις των σωμάτων που παρατηρεί μέσα στο δωμάτιο σύμφωνα με τους νόμους της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Θα δούμε ότι η απαίτηση της αναλλοιώτητας των φυσικών νόμων κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, ικανοποιείται όταν αυτοί είναι εκπεφρασμένοι μέσω τανυστικών εξισώσεων.

1.2 Ειδική Σχετικότητα

Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ προσχετιστικής φυσικής και Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι η μετάβαση από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου στους μετασχηματισμούς Lorentz :

$$t' = \gamma t - \gamma v x \tag{1.1}$$

$$x' = -\gamma v t + \gamma x \tag{1.2}$$

$$y' = y \tag{1.3}$$

$$z' = z \tag{1.4}$$

για το σύστημα συνταταγμένων ενός αδρανειακού παρατηρητή που κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς έναν άλλο.

Ο χρόνος δεν κυλάει πια ίδιος για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές και ο χώρος δε φαίνεται πια ίδιος. Οι φυσικοί νόμοι που περιγράφουν τον κόσμο όμως οφείλουν πάντα να είναι ίδιοι για όλους. Έτσι, όταν προσπαθήσουμε να περιγράφουμε τη φύση στα πλαίσια της ΕΘΣ, θα πρέπει να μιλάμε με *σχετικιστικά αναλλοίωτες ποσότητες*, όπως αντίστοιχα οι νόμοι του Νεύτωνα δεν περιήχαν πουθενά όρους ταχύτητας.

Τη θέση των προσχετικιστικά αναλλοίωτων μεγεθών της χωρικής απόστασης μεταξύ δύο σημείων και της χρονικής απόστασης μεταξύ δύο στιγμών, παίρνει στη σχετικιστική φυσική ένα νέο αντίστοιχο μέγεθος που ορίζει τη χωροχρονική 'απόσταση' μεταξύ δύο σημείων (γεγονότων) του χωρόχρονου.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.5}$$

Σε αντίθεση με την Ευκλείδια απόσταση, στο χώρο Minkowski της ΕΘΣ η ποσότητα ds^2 μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Τα γεγονότα που χαρακτηρίζονται από απόσταση ίση με μηδέν από ένα συγκεκριμένο γεγονός A, βρίσκονται ακριβώς πάνω στον *κώνο φωτός* του γεγονότος αυτού, μπορούν δηλαδή να συνδεθούν με αυτό μέσω μιας ακτίνας φωτός. Το πρόσημο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων καθορίζει και την αιτιακή τους σχέση. Αρνητική απόσταση σημαίνει ότι το κάθε γεγονός βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου φωτός του άλλου, και έτσι συνδέεται αιτιακά με αυτό, με την έννοια ότι οτιδήποτε συμβαίνει στο χρονικά προγενέστερο γεγονός εκ των δύο, μπορεί να επηρεάσει το χρονικά μεταγενέστερο. Αντιθέτως θετική απόσταση μεταξύ δύο σημείων σημαίνει ότι τα σημεία αυτά είναι αιτιακώς ασύνδετα, καθώς το καθένα βρίσκεται εκτός του κώνου φωτός του άλλου και επομένως — αν θυμηθούμε ότι κανένα σήμα δε μεταδίδεται πιο γρήγορα από το φως — δε μπορεί να αλληλεπιδράσει με αυτό.

Τη θέση της Ευκλείδιας μετρικής του τρισδιάστατου χώρου παίρνει η μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ ενώ τη θέση των τρισδιάστατων διανυσμάτων παίρνουν τα τετραδιανύσματα. Ένα (τετρα-)διάνυσμα του οποίου το πέρας καταλήγει μέσα στον κώνο φωτός της αρχής του, θα έχει αρνητικό μέτρο και χαρακτηρίζεται ως *χρονοειδές*, ενώ αν καταλήγει έξω έχει θετικό μέτρο και χαρακτηρίζεται ως *χωροειδές*. Τα διανύσματα που βρίσκονται πάνω στον κώνο φωτός είναι μηδενικού μέτρου και καλούνται *φωτοειδή* διανύσματα. Τα παραπάνω αναπαρίστανται εικονικά μέσω των χωροχρονικών διαγραμμάτων Minkowski .

Έτσι κάθε υλικό σώμα και κάθε παρατηρητής είναι περιορισμένοι να κινούνται πάνω σε χρονοειδείς τροχιές. Το γεγονός ότι στο χώρο Minkowski η απόσταση ds^2 είναι αναλλοίωτο μέγεθος εξασφαλίζει την αναλλοιότητα της αιτιακής δομής του χωρόχρονου καθώς δύο αιτικώς ασύνδετα γεγονότα για ένα σύστημα αναφοράς θα είναι αιτιακώς ασύνδετα για όλα τα συστήματα αναφοράς. Την ίδια αναλλοιότητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz απαιτείται να ικανοποιεί κάθε φυσική θεωρία για να είναι συνεπής με τις αρχές της ΕΘΣ.

1.3 Γενική Σχετικότητα

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας διατυπώθηκε το 1916 από τον Albert Einstein , 11 χρόνια δηλαδή μετά τη διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, και λίγες δεκαετίες αργότερα καθιερώθηκε όχι μόνο ως η επικρατέστερη θεωρία βαρύτητας, αλλά και ως μια νέα επαναστατική οπτική της σύγχρονης φυσικής απέναντι σε θεμελιώδεις φυσικές έννοιες, όπως αυτές του χώρου, του χρόνου και της δομής του σύμπαντος. Είναι στην ουσία μια δυναμική θεωρία της γεωμετρίας του χωρόχρονου η οποία εκφράζεται μέσω των εξισώσεων της μετρικής g_{ab} και της εξάρτησής της από την κατανομή της ύλης πάνω σε αυτόν.

Κεντρικό ρόλο στη μελέτη της ΓΘΣ κατέχουν τα τανυστικά πεδία, με βασικότερο αυτών εκείνο της μετρικής. Ο μετρικός τανυστής ορισμένος πάνω στη χωροχρονική πολλαπλότητα είναι το βασικό πεδίο της ΓΘΣ, και αποτελεί μια δυναμική μεταβλητή της θεωρίας, τις εξισώσεις της οποίας καλούμαστε να λύσουμε κατά την αντιμετώπιση πληθώρας προβλημάτων. Το γεγονός ότι η δυναμική αυτή μεταβλητή εξαρτάται άμεσα από τη συγκέντρωση της ύλης στο χωρόχρονο, ενώ ταυτόχρονα — ως άμεσα συσχετιζόμενη με τη γεωμετρία του — ορίζει στην ύλη πώς θα κινηθεί μέσα σε αυτόν, κάνει τις εξισώσεις αυτές εξαιρετικά δύσκολες προς επίλυση. Οι εν λόγω εξισώσεις μπορούν να συμπυκνωθούν σε μια μοναδική τανυστική εξίσωση γνωστή και ώς *εξίσωση Einstein* . Η εξίσωση Einstein συνδέει τοπικά τον τανυστή Einstein G_{ab} , ή αλλιώς την καμπυλότητα του χωρόχρονου, με τον τανυστή τάσησ-ενέργειας των υλικών πεδίων (τανυστής της ύλης T_{ab}) μέσω της σχέσης :

$$G_{ab} = R_{ab} + g_{ab}\frac{1}{2}R = 8\pi T_{ab}$$

Σε πλήρη ανάπτυξη η παραπάνω εξίσωση φαίνεται ως ένα συζευγμένο σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης, γεγονός που περιορίζει κατά πολύ το πλήθος αναλυτικών ακριβών λύσεων που μπορούμε να βρούμε.

Κεφάλαιο 2

Διαφορική Γεωμετρία σε Καμπυλωμένες Πολλαπλότητες

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μια γεωμετρική θεωρία με την έννοια ότι ερμηνεύει τα φυσικά φαινόμενα, που εμείς μεταφράζουμε ως βαρυτικά, μέσω της ίδιας της γεωμετρίας του χώρου και του χρόνου. Για την ακρίβεια, μεταχειρίζεται τον κόσμο που παρατηρούμε ως ένα χωροχρονικό συνεχές του οποίου η μορφή και γεωμετρία καθορίζεται από, και καθορίζει, την ύπαρξη και κίνηση ύλης και ενέργειας μέσα σε αυτό. Ο χώρος παύει πλέον να είναι 3-διάστατος Ευκλείδιος και ο χρόνος παύει πλέον να κυλάει μόνος και απόλυτος.

Έτσι, η μελέτη της βαρύτητας θα γίνει από μια καθαρά γεωμετρική σκοπιά, γεγονός το οποίο μας επιβάλει να ξεκινήσουμε με μια σχετικά σύντομη αναφορά στις βασικές έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας. Στη Φυσική έχουμε γενικά συνηθίσει να μεταχειριζόμαστε αντικείμενα όπως συναρτήσεις και διανύσματα, τα οποία αναπαριστούν φυσικά μεγέθη, ζούν πάνω στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ και εξελίσσονται με το χρόνο σύμφωνα με τους νόμους της Φυσικής. Στην περίπτωση της ΓΘΣ θα χρειαστεί να επεκτείνουμε τα αντικείμενα που χρησιμοποιούμε στη γενικότερη κατηγορία των τανυστών, ενώ ο χώρος που θα αποτελέσει το υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα ζούν τα γεωμετρικά αυτά αντικείμενα θα είναι μια τετραδιάστατη χωροχρονική πολλαπλότητα.

Πάνω σε αυτές τις βάσεις θα χτιστεί όλη η θεωρία γι΄ αυτό και αξίζει να αφιερωθεί ένα μικρό τουλάχιστον μέρος της εργασίας στην κατανόηση των σημαντικότερων εννοιών και αποτελεσμάτων της Διαφορικής Γεωμετρίας.

2.1 Πολλαπλότητες και Τανυστικά Πεδία

2.1.1 Τοπολογικοί Χώροι και Ιδιότητες

Πρωτού ορίσουμε την έννοια της διαφορικής πολλαπλότητας (manifold) θα ξεκινήσουμε με τον γενικότερο ορισμό του τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 2.1.1. *Ένας* τοπολογικός χώρος $(Q, \mathscr{T})$ *αποτελείται από ένα σύνολο Q μαζί με μια συλλογή $\mathscr{T}$ από υποσύνολα του Q που ικανοποιούν τις εξής 3 ιδιότητες :*

(1) Η ένωση μιας αυθαίρετης συλλογής υποσυνόλων που ανήκουν στο $\mathscr{T}$ ανήκει επίσης στο $\mathscr{T}$: αν $O_a \in \mathscr{T}, \forall a$, τότε $\bigcup_a O_a \in \mathscr{T}$.

(2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους υποσυνόλων στο $\mathscr{T}$ ανήκει επίσης στο $\mathscr{T}$: αν $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathscr{T}$ τότε $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathscr{T}$.

(3) Το Q και το κενό σύνολο $\emptyset \quad \in \mathscr{T}$.

Το $\mathscr{T}$ καλείται τοπολογία πάνω στο X και τα υποσύνολά του, που περιέχονται στη συλλογή $\mathscr{T}$ καλούνται ανοικτά σύνολα.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, κάθε σύνολο μπορεί να μετατραπεί σε τοπολογικό χώρο με μια τετριμμένη τοπολογία που μπορεί να είναι είτε η $\mathscr{T} = \{\text{κάθε υποσύνολο του} Q\}$ είτε η απλούστερη δυνατή $\mathscr{T} = \{Q, \emptyset\}$

Έστω $(Q, \mathscr{T})$ τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε μπορούμε να κάνουμε τον A τοπολογικό χώρο ορίζοντας την τοπολογία $\mathscr{S}$ πάνω στο Α ως : $\mathscr{S} = \{U | U = A \cap O, O \in \mathscr{T}\}$ που προκύπτει από την τοπολογία $\mathscr{T}$. Η $\mathscr{S}$ καλείται *επαγόμενη (induced) τοπολογία.*

Αν $(Q_1, \mathscr{T}_1)$ και $(Q_2, \mathscr{T}_2)$ τοπολογικοί χώροι, κατασκευάζουμε το γινόμενο (product space) : $Q_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ και φτιάχνουμε από αυτό τον τοπολογικό χώρο $(Q_1 \times X_2, \mathscr{T})$, ορίζοντας ως $\mathscr{T}$ τη συλλογή όλων των υποσυνόλων του $Q_1 \times X_2$ που μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις συνόλων $O_1 \cup O_2$ με $O_1 \in \mathscr{T}_1$ και $O_2 \in \mathscr{T}_2$. Η $\mathscr{T}$ τότε καλείται *γινόμενη* *τοπολογία* των $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ (product topology) με χαρακτηριστικό παράδειγμα την τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

Αν $(Q, \mathscr{T})$ και $(U, \mathscr{S})$ τοπολογικοί χώροι, μια *απεικόνιση* $f : X \mapsto Y$ λέγεται *συνεχής*, αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[O] \equiv \{x \in X | f(x) \in O\}$ κάθε ανοικτού συνόλου $O \subseteq U$ είναι ανοικτό σύνολο στο Q. Αν επίσης είναι και 1-1, επί και η αντίστροφή της είναι συνεχής, τότε η απεικόνιση f καλείται ομομορφισμός (homeomorphism). Ομομορφικοί τοπολογικοί χώροι έχουν ίδιες τοπολογικές ιδιότητες.

Ένας τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός (connected) αν τα μόνα υποσύνολα που είναι και ανοικτά και κλειστά είναι τα Q και $\emptyset$. Κλειστό καλείται ένα σύνολο A αν το συμπλήρωμά του $Q - A$ είναι ανοικτό. Κλειστότητα $\bar{A}$ ενός συνόλου A ορίζεται ως η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A. Το εσωτερικό $intA$ του συνόλου A ορίζεται ως η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A, ενώ το σύνορο $\dot{A}$ του συνόλου A ορίζεται ως :

$$\dot{A} = \{a \in \bar{A} | a \notin intA\}$$

Από το σύνολο όλων των δυνατών τοπολογικών χώρων που μπορούν να κατασκευαστούν, θα μας απασχολήσουν εδώ ειδικές κατηγορίες με επιθυμητές ιδιότητες και πιο συγκεκριμένα οι τοπολογικοί χώροι που είναι Hausdorff και παρασυμπαγείς. Ένας τοπολογικός χώρος $(Q, \mathscr{T})$ καλείται *Hausdorff* αν $\forall p, q \in X$, $p \neq q$, $\exists$ ανοικτά $O_p, O_q \in \mathscr{T}$ τέτοια ώστε $p \in O_p, q \in O_q$ και $O_p \cap O_q = \emptyset$.

Θα προχωρήσουμε στον ορισμό της συμπάγειας, μιας πολύ σημαντικής ιδιότητας στην τοπολογία. Αν $(Q, \mathscr{T})$ τ.χ. και $A \subseteq Q$, μια συλλογή $\{O_a\}$ ανοικτών συνόλων καλείται *ανοικτό κάλυμμα* του A αν $A \subseteq \bigcup_a O_a$. Μια υποσυλλογή του $\{O_a\}$ που καλύπτει επίσης το A καλείται υποκάλυμμα. *Το σύνολο A καλείται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.* Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα σχετικά με τη συμπάγεια συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα που παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1.1. Ένα σύνολο $A \subset R$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται μέσω του επόμενου θεωρήματος :

Θεώρημα 2.1.2 (Tychonoff)**.** Έστω $(Q, \mathscr{T})$ και $(Q, \mathscr{T})$ συμπαγείς τοπολογικοί χώροι. Τότε ο χώρος γινομένου $Q_1 \times X_2$ με τη γινόμενη τοπολογία είναι συμπαγής.

το οποίο οδηγεί στο

Πόρισμα 2.1.1. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Μια ακόμη ιδιότητα της συμπάγειας ως τοπολογική ιδιότητα είναι ότι διατηρείται κάτω από συνεχείς απεικονίσεις (όπως αυτές ορίστηκαν παραπάνω) :

Θεώρημα 2.1.3. Έστω $(Q, \mathscr{T})$ και $(Y, \mathscr{S})$ τοπολογικοί χώροι. Έστω $(Q, \mathscr{T})$ συμπαγής και $f : X \mapsto Y$ συνεχής. Τότε $f[X] \equiv \{y \in Y | y = f(x)\}$ είναι συμπαγής.

Η συμπάγεια όμως δεν αρκεί για να εξασφαλίσουμε ότι ο τοπολογικός χώρος πάνω στον οποίο δουλεύουμε (η χωροχρονική μας πολλαπλότητά στη συγκεκριμένη περίπτωση) δεν είναι 'υπερβολικά μεγάλοσ' και γιαυτό εισάγουμε την πιο ισχυρή ιδιότητα της παρασυμπάγειας. Έστω $(Q, \mathscr{T})$ τ.χ. και $\{O_\alpha\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Ένα νέο ανοικτό κάλυμμα $\{V_\beta\}$ του X καλείται *εκλέπτυνση* του $\{O_\alpha\}$, αν $\forall V_\beta \exists O_\alpha$ τέτοιο ώστε $V_\beta \subset O_\alpha$. Το κάλυμμα $\{V_\beta\}$ καλείται *τοπικά πεπερασμένο* αν $\forall x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή του, W τέτοια ώστε μόνο πεπερασμένο πλήθος V_β ικανοποιούν $W \cap V_\beta \neq \emptyset$. Ο τοπολογικός χώρος $(Q, \mathscr{T})$ καλείται *παρασυμπαγής* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{O_\alpha\}$ του Q έχει μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_\beta\}$.

2.1.2 Διαφορικές Πολλαπλότητες

Είδαμε πως στην προσχετικιστική φυσική υπήρχε βαθιά ριζωμένη η αντίληψη ότι ο τρισδιάστατος χώρος στον οποίο ζούμε είναι Ευκλείδιος, μπορεί δηλαδή να ταυτιστεί με τον $\mathbb{R}^3$, ενώ μαζί με το χρόνο, θεωρούμενο ως μια επιπλέον διάσταση ή παράμετρο κατά μήκος της οποίας εξελίσσονται τα πάντα, θα έχουν την απλή δομή του $\mathbb{R}^4$. Η παραδοχή αυτή ήταν τόσο αυτονόητη για την ανθρώπινη νόηση που χρειάστηκαν πολλές δεκαετίες, ώστε η νέα ριζοσπαστική για την εποχή θεωρία της βαρύτητας να αναγνωριστεί για την ορθότητά της. Η μετάβαση αυτή ήταν πιο δύσκολη ακόμη και από την αλλαγή από μια επίπεδη Γη με την τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ σε μια σφαιρική. Εύκολα μπορεί κανείς να δεί την αντιστοιχία μεταξύ των δύο εποχών, καθώς και στις δύο περιπτώσεις η επιστημονική έρευνα και η αναζήτηση απαντήσεων για τα όσα δε μπορούσε να εξηγήσει ο άνθρωπος, επέβαλαν μια συνολική αναθεώρηση σχετικά με το χώρο που τους περιβάλλει και τη γεωμετρία του. Έτσι, όπως ένας ναυτικός της εποχής δε θα μπορούσε να μείνει ικανοποιημένος από τους χάρτες που κατασκευάζονταν με βάση μια επίπεδη Γη, παρόλο που αυτή σε κάθε τόπο έμοιαζε επίπεδη, έτσι και ένας σύγχρονος φυσικός που μελετάει κοσμολογικά φαινόμενα μεγάλης κλίμακας, δε θα μπορούσε να αρκεστεί στα αποτελέσματα που δίνει μια θεωρία που ταυτίζει τοπολογικά το χωρόχρονο με τον επίπεδο $\mathbb{R}^4$.

Ο χωρόχρονος λοιπόν, ως το σύνολο όλων των γεγονότων που συμβαίνουν στο χώρο και στο χρόνο, θα αναπαρίσταται με τη βοήθεια της Διαφορικής Γεωμετρίας ως μια 4-διάστατη *πολλαπλότητα*, που όπως θα δούμε αμέσως είναι με λίγα λόγια ένα σύνολο σημείων που τοπικά (γύρω από κάθε σημείο του) μοιάζει με τον 'επίπεδο' $\mathbb{R}^4$ (Minkowskiγια την ακρίβεια). Μπορούμε κατ΄ αντιστοιχία να δούμε την επιφάνεια της γής σαν ένα απλό παράδειγμα μιας 2-διάστατης πολλαπλότητας εφόσον σε κάθε σημείο της μπορούμε να ταυτίσουμε μικρές περιοχές με περιοχές του $\mathbb{R}^2$. Συνολικά όμως οι γεωμετρικές ιδιότητες μιας σφαιρικής επιφάνειας είναι τελείως διαφορετικές από αυτές του επιπέδου, κάτι που θα φανεί μαθηματικά με την εισαγωγή της έννοιας της μετρικής και στη συνέχεια της καμπυλότητας.

Ένα σύνολο M λοιπόν θα λέγεται *πολλαπλότητα* αν κάθε σημείο του έχει μια ανοικτή περιοχή που μπορεί απλώς να απεικονιστεί 1-1 με μια ανοικτή περιοχή του $\mathbb{R}^n$. Πιο αυστηρά, ο μαθηματικός ορισμός της πολλαπλότητας έχει ως εξής:

Ορισμός 2.1.2. *Μια n-διάστατη, C^∞ , πραγματική πολλαπλότητα είναι ένα σύνολο M , μαζί με μία συλλογή υποσυνόλων $\{O_a\}$ που ικανοποιούν τις παρακάτων ιδιότητες :*

(1) $\forall p \in M,\ \exists\, O_a\ :\ p \in O_a$ *, δηλαδή η συλλογή* $\{O_a\}$ *καλύπτει την* M
(2) $\forall a\, \exists$ *ομομορφική απεικόνιση (χάρτης)* $\psi_a : O_a \mapsto U_a$ *, με* $U_a \subset \mathbb{R}^n$ *(ανοιχτό)*
(3) Αν για κάποια O_α, O_β *ισχύει* $O_\alpha \bigcap O_\beta \neq \emptyset$ *, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το χάρτη* $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ *, που παίρνει σημεία του* $\psi_\alpha[O_\alpha \bigcap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ *σε σημεία του* $\psi_\beta[O_\alpha \bigcap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$*. Απαιτούμε τα υποσύνολα αυτά του* $\mathbb{R}^n$ *να είναι ανοικτά και την απεικόνιση αυτή να είναι* C^∞*.*

Ας δούμε κατ΄ αρχάς τη φυσική σημασία του παραπάνω ορισμού. Οι 1-1 απεικονίσεις (χάρτες) από την πολλαπλότητα M στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε στοιχείο του καλύμματος της M, αποτελούν στην ουσία αυτό που στη φυσική ονομάζουμε σύστημα συντεταγμένων, προσδίδουν δηλαδή n πραγματικές συντεταγμένες σε κάθε σημείο P της πολλαπλότητας, τις οποίες θα συμβολίζουμε με $(x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P))$.

Το νέο συστατικό που δίνεται στη γενική έννοια της πολλαπλότητας σε σχέση με την ειδική περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ είναι το γεγονός ότι δεν απαιτείται μια και μόνο περιοχή ομομορφική με τον $\mathbb{R}^n$ να καλύπτει ολόκληρη την M. Έτσι μπορούμε να φανταστούμε οποιοδήποτε απλό ή περίπλοκο γεωμετρικό κατασκεύασμα όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας ή μια λωρίδα Moebius και να το μελετήσουμε σαν πολλαπλότητα.

Είναι εμφανές ότι δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στην επιλογή των χαρτών ψ_α οπότε μας δίνεται η ελευθερία να επιλέξουμε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων είναι συμβατό με τις απαιτήσεις (2) και (3). Για να μην εξαρτάται ο ορισμός της κάθε πολλαπλότητας από το σύστημα χαρτών που επιλέγουμε κάθε φορά μπορούμε να ενσωματώσουμε στον ορισμό την απαίτηση ότι το κάλυμμα $\{O_a\}$ αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα και η οικογένεια ψ_α αποτελείται από όλους τους δυνατούς χάρτες (αρκεί να ικανοποιούν τα (2) και (3». Έτσι σε αυτό το επίπεδο της διαφορικής γεωμετρίας ένα μήλο μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με μία σφαίρα, ή και ένα μολύβι, καθώς με την επιλογή κατάλληλων χαρτών μπορούμε να παραμορφώσουμε ομαλά το ένα στο άλλο, αλλά κανένα από τα παραπάνω δε μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με μια κούπα ή ένα κουλούρι, λόγω του διαφορετικού τρόπου επικάλυψης των περιοχών O_a. Μια τέτοια παραμόρφωση, υπό την έννοια της απεικόνισης από μια πολλαπλότητα M σε μία άλλη (ισοδύναμη) N και αντιστρόφως καλείται διαφορομορφισμός (diffeomorphism).

Ας δούμε τώρα τη σημασία της προϋπόθεσης (3). Για τα παραδείγματα που μόλις αναφέρθηκαν χρειάζονται περισσότερες της μίας περιοχές ('μπαλώματα') O_a για να καλυφθούν ολόκληρες οι πολλαπλότητες από συστήματα συντεταγμένων (ομομορφισμούς στον $\mathbb{R}^2$). Ας υποθέσουμε γενικά σε μία πολλαπλότητα μία περιοχή U που αλληλοκαλύπτεται από δύο σύνολα O_α, O_β και απεικονίζεται αντίστοιχα από τους δύο διαφορετικούς χάρτες ψ_α, ψ_β στον $\mathbb{R}^n$. Η σύνθεση $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ είναι στην ουσία ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων που μας πάει από τις $(x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P))$ που ορίζει η ψ_α στις $(y^1(P), y^2(P), \ldots, y^n(P))$ που ορίζει η ψ_β για κάθε σημείο P της τομής $U = O_\alpha \cap O_\beta$.

Έτσι λοιπόν αν οι συναρτήσεις που ορίζονται από την $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
y^1 &= y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\
y^2 &= y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\
&\vdots \\
y^n &= y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)
\end{aligned}
$$

είναι διαφορίσιμες και αν αυτό ισχύει για κάθε τέτοιο ζεύγος χαρτών $(O_\alpha, \psi_\alpha), (O_\beta, \psi_\beta)$ τότε λέμε ότι πρόκειται για μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Συνήθως υποθέτουμε C^∞ πολλαπλότητες αν και σε πολλές περιπτώσεις κάτι τέτοιο δεν είναι αναγκαίο.

Τέλος, για να έχει φυσικό νόημα η πολλαπλότητα ως χωρόχρονος, θα εννοείται από εδώ και στο εξής ότι οι πολλαπλότητες που εξετάζουμε είναι -σαν τοπολογικοί χώροι- Hausdorff και παρασυμπαγείς.

2.1.3 Διανύσματα και Τανυστές

Για να μπορέσουμε να μιλήσουμε για Φυσική πάνω σε μία πολλαπλότητα θα χρειαστεί να προσαρμόσουμε όλα τα μαθηματικά αντικείμενα που χειριζόμαστε στη Φυσική όπως οι συναρτήσεις και τα διανυσματικά πεδία, έτσι ώστε να 'ζούν' πάνω στην πολλαπλότητα.

Καμπύλες πάνω σε πολλαπλότητα

Ορισμός 2.1.3. *Μια καμπύλη είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση από ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$ πάνω στην πολλαπλότητα M, $C : \mathbb{R} \mapsto M$.*

Εδώ η διαφορισιμότητα προκύπτει μέσω του συστήματος συντεταγμένων, υπονοεί δηλαδή ότι οι συναρτήσεις συντεταγμένων $x^i(\lambda) = x^i(C(\lambda))$ είναι διαφορίσιμες ως προς λ.

Με αυτόν τον τρόπο σχετίζουμε κάθε σημείο λ του $\mathbb{R}$ με ένα σημείο της M, το οποίο ονομάζεται 'εικόνα του λ'. Έτσι για κάθε σημείο της καμπύλης C υπάρχει τιμή του λ στο R, έχουμε δηλαδή παραμετροποιήσει την καμπύλη. Δύο καμπύλες θεωρούνται διαφορετικές ακόμη κι αν έχουν την ίδια εικόνα, αν υπάρχουν σημεία στην M που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές για την κάθε παράμετρο.

Συναρτήσεις πάνω σε πολλαπλότητα

Μία (πραγματική) συνάρτηση πάνω στην πολλαπλότητα M είναι ένας κανόνας, $f : M \mapsto \mathbb{R}$ που προσδίδει μια πραγματική τιμή σε κάθε σημείο της M. Μέσω ενός συστήματος συντεταγμένων (χάρτη) $\psi : M \mapsto \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση γίνεται $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ και αν είναι διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι διαφορίσιμη στην M. Στην ουσία έχουμε $f(P), P \in M$, που γίνεται μέσω της $\psi^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto M$ $f(\psi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n))$ ή $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Μπορούμε να δούμε τις ίδιες τις συντεταγμένες ξεχωριστά σαν n διαφορίσιμες συναρτήσεις πάνω στην M.

Διανύσματα και διανυσματικά πεδία

Εδώ θα κατασκευάσουμε την έννοια του διανύσματος ως γεωμετρικό αντικείμενο πάνω σε μια πολλαπλότητα, με όρους διαφορικής γεωμετρίας. Στον Ευκλείδιο χώρο η έννοια του διανυσματος εύκολα προκύπτει μέσω της μετατόπισης ή της διαφοράς θέσης μεταξύ δύο σημείων του χώρου. Οποιοδήποτε διάνυσμα του *διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^n$ μπορεί να κατασκευαστεί μέσω της 'διαφοράσ' μεταξύ δύο σημείων της *πολλαπλότητας* $\mathbb{R}^n$ και μπορεί να σχεδιαστεί πάνω σε αυτή ενώνοντας τα σημεία αυτά με μια ευθεία γραμμή. Με λίγα λόγια τα σημεία του χώρου και τα διανύσματα του διανυσματικού χώρου έρχονται σε 1-1 αντιστοιχία. Είναι προφανές ότι σε μια μη τετριμμένη περίπτωση πολλαπλότητας κάτι τέτοιο δε μπορεί να ισχύει και η κατασκευή των διανυσμάτων δεν είναι μια απλή υπόθεση. Η λύση θα δοθεί μέσω των καμπυλών και των απειροστών μετατοπίσεων πάνω σε αυτές.

Έστω καμπύλη που περνά από το $P \in M$ και περιγράφεται σύμφωνα με τα παραπάνω από τις εξισώσεις $x^i = x^i(\lambda), i = 1, 2, \ldots, n$. Θεωρούμε επίσης διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x^1, \ldots, x^n)$ στην M. Έτσι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ που δίνει την τιμή της f σε κάθε σημείο της καμπύλης με τιμή παραμέτρου λ, δηλαδή $g(\lambda) = f(x^i(\lambda))$.

Διαφορίζοντας την παραπάνω σύνθεση :

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{2.1}$$

και γενικεύοντας για τυχαίο όρισμα στη θέση των συναρτήσεων g, f :

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \left(\text{ή} \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{2.2}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε τη σύμβαση άθροισης δεικτών η οποία θα εννοείται από εδώ και στο εξής.

Αν δούμε την παραπάνω σχέση με γεωμετρικούς όρους παρατηρούμε ότι το σύνολο των n αριθμών $\{\frac{dx^i}{d\lambda}\}$ αποτελεί τις συντεταγμένες ενός διανύσματος εφαπτόμενου στην καμπύλη $x^i(\lambda)$ εφόσον η dx^i είναι η απειροστή μετατόπιση κατά μήκος αυτής. Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι το σύνολο των παραγώγων κατεύθυνσης (αριστερό μέλος) όλων των δυνατών καμπύλων που περνούν από το σημείο P αποτελούν έναν διανυσματικό χώρο.

Έστω $x^i = x^i(\mu)$ μια άλλη καμπύλη που περνάει από το ίδιο σημείο P. Τότε ομοίως

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.3}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων μας δίνει :

$$a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.4}$$

Και πάλι μπορούμε να δούμε τους αριθμούς $\{a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\}$ ως συντεταγμένες ενός νέου διανύσματος το οποίο είναι εφαπτόμενο σε κάποια καμπύλη που περνά από το P. Άρα υπάρχει καμπύλη, έστω με παράμετρο ϕ ώστε στο σημείο P να ισχύει :

$$\frac{d}{d\phi} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{d}{d\phi} = a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu}. \tag{2.5}$$

Έτσι βλέπουμε ότι όντως οι παράγωγοι κατεύθυνσης (directional derivatives) όλων των δυνατών καμπύλων που περνούν από το P , όπως η $\frac{d}{d\lambda}$ φτιάχνουν ένα διανυσματικό χώρο στο P. Μπορούμε τώρα να δούμε τον εμφανή ρόλο του διαφορικού τελεστή $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ως διάνυσμα βάσης, όπως αυτό φαίνεται από τη θέση του στον ορισμό του διανύσματος $d/d\lambda$. Έστω ότι βρισκόμαστε σε ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Ειδική περίπτωση καμπύλων αποτελούν οι ίδιοι οι άξονες συντεταγμένων, οι καμπύλες δηλαδή για τις οποίες η τιμή της παραμέτρου ισούται με την τιμή μιας εκ των συντεταγμένων του συστήματος, έστω x^j. Είναι λοιπόν :

$$\frac{d}{dx^j} = \sum_i \frac{dx^i}{dx^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.6}$$

και είδαμε πριν ότι οποιαδήποτε $\frac{d}{d\lambda}$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Επομένως το σύνολο $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου που ορίσαμε στο σημείο P, τον οποίο καλούμε *εφαπτόμενο χώρο* στο P και συμβολίζουμε με V_P.

Υπάρχει λοιπόν μια 1-1 αντιστοιχία μεταξυ του χώρου όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο P και του χώρου όλων των διαφορικών κατά μήκος των καμπύλων που περνούν από το P. Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί να ονομάσουμε το $\frac{d}{d\lambda}$ εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $x^i(\lambda)$ και γενικά συμβολίζουμε κάθε τέτοιο διάνυσμα με έναν πάνω δείκτη π.χ. v^a. Ο χώρος T_P σε τυχαίο $P \in M$ είναι της ίδιας διάστασης με την πολλαπλότητα M, δηλαδή $dimV_P = n$.

Η βάση του διανυσματικού χώρου είναι για δεδομένο σύστημα συντεταγμένων ψ οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ που ορίζει το σύστημα αυτό και συχνά συμβολίζονται με e_μ, ενώ οι συνιστώσες του διανύσματος v στη βάση αυτή συμβολίζονται με ελληνικό δείκτη v^μ. Έτσι

$$v = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu e_\mu \tag{2.7}$$

Ο κάτω δείκτης των στοιχείων της βάσης δηλώνει ότι οι συνιστώσες ενός τυχαίου διανύσματος του εφαπτόμενου χώρου μετασχηματίζονται αντίστροφα από τις συνιστώσες των ειδικών αυτών διανυσμάτων. Αυτό συμβαίνει επειδή οι συνιστώσες των διανυσμάτων βάσης κάτω από τη βάση που σχηματίσουν αυτά θα είναι εξ' ορισμού $e_0 \rightarrow (1,0,0,0), e_1 \rightarrow (0,1,0,0)$ κ.ο.κ. . Αν διαλέξουμε νέο σύστημα συντεταγμένων ψ' για την περιοχή του σημείου P, θα πάρουμε και μια νέα βάση, $\{e'_\mu\}$ η οποία συνδέεται με την αρχική μέσω του κανόνα αλυσίδας που μας δίνει τις συνιστώσες των αρχικών διανυσμάτων βάσης κάτω από τη νέα βάση:

$$e_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} {e'}_\mu. \tag{2.8}$$

Εφόσον το διάνυσμα v ως γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίδιο ανεξαρτήτως επιλογής βάσης προκύπτει από τις δύο τελευταίες σχέσεις ότι οι συνιστώσες v'^ν στη νέα βάση θα έχουν μετασχηματιστεί ως:

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{2.9}$$

Για τον λόγο αυτό τα διανύσματα του εφαπτόμενου χώρου καλούνται και *ανταλλοίωτα* διανύσματα.

Οταν μιλάμε για *διανυσματικό πεδίο* v ορισμένο πάνω σε μια πολλαπλότητα M, εννοούμε μία αντιστοίχηση ενός εφαπτόμενου διανύσματος, $v|_p \in V_p$ σε κάθε σημείο $p \in M$. Το διανυσματικό πεδίο v θα είναι λείο αν για κάθε λεία συνάρτηση $f : M \mapsto R$ η συνάρτηση $v(f)$ είναι επισης λεία. Εφόσον όμως σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα πεδία των διανυσμάτων βάσης είναι λεία, τότε για είναι λείο ένα διανυσματικό πεδίο αρκεί οι συναρτήσεις που μας δίνουν τις συνιστώσες του πεδίου v^μ να είναι λείες. Για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο υπάρχει μοναδική οικογένεια καμπυλών τέτοια ώστε σε κάθε σημείο $p \in M$ το τοπικό διάνυσμα να είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης που περνά από το p. Οι καμπύλες αυτές λέγονται ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου η ύπαρξη και μοναδικότητά τους φαίνονται από το γεγονός ότι η εύρεση τέτοιων καμπυλών ισοδυναμεί με τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \ldots, x^n)\,, \tag{2.10}$$

όπου t η παράμετρος της καμπύλης και επομένως $\frac{d}{dt}$ το εφαπτόμενο διάνυσμα σε αυτή, ενώ v^μ είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου. Άρα το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων α΄ τάξης και έχει ακριβώς μία λύση για κάθε σημείο $p \in M$ (από κάθε σημείο περνά ακριβώς μία καμπύλη).

Τέλος θα ορίσουμε και την πράξη της μετάθεσης μεταξύ δύο λείων διανυσματικών πεδίων $u = \frac{d}{d\lambda}, v = \frac{d}{d\mu}$, από την οποία προκύπτει ένα νέο πεδίο που καλείται *μεταθέτης* των u και v και συμβολίζεται με $w = [u, v]$. Η πράξη ορίζεται ως:

$$w(f) = [u, v](f) = u[v(f)] - v[u(f)]. \tag{2.11}$$

Ο μεταθέτης δύο τυχαίων δ.π. γενικά δε δίνει μηδέν. Όταν έχουμε ένα σύνολο n διανυσματικών πεδίων μετατίθενται μεταξύ τους και είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων για το οποίο τα δ.π. αυτά είναι διανύσματα βάσης. Αν δε μετατίθενται ένα τέτοιο σύστημα δε μπορεί να κατασκευαστεί.

Μια ακόμη δυσκολία που εμφανίζεται στη μελέτη διανυσματικών πεδίων είναι στη σύγκριση και τις πράξεις μεταξυ διανυσμάτων σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας. Δεν υπάρχει πλέον αυτόματος τρόπος να μεταφέρεις διανύσματα από ένα σημείο p σε ένα άλλο q εφόσον δε μπορούμε να μιλήσουμε καν για ευθείες γραμμές, οι οποίες θα ήταν οι προτιμώμενες καμπύλες αναφοράς, ούτε για παραλληλία. Για τον λόγο αυτόν, όταν μιλάμε για διανυσματικό χώρο θα αναφερόμαστε πάντα στον εφαπτόμενο χώρο ενός συγκεκριμένου σημείου και στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να συγκρίνουμε διανύσματα που ανήκουν σε διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους V_p, V_q, πώς θα μεταφέρουμε δηλαδή τους χώρους αυτούς από το ένα σημείο στο άλλο ταυτίζοντάς τους.

Τανυστές

Εκτός όμως από βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη, στη Φυσική συναντάμε συχνά πεδία των οποίων η τιμή ή οι συνιστώσες σε ένα σημείο εξαρτώνται από τη διεύθυνση προς την οποία γίνεται η μέτρησή τους. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι για παράδειγμα η τάση στο εσωτερικό ενός ρευστού και ανήκει στην κατηγορία των τανυστών. Θα δούμε στη συνέχεια ότι και τα διανύσματα αλλά και τα βαθμωτά μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής έννοιας των τανυστών.

Θα προχωρήσουμε στο μαθηματικό ορισμό των τανυστών με τη χρήση όσων έχουμε πει για τα διανύσματα. Έστω V_p ο εφαπτόμενος διανυσματικός χώρος στο σημείο $p \in M$. Ορίζω ως δυϊκό χώρο του V_p και συμβολίζω με V_p^* το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $\omega : V_p \mapsto \mathbb{R}$. Δηλαδή αν $\omega \in V_p^*$ και $v^a, u^a \in V_p$ τότε $\omega(v) \in \mathbb{R}$ και :

$$\omega(av + bu) = a\omega(v) + b\omega(u) \tag{2.12}$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ο V_p^* εφοδιασμένος με μια πράξη πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με βαθμωτό είναι διανυσματικός χώρος και καλούμε τα στοιχεία του *δυϊκά διανύσματα* ή *1-μορφές*. Οι 1-μορφές χαρακτηρίζονται και ως συναλλοίωτα διανύσματα αφού οι συνιστώσες τους μετασχηματίζονται όπως τα διανύσματα βάσης κάτω από αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Έτσι θα συμβολίσουμε τις 1-μορφές με ένα δείκτη κάτω π.χ. ω_a

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ένα διάνυσμα v ως όρισμα τυχαίας 1-μορφής, και μέσω των γραμμικών σχέσεων να το δούμε ως απεικόνιση $v : V_p^* \mapsto \mathbb{R}$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο V_p είναι ο δυϊκός του V_p^* ή ότι $[V_p^*]^* = V_p$ και η πράξη μεταξύ τους (συστολή δεικτών) θα είναι το βαθμωτό:

$$\omega(v) \equiv v(\omega) \equiv <\omega, v> \tag{2.13}$$

Αν $v_1, \ldots, v_n$ μια βάση του V_p τότε μπορούμε να ορίσουμε μια βάση $v^1*, \ldots, v^n*$

για τον V_p^* που συσχετίζεται με αυτή μέσω της σχέσης

$$v^\mu(v_\nu) = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.14}$$

που εξασφαλίζει ότι η δυϊκή βάση θα είναι ορθοκανονική και δείχνει ότι $dim\, V^* = dim\, V$. Τα στοιχεία όμως τις δυϊκής βάσης εξαρτώνται άμεσα από την επιλογή της διανυσματικής βάσης του V_p.

Γενικεύουμε τώρα από τα διανύσματα και τις 1-μορφές στη γενική έννοια των τανυστών. Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n και V^* ο δυϊκός του. Ορίζουμε ως *τανυστή T τύπου (k,l)* πάνω στον V, κάθε πολυγραμμική απεικόνιση από k 1-μορφές και l διανύσματα στους πραγματικούς αριθμούς:

$$T : V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V \mapsto \mathbb{R}\,.$$

Πολυγραμμικότητα σημαίνει γραμμική εξάρτηση του τανυστή από κάθε όρισμα. Έτσι αν δούμε τον τανυστή σαν ένα μηχάνημα παραγωγής αριθμών με k υποδοχές για 1-μορφές και l υποδοχές για διανύσματα, η κάθε υποδοχή είναι γραμμική. Για το λόγο αυτό οι τανυστές συμβολίζονται με τους εξής ισοδύναμους τρόπους:

$$\mathbf{T} = T^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} = T(\ ,\ ,\ldots;\ ,\ ,\ldots),. \tag{2.15}$$

Στον 1ο συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε σχεδόν πάντα, οι επάνω δείκτες αντιστοιχούν στις υποδοχές 1-μορφών ενώ οι κάτω δείκτες στις υποδοχές διανυσμάτων και αναδεικνύουν την πολυδιανυσματική (ανταλλοίωτη) και 'πολυ-δυϊκή' (συναλλοίωτη) συμπεριφορά του τανυστή αντίστοιχα.

Επομένως μπορούμε να πούμε για τις περιπτώσεις των διανυσμάτων, και των 1-μορφών ότι είναι απλώς δύο ειδικές κατηγορίες τανυστών. Τα διανύσματα είναι τανυστές 1ης τάξης (1 ορισμα) τύπου (1,0) και οι 1-μορφές τύπου (0,1), ενώ τα βαθμωτά θεωρούνται μηδενικής τάξης τανυστές (0,0). Το σύνολο των τανυστών συγκεκριμένου τύπου (k,l) αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης n^{k+l} ο οποίος συμβολίζεται με $\mathscr{T}(k,l)$. Οι τανυστές μπορούν επίσης εκτός από απεικονίσεις στους πραγματικούς αριθμούς, να ερμηνευθούν ως μετασχηματισμοί μεταξύ τανυστικών χώρων. Για παράδειγμα έστω ο $T(\ ;\ )$ τανυστής τύπου (1,1). Αν στην 1η υποδοχή τοποθετήσουμε μια 1-μορφή ω_a, προκύπτει ο τανυστής $T(\omega_a; \,)$ ο οποίος έχει μια υποδοχή κενή και συμπεριφέρεται σαν 1-μορφή καθώς με την εισαγωγή ενός διανύσματος δίνει πραγματικό αριθμό. Με αυτή την έννοια μπορούμε να δούμε τους (1,1) τανυστές ως απεικονίσεις από τις 1-μορφές στις 1-μορφές, δηλαδή ως μετασχηματισμούς $T : V_p^* \mapsto V_p^*$. Αντιστρόφως αν συμπληρώσουμε τη 2η υποδοχή με ένα διάνυσμα v^a προκύπτει ο $T(\,;v^a)$ που είναι διάνυσμα, οπότε και ο T μπορούμε να πούμε ότι μετασχηματίζει διανύσματα σε διανύσματα $T : V_p^* \mapsto V_p^*$.

Ανάλογα με τη διάσταση του τύπου κάθε τανυστή, υπάρχει και ισάριθμο πλήθος ανεξάρτητων συνιστωσών. Η τιμή κάθε συνιστώσας καθορίζεται από την τιμή που παίρνει ο τανυστής όταν δεχθεί ως ορίσματα διανύσματα βάσης σε όλες τις υποδοχές του. Έτσι σε μια 4-διάστατη πολλαπλότητα για παράδειγμα ένας τανυστής 2ης τάξης (2,0) θα έχει $4^2 = 16$ συνιστώσες καθεμία από τις οποίες συμβολίζεται με τους ανάλογους δείκτες, π.χ. $T^{10} = T(e_1, e_0)$.

Θα ορίσουμε τώρα δύο σημανικές πράξεις μεταξύ τανυστών, το εξωτερικό γινόμενο και τη συστολή. Αν για παράδειγμα έχουμε δύο διανύσματα $u, v \in V_p$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο τανυστή, τον $u \otimes v$ ο οποίος λέμε ότι είναι το *εξωτερικό γινόμενο* των u και v του οποίου η τιμή για δύο τυχαίες 1-μορφές $p, q \in V_p^*$ είναι ίση με το γινόμενο $u(p)v(q)$:

$$u \otimes v(p, q) = u(p)v(q). \tag{2.16}$$

Το γινόμενο μεταξύ δύο τανυστών τύπου (k, l) και (k', l') δίνει έναν τανυστή τύπου $(k + k', l + l')$

Η δεύτερη πράξη καλείται *συστολή* ως προς τον i-οστό πάνω δείκτη και τον j-οστό κάτω δείκτη και είναι μία απεικόνιση από το χώρο $\mathscr{T}(k, l)$ στον $\mathscr{T}(k-1, l-1)$. Έστω τανυστής T τύπου (k, l), τότε η συστολή CT δίνει έναν τανυστή του οποίου οι συνιστώσες προκύπτουν από την άθροιση των συνιστωσών του T ως προς τους δύο δείκτες:

$$(CT)^{\mu_1,\ldots,\mu_{k-1}}{}_{\nu_1,\ldots,\nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^{n} T^{\mu_1,\ldots,\sigma,\ldots,\mu_k}{}_{\nu_1,\ldots,\sigma,\ldots,\nu_l}\,. \tag{2.17}$$

Η συστολή για παράδειγμα ενός (1,1) τανυστή θα δώσει απλώς το ίχνος του αντίστοιχου πίνακα μετασχηματισμού. Η πράξη αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητη συστήματος συντεταγμένων. Φυσικά η συστολή του ίδιου τανυστή ως προς διαφορετικούς δείκτες θα δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα.

Είδαμε πως τα διανύσματα μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα 2.9 και μέσω αυτού θα βρούμε τους αντίστοιχους κανόνες για τις 1-μορφές και για οποιονδήποτε γενικό τανυστή. Αν λάβουμε υπόψη ότι η δράση μιας 1-μορφής πάνω σε διάνυσμα δίνει βαθμωτό (η τιμή του οποίου δεν εξαρτάται από την επιλογή βάσης) ο κανόνας μετασχηματισμού 1-μορφών δίνεται από την εξίσωση:

$$\omega'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \tag{2.18}$$

Γενικά ένας τανυστής $T \in \mathscr{T}(k,l)$ συμπεριφέρεται ως k-διανύσματα και l 1-μορφές και ο κανόνας μετασχηματισμού των συντεταγμένων του δίνεται από την εξίσωση:

$$T'^{\mu'_1,\ldots,\mu'_k}{}_{\nu'_1,\ldots,\nu'_l} = \sum_{\mu_1\ldots\nu_{l=1}}^{n} T^{\mu_1,\ldots,\mu_k}{}_{\nu_1,\ldots,\nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_l}} \tag{2.19}$$

κάτω από την αλλαγή βάσης από $\{x^i\}$ σε $\{x'^i\}$.

Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί για τους τανυστές οποιουδήποτε τύπου είναι μια μικρή παραλλαγή του συμβολισμού δεικτών για τις συνιστώσες. Κάθε ανταλλοίωτη 'υποδοχή' του τανυστή θα συμβολίζεται με ένα λατινικό επάνω δείκτη ενώ κάθε συναλλοίωτη με ένα λατινικό κάτω δείκτη. Χρήση του ίδιου δείκτη δύο φορές στην ίδια παράσταση επάνω και κάτω συμβολίζει άθροιση ως προς τους δείκτες αυτούς δηλαδή συστολή (π.χ. $T^a{}_a$ ή $< u,p >= u^a p_a$). Η χρήση του συμβόλου $\otimes$ για το εξωτερικό γινόμενο θα παραλείπεται και η πράξη θα γράφεται απλώς με τη μορφή $T^{ab}{}_c S^{def}{}_g$. Ο συμβολισμός αυτός είναι ανεξάρτητος βάσης συντεταγμένων γιαυτό και όλες οι τανυστικές εξισώσεις θα χρησιμοποιούν αφηρημένους δείκτες και όχι δείκτες συνιστωσών.

Ένας τανυστής λέμε ότι είναι συμμετρικός ως προς δύο δείκτες του όταν η εναλλαγή ορισμάτων για δύο οποιαδήποτε διανύσματα ή 1-μορφές δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Αν δηλαδή έχουμε έναν συμμετρικό (0,2) τανυστή T_{ab} τότε για κάθε v^a και $u^a \in V$ θα ισχύει $T_{ab}v^a u^b = T_{ab}u^a v^b$ ή αλλιώς μπορούμε να πούμε $T_{ab} = T_{ba}$ το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη σχέση με μια απλή μετονομασία των δεικτών. Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε τη σχέση αυτή είναι

$$T_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) = 0. \tag{2.20}$$

Από την άλλη λέμε ότι ο T_{ab} είναι αντισυμμετρικός αν $T_{ab} = -T_{ba}$ ή

$$T_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) = 0. \tag{2.21}$$

Γενικά μπορούμε να χωρίσουμε έναν (0,2) τανυστή σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος

$$T_{ab} = T_{[ab]} + T_{(ab)} \tag{2.22}$$

Ο μετρικός τανυστής g_{ab}

Οι έννοια του διανυσματικού πεδίου και της λειότητας ενός πεδίου επεκτείνεται κατά προφανή τρόπο για τον ορισμό τανυστικών πεδίων. Το χαρακτηριστικότερο τανυστικό πεδίο που όταν είναι ορισμένο πάνω σε μία πολλαπλότητα χαρακτηρίζει τη γεωμετρία της, είναι αυτό της μετρικής g_{ab}. Ο μετρικός τανυστής είναι μια ξεχωριστή περίπτωση τανυστή ο οποίος ορίζει την έννοια του μέτρου σε ένα διανυσματικό χώρο. Έτσι όταν εφοδιάσουμε μια πολλαπλότητα με την επιπλέον δομή του μετρικού τανυστή σε κάθε σημείο της, έχουμε έναν τρόπο να μετράμε αποστάσεις μέσω απειροστών διαστημάτων, έχουμε ορίσει δηλαδή την έννοια του εσωτερικού γινομένου και του μέτρου. Συγκεκριμένα για δύο διανύσματα u, v του εφαπτόμενου χώρου V_p σε ένα σημείο $p \in M$ κάτω από μία μετρική g_{ab} στο σημείο αυτό, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως τον πραγματικό αριθμό $g_{ab}u^a v^b \equiv g(u, v)$. Το μέτρο ενός διανύσματος ορίζεται ομοίως από τη σχέση $|u| = g_{ab}u^a u^b$. Αξίζει να σημειωθεί ότι χωρίς την εισαγωγή της μετρικής στην πολλαπλότητα δε θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου. Ο μετρικός τανυστής είναι από τη φύση του συμμετρικός.

Μπορούμε να δούμε όμως τη μετρική και ως πράξη αντιστοίχησης διανυσμάτων στο p σε δυϊκά διανύσματα του συνεφαπτόμενου χώρου V_p^* ως εξής. Συμπληρώνοντας τη μία υποδοχή του τανυστή με τυχαίο διάνυσμα v παίρνουμε έναν τανυστή (0,1), τον $v_b^* = g_{ab}v^a$ δηλαδή μια 1-μορφή η οποία αν δράσει σε οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα θα μας δώσει το εσωτερικό γινόμενό του με το v^a. Η ιδιότητα της γραμμικότητας μεταφέρεται κατ' ευθείαν από τον τανυστή της μετρικής στον $g(v,\cdot)$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η μετρική είναι μία γραμμική απεικόνιση από το τυχαίο διάνυσμε v^a στο δυϊκά του, το οποίο συμβολίζουμε απλά με v_a.

Ορίζουμε τώρα τον τανυστή της αντίστροφης μετρικής, $(g^{-1})^{ab}$ ή απλά g^{ab}, ώς τον (2,0) τανυστή για τον οποίο ισχύει $g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c$. Με την αντίστροφη μετρική λοιπόν θα απεικονίσουμε το δυϊκό διάνυσμα v_a πίσω στο αρχικό v^a. Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη του αντίστροφου μετρικού τανυστή αρκεί ο τανυστής g_{ab} να μην είναι ιδιάζων, δηλάδή $det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. Είναι μια ακόμη ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί το πεδίο της μετρικής σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας.

Με τον τρόπο αυτό, όταν γνωρίζουμε τη μετρική g_{ab} μιας πολλαπλότητας, έχουμε τη δυνατότητα μέσω αυτής να ανεβάζουμε και να κατεβάζουμε δείκτες τανυσικών πεδίων όπως ακριβώς αντιστοιχήσαμε στο v^a το δυϊκό του v_a. Η διαδικασία αναβίβασης και καταβίβασης δεικτών περιγράφεται κατά μοναδικό τρόπο από την έκφραση:

$$g_{ab}T^{c_1\cdots a\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l} = T^{c_1\cdots}{}_b{}^{c_k}{}_{d_1\cdots d_l} \tag{2.23}$$

και αντιστρόφως για τον g^{ab}.

2.2 Συναλλοίωτη Παραγώγιση - Καμπυλότητα

2.2.1 Η συναλλοίωτη παράγωγος ∇_a

Ένας διαφορικός τελεστής (που καλείται συνήθως συναλλοίωτη παράγωγος και συμβολίζεται με ∇) πάνω σε μια πολλαπλότητα M είναι μια απεικόνιση από κάθε λείο τανυστικό πεδίο τύπου (k,l) σε ένα λείο τανυστικό πεδίο τύπου $(k,l+1)$ (δηλαδή $\nabla T = \nabla_c T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$), η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες: (1) Γραμμικότητα : $\forall A, B \in \mathscr{T}(k,l)$ και $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\nabla_c(aA^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} + bB^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}) = a\nabla_c A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} + b\nabla_c B^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$$

(2) Κανόνας Leibnitz : $\forall A \in \mathscr{T}(k,l)$ και $B \in \mathscr{T}(k',l')$ ισχύει

$$\nabla_e[A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}B^{c_1\ldots c_{k'}}{}_{d_1\ldots d_{l'}}]$$

(3) Μετατίθεται με την πράξη της συστολής : $\forall A \in \mathscr{T}(k,l)$ ισχύει

$$\nabla_d(A^{a_1\ldots c\ldots a_k}{}_{b_1\ldots c\ldots b_l}) = \nabla_d A^{a_1\ldots c\ldots a_k}{}_{b_1\ldots c\ldots b_l}$$

(4) Συμβατότητα με την έννοια της παραγώγισης βαθμωτού πεδίου: Αν f βαθμωτό πεδίο στην M, $\forall t^a \in V_p$ ισχύει

$$t(f) = t^a \nabla_a f$$

και συνήθως

(5) $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.

Ένας τέτοιος τελεστής είναι η μερική παράγωγος ∂_a η οποία σχετίζεται άμεσα με το σύστημα συντεταγμένων που έχουμε ορίσει. Ορίζουμε τη δράση του τελεστή ∂_a πάνω σε τυχαίο τανυστή $A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$ έτσι ώστε οι συνιστώσες του τανυστή που προκύπτει να είναι ίσες με:

$$\partial_\sigma A^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = \frac{\partial(A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l})}{\partial x^\sigma} \tag{2.24}$$

Με βάση τις ιδιότητες της μερικής παραγώγου μπορούν να επαληθευθεί η ισχύς των ιδιοτήτων 1-5. Φυσικά κάτω από ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων ο τελεστής ∂_a είναι μια ειδική περίπτωση διαφορικού τελεστή γεγονός το οποίο μας αποτρέπει από το να τον χρησιμοποιούμε κατά τη διατύπωση φυσικών νόμων. Και αυτό επειδή δε συνδέεται άμεσα με τη δομή της πολλαπλότητας αλλά μέσω της επιλογής του χάρτη ψ.

Μπορούμε όμως να δούμε ότι υπάρχει μια απειρία τέτοιων τελεστών. Ξεκινάμε από το απαίτηση ότι δύο οιποιοιδήποτε διαφορικοί τελεστές ∇_a και $\tilde{\nabla}_a$ πρέπει να έχουν την ίδια δράση πάνω σε κάθε βαθμωτό πεδίο f, δηλαδή $\tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f$. Προχωράμε στη δράση τους σε τυχαίο δυϊκό πεδίο ω_a . Αποδεικνύεται ότι ενώ οι τανυστές $\tilde{\nabla}_a\omega_b$ και $\nabla_a\omega_b$ σε τυχαίο σημείο p εξαρτώνται από το πώς μεταβάλλεται το πεδίο ω_a καθώς απομακρυνόμαστε από το p η διαφορά $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ εξαρτάται μόνο από την τοπική τιμή του ω_a στο σημείο p. Αυτό μας δείχνει ότι η διαφορά αυτή αποτελέι ένα τανυστικό πεδίο $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ ορισμένο πάνω στον εφαπτόμενο χώρο κάθε σημείου $p \in M$ που απεικονίζει 1-μορφές σε τανυστές τύπου (0,2) στο p και το οποίο θα συμβολίζουμε με $C^c{}_{ab}$. Η διαφορά δράσης δηλαδή μεταξύ οποιονδήποτε δύο διαφορικών τελεστών πάνω σε 1-μορφές θα είναι

$$\tilde{\nabla}_a - \nabla_a \omega_b = C^c{}_{ab}\omega_c \,, \tag{2.25}$$

και αυτό δείχνει την ελευθερία που υπάρχει στην επιλογή μιας συναλλοίωτης παραγώγου πάνω στην πολλαπλότητα, η οποία ισοδυναμεί με την επιλογή του τανυστικού πεδίου $C^c{}_{ab}$. Τα παραπάνω συνοψίζονται στην εξίσωση:

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c \tag{2.26}$$

Η ελευθερία όμως αυτή περιορίζεται από την απαίτηση ο τανυστής $C^c{}_{ab}$ να είναι συμμετρικός ως προς τους κάτω δείκτες του, κάτι που προκύπτει κατευθείαν από την ιδιότητα 5. Έστω f τυχαίο βαθμωτό πεδίο. Ορίζω την 1-μορφή $\omega_a = \nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f$ και αντικαθιστώ στην εξίσωση 2.26.

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c{}_{ab}\nabla_c f \tag{2.27}$$

Αν ξαναγράψουμε την ίδια εξίσωση μεταθέτοντας τους δείκτες a, b και αφαιρέσουμε κατά μέλη, και δεδομένου ότι $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ (που ισχύει επίσης για $\tilde{\nabla}_a$) καταλήγουμε στην:

$$C^c{}_{ab}\nabla_c f = C^c{}_{ba}\nabla_c f \quad ή \quad C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba} \,. \tag{2.28}$$

Έτσι ο βαθμός ελευθερίας της παραγώγισης θα εξαρτάται άμεσα από τη διάσταση της πολλαπλότητας. Για n διαστάσεις έχουμε $C^c{}_{ab}$ με $n^2(n+1)/2$ ελεύθερες παραμέτρους (ανεξάρτητες συνιστώσες).

Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε τη διαφορά δράσης δύο συναλλοίωτων παραγώγων σε τυχαίο διανυσματικό πεδίο t^a. Γνωρίζουμε ότι αν ω_a δυϊκό πεδίο, τότε για το βαθμωτό $\omega_a t^a$ θα ισχύει:

$$\begin{gathered}(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) = 0 \Rightarrow \\ \omega_b[C^b{}_{ac}t^c + (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)t^b] = 0 \,,\end{gathered}$$

άρα τελικά,

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b{}_{ac} t^c \tag{2.29}$$

Γενικεύοντας για τη δράση πάνω σε τανυστή τύπου (k, l) καταλήγουμε στον κανόνα:

$$\nabla_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1 \ldots d \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots d \ldots c_l} \tag{2.30}$$

Κάτω από ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων η διαφορά μιας συναλλοίωτης παραγώγου από τον τελεστή της μερικής παραγώγου ∂_a έχει τον ειδικό συμβολισμό $C^c{}_{ab} \to \Gamma^c{}_{ab}$ (σύμβολα Christoffel), δηλαδή η (2.29) γίνεται:

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b{}_{ac} t^c \tag{2.31}$$

Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι ο $\Gamma^b{}_{ac}$ $\delta\epsilon\nu$ είναι τανυστής καθώς οι συνιστώσες του δε μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα για τους τανυστές. Αυτό συμβαίνει επειδή με την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων αλλάζει ταυτόχρονα και ο τελεστής της μερικής παραγώγου από ∂_a σε έναν νέο ∂'_a.

2.2.2 Παράλληλη μετατόπιση

Όπως είδαμε προηγουμένως εν γένει δεν υπάρχει φυσικός τρόπος να συγκρίνει κανείς διανύσματα που ανήκουν σε εφαπτόμενους χώρους διαφορετικών σημείων p, q μιας πολλαπλότητας. Μέσω της συναλλοίωτης παραγώγισης όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαδικασία παράλληλης μεταφοράς διανυσμάτων πάνω σε ολοκληρωτικές καμπύλες διανυσματικών πεδίων.

Δοθέντος ενός διαφορικού τελεστή ∇_a ορίζουμε την παράλληλη μεταφορά κατά μήκος της καμπύλης $C(\lambda)$ ως εξής: αν t^a το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της C, δηλαδή $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, ορίζω ως το παράλληλα μεταφερόμενο v^a το πεδίο που ικανοποιεί

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \tag{2.32}$$

πάνω στη C. Η συστολή του εφαπτόμενου διανύσματος με το δείκτη της συναλλοίωτης παραγώγου δείχνει ότι η απειροστή μεταβολή του διανύσματος v^b

σε κάθε σημείο γίνεται προς την κατεύθυνση του διανυσματος t^a. Έτσι η εξίσωση δείχνει ότι συγκρίνοντας κατά μήκος της καμπύλης το διάνυσμα v^a με τον εαυτό του, δε μεταβάλλεται Γενικότερα μπορούμε να πούμε ότι ένας τανυστής $T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l}$ μεταφέρεται παράλληλα κατα μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του πεδίου t^a όταν ισχύει:

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} = 0\,. \tag{2.33}$$

Σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων η εξίσωση γίνεται για διάνυσμα:

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b{}_{ac} v^c = 0\,, \tag{2.34}$$

ενώ για τανυστή έχει παρόμοια μορφή σε αντιστοιχία με την εξίσωση 2.30. Μεταφρασμένη σε όρους συνιστωσών η 2.34 γίνεται:

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \sum_{\mu,\lambda} t^\mu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} v^\lambda = 0. \tag{2.35}$$

Από την τελευταία εξίσωση φαίνεται αμέσως η ύπαρξη και μοναδικότητα του παράλληλα μεταφερόμενου διανυσματικού πεδίου v^a ως προς την καμπύλη C.

Έτσι μπορούμε να ταυτοποιήσουμε δύο διανυσματικούς χώρους V_p, V_q σε διαφορετικά σημεία p και q της M αν μας δωθούν μια συναλλοίωτη παράγωγος και μια καμπύλη μεταφοράς που συνδέει τα δύο σημεία. Βέβαια το αποτέλεσμα μπορεί να είναι διαφορετικό για διαφορετικές καμπύλες μεταφοράς, κάτι που αποτελεί ένα σημάδι *καμπύλωσης* της πολλαπλότητας στην περιοχή αυτή.

Αν η πολλαπλότητά μας είναι εφοδιασμένη με μια μετρική, g_{ab}, η επιπλέον δομή που αποκτάει μας επιτρέπει να επιλέξουμε έναν διαφορικό τελεστή ∇_a επιβάλλοντας τη συνθήκη

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0 \quad \forall v^a, w^a \in V_p\,, \tag{2.36}$$

που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο σε κάθε καμπύλη όταν τα v^a, w^a μεταφέρονται παράλληλα πάνω σε αυτήν. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) &= g_{bc} v^b t^a \nabla_a (w^c) + g_{bc} w^c t^a \nabla_a (v^b) + v^b w^c t^a \nabla_a (g_{bc}) \\ &= v^b w^c t^a \nabla_a (g_{bc}) = 0\,, \end{aligned}$$

η οποία εφόσον ισχύει για τυχαία διανύσματα συνεπάγεται

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \tag{2.37}$$

Θεώρημα 2.2.1. Αν g_{ab} μετρική, υπάρχει ακριβώς μία ∇_a που να ικανοποιεί $\nabla_a g_{bc} = 0$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\nabla}_a$. Αναζητούμε λύσεις $C^c{}_{ab}$ ώστε ο νέος ∇_a να ικανοποιεί την εξίσωση 2.37. Τότε θα είναι από 2.30:

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\nabla}_a - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} = 0 \Rightarrow \tag{2.38}$$

$$C_{cab} + Cbac = \tilde{\nabla}_a g_{bc} \tag{2.39}$$

ενώ εναλλάσοντας τους δείκτες a, b, c παίρνουμε τις δύο επιπλέον εξισώσεις.

$$C_{cba} + Cabc = \tilde{\nabla}_b g_{ac} \tag{2.40}$$

$$C_{bca} + Cacb = \tilde{\nabla}_c g_{ab} \tag{2.41}$$

Προσθέτουμε τις δύο πρώτες και αφαιρούμε από την τελευταία οπότε τελικά χρησιμοποιώντας τη συμμετρία $C^c{}_{[ab]} = 0$

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \tilde{\nabla}_c g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab} \right\} , \tag{2.42}$$

η οποία ικανοποιεί την εξ. 2.37 και είναι μοναδική.

Με τον τρόπο αυτό μπορούν να υπολογιστούν και τα σύμβολα Christoffel με τις συνιστώσες τους να είναι:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\lambda\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} \tag{2.43}$$

2.2.3 Παράγωγος Lie

Έστω λείο διανυσματικό πεδίο v^a πάνω στην πολλαπλότητα M. Τότε αυτό γεννάει μια μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορομορφισμών $\phi_t : M \mapsto M$ ως εξής: θεωρώ τις ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου οι οποίες είναι παραμετροποιημένες με μια παράμετρο t. Τη μεταφορά ενός σημείου της πολλαπλότητας, κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης που περνάει από αυτό, σε ένα άλλο σημείο πάνω στην ίδια καμπύλη με παραμετρική απόσταση από το αρχικό ίση με t, τη συμβολίζουμε με ϕ_t. Η κάθε ϕ_t είναι μία απεικόνιση από σημεία της M σε σημεία της M για την οποία ισχύει ότι $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ και $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ και μάλιστα κάθε ϕ_t είναι C^∞, 1-1 και επί και προφανώς το ίδιο ισχύει για την αντίστροφή της. Άρα για κάθε τιμή του t η ϕ_t είναι διαφορομορφισμός.

Θα επιχειρήσουμε μέσω διαφορομορφισμού ϕ να μεταφέρουμε έναν τυχαίο τανυστικό πεδίο επάνω στην πολλαπλότητα, και μέσω της απειροστής μεταφοράς θα ορίσουμε ένα είδος παραγώγισης του πεδίου κάτα την κατεύθυνση μεταφοράς. Η κατεύθυνση αυτή προφανώς θα ορίζεται από το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης μεταφοράς.

Ο κάθε ϕ_t καθορίζει αυτόματα μια μεταφορά συναρτήσεων κατά μήκος της πολλαπλότητας. Αν $p \in M$ και $q = \phi_t(p)$ η απεικόνιση του p που απέχει t πάνω στην καμπύλη, τότε μπορούμε να μεταφέρουμε την τιμή που παίρνει μια τυχαία συνάρτηση f στο p, στο νέο σημείο q και ορίζουμε την $f_t^* = f \circ \phi_t : M \mapsto \mathbb{R}$ ώστε: $f_t^*(q) = f(p)$.

Μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε το συλλογισμό ώστε να επεκτείνουμε σε μεταφορά τανυστών πάνω στις ολοκληροτικές καμπύλες. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi_t^* : V_p \mapsto V_{\phi_t(p)}$ που μεταφέρει διανύσματα από τον εφαπτόμενο στο p χώρο στον αντίστοιχο του q ως εξής: αν $v^a \in V_p$ τότε για το $(\phi_t^* v)^a \in V_q$ θα ισχύει:

$$(\phi_t^* v)(f) = v(f \circ \phi_t) \tag{2.44}$$

για κάθε λεία συνάρτηση f.

Γνωρίζοντας τώρα πώς να μεταφέρουμε διανύσματα από το p στο q, συνεχίζουμε ορίζοντας αντίστοιχη απεικόνιση για 1-μορφές, χρησιμοποιώντας τη ϕ_t για να μεταφέρουμε 1-μορφές προς τα πίσω, δηλαδή από το συνεφαπτόμενο V_q^* στον V_p^* ως εξής: ορίζουμε τη $\phi_{t*} : V_q^* \mapsto V_p^*$ έτσι ώστε αν $\omega_a \in V_q^*$ για κάθε διάνυσμα $v^a \in V_p$ (και το αντίστοιχο $(\phi_t^* v)^a \in V_q$) να έχουμε,

$$(\phi_{t*}\omega)_a v^a = \omega_a (\phi_t^* v)^a \tag{2.45}$$

και γενικά για τανυστή τύπου $(0,l)$:

$$(\phi_{t*}T)_{b_1\cdots b_l}v_1^{b_1}\cdots v_l^{b_l} = T_{b_1\cdots b_l}(\phi_t^* v_1)^{b_1}\cdots(\phi_t^* v_l)^{b_l} \tag{2.46}$$

Επεκτείνουμε τώρα τη χρήση της ϕ_t^* για τανυστές τύπου $(k,0)$ από το p στο q με τον ίδιο τρόπο:

$$(\phi_t^* T)^{a_1\cdots a_k}(\omega_1)_{a_1}\cdots(\omega_l)_{a_k} = T^{a_1\cdots a_k}(\phi_{t*}\omega_1)_{a_1}\cdots(\phi_{t*}\omega_k)_{a_k} \tag{2.47}$$

και γνωρίζοντας ότι υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση ϕ_t^{-1} η οποία μάλιστα είναι η ϕ_{-t} χρησιμοποιούμε τη ϕ_{-t}^* η οποία μεταφέρει τανυστές $(0,k)$ από το q προς τα πίσω, στό p. Έτσι για κάθε διαφορομορφισμό ϕ_t ορίζουμε την απεικόνιση από τυχαίο τανυστή T τύπου (k,l) στο p σε τανυστή $(\phi_t^* T)$ ίδιου τύπου στο q ως:

$$(\phi_t^* T)^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}(\omega_1)_{a_1}\cdots(\omega_l)_{a_k}v_1^{b_1}\cdots v_l^{b_l} = T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}(\phi_{t*}\omega_1)_{a_1}\cdots(\phi_{-t}^* v_l)^{b_l}\,. \tag{2.48}$$

Αν για κάποιο τανυστικό πεδίο T η μεταφορά του μέσω της ϕ_t το αφήνει αμετάβλητο, δηλαδή $(\phi_t^* T) = T$ τότε λέμε ότι η ϕ_t είναι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας του πεδίου, ή ότι ο τανυστής T μένει αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της ϕ_t. Στην ειδική περίπτωση που το τανυστικό πεδίο τυχαίνει να είναι η μετρική g_{ab}, και ισχύει $(\phi_t^* g)_a b = g_{ab}$, τότε η ϕ_t καλείται ισομετρία.

Το επόμενο βήμα προκειμένου να ορίσουμε μια παραγώγιση κατά μήκος τυχαίου διανυσματικού πεδίου, είναι να θεωρήσουμε απειροστή μεταφορά των τανυστών πάνω στην ολοκληρωτική καμπύλη. Αυτό γίνεται παίρνοντας το όριο για την παράμετρο t της καμπύλης που ξεκινά από το p να τείνει στο μηδέν και συγκρίνοντας τον απειροστά μετατοπισμένο κατά $-t$ τανυστή με τον αρχικό τανυστή στο σημείο p. Συγκεκριμένα αν v^a λείο διανυσματικό πεδίο το οποίο γεννάει τη μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορομορφισμών ϕ_t τότε η *παράγωγος Lie* , $\pounds_v$ ενός τανυστή $T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}$ ως πρός το v^a ορίζεται ως:

$$\pounds_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\phi_{-t}^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}}{t}\right\}, \tag{2.49}$$

σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας. Ο τελεστής $\pounds_v$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από λεία τανυστικά πεδία τύπου (k,l) σε λεία τανυστικά πεδία ίδιου τύπου και έχει όλες τις ιδιότητες ενός διαφορικού τελεστή. Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός ϕ_t αποτελεί συμμετρία του τανυστικού πεδίου T αυτό σημαίνει αυτόματα ότι ο T είναι σταθερός κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπύλων και $\pounds_v T = 0$ παντού στην πολλαπλότητα M.

Επίσης, εφόσον το δ.π. v^a εφάπτεται στις ολοκληρωτικές καμπύλες των ϕ_t πάντα θα έχουμε

$$\pounds_v(f) = v(f)\,. \tag{2.50}$$

Αν τώρα ταυτίσουμε την ολοκληρωτική καμπύλη μεταφοράς με τον άξονα ενός συστήματος αναφοράς (π.χ. x^1) αυτό συνεπάγεται αμέσως για τις συνιστώσες της παραγώγου Lie τυχαίου τανυστή T ότι:

$$\pounds_v T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1} \tag{2.51}$$

αφού τότε $v^a = (\partial/\partial x^1)^a$. Έστω σε αυτό το προσαρμοσμένο σύστημα ότι υπολογίζουμε την παράγωγο Lie ενός διανυσματικού πεδίου w^a, τότε οι συνιστώσες θα είναι,

$$\pounds_v w^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}\,. \tag{2.52}$$

Ψάχνουμε μια έκφραση ανεξάρτητη συστήματος συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι ο μεταθέτης των v^a, w^a θα έχει επίσης συνιστώσες:

$$[v,w]^\mu = \sum_\nu \left(v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1} \tag{2.53}$$

και συνεπώς η παράγωγος Lie του πεδίου μπορεί να εκφραστεί ανεξαρτήτως συστήματος συντεταγμένων μέσω του μεταθέτη.

$$\pounds_v w^a = [v,w]^a\,. \tag{2.54}$$

Για να δούμε πώς δρα η παράγωγος Lie πάνω στα διάφορα τανυστικά πεδία, ξεκινάμε με το τυχαίο βαθμωτό $f = \mu_a w^a$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα Leibnitz και τις 2.54, 2.50 θα πάρουμε,

$$\pounds_v(\mu_a w^a) = w^a\, \pounds_v \mu_a + \mu_a [v,w]^a = v(\mu_a w^a)\,. \tag{2.55}$$

Όμως από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου (ιδιότητα 4) έχουμε:

$$v(\mu_a w^a) = v^b \nabla_b(\mu_a w^a) = v^b w^a \nabla_b \mu_a + v^b \mu_a \nabla_b w^a \tag{2.56}$$

ενώ μπορούμε επίσης να γράψουμε το μεταθέτη ως:

$$[v, w]^a = v^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_b v^a \,. \tag{2.57}$$

Άρα τελικά,

$$v^b w^a \nabla_b \mu_a + v^b \mu_a \nabla_b w^a = w^a \, \pounds_v \mu_a + \mu_a v^b \nabla_b w^a - \mu_a w^b \nabla_b v^a \Rightarrow$$

$$\pounds_v \mu_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b \,. \tag{2.58}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη σχέση για διάνυσμα w^a θα είναι

$$\pounds_v w^a = v^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_a v^b \,, \tag{2.59}$$

και γενικά για τανυστή τύπου (k, l) θα έχουμε τον κανόνα

$$\pounds_v T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 \cdots c \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots c \cdots b_l} \nabla_{b_j} v^c \tag{2.60}$$

Έστω τώρα χωρόχρονος (M, g_{ab}). Αν $\phi : M \mapsto M$ διαφορομορφισμός, τότε οι χωρόχρονοι (M, g_{ab}) και $(M, \phi^* g_{ab})$ είναι φυσικά ισοδύναμοι, περιγράφουν δηλαδή τον ίδιο φυσικό κόσμο. Κατ΄ επέκταση, το ίδιο ισχύει για τις μονοπαραμετρικές οικογένειες χωρόχρονων $(M, g_{ab}(\lambda))$ και $(M, \phi_\lambda^* g_{ab})$. Έτσι οι ακόλουθες μεταβολές που συμβολίζω με γ_{ab} και γ'_{ab} αντιπροσωπεύουν ισοδύναμες διαταραχές.

$$\gamma_{ab} = \left. \frac{d g_{ab}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad , \quad \gamma'_{ab} = \left. \frac{d \phi_\lambda^* g_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \tag{2.61}$$

Από τον ορισμό της παραγώγου Lie , εξ. 2.49 φαίνεται ότι οποιεσδήποτε δύο τέτοιες ισοδύναμες εκφράσεις θα συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \pounds_v g_{ab}(0) \tag{2.62}$$

και ο τελευταίος όρος μας δίνει ακριβώς την ελευθερία βαθμίδας (gauge invariance) της μετρικής στη ΓΘΣ, η οποία οφείλεται ακριβώς στη συμμετρία κάτω από διαφορομορφισμούς. Εδώ v^a είναι το πεδίο που γεννά τους ϕ_λ ενώ με g_{ab} συμβολίζουμε την αδιατάρακτη μετρική (για $\lambda = 0$). Όμως από την 2.60 θα έχουμε

$$\pounds_v g_{ab} = v^c \nabla_c g_{ab} + g_{ac} \nabla_b v^c + g_{cb} \nabla_a v^c = 2\nabla_{(a} v_{b)} \,, \tag{2.63}$$

αφού ο 1ος όρος φεύγει αν διαλέξουμε τη συσχετισμένη με τη μετρική συναλλοίωτη παράγωγο. Άρα τελικά η ελευθερία βαθμίδας συνοψίζεται σε ένα αυθαίρετο λείο διανυσματικό πεδίο v^a μέσω της σχέσης:

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a \,. \tag{2.64}$$

2.3 Καμπυλότητα

Στη Γενική Σχετικότητα μιλάμε συνήθως για τη γεωμετρία και κυρίως την *καμπυλότητα* του χωρόχρονου. Τι σημαίνει όμως ακριβώς ότι μία πολλαπλότητα εμφανίζει καμπυλότητα και πώς μπορούμε ποσοτικά να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα αυτή· Ένας χώρος μηδενικής καμπυλότητας λέμε ότι είναι επίπεδος. Τα χαρακτηριστικά ενός επίπεδου χώρου (όπως ο Ευκλείδιος $\mathbb{R}^{\nVdash}$) πηγάζουν από το γεγονός ότι μπορούμε πάντα να βρούμε ειδικές καμπύλες, τις οποίες ονομάζουμε ευθείες γραμμές. Οι ευθείες σε έναν επίπεδο χώρο αποτελούν το σύνολο των προτιμώμενων ευθειών πάνω στις οποίες μεταφέρουμε παράλληλα διανύσματα, έτσι ώστε οποιοδήποτε παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα από ένα σημείο p σε ένα άλλο σημείο q, να μην εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθείται, εφόσον η κάθε διαδρομή που ενώνει τα δύο σημεία μπορεί να αναλυθεί σε διαδοχικές ευθείες γραμμές. Διαφορετικές ευθείες δηλαδή, μεταφέρουν το διάνυσμα με τον ίδιο τρόπο σε οποιοδήποτε σημείο. Πάνω σε μια τέτοια πολλαπλότητα μπορούμε να ταυτίσουμε κατά μοναδικό τρόπο τους διανυσματικούς χώρους όλων των σημείων μεταξύ τους. Έτσι, όπως και στην περίπτωση του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$, η παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων είναι μια τετριμμένη υπόθεση.

Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει όμως και σε πολλαπλότητες που εμφανίζουν καμπυλότητα, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια μιας σφαίρας. Αν προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε ένα διάνυσμα από ένα σημείο της πολλαπλότητας σε ένα άλλο, θα δούμε ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται γενικά από τη διαδρομή που επιλέγουμε. Πράγμα που σημαίνει ότι κατά μήκος τυχαίας κλειστής διαδρομής, η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος, σε αντίθεση με την επίπεδη περίπτωση, δεν επιστρέφει πάντα το ίδιο διάνυσμα στο αρχικό σημείο p. Την αποτυχία της διαδικασίας αυτής θα εκφράσουμε αμέσως μετά μέσω του τανυστή καμπυλότητας Riemann ο οποίος περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την καμπύλωση της πολλαπλότητας πάνω στην οποία ορίζεται.

2.3.1 Ο Τανυστής Riemann

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να ορίσουμε ποσοτικά την καμπυλότητα χρησιμοποιώντας μόνο το πεδίο του μετρικού τανυστή. Η καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας M εφοδιασμένης με μια μετρική g_{ab} θα εκφράζεται από έναν τανυστή τύπου (1,3) , τον οποίο ονομάζουμε τανυστή Riemann , συμβολίζουμε με ${R_{abc}}^d$ και ορίζεται ως εξής.

Έστω τυχαίο δυϊκό διανυσματικό πεδίο ω_a και έστω ∇_a η συναλλοίωτη παράγωγος συσχετισμένη με τη μετρική g_{ab}. Ορίζουμε τον τανυστή Riemann μέσω της σχέσης:

$$ {R_{abc}}^d \omega_d = \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c \,. \tag{2.65} $$

Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση από τις 1-μορφές του συνεφαπτόμενου χώρου ενός σημείου $p \in M$ σε τανυστές τύπου (0,3) στο σημείο αυτό. Ο ${R_{abc}}^d$ λοιπόν αποτελεί όντως έναν τανυστή (1,3).

Η σύνδεση τώρα του τανυστή αυτού με την έννοια της καμπυλότητας γίνεται αν παρατηρήσουμε πως ο τανυστής ριμαν εκφράζει την αποτυχία ενός τυχαίου διανύσματος v^a να μεταφερθεί στον εαυτό του μετά από μια απειροστή κλειστή παράλληλη μεταφορά (βρόχο). Αν θεωρήσουμε έναν απειροστό τετράγωνο βρόχο με πλευρές μήκους $\Delta t, \Delta s$ εφαπτόμενες στα διανύσματα T^a, S^a αντίστοιχα, πάνω στις οποίες θα μεταφέρουμε παράλληλα το v^a, τότε η διαφορά δv^a μεταξύ του αρχικού διανύσματος και του παράλληλα μεταφερόμενου θα δίνεται από τη δράση του τανυστή καμπυλότητας Riemann στα παραπάνω διανύσματα.

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a \tag{2.66}$$

Ο τανυστής Riemann επομένως μπορεί να ερμηνευθεί και ως μια υπολογιστική μηχανή στις υποδοχές της οποίας αν εισάγουμε το διάνυσμα που θέλουμε να μεταφέρουμε και τα δύο διανύσματα που ορίζουν το επίπεδο του απειροστού βρόχου μεταφοράς, θα μας επιστρέψει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του τελικού διανύσματος σε σχέση με το αρχικό.

Ιδιότητες του τανυστή Riemann

Είδαμε στον ορισμό του $R_{abc}{}^d$ το αποτέλεσμα που έχει η δράση του τανυστή πάνω σε 1-μορφές. Η ιδιότητα *Leibnitz* της ∇_a μας προτρέπει να υπολογίσουμε τη δράση πάνω σε τυχαίο διάνυσμα t^a ως εξής: Έστω βαθμωτό πεδίο $t^a \omega_a$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(t^c \omega_c) \\ &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)t^c + t^c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)t^c = -R_{abd}{}^c t^d \tag{2.67}$$

Και γενικά αποδεικνύεται επαγωγικά ο κανόνας για τανυστικό πεδίο τύπου (k,l):

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots d_l} = -\sum_{i=1}^{k} R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \cdots e \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots d_l} + \sum_{j=1}^{l} R_{abd_j}{}^{e} T^{c_1 \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots e \cdots d_l} \tag{2.68}$$

Από τη φύση του ο τανυστής Riemann ικανοποιεί τις ακόλουθες συμμετρίες:

$$\cdot \quad R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d \tag{2.69}$$

$$\cdot \quad R_{[abc]}{}^d = 0 \tag{2.70}$$

$$\cdot \quad R_{abcd} = -R_{abdc} \tag{2.71}$$

$$\cdot \quad \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \tag{2.72}$$

Η τελευταία εξίσωση 2.69 είναι γνωστή και ως εξίσωση Bianchi .

Η μοναδική μη τετριμμένη συστολή μεταξύ δύο δεικτών του ${R_{abc}}^d$ και συγκεκριμένα μεταξύ του 2ου και 4ου (ή ισοδύναμα 1ου και 3ου) δείκτη μας δίνει τον *τανυστή* Ricci R_{ab} :

$$R_{ac} = {R_{adc}}^d \tag{2.73}$$

ο οποίος κληρονομεί τη συμμετρία:

$$R_{ab} = R_{ba} \tag{2.74}$$

και του οποίου το ίχνος καλούμε *βαθμωτό Ricci*

$$R = {R_a}^a = g^{ab} R_{ab} \,. \tag{2.75}$$

Μια εξαιρετικά σημαντική για τη Γενική Σχετικότητα εξίσωση που ικανοποιεί ο τανυστής και το βαθμωτό Ricci προκύπτει από τη συστολή της εξίσωσης Bianchi 2.69:

$$\nabla_a {R_{bcd}}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \tag{2.76}$$

η οποία αν πολλαπλασιαστεί με g^{bd} δίνει

$$\nabla_a {R_c}^a + \nabla_b {R_c}^b - \nabla_c R = 0 \Rightarrow \tag{2.77}$$

$$2\nabla^a R_{ab} - \nabla^a (g_{ab} R) = 0 \tag{2.78}$$

ή αλλιώς:

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad , \tag{2.79}$$

όπου μόλις ορίσαμε τον *τανυστή Einstein* G_{ab} ως τον συμμετρικό τανυστή

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \,. \tag{2.80}$$

Το ιδιαίτερο γνώρισμα που χαρακτηρίζει τον τανυστή αυτόν βρίσκεται στην εξίσωση 2.79 η οποία μας λέει ότι *ο τανυστής Einstein διατηρείται.*

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της καμπυλότητας εκφράζοντας τον τανυστή Riemann σε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων. Από τις 2.65 και 2.26 παίρνουμε:

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \partial_a (\partial_b \omega_c - {\Gamma^d}_{bc} \omega_d - \Gamma^e_{ab} (\partial_e \omega_c - \Gamma^d_{ec} \omega_d) - \Gamma^e_{ca} (\partial_b \omega_e - \Gamma^d_{be} \omega_d) \tag{2.81}$$

Χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα των ∂_a, ∂_b , και τη συμμετρία $\Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ba}$ καταλήγουμε ότι:

$$R_{abc}{}^d\omega_d = 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c = [-2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]e}]\omega_d \tag{2.82}$$

Έτσι οι συνιστώσες $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$ θα δίνονται μέσω των συμβόλων $Christoffel$ και κατ' επέκταση (λόγω της 2.43) της μετρικής και των παραγώγων μέχρι β' τάξης:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \sum_\lambda(\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}) \tag{2.83}$$

2.3.2 Εξωγενής Καμπυλότητα

Πέρα όμως από την εσωτερική καμπυλότητα που μπορεί να έχει η γεωμετρία μιας πολλαπλότητας, μπορούμε να μιλήσουμε και για μια άλλου είδους καμπυλότητα, την *εξωγενή καμπυλότητα*, η οποία εμφανίζεται όταν αναφερόμαστε σε μια πολλαπλότητα εμβαπτισμένη μέσα σε μια άλλη. Για παράδειγμα, ένα φύλλο χαρτιού δεν έχει από μόνο του κάποια εσωτερική καμπυλότητα εφόσον μπορούμε σε κάθε σημείο να ορίσουμε την επίπεδη διδιάστατη Ευκλείδια μετρική. Το ίδιο φύλλο χαρτιού όμως εμβαπτισμένο στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να πάρει μη επίπεδο σχήμα, αν για παράδειγμα το τυλίξουμε σε έναν κύλινδρο. Αυτή είναι η γενική ιδέα της εξωγενούς καμπυλότητας που εμφανίζει μια υποπολλαπλότητα S εμβαπτισμένη στην M.

Για να ορίσουμε τον τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας τον οποίο συμβολίζουμε με K_{ab} εργαζόμαστε ως εξής: Έστω n-διάστατη πολλαπλότητα M και έστω S μικρότερης διάστασης υποπολλαπλότητα εμβαπτισμένη σε αυτή. Τότε σε κάθε σημείο της S ορίζουμε ως n^a το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην S. Η εξωγενής καμπυλότητα της S ορίζεται ως

$$K_{ab} = \nabla_a n_b \quad \text{, ή ισοδύναμα,} \quad K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n g_{ab}\,. \tag{2.84}$$

2.4 Γεωδαισιακές

Δοθέντος ενός διαφορικού τελεστή ∇_a , και επομένως μιας έννοιας παράλληλης μετατόπισης πάνω στην πολλαπλότητα, ορίζουμε μια *γεωδαισιακή* ως την καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος του εαυτού του. Επομένως μια καμπύλη με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο v^a τέτοιο ώστε να ικανοποιεί:

$$v^a \nabla_a v^b = 0 \qquad \text{ή ακόμα} \qquad v^a \nabla_a v^b = \alpha v^b \tag{2.85}$$

χαρακτηρίζεται ως γεωδαισιακή. Η δεύτερη σχέση μπορεί εύκολα να δώσει την πρώτη με μια απλή κατάλληλη παραμετροποίηση της καμπύλης — ή του διανυσματικού πεδίου (affine parametrization).

Έτσι σε μια τυχαία καμπυλωμένη πολλαπλότητα, οι γεωδαισιακές μπορούν να θεωρηθούν ως οι ′ ευθύτερες δυνατές καμπύλες ′ και, όπως είδαμε προηγουμένως, στη ΓΘΣ κατέχουν το ρόλο των τροχιών που ακολουθούν κλασικά σωματίδια τα οποία *πέφτουν ελεύθερα*.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων ψ , η γεωδαισιακή θα είναι μια καμπύλη :

$$t \in \mathbf{R} \to x^\mu_{(t)} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{με} \qquad \frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu .$$

Από την εξ. γεωδαισιακής 2.85 παίρνουμε για τις συνιστώσες στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων :

$$v^a \nabla_a v^b = 0 \implies v^a \partial_a v^b + v^a \Gamma^b{}_{ac} v^c = 0 \implies \frac{dv^\mu}{dt} + \sum_{\nu,\lambda} v^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} v^\lambda = 0$$

$$\implies \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\nu,\lambda} \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \tag{2.86}$$

Πρόκειται για ένα σύστημα n ημιγραμμικών διαφορικών εξισώσεων β′ τάξης, για τις οποίες, όπως γνωρίζουμε απο θεωρήματα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, *υπάρχει μοναδική λύση* $x^\mu_{(t)}$ *για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών* $(x^\mu_{(t_0)}, \dot{x}^\mu_{(t_0)})$

Έστω $\gamma_s(t)$ μια λεία μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαισιακών καμπύλων με παράμετρο s ($\forall s \in \mathbb{R}$, η $\gamma_s(t)$ είναι γεωδαισιακή).

Το διανυσματικό πεδίο $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ είναι παράλληλο στην οικογένεια γεωδαισιακών και ικανοποιεί : $T^a \nabla_a T^b = 0$

Το διανυσματικό πεδίο $X^a = (\frac{\partial}{\partial s})^a$ αναπαριστά τη μετατόπιση προς μια απειροστά κοντινή γεωδαισιακή και καλείται διάνυσμα απόκλισης. Αν η γεωδαισιακή έχει καθοριστεί από μία συναλλοίωτη παράγωγο ∇_a , τη συσχετισμένη με τον τανυστή της μετρικής (ισχύει $\nabla_a g_{ab} = 0$), τότε το X^a μπορεί να επιλεγεί ορθογώνιο στο T^a ως εξής : με παραμετροποίηση της t μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το `μέτρο'

$$|T^a| = g_{ab} T^a T^b$$

είναι σταθερό $\forall s \in \mathbb{R}$. Προκύπτει επίσης η μεταθετικότητα :

$$T^a \nabla_a X^b = X^a \nabla_a T^b$$

Μπορούμε επίσης να φροντίσουμε σαν αρχική συνθήκη, η καμπύλη $t = 0$ να είναι ορθογώνια σε όλες τις γεωδαισιακές. Έτσι έχουμε $X^a T^a = 0$ παντού. Η ποσότητα $v^a = T^a \nabla_a X^b$ μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της απόστασης μιας απειροστά κοντινής γεωδαισιακής, κατά μήκος της γεωδαισιακής. Μας δείχνει δηλαδή πώς πλησιάζουν ή απομακρύνονται οι γεωδαισιακές μεταξύ τους.

Τέλος ορίζουμε τη σχετική επιτάχυνση γεωδαισιακών ως :

$$\begin{aligned}
\alpha^a &= T^c \nabla_c v^a \\
&= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \\
&= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\
&= (T^c \nabla_c X^b)(\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\
&= (X^c \nabla_c T^b)(\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\
&= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\
&= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d
\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει τη σχετική επιτάχυνση δύο σωμάτων που 'πέφτουν ελεύθερα' σε κοντινές τροχιές υπό την επίδραση της βαρύτητας, και η κίνηση αυτή ερμηνεύεται ως το αποτέλεσμα των λεγόμενων *παλιρροϊκών δυνάμεων.*

Στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ένα από τα βασικά αιτήματα είναι ότι όλα τα ελεύθερα κινούμενα σώματα, όλα δηλαδή τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, κινούνται πάνω σε γεωδαισιακές καμπύλες. Το τετραδιάνυσμα δηλαδή ενός αδρανειακού παρατηρητή θα ικανοποιεί:

$$v^a \nabla_a v^b = 0 \tag{2.87}$$

Το συμπέρασμα αυτό μας προτρέπει να βρούμε μια έκφραση για τη μη αδρανειακή κίνηση σώματος υπό την επήρεια κάποιας δύναμης f^a, η οποία προκαλεί μια επιτάχυνση α^a. Η παραπάνω εξίσωση τώρα δε θα δίνει μηδέν, αλλά ένα μη μηδενικό διάνυσμα, το οποίο θα είναι ακριβώς η επιτάχυνση (ως ρυθμός απόκλισης της τροχιάς του σώματος από τη γεωδαισιακή τροχιά. Έτσι η εξίσωση κίνησης θα γίνει:

$$f^b = m\alpha^b = v^a \nabla_a v^b \quad , \tag{2.88}$$

όπου m η μάζα ηρεμίας του σώματος.

2.4.1 p-μορφές, στοιχείο όγκου και ολοκλήρωση

Έστω n-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα M και έστω $\omega_{a_1 \cdots a_p}$ τανυστικό πεδίο τύπου $(0, p)$. Ορίζω ως πλήρως αντισυμμετρικό του $\omega_{a_1 \cdots a_p}$ το τανυστικό πεδίο $\omega_{[a_1 \cdots a_p]}$ που ορίζεται ως

$$\omega_{[a_1 \cdots a_p]} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_\pi \omega_{a_1 \cdots a_p} , \tag{2.89}$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις δυνατές μεταθέσης και δ_π το πρόσημο κάθε μετάθεσης. Λέμε ότι ο τανυστής $\omega_{a_1 \cdots a_p}$ είναι μία p-μορφή αν είναι ένας πλήρως αντισυμμετρικός $(0, p)$ τανυστής, αν δηλαδή

$$\omega_{a_1 \cdots a_p} = \omega_{[a_1 \cdots a_p]} . \tag{2.90}$$

Το σύνολο των πεδίων p-μορφών αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο τον οποίο συμβολίζουμε με Λ^p, και είναι διάστασης $dim\, \Lambda^p = \frac{n!}{p!(n-p)}$. Έτσι για $p > n$ δεν υπάρχουν μη μηδενικές p-μορφές ενώ για $p = n$ έχουμε μόνο μία ανεξάρτητη συνιστώσα n-μορφών. Εύκολα αποδεικνύεται βάσει της αντισυμμετρικότητας ότι όλες οι συναλλοίωτες παράγωγοι μιας p-μορφής συμφωνούν μεταξύ τους. Τον κοινό τανυστή $(0, p+1)$ που προκύπτει τον συμβολίζουμε απλά με $d\omega$. Ορίζουμε τώρα μία πράξη την οποία καλούμε *σφηνοειδές γινόμενο* και συμβολίζουμε με $\wedge$ η οποία είναι μια απεικόνιση $\wedge : \Lambda^p \times \Lambda^q \mapsto \Lambda^{p+q}$, και εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$(\omega \wedge \mu)_{a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 \cdots a_p} \mu_{b_1 \cdots b_q]} \tag{2.91}$$

Μια n-μορφή λοιπόν θα μπορεί πάντα να εκφράζεται μέσω της μοναδικής συνιστώσας της στην n-μορφή βάσης $\mathbf{e} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Αν μπορεί να βρεθεί ϵ πεδίο n-μορφών πάνω σε ολόκληρη την πολλαπλότητα M τέτοιο ώστε η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τη μοναδική του συνιστώσα να μη μηδενίζεται πουθενά στην M, τότε λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι *προσανατολίσιμη*. Ένα τέτοιο πεδίο καλείται *στοιχείο όγκου*. Έστω ανοικτό χωρίο $U \subset M$ που καλύπτεται από το σύστημα συντεταγμένων ψ. Αν $\epsilon = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ το πεδίο βάση του οποίου γίνεται ο προσανατολισμός, τότε αυτός χαρακτηρίζεται θετικός αν $f > 0$ παντού και αρνητικός αν $f < 0$.

Θα ορίσουμε τώρα την ολοκλήρωση ενός πεδίου n-μορφης α πάνω σε μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα. Για θετικά προσανατολισμένο σύστημα συντεταγμένων ορίζουμε το ολοκλήρωμα μιας n-μορφής πάνω στο χωρίο U μέσω του αντίστοιχου συνήθους ολοκληρώματος στον $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha = \int_{\psi[U]} \alpha(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{2.92}$$

Το γνωστό θεώρημα Stokes μεταφράζεται σε όρους διαφορικής γεωμετρίας ως εξής:

Θεώρημα 2.4.1. Έστω M μια n-διάστατη συμπαγής προσανατολισμένη πολλαπλότητα με σύνορο και έστω α μια $(n-1)$-μορφή C^1 πάνω στην M. Τότε

$$\int_{int(N)} d\alpha = \int_{\dot{N}} \alpha \tag{2.93}$$

Τέλος, αν η πολλαπλότητα M είναι εφοδιασμένη με μια μετρική, g_{ab}, υπάρχει μια φυσική επιλογή για ένα συγκεκριμένο 'κανονικοποιημένο' στοιχείο όγκου για το οποίο τελικά θα ισχύει $f = \sqrt{|g|}$ ή αλλιώς:

$$\epsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{2.94}$$

Κεφάλαιο 3

Διατύπωση προβλήματος αρχικών τιμών

Παρά τις εξαιρετικά επιτυχείς προβλέψεις και τα αναπάντεχα αποτελέσματά της, υπάρχει μια σειρά από απαιτήσεις που θα πρέπει να ικανοποιήσει η ΓΘΣ, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως μια φυσικά βιώσιμη και αποδεκτή θεωρία. Μια βασική προϋπόθεση είναι αυτή της καλά τοποθετημένης θεωρίας. Στην κλασική μηχανική, αλλά και σε θεωρίες πεδίου, όπως αυτή του ηλεκτρομαγνητισμού, όπου επικρατούν κατ΄ αντιστοιχία οι νόμοι του Νεύτωνα και οι εξισώσεις Maxwell , συναντάμε και έχουμε τη δυνατότητα να επιλύσουμε μια πληθώρα φυσικών προβλημάτων, συνήθως εκπεφρασμένα ύπο τη μορφή *προβλημάτων αρχικών τιμών*. Έτσι, κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος, επιβάλλουμε μια σειρά από αρχικές συνθήκες (π.χ. θέση-ορμή, Η/Μ πεδίο) και στη συνέχεια αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί ελεύθερα κάτω από την επίδραση των αντίστοιχων νόμων. Σε μια καλά τοποθετημένη θεωρία, είναι απαραίτητο η εξέλιξη των μεταβλητών του συστήματος να καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

Ενώ όμως στις παραπάνω θεωρίες μπορούμε να έχουμε σε ικανοποιητικό βαθμό έλεγχο πάνω στις αρχικές τιμές των εξεταζόμενων μεγεθών, δυστυχώς κάτι τέτοιο δε συμβαίνει στην περίπτωση της βαρύτητας. Έτσι λόγω της ιδιότητας των βαρυτικών φαινομένων να εμφανίζονται σε μεγάλες κλίμακες, αντιμετωπίζεται μεγάλη δυσκολία στο να καταστρώσει κανείς ένα πείραμα βαρυτικής φύσης κάτω από ελεγχόμενες συνθήκες εργαστηρίου, προς επαλήθευση ή απόρριψη της ΓΘΣ. Το μόναδικό προσφερόμενο εργαστήριο (τουλάχιστον με τη σημερινή τεχνολογία) είναι η ίδια η φύση όπου μελετώνται κοσμολογικά φαινόμενα. Θεωρητικά όμως μιλώντας, η ΓΘΣ όπως κάθε άλλη φυσική θεωρία θα πρέπει να επιτρέπει τον προσδιορισμό φυσικά αποδεκτών αρχικών τιμών. Η εξέλιξη του συστήματος θα καθορίζεται προφανώς από τις εξισώσεις Einstein σε κάποια κατάλληλη μορφή τους. Στην 1η ενότητα θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις αυτές και στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να τις φέρουμε σε τέτοια μορφή ώστε να μπορεί να οριστεί ένας καλά ορισμένος φορμαλισμός αρχικών τιμών για τη θεωρία.

Η έννοια του *καλά τοποθετημένου προβλήματος* αρχικών τιμών διατυπώθηκε από τον Hardamard και περιελάμβανε τα εξής κριτήρια :
(i) το πρόβλημα έχει λύση (ύπαρξη),
(ii) η λύση είναι μοναδική (μοναδικότητα),
(iii) η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα βοηθητικά δεδομένα του προβλήματος (καλή συμπεριφορά των λύσεων).

Ο ορισμός αυτός θα πρέπει εν μέρει να τροποποιηθεί, ή μάλλον να ενισχυθεί, ώστε να προσαρμοστεί στις ειδικές απαιτήσεις μιας κάπως 'διαφορετικής ' θεωρίας, όπως είναι η ΓΘΣ. Οι ιδιαιτερότητες της ΓΘΣ προκύπτουν από το γεγονός ότι η προσχετικιστική αντίληψη του Ευκλείδιου χώρου και του χρόνου εγκαταλείπεται και δίνει τη θέση της σε μια ενιαία δομή, το χωρόχρονο, μέσα στον οποίο οι πραγματικές τροχιές των σωμάτων αναπαρίστανται με χρονοειδείς καμπύλες. Εφόσον αναζητούμε μια θεωρία που να μας δίνει τη —χρονική— εξέλιξη του συστήματος, η παραπάνω περιπλοκή δε θα μπορούσε να μείνει απαρατήρητη. Γνωρίζουμε από τις ιδιότητες ενός χώρου με Minkowski μετρική (ΕΘΣ) ότι κανένα σωματίδιο (ή πεδίο), και επομένως καμμία πληροφορία, δε μπορεί να ταξιδέψει σε μια χωροειδή τροχιά. Έτσι, αν M ο χωρόχρονος, τότε οποιεσδήποτε αλλαγές στις αρχικές συνθήκες σε μια περιοχή $S \subset M$ της αρχικής επιφάνειας δε θα πρέπει να επηρεάζουν τη λύση σε περιοχές έξω από το *αιτιακό μέλλον* της S (το οποίο θα συμβολίζεται με $J^{+}(S)$). Αν κάτι τέτοιο δεν ίσχυε τότε θα μπορούσαμε να μεταδόσουμε πληροφορία με ταχύτητες μεγαλύτερες αυτής του φωτός.

Για να μπορέσουμε να δώσουμε μια πιό αυστηρή μαθηματική διατύπωση των παραπάνω, θα μελετήσουμε πρώτα κάποια βασικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες της αιτιακής δομής του χωρόχρονου, και με τη βοήθεια μιας σειράς θεωρημάτων θα ορίσουμε τελικά μια κατάλληλη επιφάνεια (*επιφάνειαCauchy*) πάνω στην οποία θα έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τις αρχικές μας τιμές. Στη συνέχεια θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ποιές θα είναι οι δυναμικές μεταβλητές μας και ποιά είναι η κατάλληλη μορφή των εξισώσεων Einstein . Πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η διατύπωση προβλήματος αρχικών τιμών στη ΓΘΣ είναι πρωτίστης σημασίας κατά τη προσπάθεια εύρεσης μιας *Χαμιλτονιανής* προσέγγισης της θεωρίας, μιας και ξεκαθαρίζει αυτό που αντιλαμβανόμαστε και κλασικά ως χρονική εξέλιξη του συστήματος (το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο ίδιος ο χωρόχρονος).

3.1 Η εξισώσεις της ΓΘΣ

Ας ακολουθήσουμε το συλλογισμό του Einstein που προτείνει ότι η βαρύτητα είναι μια έκφανση της καμπυλωμένης γεωμετρίας του χωρόχρονου, η οποία προκαλείται από την κατανομή ύλης και ενέργειας στο σύμπαν. Αν είναι όντως έτσι θα πρέπει μια τέτοια θεωρία για τη βαρύτητα να μας δίνει τις εξισώσεις ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε ποσοτικά τις επιπτώσεις που έχει στη γεωμετρία μιας περιοχής χωρόχρονου γύρω από ένα γεγονός η ύπαρξη ύλης στο γεγονός αυτό. Η περιγραφή θα γίνει σε συναλλοίωτη μορφή και θα μας δώσει τις λεγόμενες *εξισώσεις Einstein* .

Οι εξισώσεις αυτές συσχετίζουν με απλό τρόπο τις συνιστώσες του τανυστή Einstein, ενός καθαρά γεωμετρικού μεγέθους, οι οποίες μπορούν να εκφραστούν αποκλειστικά μέσω των συνιστωσών της μετρικής και των παραγώγων της, με τις συνιστώσες του τανυστή ύλης, ο οποίος περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την κατανομή ύλης και ενέργειας σε κάθε σημείο του χωρόχρονου. Όπως ακριβώς και στον ηλεκτρομαγνητισμό καταλήγουμε σε δευτεροβάθμιες μερικές διαφορικές εξισώσεις για τις συνιστώσες του Η/Μ πεδίου A_μ, έτσι και στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας θα καταλήξουμε σε ένα σύνολο δευτεροβάθμιων μερικών διαφορικών εξισώσεων για τις συνιστώσες του τανυστή της μετρικής, $g_{\mu\nu}$. Η αναλυτική έκφραση όμως των διαφορικών εξισώσεων για τη βαρύτητα θα είναι αρκετά πολύπλοκη και κυρίως μη γραμμική, γεγονός που καθιστά την επίλυση των εξισώσεων Einstein μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση.

3.1.1 Ο Τανυστής της Ύλης T_{ab}

Όπως στη Νευτώνεια βαρύτητα πηγή του βαρυτικού πεδίου είναι η μάζα και στον ηλεκτρομαγνητισμό πηγές των πεδίων είναι το φορτίο και τα φορτισμένα ρεύματα, έτσι και στη ΓΘΣ καλούμαστε να ορίσουμε ένα μέγεθος που θα έχει το ρόλο της πηγής της καμπύλωσης του χωρόχρονου. Μια πρώτη υπόνοια έρχεται από την κλασική Νευτώνεια βαρύτητα, η οποία μας προτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μάζα, ως πηγή της θεωρίας. Από τη σκοπιά της ΕΘΣ πιο σωστό θα ήταν να θεωρήσουμε την πυκνότητα ύλησ-ενέργειας, ή αλλιώς τη μάζα ηρεμίας. Όμως η καμία από τις παραπάνω ποσότητες δε μπορεί να γίνει αποδεκτή ως υποψήφια πηγή γιατί παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς θα μετρούν διαφορετικές τιμές για την πηγή.

Η ζητούμενη πηγή θα είναι τελικά ένα τανυστικό μέγεθος που στην ΕΘΣ ονομάζουμε *τανυστή ενέργειας-ορμής* ή πιο απλά τανυστή της ύλης και συμβολίζουμε με T_{ab}. Πιο συγκεκριμένα η συνιστώσα $T_{\mu\nu}$ δίνει τη ροή της μ-ορμής δια μιας επιφάνειας σταθερού x^ν. Τη ροή δια επιφάνειας σταθερού χρόνου x^0 μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως πυκνότητα του μεγέθους. Όταν αναφερόμαστε φυσικά σε ορμή εννοούμε τη σχετικιστική τετραορμή, της οποίας οι συνιστώσες σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων μας δίνουν την πυκνότητα και την ορμή της ύλησ-ενέργειας στο σύστημα αυτό. Ο T_{ab} είναι ένας συμμετρικός τανυστής και επίσης διατηρείται, ικανοποιεί δηλαδή

$$\nabla_a T_{ab} = 0 \tag{3.1}$$

κάτι που είναι άμεση συνέπεια της διατήρησης μάζας και ορμής

Για παράδειγμα η τιμή της παράστασης $T_{ab}v^a v^b$ σε κάποιο σημείο θα μας δώσει την πυκνότητα μάζασ-ενέργειας που μετράει ένας παρατηρητής του οποίου η κοσμική γραμμή έχει τετραταχύτητα v^a. Αντίστοιχα η $T_{ab}v^a x^b$, όπου x^a κάθετο στο v^a διάνυσμα, μας δίνει την πυκνότητα ορμής κατά τη x χωρική διεύθυνση, ενώ η $T_{ab}x^a y^b$ τη ροή της x ορμής κατά την y διεύθυνση, στην ουσία δηλαδή την τάση σ_{xy}. Γιαυτό και ο τανυστής ύλης συχνά αναφέρεται και ως τανυστής τάσησ-ενέργειασ-ορμής. Πέρα από τις συνιστώσες σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, ο τανυστής της ύλης, όπως κάθε τανυστής, ως γεωμετρικό αντικείμενο είναι ανεξάρτητος επιλογής συστήματος συντεταγμένων. Έτσι έχουμε αποκτήσει μια σχετικιστικά αναλλοίωτη πηγή που αντιπροσωπεύει την κατανομή της ύλης ενέργειας και ορμής σε κάθε σημείο του χώρου.

Ο τανυστής ύλης παίρνει συγκεκριμένη μορφή για διάφορες χαρακτηριστικές περιπτώσεις κατανομής ύλης. Στην περίπτωση για παράδειγμα του ιδανικού ρευστού πυκνότητας ρ και πίεσης P, ο τανυστής ύλης παίρνη τη μορφή:

$$T^F_{ab} = \rho v_a v_b + P(g_{ab} + v_a v_b) \tag{3.2}$$

ενώ το πεδίο Klein-Gordon , όπως θα δούμε και αργότερα, περιγράφεται από τον τανυστή ύλης:

$$T^{KG}_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi + m^2\phi^2) \tag{3.3}$$

3.1.2 Ο εξίσωση Einstein

Αφού τωρα 'διαλέξαμε' ποιά θα είναι η πηγή μας, την κρατάμε για λίγο στην άκρη και ψάχνουμε να βρούμε το κατάλληλο γεωμετρικό μέγεθος που χαρακτηρίζει την επίδραση της ύλης στη χωροχρονική γεωμετρία. Έχουμε εξ' αρχής την υπόνοια ότι η ύπαρξη και κίνηση ύλης προκαλεί στη γεωμετρία του χωρόχρονου μια 'απόκλιση από την επιπεδότητα' γιαυτό και αναζητάμε έναν τανυστή συσχετισμένο με την καμπυλότητα. Παρατηρούμε ότι ένας τανυστής που έχει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με τον τανυστή της ύλης είναι ο τανυστής Einstein , G_{ab}. Το γεγονός ότι ο G_{ab} είναι ο μοναδικός γεωμετρικός τανυστής τύπου (0,2) που αποτελείται αποκλειστικά από τη μετρική και τις παραγώγους της και ικανοποιεί την εξίσωση διατήρησης, δε μας αφήνει άλλο ψυχολογικό περιθώριο από το να προσπαθήσουμε να τον εξισώσουμε κατά κάποιον τρόπο με τον T_{ab}.

Η αναζήτηση της εξίσωσης που θα περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ της γεωμετρίας του χωρόχρονου και της κατανομής της ύλης μέσα σε αυτόν ολοκληρώνεται με έναν πολύ απλό τρόπο, τοποθετώντας την 'ύλη' T_{ab} στο ένα μέλος της εξίσωσης και τη 'γεωμετρία' G_{ab} στο άλλο.

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{3.4}$$

Θα επιστρέψουμε στην εξίσωση αυτή για να της δώσουμε έναν καλά ορισμένο φορμαλισμό αρχικών τιμών, αφού πρώτα δούμε πώς ένα πρόβλημα αρχικών τιμών σε μια δυναμική θεωρία για τον χωρόχρονο μπορεί να διατυπωθεί και υπό ποιές προϋποθέσεις.

3.2 Αιτιακή Δομή

Σε κάθε γεγονός (χωροχρονικό σημείο) $p \in M$, αντιστοιχεί ένας κώνος φωτός, ο οποίος οριοθετεί τις περιοχές που επηρεάζουν και επηρεάζονται από το γεγονός. Σε αντίθεση με την τετριμμένη περίπτωση της ΕΘΣ, όπου ο χώρος είναι Minkowski , στη γενική περίπτωση μπορούμε μόνο να αποφανθούμε ότι τοπικά και μόνο η περιοχή γύρω από το p 'μοιάζει' με Minkowski . Έτσι ορίζουμε τον *κώνο φωτός ενός γεγονότος* **τοπικά**, ως τον κώνο φωτός που περνάει από την αρχή αξόνων του εφαπτόμενου στο p χώρου, V_p. Θα πρέπει τώρα να ορίσουμε το ένα μισό του κώνου ως μέλλον και το άλλο μισό ως παρελθόν, κάνοντας, όσο είναι τοπολογικά εφικτό, μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των περιοχών του V_p και σημείων της M γύρω από το p . Σημειώνουμε εδώ ότι η απεικόνιση του κώνου φωτός στην M, τα σημεία δηλαδή που αντιστοιχούν σε φωτοειδή διανύσματα του V_p, μπορει να γίνει μέσω των *φωτοειδών γεωδαισιακών καμπύλων.* Η δυσκολία στη ΓΘΣ είναι ότι δε μπορούμε καν να θεωρούμε εκ τω πρωτέρων δεδομένο ότι ο χωρόχρονος είναι χρονικά προσανατολίσιμος, ότι δηλαδή είναι δυνατόν να κάνουμε μια συνεχή ταξινόμιση των γεγονότων του σε μελλοντικά και παρελθοντικά, συγκρινόμενα πάντα με δοθέν γεγονός p. Είναι κάτι που εξαρτάται καθαρά από την τοπολογία του. Το εσωτερικό του 'μελλοντικού' μέρους του κώνου φωτός ονομάζεται '*χρονολογικό* μέλλον' του p, ενώ μαζί με τα γεγονότα που βρίσκονται πάνω στο μέρος αυτό του κώνου αποτελούν το '*αιτιακό μέλλον*' του p. Έτσι ένα χρονοειδές ή φωτοειδές διάνυσμα που δείχνει προς το μελλοντικό μισό του κώνου θα καλείται *μελλοντικά κατευθυνόμενο.*

Έστω τώρα (M, g_{ab}) χρονικά προσανατολίσιμος χωρόχρονος. Μια διαφορίσιμη καμπύλη $\lambda(t)$ λέμε ότι είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής (ή αιτιακή) καμπύλη, αν $\forall p \in \lambda$ το εφαπτόμενο διάνυσμα t^a είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές (ή και φωτοειδές) διάνυσμα. Αντίστοιχοι ορισμοί δίνονται και για τις παρελθοντικά κατευθυνόμενες καμπύλες.

Το *χρονολογικό μέλλον* του $p \in M$, συμβολίζεται με $I^+(p)$, και ορίζεται ως το σύνολο των γεγονότων q που μπορούν να συνδεθούν με το p μέσω μελλοντικά κατευθυνόμενων χρονοειδών καμπύλων ($\exists$ τέτοια $\lambda(t)$ με $\lambda(0) = p$ και $\lambda(1) = q$). Το $I^+(p)$ είναι πάντα ένα ανοιχτό υποσύνολο της M.

Γενικέυοντας τον ορισμό για ένα σύνολο γεγονότων $S \subset M$:

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p) \tag{3.5}$$

Το $I^+(S)$, ως ένωση ανοικτών συνόλων είναι επίσης πάντα ανοικτό σύνολο. Ισχύει επίσης $I^+[I^+(S)] = I^+(S)$ και $I^+(\overline{S}) = I^+(S)$, όπου $\overline{S}$ η κλειστότητα του S.

Το *αιτιακό μέλλον* του $p \in M$, ορίζεται αντίστοιχα για σύνδεση σημείων με αιτιακές καμπύλες και συμβολίζεται με $J^+(p)$ και $J^+(S)$. Τέλος ακριβώς ανάλογοι 'παρελθοντικοί' ορισμοί δίνονται για τα *χρονολογικά* και *αιτιακά παρελθόντα* $I^-(p)$, $I^-(S)$, $J^-(p)$ και $J^-(S)$.

Με αυτόν τον τρόπο, μέσω των ορισμών για τις χρονοειδείς και αιτιακές καμπύλες μπορούμε να μεταφέρουμε τις ιδιότητες από τα απειροστά εφαπτόμενα διανύσματα (local) σε καμπύλες πεπερασμένου μήκους πάνω στην πολλαπλότητα (global), ώστε να γίνει δυνατή η αιτιακή σύγκριση δύο γεγονότων p, q.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\forall S \in M : \overline{I^+(S)} = \overline{J^+(S)} \quad \text{και} \quad I^+(S) = int[J^+(S)]$$

επομένως $\dot{I}^+(S) = \dot{J}^+(S)$ τα σύνορά τους δηλαδή είναι ίσα και μάλιστα δημιουργούνται από φωτοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες

Μεταξύ των υποσυνόλων $S \in M$ ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διατύπωση αρχικών συνθηκών παρουσιάζουν τα *άχρονα σύνολα* (achronal sets) . Ένα υποσύνολο $S \subset M$ καλείται *άχρονο σύνολο* αν $I^+(S) \bigcap S = \emptyset$. Σε ένα άχρονο σύνολο δηλαδή δεν υπάρχει ζεύγος σημείων (γεγονότων) $p, q \in S$ τα οποία να είναι αιτιακά συνδεδεμένα.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω χρονικά προσανατολίσιμος χωρόχρονος (M, g_{ab}), και έστω $S \subset M$. Τότε το σύνορο $I^+\dot{(S)}$ είναι μια άχρονη τρισδιάστατη εμβαπτισμένη C^0-υποπολλαπλότητα της M.

Απόδειξη. Έστω $q \in \dot{I}^+(S)$. Αν $p \in \dot{I}^+(q)$, τότε $q \in \dot{I}^-(p)$ και αφού το $I-(p)$ είναι ανοικτό, $\exists$ ανοικτή περιοχή του $q : O \subset I^-(p)$. Εφόσον το q ανήκει στο σύνορο του $I^+(S)$ έχουμε $O \bigcap I^+(S) \neq \emptyset$ και άρα $p \in I^+[O \cap I^+(S)] \subset I^+(S) \Rightarrow I^+(q) \subset I^+(S)$. Ομοίως παίρνουμε ότι $I^-(q) \subset M - I^+(S)$. Αν το $\dot{I}^+(S)$ δεν ήταν άχρονο, τότε θα υπήρχαν σημεία $q, r \in \dot{I}^+(S)$ τέτοια ώστε το r να ανήκει στο χρονολογικό μέλλον του q και άρα $r \in I^+(S)$ κάτι που είναι άτοπο καθώς το $I^+(S)$ είναι ανοικτό σύνολο, επομένως $\dot{I}^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset$. Άρα το $\dot{I}^+(S)$ είναι ένα άχρονο σύνολο. Προχωράμε προσαρμόζοντας στο σημείο q κανονικό σύστημα συντεταγμένων (x^0, x^1, x^2, x^3). Θεωρούμε μια αρκετά μικρή περιοχή του q ώστε το διάνυσμα $(\partial/\partial x^0)^a$ να είναι παντού χρονοειδές και κάθε ολοκληρωτική του καμπύλη μπαίνει στο χρονολογικό μέλλον και παρελθόν του q άρα τέμνει σε κάποιο σημείο το $\dot{I}^+(S)$. Και αφού το $\dot{I}^+(S)$ είναι άχρονο το σημείο τομής είναι μοναδικό. Επομένως στην περιοχή αυτή υπάρχει μια 1-1 αντιστοίχηση των σημείων του $\dot{I}^+(S)$ με τις τρεις υπόλοιπες συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3) που καθορίζουν κάθε καμπύλη ολοκληρωτική του $(\partial/\partial x^0)^a$, γεγονός που χαρακτηρίζει το σύνολο $\dot{I}^+(S)$ ως μια άχρονη τρισδιάστατη υποπολλαπλότητα της M. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι είναι C^0 εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω για κάθε σημείο $q \in \dot{I}^{+}(S)$ σε συνδυασμό με την τοπολογία που επάγεται σε αυτή.

Επίσης σημαντικός για τα θεωρήματα αιτιακής δομής είναι ο διαχωρισμός των αιτιακών καμπύλων (συνήθως μελλοντικά κατευθυνόμενων) σε *εκτατές* και μη *εκτατές*. Μια μελλοντικά κατευθυνόμενη αιτιακή καμπύλη $\lambda(t)$ καλείται μη μελλοντικά εκτατή αν δεν έχει μελλοντικό τέλος, αν δηλαδή : $\exists p \in M$: $\forall O$ ανοικτή περιοχή του p, $\exists\, t_0$ τέτοιο ώστε $\lambda(t) \in O, \forall t \leq t_0$.

Ένα πολύ ισχυρό λήμμα σχετικά με τα παραπάνω είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 3.2.1. Έστω λ μη παρελθοντικά εκτατή αιτιακή καμπύλη που περνά από το γεγονός p. Τότε από κάθε $q \in I^{+}(p)$ περνάει μία μη παρελθοντικά εκτατή χρονοειδής καμπύλη γ τέτοια ώστε $\gamma \in I^{+}(\lambda)$.

3.2.1 Κλειστές αιτιακές καμπύλες - Κριτήρια αιτιότητας

Ως συνέπεια της φυσικής ερμηνείας της αιτιακής δομής του χωρόχρονου, αναγκαζόμαστε να επιβάλλουμε αξιωματικά κάποιες προϋποθέσεις ώστε η δομή αυτή να είναι συνεπής ως προς τη γενική ιδέα ότι παρελθόν και μέλλον είναι αυστηρά διατεταγμένες περιοχές, ότι δηλαδή το μέλλον κάποιου γεγονότος δε μπορεί ταυτόχρονα να αποτελεί και παρελθόν του, ώστε να το επηρεάσει. Η απόρριψη περιπτώσεων στις οποίες παραβιάζεται η παραπάνω αρχή απαιτεί τη διατύπωση κριτιρίων που αποφαίνονται για την *καλή αιτιακή συμπεριφορά* ενός χωρόχρονου.

Πιό συγκεκριμένα το πρώτο βασικό κριτήριο είναι η *μη ύπαρξη κλειστών αιτιακών καμπύλων*. Είναι ευνόητο πως αν τέτοιες καμπύλες υπήρχαν σε ένα χωρόχρονο τότε ακολουθώντας το μελλοντικό κώνο φωτός (ή αλλιώς μια μελλοντικά κατευθυνόμενη αιτιακή καμπύλη) θα καταλήγαμε χρονικά 'πίσω' από το αρχικό γεγονός, δηλαδή κάθε σημείο αιτιακά συνδεδεμένο με το γεγονός βρίσκεται ταυτόχρονα και στις 2 περιοχές $J^{+}(p)$ και $J^{-}(p)$. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι εφόσον το μέλλον και το παρελθόν οποιουδήποτε σημείου

$q \in J^+(p)$ είναι επίσης μέλλον και παρελθόν του p, τελικά το αιτιακό μέλλον και παρελθόν του p επεκτείνεται σε ολόκληρο το χωρόχρονο M, δηλαδή $\forall p \in M$ θα έχουμε $J^+(p) = J^-(p) = M$, κάτι που δε θα μπορούσε να είναι φυσικά αποδεκτό αν συμφωνούμε οτι ζούμε σε έναν κόσμο χωρίς χρονικά παράδοξα, στον οποίο μπορεί να υπάρξει ελεύθερη βούληση.

Η τελευταία προϋπόθεση χρίζει φιλοσοφικής ανάλυσης και ξεφεύγει από τους σκοπούς της ενότητας αυτής.Αν κάποιος φυσικός αρκείται με τη θεωρητική και μόνο συνέπεια ενός χωρόχρονου ως προς τις εξισώσεις που διέπουν τα φυσικά πεδία πάνω σε αυτόν, τότε μπορεί να δεχθεί την ύπαρξη χωρόχρονων με κλειστές αιτιακές καμπύλες, δημιουργώντας έναν κόσμο όπου όλα τα φυσικά πεδία — και επομένως τα πάντα — είναι προκαθορισμένες ακριβείς λύσεις, χωρίς κανένα περιθώριο ελεύθερης βούλησης. Στον χωρίς ενδεχόμενα κόσμο αυτόν επίσης προκαθορισμένα είναι, μέσω των εξισώσεων που κυριαρχούν απόλυτα, και οι σκέψεις, τα πειράματα (και αποτελέσματα) που θα εκτελέσει ο ίδιος φυσικός προσπαθώντας να τον ερμηνεύσει, κάτι που αυτόματα ακυρώνει την ίδια του την προσωπικότητα και κρίση. Και η συζήτηση σταματάει εκεί.

Χωρόχρονοι που μακροσκοπικά εμφανίζουν τέτοιες ανεπιθύμητες ιδιότητες είναι σχετικά εύκολο να δημιουργηθούν θεωρητικά κυρίως μέσω τοπολογικών μεθόδων, όπως π.χ. 'τυλίγοντας σε ένα κύλινδρο' $S^1 \times \mathbb{R}^3$ το χωρόχρονο Minkowski μέσω της τοπολογικής ταύτισης δύο υπερεπιπέδων $t = t_0$, $t = t_1$ ώστε το διανυσματικό πεδίο $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ να γεννάει κλειστές καμπύλες (κύκλους). Εκτός όμως των τοπολογικών τεχνημάτων, μπορούμε να σκεφτούμε χωρόχρονους με μετρική τέτοια ώστε η επαγόμενη καμπυλότητα να είναι σε θέση να 'στρίψει' τους κώνους φωτός αρκετά ώστε να ξαναδούν τους εαυτούς τους.

Μετά από λίγη παραπάνω σκέψη σχετικά με το πώς πρέπει να είναι ένας χωρόχρονος ώστε να έχει ικανοποιητικά καλή αιτιακή συμπεριφορά, καταλαβαίνει κανείς ότι πρέπει να επιβάλλει ένα αυστηρότερο κριτήριο από αυτό της μη ύπαρξης κλειστών αιτιακών καμπυλών. Ο λόγος είναι ότι μπορούν να υπάρξουν περιπτώσεις που ενώ τέτοιες καμπύλες δεν υπάρχουν, μια μικρή διαταρραχή της μετρικής g_{ab} μπορεί να προκαλέσει τη δημιουργία τους. Και εφόσον ποτέ δε μπορούμε να μιλάμε με απόλυτη ακρίβεια για τις τιμές των φυσικών μεγεθών χρειαζόμαστε έναν αρκετά σταθερό ως προς την αιτιότητα χωρόχρονο.

Τελικά ψάχνοντας ένα αρκετά ικανοποιητικό κριτήριο καταλήγουμε να ορίσουμε την έννοια της *σταθερής αιτιότητας* που εκφράζεται ως εξής.

Έστω t^a χρονοειδές διάνυσμα στο $p \in M$. Ορίζουμε μια νέα μετρική στο p και συμβολίζουμε $\tilde{g}_{ab}$:

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b \quad , \tag{3.6}$$

όπου g_{ab} η μετρική της M στο p. Η $\tilde{g}_{ab}$ έχει επίσης ίχνος Lorentz στο p, ενώ ο κώνος φωτός της είναι αυστηρά μεγαλύτερος (πιό ανοιχτός) από αυτόν της g_{ab}, τα χρονοειδή διανύσματα δηλαδή της g_{ab} αποτελούν υποσύνολο αυτών της νέας $\tilde{g}_{ab}$. Αν λοιπόν ο χωρόχρονος (M, g_{ab}) είχε οριακά καλή συμπεριφορά τότε για κάθε χρονοειδές διάνυσμα t^a η άμβλυνση του κώνου φωτός (οσοδήποτε μικρή) θα οδηγούσε στη δημιουργία κλειστών αιτιακών καμπύλων. Έτσι ορίζουμε έναν χωρόχρονο (M, g_{ab}) ώς *σταθερά αιτιακό* αν υπάρχει συνεχές χρονοειδές διανυσματικό πεδίο t^a τέτοιο ώστε ο χωρόχρονος $(M, \tilde{g}_{ab})$ να μην περιέχει κλειστές χρονοειδές καμπύλες. Το ακόλουθο θεώρημα είναι εξαιρετικά σημαντικό γιατί δείχνει την ισοδυναμία μεταξύ του σταθερά αιτιακού χωρόχρονου και της **ύπαρξης μίας χρονικής συνάρτησης πάνω σε όλον τον χωρόχρονο**.

Θεώρημα 3.2.2. Ένας χωρόχρονος (M, g_{ab}) είναι σταθερά αιτιακός αν και μόνο αν $\exists f \in C^1$ πάνω στην M τέτοια ώστε το $\nabla^a f$ να είναι ένα παρελθοντικά κατευθυνόμενο διανυσματικό πεδίο.

Απόδειξη (για το 'αν'). Έστω ότι υπάρχει το $\nabla^a f$ και είναι παρελθοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο. Τότε κατά μήκος κάθε μελλοντικά κατευθυνόμενης χρονοειδούς καμπύλης που γεννάται από το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο v^a θα είναι : $g_{ab} v^a \nabla^b f > 0$ και επομένως $v^a \nabla_a f = v(f) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι αυστηρά αύξουσα κατά μήκος κάθε μελλοντικά κατευθυνόμενης χρονοειδούς καμπύλης, κάτι που δικαιολογεί και τον τίτλο της παγκόσμιας χρονικής συνάρτησης. Αν υπήρχε κλειστή χρονοειδής καμπύλη $\lambda(t)$, τότε

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \, : \, \lambda(t_1) = \lambda(t_2) \quad \Rightarrow f(\lambda(t_1)) = f(\lambda(t_2)) \quad \text{με } t_1 < t_2, \text{ άτοπο.}$$

Μένει να δούμε αν ικανοποιείται η σταθερότητα για τη διαταρραγμένη μετρική. Ορίζω $t^a = \nabla^a f$ και τη νέα μετρική $\tilde{g}_{ab}$ όπως ορίστηκε στην εξίσωση 3.6 αντικαθιστώντας το t^a που βρήκαμε εδώ. Η αντίστροφη μετρική $\tilde{g}^{ab}$ θα είναι:

$$\tilde{g}^{ab} = g^{ab} + \frac{t^a t^b}{1 - t^c t_c} \tag{3.7}$$

και έτσι παίρνουμε,

$$\tilde{g}^{ab} \nabla_a f \nabla_b f = t^a t_a + \frac{(t^a t_a)^2}{(1 - t^c t_c)} = \frac{t^a t_a}{1 - t^c t_c} < 0\,. \tag{3.8}$$

Επομένως το διάνυσμα $\tilde{g}^{ab} \nabla_b f$ είναι χρονοειδές και στο χωρόχρονο $(M, \tilde{g}_{ab})$, συνεπώς στο χωρόχρονο αυτόν δεν υπάρχουν κλειστές αιτιακές καμπύλες. Άρα ο χωρόχρονος (M, g_{ab}) θα είναι σταθερά αιτιακός.

Η συνέχεια της απόδειξης για το το 'μόνο αν' είναι αρκετά πιο εκτενής και ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο βιβλίο των Hawking-Ellis (The large scale structure of space-time 1973)

3.2.2 Πεδία εξάρτησης και Επιφάνειες Cauchy

Αφού ορίσαμε το μέλλον και παρελθόν ενός συνόλου γεγονότων S, θα κάνουμε ακόμη ένα βήμα προχωρόντας προς τη διατύπωση του προβλήματος αρχικών τιμών. Θα μελετήσουμε τα σύνολα γεγονότων που καθορίζονται απόλυτα από το τι συμβαίνει (η μάλλον έχει συμβεί) στο S.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $S \subset M$ ένα κλειστό, άχρονο σύνολο. Ορίζουμε ως* **μελλοντικό πεδίο εξάρτησης** *του S, και συμβολίζουμε με $D^+(S)$ το σύνολο*

$$D^+(S) = \left\{ p \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{κάθε μη παρελθοντικά εκτατή αιτιακή καμπύλη} \\ \text{που περνά από το } p \text{ τέμνει την } S \end{array} \right\}$$

Αντίστοιχα ορίζεται το παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης $D^-(S)$ αντικαθιστώντας τη λέξη 'παρελθοντικά' με τη λέξη 'μελλοντικά'. Τέλος ορίζουμε ως ολικό **πεδίο εξάρτησης** *του S το σύνολο*

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$$

Πρόταση 3.2.1. Η κλειστότητα του πεδίου εξάρτησης $D(S)$ έχει την εξής ιδιότητα : $p \in \overline{D^+(S)}$ *αν και μόνο αν κάθε μη επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη που περνάει από το* p *τέμνει το* S

Με τους ορισμούς αυτούς καταφέρνουμε να κατασκευάσουμε τα κατάλληλα για κάθε πρόβλημα σύνολα πάνω στα οποία θα ορίσουμε τις αρχικές τιμές των διαφόρων μεγεθών. Οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι η γνώση των αρχικών τιμών των φυσικών μεγεθών πάνω στο σύνολο S αρκεί για να υπολογίσουμε, μέσω των εξισώσεων, τις τιμές των φυσικών μεγεθών σε όλοκληρο το $D(S)$. Τα σύνολα S με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι συνήθως *κλειστά, άχρονα και χωρίς άκρες*. *Άκρη* του $S \subset M$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $p \in S$ των οποίων κάθε ανοικτή περιοχή O περιέχει σημεία $q \in I^+(p), r \in I^-(p)$ και μια χρονοειδή καμπύλη λ που τα ενώνει και δεν τέμνει την S.

Αν βέβαια θελήσουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη ολόκληρου του συστήματος (χωρόχρονου) θα πρέπει η επιφάνεια πάνω στην οποία είναι γνωστές οι αρχικές τιμές να έχει ως πεδίο εξάρτησης ολόκληρη την M. Έτσι :

Ορισμός 3.2.2. *καλούμε* **επιφάνεια Cauchy** *κάθε κλειστό άχρονο σύνολο* Σ *για το οποίο ισχύει* $D(\Sigma) = M$.

Ως συνέπεια του παραπάνω ορισμού οι επιφάνειες Cauchy δεν έχουν άκρες. Κάθε χωρόχρονος (M, g_{ab}) που περιέχει μια επιφάνεια Cauchy καλείται ολικά υπερβολικός. Από τον ορισμό 3.2.2, και μέσω της 3.2.1 επίσης συνεπάγεται άμεσα ότι αν Σ μια επιφάνεια Cauchy τότε κάθε μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη τέμνει τη Σ. Αυτό συμβαίνει γιατί στην προκειμένη περίπτωση η κλειστότητα είναι $\overline{D}(\Sigma) = M$.

Έστω τώρα S κλειστό άχρονο σύνολο.

Ορισμός 3.2.3. *Ορίζουμε ως* μελλοντικό ορίζοντα Cauchy *της* S *και συμβολίζουμε με* $H^+(S)$, *το σύνολο*

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-[D^+(S)]$$

και εφόσον

$$I^-[H^+(S)] \quad \subset I^-[\overline{D^+(S)}] \tag{3.9}$$

$$= I^-[D^+(S)] \tag{3.10}$$

$$= M - H^+(S) \tag{3.11}$$

το σύνολο $H^+(S)$ είναι άχρονο. Αντίστοιχα ορίζουμε και τον *παρελθοντικό ορίζοντα Cauchy* βάζοντας '-' όπου υπάρχει '+' και αντίστροφα. Τελικά

Ορισμός 3.2.4. *ορίζουμε τον (ολικό) ορίζοντα Cauchy ενός κλειστού άχρονου συνόλου S ως*

$$H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$$

Αποδεικνύεται τελικά ότι

$$H(S) = \dot{D}(S). \tag{3.12}$$

Η ύπαρξη (μη κενού) ορίζοντα Cauchy ενός κλειστού άχρονου συνόλου S δείχνει την αδυναμία του συνόλου αυτού να χαρακτηριστεί ως επιφάνεια Cauchy , καθώς αν M συνεκτικός χωρόχρονος, μια επιφάνεια Σ θα είναι Cauchy για τον (M, g_{ab}) αν και μόνο αν δεν έχει ορίζοντα Cauchy ($H(S) = \emptyset$).

Απόδειξη. Αν $\dot{D}(S) = \emptyset$, τότε θα έχομε $\overline{D(\Sigma)} = int[D(\Sigma)] = D(\Sigma)$, άρα το $D(\Sigma)$ είναι ταυτόχρονα κλειστό και ανοικτό. Και εφόσον είναι μη κενό (ως υπερσύνολο της Σ) συνεπάγεται ότι $D(S) = M$. Αντίστροφα, αν η Σ είναι Cauchy , εξ' ορισμού έχουμε $D(S) = M$ και προφανώς ισχύει $\dot{M} = \emptyset$.

Η υπερβολικότητα του χωρόχρονου μας δίνει χρήσιμα συμπεράσματα για την αιτιακή του δομή, επειδή η ύπαρξη μιας επιφάνειας Cauchy Σ αποκλείει την ύπαρξη κλειστών αιτιακών καμπύλων στο χωρόχρονο αυτόν : αν υπήρχε κλειστή αιτιακή καμπύλη τότε αυτή σίγουρα θα έτεμνε τη Σ (όπως όλες οι μη επεκτάσιμες αιτιακές καμπύλες) και το γεγονός αυτό θα παραβίαζε την αχρονικότητα της Σ. Αυτό είναι ένα πρώτο ασθενές συμπέρασμα ενώ αμέσως μετά ακολουθεί χωρίς απόδειξη το τελικό ισχυρότατο θεώρημα που συνδέει τις ιδιότητες της ολικής υπερβολικότητας και της σταθερής αιτιότητας.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω (M, g_{ab}) ολικά υπερβολικός χωρόχρονος. Τότε ο (M, g_{ab}) είναι και σταθερά αιτιακός. Επίσης μπορεί να επιλεγεί παγκόσμια χρονική συνάρτηση t , τέτοια ώστε κάθε επιφάνεια σταθερού t να είναι μια επιφάνεια

Cauchy . Επομένως ο M μπορεί να διαστρωματωθεί από μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών Cauchy και να αποκτήσει την τοπολογία $\mathbb{R} \times \Sigma$, όπου Σ οποιαδήποτε από αυτές.

3.3 Φορμαλισμός Αρχικών Τιμών

3.3.1 Προβλήματα αρχικών τιμών στην κλασική μηχανική

Η συνταγή για την κατασκευή και επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών στην κλασική μηχανική είναι μια αρκετά απλή διαδικασία. Τα πάντα ξεκινούν από τη γραμμική β΄-τάξης συνήθη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από το 2ο νόμο του Νεύτωνα, ή πιο αναλυτικά από τις τρεις συνιστώσες της, μία για κάθε χωρική συντεταγμένη, ενώ η διαφόριση γίνεται ως προς το χρόνο t. Γενικά σε προβλήματα κλασικής μηχανικής καταλήγουμε σε ένα σύστημα n ανεξάρτητων εξισώσεων, όπου n οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, οι οποίοι εκφράζονται συνήθως μέσω των γενικευμένων συντεταγμένων $q_i, i = 1, \ldots, n$. Οι εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = F_i(q_j; \frac{dq_j}{dt} \quad i,j = 1, ..., n \tag{3.13}$$

Από γνωστά θεωρήματα της θεωρίας διαφορικών εξισώσεων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση για κάθε σύνολο αρχικών τιμών που μπορεί να δοθεί στο σύστημα αυτό. Έχοντας δηλαδή τις αρχικές τιμές για τις μεταβλητές q_i και τους ρυθμούς μεταβολής τους $\frac{dq_j}{/}dt$ μπορούμε να βρούμε μοναδική λύση για την εξέλιξη $q_i(t)$. Η συνεχής εξάρτηση των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες είναι επίσης κάτι που ισχύει για το παραπάνω πρόβλημα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα προβλήματα μη σχετικιστικής κλασικής μηχανικής είναι καλά τοποθετημένα.

Μέσω του επόμενου θεωρήματος (που θα διατυπωθεί εδώ χωρίς απόδειξη) η ιδιότητα του καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών τιμών επεκτείνεται σε μια μεγάλη γκάμα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Με τον τρόπο αυτό έχουμε πάει από τους διακριτούς βαθμούς ελευθερίας q_i και τις εξισώσεις κίνησης σωματιδίων, στη συνεχή περίπτωση $\phi(t, x^i)$ που δίνει ένα βαθμό ελευθερίας σε κάθε σημείο του χώρου και τις αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου.

Θεώρημα 3.3.1 (Cauchy-Kowalewski). Έστω σύστημα συντεταγμένων $t, x^1, \ldots, x^{m+1}$ του $\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε σύστημα διαφορικών εξισώσεων για n άγνωστες συναρτήσεις $\phi_1, \ldots, \phi_n$ στο $\mathbb{R}^m$ με τη μορφή :

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = F_i(t, x^a; \phi_j; \frac{\partial \phi_j}{\partial t}; \frac{\partial \phi_j}{\partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t \partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}), \tag{3.14}$$

όπου κάθε F_i είναι μία *αναλυτική* συνάρτηση των μεταβλητών της.
Έστω $f_i(x^\alpha)$ και $g_i(x^\alpha)$ αναλυτικές συναρτήσεις. Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή O της υπερεπιφάνειας $t = t_0$, τέτοια ώστε μέσα στο O να υπάρχει μοναδική αναλυτική λύση των εξισώσεων της $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}$, ώστε

$$\phi_i(t_0, x^\alpha) = f_i(x^\alpha) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t_0, x^\alpha) = g_i(x^\alpha)$$

Το θεώρημα αυτό γενικεύεται σε σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων οποιασδήποτε τάξης, αλλά το δικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως σε δευτεροβάθμιες διαφορικές εξισώσεις, καθώς τέτοιες θα συναντήσουμε.

3.3.2 Πρόβλημα αρχικών τιμών στην ΕΘΣ

Το θεώρημα Cauchy-Kowalewski της μη σχετικιστικής μηχανικής δεν αρκεί για την επεξεργασία προβλημάτων στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, καθώς τα τανυστικά πεδία και οι εξισώσεις τους ζουν πάνω σε χώρο Minkowski και όχι στον $\mathbb{R}^n$. Η κλασική ανάλυση δε μπορεί να αντιμετωπίσει το γεγονός ότι τα πεδία οφείλουν να μεταδίδονται αιτιακά, και αυτό γιατί στην περίπτωση αναλυτικών αρχικών συναρτήσεων, μια αλλαγή στα δεδομένα οποιουδήποτε μικρής ανοικτής περιοχής ενός σημείου p της αρχικής επιφάνειας Σ_0 θα αλλάξει ακαριάια τις αρχικές συνθήκες σε ολόκληρη την επιφάνεια (εφόσον τα αρχικά δεδομένα μπορούν να αναλυθούν κατά Taylor γύρω από το σημείο p). Έτσι η αιτιακή μετάδοση των πεδίων μας οδηγεί στην αναζήτηση επέκτασης του θεωρήματος Cauchy-Kowalewski σε ένα ανάλογο που να χειρίζεται μη αναλυτικές αρχικές τιμές.

Θέλουμε να επεκτείνουμε τη θεωρία για ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια των λύσεων σε μη αναλυτικές περιπτώσεις δεδομένων. Θα προχωρήσουμε στην απόδειξη για ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα σε χώρο Minkowski , αυτό του πεδίου Klein-Gordon , κάτι το οποίο δε μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση του προηγούμενου θεωρήματος.

Κατ΄ αρχάς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το χωρίο πάνω στο οποίο διατυπώνουμε το πρόβλημα. Έχοντας τη δυνατότητα ορισμού μιας παγκόσμιας χρονικής συνάρτησης t, καθώς έχουμε κάνει την παραδοχή ότι ο χωρόχρονος είναι τοπικά υπερβολικός, μπορούμε να ορίσουμε την υπερεπιφάνεια Σ_0 ώς το επίπεδο $t = t_0$ και γενικά να χωρίσουμε το χωρόχρονο σε χωροειδείς *φέτες* Cauchy Σ_t.

Έστω λοιπόν οι υπερεπιφάνειες $\Sigma_0 : t = t_0$ και $\Sigma_1 : t = t_1 > t_0$. Θεωρούμε μια κλειστή μπάλα $S_0 \subset \Sigma_0$ από σημεία που βρίσκονται εξ΄ ολοκλήρου πάνω στη Σ_0, δηλαδή μια χωρική μπάλα 'ταυτόχρονων γεγονότων'. Ορίζουμε επίσης το K ως το σύνολο των γεγονότων $K = D^+(S_0) \cap J^-(\Sigma_1)$, δηλαδή την περιοχή εξάρτησης από την S_0 μέχρι εκεί που τέμνει τη Σ_1. Την τομή αυτή της περιοχής εξάρτησης με τη Σ_1 θα ονομάσουμε S_1, δηλαδή $S_1 = D^+(S_0) \cap \Sigma_1$. Τέλος, ονομάζουμε S_2 το 'φωτοειδέσ' κομμάτι του συνόρου ∂K , δηλαδή το πλάγιο περίβλημα του χωρίου.

Είναι προφανές ότι το σύνολο S_0 θα αποτελέσει το χωρίο πάνω στο οποίο θα επιβάλουμε τις αρχικές συνθήκες του πεδίου και θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύση για τις εξισώσεις σε ολόκληρο το K. Οι τιμές του πεδίου στο K θα πρέπει να καθορίζονται εξ΄ ολοκλήρου από τις αρχικές συνθήκες και η λύση να είναι μοναδική.

Η συνάρτηση ϕ του πεδίου Klein-Gordon με μάζα ικανοποιεί την εξίσωση :

$$\partial_a \partial^a \phi - m^2 \phi = 0 \tag{3.15}$$

,όπου η αναβίβαση και καταβίβαση δεικτών γίνεται με τη μετρική Minkowski , $g_{ab} = \eta_{ab}$ και τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται. Όπως θα δούμε στη Λαγκρανζιανή διατύπωση ο τανυστής ενέργειασ-ορμής T_{ab} για το πεδίο αυτό έχει τη μορφή :

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial_c \phi \partial^c \phi + m^2 \phi^2) \tag{3.16}$$

, και διατηρείται, δηλαδή

$$\partial^a T_{ab} = 0. \tag{3.17}$$

Το διανυσματικό πεδίο $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ το οποίο θα είναι κάθετο στη Σ_0 (κάτι το οποίο δεν ισχύει απαραίτητα αν ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος), θα ικανοποιεί:

$$\partial^a (T_{ab}\xi^b) = T_{ab}\partial^{(a}\xi^{b)} = 0 \tag{3.18}$$

γιατί το ξ^a γεννά τις ισομετρίες χρονικής μετατόπισης άρα είναι ένα πεδίο Killing και ο τανυστής ύλης είναι συμμετρικός. Γενικά σε οποιοδήποτε χωρόχρονο τα πεδία Killing θα ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, όπου η μερική παράγωγος θα αντικατασταθεί από τη συναλλοίωτη ∇^a.

Φέρνουμε τώρα την εξίσωση 3.18 σε ολοκληρωτική μορφή με χωρίο ολοκλήρωσης το K. Το θεώρημα Stokes μετατρέπει το ολοκλήρωμα σε επιφανειακό πάνω στη ∂K την οποία σπάμε στα 3 μέρη. Το κάθετο διάνυσμα στις S_0, S_1 είναι το $\pm\xi^a$ ενώ το κάθετο στην S_2 ονομάζουμε l^a και θα είναι φωτοειδές μελλοντικά κατευθυνόμενο.

$$\int_K \partial(T_{ab}\xi^b) = -\int_{S_0} T_{ab}\xi^a\xi^b + \int_{S_1} T_{ab}\xi^a\xi^b + \int_{S_2} T_{ab}l^a\xi^b = 0\,. \tag{3.19}$$

Από την έκφραση του τανυστή ύλης μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι για κάθε μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές ή φωτοειδές διάνυσμα, εδώ το ξ^a η συστολή του με τον T_{ab} δίνει ότι το $-\eta^{ac}Tab\xi^b = -T^c{}_b\xi^b$ είναι επίσης μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές. Άρα $T_{ab}l^a\xi^b \geq 0$ και έτσι παίρνουμε την ανισότητα:

$$\int_{S_1} T_{ab}\xi^a\xi^b \leq \int_{S_0} T_{ab}\xi^a\xi^b \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$\int_{S_1}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + m^2\phi^2\right] \leq \int_{S_0}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + m^2\phi^2\right] \tag{3.21}$$

Μοναδικότητα

Μπορεί να αποδειχθεί τώρα ότι για δεδομένες αρχικές τιμές των $(\phi, \dot{\phi})$ στο S_0 υπάρχει το πολύ μια λύση στο $D^+(S_0)$. Έστω ϕ_1, ϕ_2 δύο λύσεις C^2 της εξίσωσης $K-G$ με τις ίδιες λείες αρχικές τιμές. Τότε η διαφορά $\psi = \phi_2 - \phi_1$

θα είναι επίσης μια C^2 λύση της $K-G$ με *μηδενικές αρχικές τιμές*. Άρα για την ψ το ολοκλήρωμα πάνω στη S_0 μηδενίζεται, γεγονός που συνεπάγεται ότι θα είναι $\psi=0$ και στην S_1, άρα $\psi=0$ παντού στο $D^+(S_0)$. Ομοίως $\psi=0$ και στο $D^-(S_0)$. Άρα $\phi_1=\phi_2$ παντού και η μοναδικότητα απεδείχθη.

Συνεχής εξάρτηση από Α.Σ.

Διαφορίζοντας την $K-G$ ως προς x^μ παίρνουμε την ίδια εξίσωση για τις παραγώγους της ϕ και έτσι οι $\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$ επίσης ικανοποιούν την $K-G$. Έτσι καταλήγουμε σε μια αντίστοιχη ανισότητα για τετραγωνικά ολοκληρώματα των $\partial^\mu\phi$, τα οποία φράζονται παντού από αυτά στην S_0. Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε μέσω της 3.15 κάθε όρο πάνω στην S_0 που περιέχει πάνω από μία χρονική παραγώγιση, μέσω των αρχικών $\phi, \partial\phi/\partial t$ και των χωρικών παραγώγων τους στην S_0. Προκειμένου να έχουμε ένα είδος 'απόστασης ' πάνω στον απειροδιάστατο χώρο όλων των δυνατών αρχικών τιμών του πεδίου ϕ πάνω στην S_0, που θα μας λέει πόσο 'κοντά' είναι οι διαφορετικές διαμορφώσεις του πεδίου μεταξύ τους, εισάγουμε μια τοπολογία πάνω στο χώρο αυτόν, ορίζοντας τις νόρμες Sobolev $||\cdot||_{S,k}$ και $|||\cdot|||_{S,k}$ ως:

$$||\phi||^2_{S_1,k}=\int_{S_1}\left[|\phi|^2+\cdots+\sum_i|\partial^{k_i}\phi|^2\right]\ ,\quad \partial^{k_i}:\ \text{μερική } k\text{-τάξης} \tag{3.22}$$

$$|||\phi|||^2_{S_0,k}=\int_{S_1}\left[|\phi|^2+\cdots+\sum_i|D^{k_i}\phi|^2\right]\ ,\quad D^{k_i}:\ \text{χωρική μερική } k\text{-τάξης} \tag{3.23}$$

Έτσι η παραπάνω μέθοδος θα μας δώσει ανισότητες στη μορφή:

$$||\phi||_{S_1,k}\le C_{1,k}|||\phi|||_{S_0,k}+C_{2,k}|||\partial\phi/\partial t|||^2_{S_0,k-1}\,. \tag{3.24}$$

Ολοκληρώνουμε με $\int_{t_0}^{t_m}dt_1$, όπου $t_m=max\,t\ :\ D^+(S_0)\cap\Sigma_t\neq\emptyset$, η χρονική στιγμή που 'κλείνει' ο το χωρίο $D^+(S_0)$.

$$||\phi||_{D^+(S_0),k}\le C'_{1,k}|||\phi|||_{S_0,k}+C'_{2,k}|||\partial\phi/\partial t|||^2_{S_0,k-1} \tag{3.25}$$

Από γνωστό θεώρημα υπάρχει σταθερά C ώστε η ϕ σε όλο το $D^+(S_0)$ να φράζεται από τη Sobolev νόρμα της στο S_0 :

$$max_{x\in D^+(S_0)}|\phi|\le C||\phi||_{D^+(S_0),k}\quad ,k>n/2 \tag{3.26}$$

Έτσι για τη λύση ϕ και τις παραγώγους της οποιασδήποτε τάξης, η τιμή τους σε όλο το πεδίο εξάρτησης φράζεται από τις αρχικές συνθήκες κάτι που εξασφαλίζει την ομαλή συνεχή εξάρτηση των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες. Τα παραπάνω συνοψίζονται στην:

$$max_{x\in D^+(S_0)}|\partial^m\phi| \leq C''_{1,m}|||\phi|||_{S_0,3+m} + C''_2|||\partial\phi/\partial t|||^2_{S_0,2+m}\,. \tag{3.27}$$

Η απεικόνιση δηλαδή από τις αρχικές συνθήκες στις λύσεις είναι ισχυρά φραγμένη, άρα και συνεχής.

Ύπαρξη

Μέσω της συνεχούς εξάρτησης από τις Α.Σ. μπορεί να αποδειχθεί και η ύπαρξη λύσης για αυθαίρετη επιλογή αρχικών τιμών $(\phi, \partial\phi/\partial t)$ στην S_0. Αυτό γίνεται αν θεωρήσουμε μια ακολουθία αρχικών τιμών $\{(\phi_i^m, \partial\phi_i^m/\partial t)\}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στις αρχικές συνθήκες $(\phi, \partial\phi/\partial t)$ σε όλη την S_0, ενώ και οι χωρικές παράγωγοι επίσης συγκλίνουν ομοιόμορφα (χωρίς απαραίτητα το όριο σύγκλισης να είναι αναλυτική συνάρτηση). Από το θεώρημα Cauchy-Kowalevski συμπεραίνουμε ότι υπάρχει λύση ϕ_i^m για κάθε σύνολο αρχικών τιμών $(\phi_i^m, \partial\phi_i^m/\partial t)$ και η ανισότητα 3.27 συνεπάγεται ότι η ακολουθία των λύσεων αυτών, $\{\phi_i^m\}$ επίσης θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση ϕ^m σε όλο το $D(S_0)$, το ίδιο και οι m πρώτες παράγωγοί της. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η οριακή αυτή συνάρτηση θα ικανοποιεί την εξίσωση πεδίου K-G .

Γενίκευση

Τα αποτελέσματα περί ύπαρξης, μοναδικότητας και ευστάθειας μπορούν να επεκταθούν σε μια γενικότερη κλάση συστημάτων εξισώσεων πάνω σε μια πολλαπλότητα M που έχουν τη μορφή:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi_i + \sum_j (A_{ij})^a\nabla_a\phi_j + \sum_j B_{ij}\phi_j + C_i = 0 \tag{3.28}$$

και χαρακτηρίζονται ως γραμμικά διαγώνια δευτεροβάθμια υπερβολικά συστήματα. Το αντίστοιχο θεώρημα εξασφαλίζει ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια, καθώς και την αιτιακή εξάρτηση των λύσεων στο $D(S)$ αποκλειστικά από το υποσύνολο S της αρχικής επιφάνειας Cauchy και περιγράφεται αναλυτικά στο βιβλίο των Hawking - Ellis . Δυστυχώς όμως στη ΓΘΣ αντιμετωπίζουμε μη γραμμικές εξισώσεις οπότε χρειαζόμαστε μια περεταίρω γενίκευση των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Λίγες μόνο περιπτώσεις μη γραμμικών συστημάτων ειδικής μορφής έγινε δυνατό να μελετηθούν μέχρι σήμερα. Συγκεκριμένα θα μας απασχολήσει ένα ημιγραμμικό υπερσύνολο των εξισώσεων που είδαμε προηγουμένως. Ένα σύστημα n δευτεροβάθμιων μερικών διαφορικών εξισώσεων με n άγνωστες συναρτήσεις $\phi_1 \dots \phi_n$ πάνω σε μια πολλαπλότητα M, καλείται ημιγραμμικό, διαγώνιο, δευτεροβάθμιο υπερβολικό σύστημα αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$g^{ab}(x;\phi_j;\nabla_c\phi_j)\nabla_a\nabla_b\phi_i = F_i(x;\phi_j;\nabla_c\phi_j)\,, \tag{3.29}$$

όπου g^{ab} και F_i είναι λείες ως προς τα ορίσματά τους. Οι επιθυμητές ιδιότητες για τα συστήματα αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα που παραθέτουμε εδώ χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 3.3.2. Έστω $(\phi_0)_1,\dots,(\phi_0)_n$ οποιαδήποτε λύση του ημιγραμμικού υπερβολικού συστήματος 3.29 πάνω σε μια πολλαπλότητα M και έστω $(g_0)^{ab} = g^{ab}(x;(\phi_0)_j;\nabla_c(\phi_0)_j)$. Έστω $(M,(g_0)_{ab})$ ολικά υπερβολικός χωρόχρονος, ή απλά μια ολικά υπερβολική περιοχή του, και έστω Σ μια λεία χωροειδής επιφάνεια Cauchy αυτού. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα 3.29 είναι καλά τοποθετημένο πάνω στη Σ με την εξής έννοια: Για αρχικές τιμές πάνω στη Σ επαρκώς κοντά στις αρχικές τιμές της λύσης $(\phi_0)_1,\dots,(\phi_0)_n$, υπάρχει μια ανοικτή περιοχή O της Σ τέτοια ώστε το σύστημα έχει λύση, $\phi_1,\dots,\phi_n$ στην O και ο $(O, g_{ab}(x;\phi_j;\nabla_c\phi_j))$ είναι ολικά υπερβολικός. Η λύση αυτή είναι μοναδική στην O και μεταδίδεται αιτιακά στο χωρόχρονο με την έννοια ότι αν οι αρχικές τιμές για $\phi'_1,\dots,\phi'_n$ συμφωνούν με αυτές της λύσης $\phi_1,\dots,\phi_n$ σε ένα υποσύνολο $S \subseteq \Sigma$, τότε οι δύο λύσεις είναι ίσες σε ολόκληρο το $O \cap D^+(S)$. Τέλος, οι λύσεις εξαρτώνται κατα συνεχή τρόπο από τις αρχικές τιμές με τον τρόπο που περιγράφη παραπάνω στην περίπτωση του πεδίου Klein-Gordon .

3.3.3 Πρόβλημα αρχικών τιμών στη ΓΘΣ

Η κεντρική εξίσωση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας, είναι η εξίσωση Einstein

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{3.30}$$

η οποία καθορίζει πλήρως την εξέλιξη του χωρόχρονου καθώς το τανυστικό πεδίο T_{ab} περιέχει την πληροφορία σχετικά με την κατανομή ύλησ-ενέργειας στο χωρόχρονο, ενώ ο τανυστής Einstein G_{ab} καθορίζει τη γεωμετρία του χωρόχρονου και την εξέλιξή της ως τανυστής αποτελούμενος αποκλειστικά από τη μετρική και παραγώγους της. Η αναλυτική έκφραση δίνεται από τις εξισώσεις 2.80 , 2.74 ,2.43 και 2.83. Θέλουμε να δείξουμε ότι η θεωρία αυτή μπορεί να αποκτήσει ένα *καλά τοποθετημένο* πρόβλημα αρχικών τιμών, γιαυτό θα προσπαθήσουε να φέρουμε τη μη γραμμική εξίσωση 3.30 στη μορφή 3.29.

Έτσι περιμένουμε μέσω της κατασκευής ενός προβλήματος αρχικών τιμών να πάρουμε μια φόρμουλα που για δεδομένα τα πεδία που συνεισφέρουν στον τανυστή ύλησ-ενέργειας πάνω σε μια επιφάνεια ᾶυςηψ και για δεδομένη την αρχική (3)-γεωμετρία της (μετρική) καθώς και τους ρυθμούς μεταβολής της πάνω στην επιφάνεια αυτή, να μας δίνει την εξέλιξη όλων των παραπάνω μεγεθών μαζι. Είναι λοιπόν σα να έχουμε στο δεξί μέλος της 3.30 την 'πηγή' της 4-διάστατης γεωμετρίας ενώ στο αριστερό τον 'αποδέκτη' των αλλαγών σε αυτή. Αλλά μιλώντας για τη γεωμετρία του ίδιου χωρόχρονου πάνω στον οποίο ζουν όλα τα τανυστικά πεδία, θα ήταν αφελές αν κάποιος αντιμετώπιζε την πηγή και τον αποδέκτη ως δύο ξεχωριστές έννοιες.

Έστω (M, g_{ab}) καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος. Όπως είδαμε από το θεώρημα 3.2.3 υπάρχει παγκόσμια χρονική συνάρτηση f ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ η υπερεπιφάνεια $\Sigma_t = x \in M : f(x) = t$ να είναι επιφάνεια Cauchy . Άρα ο χωρόχρονος (M, g_{ab}) μπορεί να αναδιπλωθεί σε μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών Cauchy : $M \to \mathbb{R} \times \Sigma$.

Επαγόμενη μετρική h_{ab}

Έστω n^a το ορθοκανονικό διανυσματικό πεδίο στην οικογένεια επιφανειών Σ_t. Με τη βοήθεια του κάθετου διανύσματος η μετρική g_{ab} ορίζει αυτόματα μια επαγόμενη χωρική μετρική h_{ab} πάνω σε κάθε τρισδιάστατη Σ_t μέσω τς σχέσης:

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{3.31}$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς πως η μετρική αυτή είναι κατασκευασμένη ακριβώς σαν τον περιορισμό της χωροχρονικής μετρικής πάνω στο διανυσματικό χώρο της υποπολλαπλότητας Σ_t. Κατ΄ αρχάς η δράση της μετρικής h_{ab} για διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια αυτή, παράλληλο δηλαδή προς το n^a και χωρίς συνιστώσα πάνω στην επιφάνεια, δίνει αποτέλεσμα μηδέν.

$$h_{ab}n^a = g_{ab}n^a + n_a n_b n^a = n_b + (-1)n_b = 0\,, \tag{3.32}$$

καθώς $n_a n^a = -1$ ως χρονοειδές μοναδιαίο διάνυσμα. Επίσης η δράση της h_{ab} πάνω σε διάνυσμα v^a του εφαπτόμενου χώρου της Σ_t θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με τη δράση της g_{ab} αφού θα είναι $n_a v^a = 0$ και άρα $h_{ab}v^a = g_{ab}v^a$. Με άλλα λόγια, όπως ακριβώς η χωροχρονική μετρική g_{ab} μας δίνει τη γεωμετρία του 4-διάστατου χωρόχρονου, έτσι και η χωρική μετρική h_{ab} θα μας δίνει την (3)-γεωμετρία της κάθε χωρικής υπερεπιφάνειας Cauchy Σ και αν το κάνουμε αυτό για κάθε μέλος της οικογένειας Σ_t θα καταλήξουμε σε μια έκφραση $h_{ab}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Δεδομένης της επιλογής της χρονικής συνάρτησης t, έστω t^a το διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί την $t^a\nabla_a t = 1$. Αναλύοντας το t^a σε συνιστώσες παράλληλες και κάθετες στις υπερεπιφάνειες Σ_t παίρνουμε τα διανύσματα Nn^a και N^a. Καλούμε το διάνυσμα N^a, *διάνυσμα ολίσθησης* και τη συνάρτηση N *συνάρτηση μετατόπισης* (shift vector & lapse function). Ορίζονται ως:

$$N = -t^a n_a = (n^a\nabla_a t)^{-1} \tag{3.33}$$

$$N^a = h_{ab}t^b \tag{3.34}$$

έτσι ώστε,

$$t^a = Nn^a + N^a\,. \tag{3.35}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε τη δυναμική του χωρόχρονου μέσω της 'χρονικής ' εξέλιξης της δυναμικής χωρικής μετρικής h_{ab}, κατά μήκος μιας χρονικής παραμέτρου t. Επομένως περιμένουμε οι ζητούμενες αρχικές συνθήκες να είναι μια Riemannian μετρική h_{ab} πάνω σε μια αρχική επιφάνεια Cauchy Σ_0 και η χρονική της παράγωγος.

Εξωγενής Καμπυλότητα της Σ

Έστω χωρική υπερεπιφάνεια Σ και ξ^a το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο εφαπτόμενο στην οικογένεια των χρονοειδών γεωδαισιακών που είναι κάθετες στην Σ σε κάθε σημείο της. Έχουμε ορίσει την εξωγενή καμπυλότητα K_{ab} ως:

$$K_{ab} = \nabla_a \xi_b \,. \tag{3.36}$$

Το K_{ab} είναι συμμετρικός και καθαρά χωρικός τανυστής, δηλαδή $K_{ab} = K_{ba}$ και $K_{ab}\xi^a = \xi^a \nabla_a \xi_b = 0 = K_{ab}\xi^b$. Μπορεί να εκφραστεί λοιπόν ως:

$$K_{ab} = \nabla_{(a}\xi_{b)} = \frac{1}{2}\pounds_\xi g_{ab} \tag{3.37}$$

και λόγω της 3.31,

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_\xi (h_{ab} - \xi_a \xi_b) = \frac{1}{2}\pounds_\xi h_{ab} \,. \tag{3.38}$$

Εξάλλου, εφόσον το n^a είναι επίσης το χρονοειδές πεδίο πάντα κάθετο σε κάθε Σ, η παραγώγιση του πεδίου αυτού *πάνω* στην επιφάνεια Σ θα πρέπει να συμφωνεί με αυτή του ξ^a, δηλαδή,

$$K_{ab} = \nabla_{(a}\xi_{b)} = h_a{}^c \nabla_c \xi_b = h_a{}^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab} \,, \tag{3.39}$$

κάτι που γενικεύει την έννοια της εξωγενούς καμπυλότητας για χωροχρονικές φέτες ανεξάρτητα από το αν είναι ορθογώνιες σε γεωδαισιακές. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.35 μπορούμε να δούμε πώς αναλύεται σε παραγώγιση Lie ως προς το χρόνο και ως προς το διάνυσμα ολίσθησης:

$$\pounds_n h_{ab} = \frac{1}{N}(\pounds_t h_{ab} - \pounds_N h_{ab}) \tag{3.40}$$

Έτσι βλέπουμε ότι η έννοια της εξωγενούς καμπυλότητας μιας χωροειδούς υπερεπιφάνειας Σ εμβαπτισμένης στο χωρόχρονο (M, g_{ab}) είναι στενά συνδεδεμένη με τη χρονική παράγωγο της επαγόμενης τρισδιάστατης μετρικής h_{ab} στην υπερεπιφάνεια αυτή.

Τα παραπάνω μας προτρέπουν να θεωρήσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες της γενικής σχετικότητας μπορούν να εκφραστούν από την τριάδα (Σ, h_{ab}, K_{ab}), με Σ τρισδιάστατη πολλαπλότητα, h_{ab} μια Riemannian μετρική της και K_{ab} συμμετρικό τανυστικό πεδίο πάνω στη Σ.

Συναλλοίωτη Παράγωγος D_a

Θέλουμε τώρα να πάρουμε τις εσωτερικές γεωμετρικές ιδιότητες της υποπολαπλότητας Σ όπως αυτές κληρονομούνται από την 4-διάστατη γεωμετρία του χωρόχρονου μέσα στον οποίο βρίσκεται εμβαπτισμένη. Έστω τυχαίο χωροχρονικό διάνυσμα v^a στο $p \in \Sigma$. Αναλύουμε στις συνιστώσες:

$$v^a = v_\perp n^a + v_\parallel^a \,. \tag{3.41}$$

Θα είναι $v_\parallel^a n_a = 0$ και αν $v_\perp = 0$ τότε το v^a κείται στη υπερεπιφάνεια Σ στο p. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$v^a = v_\parallel^a = h^a{}_b v^b \tag{3.42}$$

και γενικεύοντας για τανυστή τύπου (k, l) η συνθήκη θα είναι

$$T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} = h^{a_1}{}_{c_1} \cdots h^{a_k}{}_{c_k} h_{b_1}{}^{d_1} \cdots h_{b_l}{}^{d_1} T^{c_1 \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots d_l} \tag{3.43}$$

όπου το δεξί μέλος μπορεί να θεωρηθεί και ως η *προβολή* του τανυστή πάνω στη Σ καθώς η συστολή με οποιοδήποτε διάνυσμα κάθετο σε αυτή δίνει μηδέν. Η μετρική $h^a{}_b$ επομένως γίνεται τελεστής προβολής στον εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο της Σ.

Για να πάρουμε μια συναλλοίωτη παραγώγιση που να παραμένει πάνω στη Σ, δρούμε με τον τελεστή $h_d{}^c \nabla_c$ ώστε να μην έχουμε παραγώγιση κατά διεύθυνση εκτός της επιφάνειας. Εδώ ο ∇_a είναι ο συσχετισμένος με τη μετρική g_{ab}. Ωστόσο ένας τυχαίος τανυστής T δεν παραμένει αναγκαστικά στον εφαπτόμενο χώρο της Σ μετά την παραγώγιση $h_d{}^c \nabla_c T$. Μπορούμε όμως, για να είμαστε συνεπείς να προβάλουμε τον τελιό τανυστή πάνω στη Σ με τη βοήθεια της μετρικής h_{ab}, ώστε να ορίσουμε και τον τελικό τελεστή συναλλοίωτης παραγώγισης 'επάνω' στη Σ ως:

$$D_c T^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} = h^{a_1}{}_{f_1} \cdots h^{a_k}{}_{f_k} h_{b_1}{}^{d_1} \cdots h_{b_l}{}^{d_1} h_c{}^e \nabla_e T^{f_1 \cdots f_k}{}_{d_1 \cdots d_l} \tag{3.44}$$

Επομένως έχοντας το διαφορικό τελεστή ∇_a συσχετισμένο με τη χωροχρονική μετρική g_{ab}, μπορούμε να δημιουργήσουμε την επαγόμενη συναλλοίωτη παράγωγο D_a, συσχετισμένη με την επαγόμενη 'χωρική' μετρική h_{ab} στην υπερεπιφάνεια. Από τον ορισμό, οι ιδιότητες που ικανοποιεί η ∇_a ως συναλλοίωτη παράγωγος μεταφέρονται στη D_a. Επίσης επαληθεύεται ότι

$$D_a h_{bc} = 0 \tag{3.45}$$

αντικαθιστώντας απλά τις D_a και h_{bc} με τους ορισμού τους 3.44 και 3.31, και χρησιμοποιώντας ότι $\nabla_a g_{bc} = 0$ και $h_{ab} n^b = 0$.

Καμπυλότητα $^{(3)}R$

Γνωρίζοντας τώρα τη συναλλοίωτη παράγωγο της Σ είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον τανυστή Riemann $^{(3)}R$ που μας δίνει την καμπυλότητα της τρισδιάστατης φέτας Σ. Από τον ορισμό του τανυστή Riemann , εξίσωση 2.65, θεωρώντας τυχαίο πεδίο 1-μορφών ω_a ορίζω:

$$^{(3)}R_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \quad . \tag{3.46}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
D_a D_b \omega_c &= D_a (h_c{}^e h_b{}^d \nabla_d \omega_e) \\
&= h_b{}^g h_c{}^k h_a{}^f \nabla_f (h_k{}^e h_g{}^d \nabla_d \omega_e) \\
&= h_b{}^g h_c{}^k h_a{}^f h_k{}^e h_g{}^d \nabla_f \nabla_d \omega_e \\
&\quad + h_b{}^g h_c{}^k h_a{}^f h_g{}^d (\nabla_f h_k{}^e)(\nabla_d \omega_e) + h_b{}^g h_c{}^k h_a{}^f h_k{}^e (\nabla_f h_g{}^d)(\nabla_d \omega_e) \,.
\end{aligned}$$

Όμως επειδή:

$$\begin{aligned} h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b h_d{}^e &= h_a{}^b h_c{}^d \nabla_b (g_d{}^e + n_d n^e) \\ &= h_a{}^b (h_c{}^d \nabla_b n_d) n^e + h_a{}^b h_c{}^d n_d \nabla_b (g^{fe} n_f) \\ &= h_c{}^d (h_a{}^b \nabla_b n_d) n^e + h_c{}^d (h_a{}^b \nabla_b n_f) n_d g^{fe} \\ &= h_c{}^d K_{ad} n^e + h_c{}^d K_{af} n_d g^{fe} = K_{ac} n^e \end{aligned}$$

η σχέση γίνεται:

$$D_a D_b \omega_c = h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_b{}^d K_{ac} n^e \nabla_d \omega_e + h_c{}^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e \,. \tag{3.47}$$

Παίρνοντας τώρα το αντισυμμετρικό του, $(D_{[a} D_{b]} \omega_c)$ έχουμε,

$$\cdot \quad K_{ab} = K_{ba} \quad (\text{φεύγει ο τελευταίος όρος}) \tag{3.48}$$

$$\cdot \quad h_b{}^d n^e \nabla_d \omega_e = h_b{}^d [\nabla_d (n^e \omega_e) - \omega_e \nabla_d n^e] = -K_b{}^e \omega_e \tag{3.49}$$

Έτσι τελικά:

$$^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h_j{}^d R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b{}^d + K_{bc} K_a{}^d \tag{3.50}$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι:

$$D_a K^a{}_b - D_b K = R_{cd} n^d h^c{}_b \tag{3.51}$$

Ξεκινάμε αναλύοντας το $D_a K^a{}_b$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.44, 3.39.

$$\begin{aligned} D_a K^a{}_b &= h^{ac} D_a K_{cb} = h^{ac} D_a h_c{}^d \nabla_d n_b \\ &= h^{ac} h_c{}^d D_a \nabla_d n_b = h^{ad} h_a{}^c h_d{}^e h_b{}^f \nabla_c \nabla_e n_f \\ &= h^{ce} h_c{}^d \nabla_c \nabla_e n_f \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με το $D_b K$:

$$\begin{aligned} D_b K &= D_b h^{ac} K_{ac} = h^{ac} D_b h_a{}^d \nabla_d n_c \\ &= h^{cd} D_b \nabla_d n_c = h^{cd} h_b{}^a h_d{}^e h_c{}^f \nabla_a \nabla_e n_f \\ &= h^{ef} h_b{}^a \nabla_a \nabla_e n_f \end{aligned}$$

Αφαιρούμε και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} D_a K^a{}_b - D_b K = h^{cd} h_b{}^a \nabla_d \nabla_c n_a - h^{cd} h_b{}^a \nabla_a \nabla_c n_d \\ &= h^{cd} h_b{}^a (\nabla_d \nabla_c n_a - \nabla_a \nabla_c n_d) \\ &= h^{cd} h_b{}^a [R_{dca}{}^e n_e + R_{cad}{}^e n_e - \nabla_c(\nabla_d n_a + \\ &= h_b{}^a R_{ae} n^e \end{aligned}$$

Οι 2 παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές και ως σχέσεις Gauss-Codazzi.

Οι εξισώσεις της ΓΘΣ

Μετά από αυτούς τους χρήσιμους υπολογισμούς θα επιστρέφουμε στις εξισώσεις Einstein και θα επιχειρήσουμε να τις φέρουμε στη μορφή 3.29. Γράφοντας αναλυτικά τις εξισώσεις των συνιστωσών του τανυστή Einstein για το κενό $G_{\mu\nu} = 0$ θα πάρουμε $4^2 = 16$ δευτεροβάθμιες διαφορικές εξισώσεις για τις συνιστώσες της μετρικής $g_{\mu\nu}$ από τις οποίες όμως, λόγω της συμμετρίας $G_{ab} = G_{ba}$ μόνο 10 είναι ανεξάρτητες. Μπορούμε πάντα, τουλάχιστον τοπικά να επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με τη χρονική συντεταγμένη t προσαρμοσμένη ώστε η υπερεπιφάνεια $t = 0$ να είναι η αρχική επιφάνεια Cauchy , Σ. Στην τρισδιάστατη επιφάνεια αυτή θα δώσουμε αρχικές τιμές για τα πεδία (h_{ab}, K_{ab}) οι οποίες περιμένουμε να ‘χτίσουν’ έναν καθολικά υπερβολικό χωρόχρονο.

Πρώτα εκφράζουμε τις συνιστώσες του τανυστή Ricci συναρτήσει της μετρικής μέσω των εξισώσεων 2.83 και 2.43:

$$R_{\mu\nu} = \sum_\rho R_{\mu\rho\nu}{}^\rho = \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\rho\nu} + \sum_\lambda (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}) \quad (3.52)$$

η οποια μετά από πράξεις έρχεται στην τελική μορφή,

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} \left[-2\partial_\beta \partial_{(\nu} g_{\mu)\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}\right] + F_{\mu\nu}(g, \partial g) \quad (3.53)$$

όπου φαίνονται καθαρά μόνο οι όροι με παραγώγους β′ τάξης καθώς μας ενδιαφέρει μόνο ο ημιγραμμικός χαρακτήρας των εξισώσεων. Το βαθμωτό Ricci προκύπτει αμέσως με συστολή,

$$R = -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\left[-2\partial_\beta\partial_{(\nu}g_{\mu)\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta}\right] + F(g,\partial g) \tag{3.54}$$

Επομένως θα πάρουμε τελικά τις 10 συνιστώσες του τανυστή Einstein :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\left[-2\partial_\beta\partial_{(\nu}g_{\mu)\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma} g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\left[-\partial_\beta\partial_\sigma g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\sigma} + \partial_\rho\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right] + F'_{\mu\nu}(g,\partial g) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι η άθροιση στα $\{\alpha\beta\rho\sigma\}$ δίνει το $\sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = sum_{\alpha,\beta,\rho,\sigma}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\sigma}$.

Είναι τώρα εμφανές ότι οι μερικές διαφορικές των συνιστωσών εξισώσεων Einstein είναι πάντα ημιγραμμικού τύπου ως προς τις δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Μένει όμως να δούμε αν όντως όλοι οι δευτεροβάθμιοι όροι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και δεν απαλείφονται για κάποιες συνιστώσες, ώστε να πούμε με σιγουριά ότι μπορούμε να φέρουμε τις εξισώσεις της θεωρίας στη μορφή 3.29. Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει για τις 4 συνιστώσες που παίρνουμε κατά τη διεύθυνση του n^a, του κάθετου στην αρχική επιφάνεια Σ:

$$\sum_\nu G_{\mu\nu}n^\nu = 0 \tag{3.55}$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεισ-συνιστώσες δεν περιέχουν καθόλου δευτεροβάθμιες χρονικές παραγώγους. Έτσι οι 4 από τις 10 εξισώσεις εξαρτώνται μόνο από τις αρχικές συνθήκες, συνεπώς θα αποτελούν *συνδέσμους* του συστήματος, τους οποίους οι αρχικές συνθήκες οφείλουν να ικανοποιούν. Αναλύοντας την 3.55 στην κάθετη και εφαπτόμενη στην Σ συνιστώσα όπως είδαμε προηγουμένως παίρνουμε:

$$G_{ac}n^c = h^b{}_a G_{bc}n^c + G_{bc}n^b n^c n_a \tag{3.56}$$

από όπου προκύπτουν δύο εξισώσεις συνδέσμων, μία βαθμωτή για την κάθετη συνιστώσα και μία διανυσματική για την εφαπτόμενη. Έτσι,

$$
\begin{aligned}
0 &= h^b{}_a G_{bc} n^c = h^b{}_a R_{bc} n^c - \frac{1}{2} h^b{}_a g_{bc} n^c R \\
&= h^b{}_a R_{bc} n^c - \frac{1}{2} h^b{}_a n_b R = h^b{}_a R_{bc} n^c \\
&= D_b K^b{}_a - D_a K^b{}_b
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήθηκε στο τέλος η 2η σχέση Gauss-Codazzi και

$$
0 = G_{ab} n^a n^b = R_{ab} n^a n^b + \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} R_{acbd} h^{ab} h^{cd} \,, \tag{3.57}
$$

αφού θα είναι

$$
\begin{aligned}
R_{acbd} h^{ab} h^{cd} &= R_{acbd} (g^{ab} + n^a n^b)(g^{cd} + n^c n^d) \\
&= R_{cd}((g^{cd} + n^c n^d)) + R_{ab} n^a n^b + R_{acbd} n^a n^b n^c n^d \\
&= R + 2 R_{ab} n^a n^b \,.
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την 1η σχέση Gauss-Codazzi παίρνουμε τελικά

$$
0 = [{}^{(3)}R_{acbd} + K_{ab} K_{cd} - K_{cb} K_{ad}] h^{ab} h^{cd} = {}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \tag{3.58}
$$

Άρα έχουμε τελικά τους συνδέσμους των αρχικών τιμών (initial value constraints) της θεωρίας να είναι οι:

$$
D_b K^b{}_a - D_a K^b{}_b = 0 \tag{3.59}
$$

$$
{}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} = 0 \tag{3.60}
$$

Το σύστημα των εξισώσεων Einstein είναι λοιπόν ένα υποπροδιορισμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων με 10 άγνωστες συνιστώσες της μετρικής και 6 μόλις ανεξάρτητες εξισώσεις. Η απροσδιοριστία αυτή προέρχεται όμως κατά φυσικό τρόπο από την αναλλοιώτητα του φυσικού κόσμου κάτω από διαφορομορφισμούς του χωρόχρονου, $\phi : (M, g_{ab}) \rightarrow (M, \phi^* g_{ab})$, μετασχηματισμοί που όπως είδαμε καθορίζουν την ελευθερία βαθμίδας της θεωρίας. Εφόσον η βαθμίδα αυτή αποτελείται από ένα αυθαίρετο διανυσματικό πεδίο, δηλαδή 4 αυθαίρετες συναρτήσεις πάνω στην M, συμπεραίνουμε ότι τελικά έχουμε τον σωστό αριθμό ουσιαστικών εξισώσεων για τη ΓΘΣ. Είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα με αυτό της ελευθερίας βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού, όπου η ελευθερία αυτή ανάγεται σε μια αυθαίρετη συνάρτηση δυναμικού, χ ώστε $A'_a = A_a - \nabla_a \chi$ να είναι μετασχηματισμός βαθμίδας. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού είχαμε τον σύνδεσμο $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Χάρη στην αναλλοιώτητα των εξισώσεων κάτω από διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων, έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε επιλογή βαθμίδας, όπως κάναμε και στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, ώστε να επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς που μας συμφέρει. Στην προκειμένη περίπτωση η επιλογή είναι ένα σύστημα αρμονικών συντεταγμένων (Choquet-Bruhat (1962)) οι οποίες ορίζονται ώστε να ικανοποιούν: $\Box x^\mu = \nabla^a \nabla_a x^\mu = 0$. Υπολογίσουμε ότι:

$$\Box x^\mu = \nabla_a g^{ab} \partial_b x^\mu = \cdots = \sum_a [\partial_\alpha g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma}] = 0 \tag{3.61}$$

Και κάτω από αυτές τις συντεταγμένες οι εξισώσεις Einstein για το κενό έρχονται στη μορφή

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \hat{F}(g, \partial g) = 0 \tag{3.62}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *απλοποιημένη εξίσωση Einstein* και είναι ένα διαγώνιο ημιγραμμικό δευτεροβάθμιο υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, της μορφής 3.29. Εφαρμόζοντας τελικά το θεώρημα 3.3.2, έχουμε αποκτήσει έναν καλά ορισμένο φορμαλισμό αρχικών τιμών για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Κεφάλαιο 4

Λαγκρανζιανός και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός της ΓΘΣ

4.1 Λαγκρανζιανός φορμαλισμός τανυστικών πεδίων

Η συνήθης προσέγγιση κάθε κλασικής θεωρίας πεδίου μας υπαγορεύει να αναζητήσουμε μια Λαγκρανζιανή, και στη συνέχεια Χαμιλτονιανή διατύπωση για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ένας τέτοιος φορμαλισμός θα μας δώσει όχι μόνο καλύτερη εποπτεία πάνω στη δυναμική της θεωρίας και τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών, αλλά ίσως και έναν δρόμο προς τη διατύπωση μιας κβαντικής θεωρίας για τη βαρύτητα. Η ουσία της ΓΘΣ βρίσκεται στη δυναμική της γεωμετρίας του χωρόχρονου που συνοψίζεται στην εξίσωση Einstein , $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$. Θα δείξουμε στο κεφάλαιο αυτό πώς η παραπάνω εξίσωση μπορεί να αναπαραχθεί μέσω μιας απλής γεωμετρικού χαρακτήρα Λαγκρανζιανής πυκνότητας.

Προχωρόντας στη Χαμιλτονιανή διατύπωση, θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τους δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας που καθορίζουν τη γεωμετρία του χωρόχρονου, ώστε να είμαστε σε θέση, μέσω των εξισώσεων Hamilton , να προβλέψουμε τη χρονική εξέλιξη της γεωμετρίας ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Η κλασική έννοια της Χαμιλτονιανής ενός συστήματος είναι επίσης στενά συνδεδεμένη με την ολική ενέργεια του συστήματος, γεγονός που μας προτρέπει να αποδόσουμε έναν νέο ορισμό για την ενέργεια του βαρυτικού πεδίου, ή ,πιό σωστά, της γεωμετρίας του χωρόχρονου.

Τέλος, το μεγαλύτερο ίσως ενδιαφέρον παρουσιάζει η έρευνα που γίνεται τα τελευταία χρόνια για τη σύνθεση μιας κβαντικής θεωρίας βαρύτητας, και φυσικά όλες οι συνταγές για την κβάντωση κλασικών πεδίων περνούν είτε από το Λαγκρανζιανό είτε από το Χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Πιό συγκεκριμένα η μέθοδος κανονικής κβάντωσης (canonical quantization) απαιτεί μια Χαμιλτονιανή διατύπωση για τη μετάβαση από το φασικό χώρο σε έναν χώρο Hilbert , ενώ η μέθοδος Feynmann με τα τροχιακά ολοκληρώματα (path integral formulation) χρησιμοποιεί τη Λαγκρανζιανή προσέγγιση.

4.1.1 Δράση

Έστω $\psi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ το προς εξέταση τανυστικό πεδίο πάνω στην 4-διάστατη πολλαπλότητα M. Το συνολικό αυτό πεδίο θα συμβολίζουμε για ευκολία στο εξής με ψ κρύβοντας τους ούτως η άλλως άγνωστους ακόμη δείκτες. Έστω τώρα S ένα συναρτησιακό του ψ, μία απεικόνιση δηλαδή $S[\psi]$ που μας πάει από το χώρο όλων των δυνατών διαμορφώσεων του ψ πάνω στην M, στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$. Θα επιχειρήσουμε έτσι να ορίσουμε ένα μέγεθος αντίστοιχο της κλασικής δράσης, ώστε τελικά να καταλήξουμε σε μία Λαγκρανζιανή πυκνότητα για τη θεωρία μας.

Σε αντίθεση όμως με την κλασική δράση, η οποία ορίζεται πάνω στην τροχιά των σωματιδίων, εδώ η δράση ορίζεται για ολόκληρο το τανυστικό πεδίο. Στην κλασική περίπτωση για να χρησιμοποιήσουμε την αρχή ελάχιστης δράσης κρατούσαμε τα δύο ακραία σημεία της τροχιάς σταθερά και βρίσκαμε την τροχιά αυτή που ικανοποιεί την αρχή, ορίζοντάς την τελικά ως την *κλασική τροχιά* του σωματιδίου. Η τροχιά αυτή πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης ώστε να ξέρουμε πως έχουμε ορίσει την κατάλληλη δράση για τη θεωρία μας.

Τώρα μιας και δε δουλεύουμε πάνω σε τροχιές σωματιδίων αλλά σε διαμορφώσεις τανυστικού πεδίου πάνω στον 4-διάστατο χωρόχρονο, θα εστιάσουμε σε μία συμπαγή περιοχή U της M όπου θα θεωρήσουμε μονοπαραμετρικές οικογένειες ψ_λτου τανυστικού πεδίου, διατηρώντας ίδιες τις τιμές όλων των μελών πάνω στο σύνορο $\dot{U}$. Για τη διαμόρφωση του πεδίου όπου η δράση εμφανίζει ακρότατο θέλουμε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις πεδίου της θεωρίας μας. Με τον τρόπο αυτόν συσχετίζουμε το κάθε πεδίο με μια κατάλληλη δράση και κατ΄ επέκταση μια κατάλληλη Λαγκρανζιανή πυκνότητα.

Έστω ψ_λ λεία μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφόσεων του τανυστικού πεδίου ψ, με 'αρχή' το ψ_0 κάθε μέλος της οποίας ικανοποιεί συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Συμβολίζουμε με $\delta\psi$ την ποσότητα

$$\delta\psi = \left.\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{4.1}$$

Θεωρούμε ότι υπάρχει για κάθε τέτοια οικογένεια το $\left.\frac{dS[\psi_\lambda]}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}$ και προφανώς είναι πραγματικός αριθμός.

Ορίζουμε τη *συναρτησιακή παράγωγο* της S ως το τανυστικό πεδίο χ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_M \chi\delta\psi = \left.\frac{dS}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \tag{4.2}$$

και συμβολίζουμε $\chi = \left.\frac{\delta S}{\delta\psi}\right|_{\psi_0}$. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα υπονοείται ολοκλήρωση με το στοιχείο όγκου $\epsilon = \epsilon_{[a_1 \ldots a_n]}$ ορισμένο πάνω στην M (βλέπε n-μορφές). Εφόσον το ολοκλήρωμα δίνει έναν πραγματικό αριθμό, η χ οφείλει να είναι ένα τανυστικό πεδίο *δυϊκό* του ψ και στον πολλαπλασιασμό αυτόν εννοείται συστολή όλων των δεικτών του χ με τους αντίστοιχους του $\delta\psi$.

4.1.2 Λαγκρανζιανή Πυκνότητα

Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός κάθε θεωρίας έχει τη βάση του στην *αρχή της ελάχιστης δράσης* — ή πιό γενικά της ακρότατης δράσης. Έστω ότι το πεδίο ψ ικανοποιεί κάποια πεδιακή εξίσωση, όπως εξ. Maxwell για το Η/Μ πεδίο, εξ. Klein-Gordon για τα ομόνυμα πεδία κοκ. Θέλουμε η δράση να παρουσιάζει ακρότατο για τη διαμόρφωση του πεδίου που ικανοποιεί τις εξισώσεις, ή αλλιώς η συναρτησιακή παράγωγος της S να μηδενίζεται. Αν μπορούμε να εκφράσουμε τη δράση αυτή στη μορφή

$$S[\psi] = \int_M \mathscr{L}[\psi]\,, \tag{4.3}$$

με $\mathscr{L}$ τοπική συνάρτηση της ψ και πεπερασμένου πλήθους παραγώγων της

$$\mathscr{L}\big|_x = \mathscr{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x))\,, \tag{4.4}$$

έτσι ώστε η

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\psi}\right|_\psi = 0 \tag{4.5}$$

να ισοδυναμεί με τις πεδιακές εξισώσεις, τότε έχουμε βρει τη *δράση του πεδίου* S και τη *Λαγκρανζιανή Πυκνότητα* $\mathscr{L}$. Θα έχουμε επιτύχει δηλαδή μια Λαγκρανζιανή διατύπωση, ή Λαγκρανζιανό φορμαλισμό της θεωρίας μας.

Η/Μ πεδία σε χώρο Minkowski

Θα δούμε τώρα ότι ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που υπακούει στις εξισώσεις Maxwell στο κενό προκύπτει απο μια αρκετά απλή τανυστική σχέση, από την οποία ορίζεται η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του Η/Μ πεδίου.

$$\mathscr{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{ab}F_{ab} = -\partial_{[a}A_{b]}\partial^{[a}A^{b]} \tag{4.6}$$

Θα δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή αυτή μέσω της αρχής ελάχιστης δράσης θα μας δώσει τις εξισώσεις του Η/Μ πεδίου στο κενό. Εδώ οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν μέσω της Minkowski μετρικής η_{ab} αφού υποθέτουμε επίπεδη γεωμετρία. Συνεπώς η συναλλοίωτη παράγωγος είναι απλά η ∂_a και η μετρική είναι σταθερή παντού. Η δυναμική μεταβλητή μας είναι το τετραδιάνυσμα A_a του Η/Μ πεδίου. Η δράση λοιπόν θα είναι

$$S_{EM}[A_a] = \int_\Omega \mathscr{L}_{EM}[A_a] = -\int_\Omega \partial_{[a}A_{b]}\partial^{[a}A^{b]} \tag{4.7}$$

Για να βρούμε τη συναρτησιακή παράγωγο της δράσης ως προς το πεδίο A_a, θεωρούμε μονοπαραμετρική οικογένεια πεδίων ${}^\lambda A_a$ στο συμπαγές υποσύνολο S

κρατώντας τις τιμές στο σύνορο ∂S κοινές για κάθε $A_a(\lambda)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\delta S_{EM} &= \left.\frac{dS_{EM}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\int_\Omega \frac{d}{d\lambda}\left[\partial_{[a}A_{b]}(\lambda)\partial^{[a}A^{b]}(\lambda)\right]_{\lambda=0} \\ &= -\int_\Omega \left[\partial_{[a}\frac{d}{d\lambda}A_{b]}\right]_{\lambda=0}(\partial^{[a}A_0^{b]}) + (\partial_{[a}A_{b]})\left[\partial^{[a}\frac{d}{d\lambda}A^{b]}\right]_{\lambda=0} \\ &= -\int_\Omega \partial_{[a}\delta A_{b]}\,\partial^{[a}A_0^{b]} + \partial_{[a}A_{b]}^0\,\partial^{[a}\delta A^{b]} = -\int_\Omega 2\,\partial_{[a}\delta A_{b]}\,\partial^{[a}A_0^{b]}\end{aligned}$$

όπου $\delta A_b = \frac{dA_b}{d\lambda}\big|_{\lambda=0}$, $A_b^0 = A_b(0)$, ενώ χρησιμοποιήσαμε ότι $\partial_a\eta_{bc} = 0$, και επομένως

$$\begin{aligned}\partial_{[a}A_{b]}^0 &\quad \partial^{[a}\delta A^{b]} = \partial_{[a}A_{b]}^0\ \left.\frac{d}{d\lambda}(\partial^{[a}A^{b]})\right|_{\lambda=0} = \partial_{[a}A_{b]}^0\ \left.\frac{d}{d\lambda}(\eta^{[a|c|}\partial_c\eta^{b]d}A_d)\right|_{\lambda=0} \\ &= \quad \partial_{[a}A_{b]}^0\eta^{c[a}\eta^{b]d}\partial_c(\delta A_d) = \frac{1}{4}\partial_c(\delta A_d)(\eta^{ca}\eta^{bd} - \eta^{cb}\eta^{ad})(\partial_a A_b^0 - \partial_b A_a^0) \\ &= \quad \frac{1}{4}\partial_c(\delta A_d)(\partial^c A_0^d - \partial^d A_0^c - \partial^d A_0^c + \partial^c A_0^d) = \partial_c(\delta A_d)\partial^{[c}A^{d]}\end{aligned}$$

άρα τελικά μετονομάζοντας τους δείκτες

$$\partial_{[a}A_{b]}^0\partial^{[a}\delta A^{b]} = \partial_{[a}\delta A_{b]}\partial^{[a}A^{b]} \tag{4.8}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\delta S_{EM} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega [\partial_a(\delta A_b) - \partial_b(\delta A_a)](\partial^a A_0^b - \partial^b A_0^a) \\ &= -\int_\Omega (\partial^a A_0^b\partial_a\delta A_b - \partial^b A_0^a\partial_a\delta A_b) \\ &= -2\int_\Omega \partial^{[a}A_0^{b]}\partial_a\delta A_b \\ &= -2\partial_a[\partial^{[a}A_0^{b]}\delta A_b]_{\partial S} + \int_\Omega 2(\partial_a\partial^{[a}A_0^{b]})\delta A_b \\ &= \int_\Omega 2(\partial_a\partial^{[a}A_0^{b]})\delta A_b\end{aligned}$$

αποτέλεσμα το οποίο μας υποδεικνύει τη συναρτησιακή παράγωγο της S_{EM}

$$\chi_{EM} = \chi_{EM}^b = 2\partial_a\partial^{[a}A^{b]} = \partial_a\partial^a A^b - \partial_a\partial^b A^a = \frac{\delta S_{KG}}{\delta A_b} \tag{4.9}$$

η οποία λόγω της 4.5 θα μας δώσει ακριβώς τις εξισώσεις Maxwell σε τανυστική μορφή

$$\partial_a \partial^a A^b - \partial_a \partial^b A^a = 0 \qquad ή \qquad \partial_a F^{ab} = 0 \tag{4.10}$$

Στην παραπάνω κατά παράγοντες ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι σε ολόκληρο το σύνορο ∂S η πεδιακή μετατόπιση μηδενίζεται.

Πεδίο Klein-Gordon

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου Klein-Gordon με μάζα μπορεί να οριστεί ως

$$\mathscr{L}_{KG} = -\frac{1}{2}(\partial_a \phi \partial^a \phi + m^2 \phi^2). \tag{4.11}$$

Πράγματι μπορούμε να δείξουμε ότι η δράση που προκύπτει εμφανίζει ακρότατο όταν το βαθμωτό ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon .

$$S_{KG}[\phi] = \int_\Omega \mathscr{L}_{KG}[\phi] \tag{4.12}$$

Έστω ϕ_λ μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφώσεων του πεδίου ϕ.

$$\left.\frac{dS[\psi_\lambda]}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\left.\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\int_\Omega \left[\partial_a \phi_\lambda \partial^a \phi_\lambda + m^2 \phi_\lambda^2\right]\right|_{\lambda=0} \tag{4.13}$$

Θέτοντας $\delta\phi = \frac{d\phi_\lambda}{d\lambda}\big|_{\lambda=0}$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dS[\psi_\lambda]}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega [\partial_a \delta\phi \partial^a \phi_0 + \partial_a \phi_0 \partial^a (\delta\phi) + 2m^2 \phi_0 (\delta\phi)] \\
&= \int_\Omega [\partial_a \delta\phi \partial^a \phi_0 + m^2 \phi_0 (\delta\phi)] \\
&= -\left[\partial^a (\partial_a \phi_0 \, \delta\phi)\right]_{\partial\Omega} + \int_\Omega [\partial_a \partial^a \phi_0 \, \delta\phi - m^2 \phi_0 (\delta\phi)] \\
&= \int_\Omega [\partial_a \partial^a \phi_0 - m^2 \phi_0] \delta\phi
\end{aligned}$$

όπου ο συνοριακός όρος μηδενίζεται για τους ίδιους λόγους με πριν. Επομένως η συναρτησιακή παράγωγος της δράσης ώς προς το πεδίο ϕ θα είναι η

$$\frac{\delta S_{KG}}{\delta\phi} = \chi_{KG} = \partial_a \partial^a \phi - m^2 \phi \tag{4.14}$$

Και τελικά η αρχή που θέλει τη δράση να παρουσιάζει ακρότατο για τη λύση του πεδίου δίνει την επιθυμητή εξίσωση Klein-Gordon ,

$$\left.\frac{\delta S_{KG}}{\delta \phi}\right|_{\phi_0} = 0 \Leftrightarrow \partial_a \partial^a \phi_0 - m^2 \phi_0 = 0 \tag{4.15}$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιούμε ξανά το γεγονός ότι η μετρική στο Minkowski χώρο είναι πάντα, $g_{ab} = \eta_{ab}$ έτσι ώστε $\partial_a \eta_{ab} = 0$ και $\frac{d}{d\lambda}\left(\eta^{ab}\right) = 0$. Τα παραπάνω δε θα είναι τετριμμένα στην περίπτωση της ΓΘΣ κατά την οποία η μετρική δε μένει αμετάβλητη κάτω από τη μεταβολή του πεδίου με το λ.

4.2 Λαγκρανζιανός φορμαλισμός στη ΓΘΣ

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, όπου ο χωρόχρονος δεν παρουσιάζει καμπυλότητα (ΕΘΣ), η Λαγκρανζιανή διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας εμφανίζει εγγενείς δυσκολίες λόγω της φύσης της θεωρίας. Τα βασικά συστατικά της ΓΘΣ είναι το γεγονός ότι η δυναμική μεταβλητή της θεωρίας είναι το ίδιο το τανυστικό πεδίο της μετρικής g_{ab}, και η απαίτηση πως η αρχή ελάχιστης δράσης πρέπει να μας δώσει την εξίσωση Einstein .

Το πρώτο πρακτικό εμπόδιο που συναντά κανείς όταν ξεκινά την αναζήτηση μιας Λαγκρανζιανής για τη ΓΘΣ είναι ότι το στοιχείο όγκου, με βάση το οποίο ολοκληρώνουμε για να πάρουμε τη δράση του πεδίου, δεν είναι πλέον γνωστό, αλλά ούτε σταθερό σε ολόκληρη τη χωροχρονική πολλαπλότητα. Σύμφωνα με όσα αναλύθηκαν στο κεφάλαιο της διαφορικής γεωμετρίας, το στοιχείο όγκου μπορεί να εκφραστεί ως σφηνοειδές γινόμενο τεσσάρων 1-μορφών (συντεταγμένων), ώστε να είναι μια πλήρως αντισυμμετρική 4-μορφή, με 1 βαθμό ελευθερίας, ο οποίος υπολογίστηκε ως το $\sqrt{-g}$

$$\epsilon = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^4 \tag{4.16}$$

Όπου $g = det(g_{\mu\nu})$. Μεταβάλλεται λοιπόν όχι μόνο χωρικά αλλά και δυναμικά με τη μεταβολή της μετρικής. Έτσι θα αναγκαστούμε να χρησιμοποιήσουμε τανυστικά μεγέθη με ενσωματωμένη τη συνάρτηση που καθορίζει την κλίμακα στοιχείου όγκου ($\sqrt{-g}$), τις λεγόμενες *Τανυστικές Πυκνότητες*, και να δουλέψουμε με ένα αυθαίρετα ορισμένο από εμάς $\boldsymbol{\varepsilon}$ το οποίο επιλέγουμε ταυτόχρονα με το σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή. Αν δηλαδή $\mathbf{T}$ τανυστής ορίζουμε την αντίστοιχη τανυστική πυκνότητα $\mathfrak{T}$ ως :

$$\mathfrak{T}^{a_1 \ldots a_k}{}_{b1 \ldots b_l} = \sqrt{|g|}\mathbf{T}^{a_1 \ldots a_k}{}_{b1 \ldots b_l} \tag{4.17}$$

Μια ακόμη ιδιαιτερότητα εμφανίζεται όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε τη συναρτησιακή παράγωγο της δράσης. Οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν με την ίδια μετρική g_{ab} ενώ για να πάρουμε την εξίσωση Einstein πρέπει τα συστατικά της Λαγκρανζιανής να εκφράζονται μόνο μέσω του μετρικού τανυστή (και των παραγώγων του).

Θα δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή που μας δίνει την εξίσωση Einstein για το κενό ($G_{ab} = 0$), δεν είναι άλλη από το πιό απλό βαθμωτό μέγεθος που μπορεί να κατασκευαστεί από τη μετρική και τις α′ και β′ τάξης παραγώγους της, το βαθμωτό Ricci . Η αντίστοιχη δράση (*δράση Hilbert*) έχει την απλούστερη μορφή που θα μπορούσε να ελπίζει κανείς, γεγονός που ενισχύει την πίστη στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας καθώς πλέον δείχνει να ικανοποιεί όχι μόνο επιστημονικά αλλά και αισθητικά κριτήρια.

4.2.1 Ελαφρώς διαταραγμένη μετρική - Λογισμός μεταβολών

Έστω γνωστή μετρική ${}^0g_{ab}$ (π.χ. η_{ab}) και έστω μια νέα μετρική που γνωρίζουμε ότι διαφέρει ασθενώς από τη ${}^0g_{ab}$, με την έννοια ότι

$$g_{ab} = {}^0g_{ab} + \gamma_{ab} \tag{4.18}$$

όπου οι συνιστώσες του γ_{ab} είναι συγκριτικά πολύ μικρές. Η θεώρηση αυτή μελετάται γενικά για δύο λόγους. Ο πρώτος έχει να κάνει με μια τακτική που ακολουθείται κατά κόρον στη Φυσική, όταν ξεφεύγει κανείς από τα υπεραπλουστευμένα μοντέλα με υψηλό βαθμό συμμετρίας. Τα μοντέλα αυτά, όπως για παράδειγμα το κοσμολογικό μοντέλο Robertson-Walker ή το μοντέλο Schwarzschild για σφαιρικούς αστέρες, μπορεί μεν να είναι ελκυστικά σαν μια πρώτη καλή προσέγγιση ενός φυσικού προβλήματος και να επιδέχονται αναλυτικής λύσης, αλλά προφανώς δε συναντώνται στη φύση ακριβώς. Για το λόγο αυτόν δεχόμαστε μικρές αποκλίσεις από το απλουστευμένο συμμετρικό πρόβλημα, όπως π.χ. μικρές ανομοιογένειες στην κατανομή της ύλης, ώστε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματός μας πέρα από το ιδανικά διαμορφωμένο θεωρητικό μοντέλο κάτι που ίσως οδηγήσει σε αναμενόμενα αποτελέσματα ή ακόμα στην απόρριψη του μοντέλου ως μή ευσταθές.

Ο δεύτερος λόγος, στον οποίο και εστιάζουμε και το ενδιαφέρον εδώ, είναι η μελέτη της μεταβολής των διαφόρων μεγεθών που εξαρτώνται από τη μετρική όταν η τελευταία υφίσταται απειροστές μεταβολές. Είδαμε ότι κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο για το Λαγκρανζιανό, και συνεπώς και Χαμιλτονιανό φορμαλισμό της ΓΘΣ. Ξεκινάμε λοιπόν θεωρόντας αντί μιας τυχαίας διαταραγμένης μετρικής, μια λεία μονοπαραμετρική οικογένια μετρικών $g_{ab}(\lambda)$ με αρχή τη ${}^0g_{ab} = g_{ab}(0)$ η οποία είναι ακριβής λύση της εξίσωσης Einstein και συμβολίζουμε τη μεταβολή της με $\gamma = \left.\frac{d\mathbf{g}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \delta\mathbf{g}$. Για ευκολία στις πολλές πράξεις θα συμβολίζουμε εδώ τις μεταβολές δg^{ab} με γ^{ab} τανυστής που όπως και η μετρική οφείλει να είναι επίσης συμμετρικός. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να αγνοήσουμε τετραγωνικούς ως προς γ^{ab} όρους για πολύ μικρές διαταραχές της μετρικής (όπως θα κάνουμε στο λογισμό μεταβολών που ακολουθεί).

Γνωρίζουμε ότι ο τανυστής Riemann εκφράζεται ώς συνάρτηση της μετρικής και των παραγώγων της, επομένως κάθε μέλος της οικογένειας μετρικών θα δίνει και διαφορετικό πεδίο καμπυλότητας, δηλαδή $\mathbf{R} = \mathbf{R}(g(\lambda)) = \mathbf{R}(\lambda)$. Για να βρούμε την ακριβή εξάρτηση από την παράμετρο λ προσδιορίζουμε πρώτα τη συναλλοίωτη παράγωγο και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον ορισμό του τανυστή Riemann , εξ.2.65.

Γνωρίζουμε ότι $\forall\lambda\,\exists\,{}^\lambda\nabla_a \,:\, {}^\lambda\nabla_a g_{ab}(\lambda) = 0$ και αντιστοιχίζουμε στην ακριβή λύση ${}^0g_{ab}$ την ${}^0\nabla_a$. Η διαφορά της τελευταίας με μία τυχαία για $\lambda \neq 0$ φαίνεται μέσω του τανυστικού πεδίου $C^c{}_{ab}$:

$$ {}^\lambda\nabla_a\omega_b = {}^0\nabla_a\omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c \tag{4.19} $$

Υπολογίζουμε τα $C^c{}_{ab}$ συναρτήσει του λ από τη σχέση 2.42

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd}(\lambda)\{{}^0\nabla_a g_{bd}(\lambda) + {}^0\nabla_b g_{ad}(\lambda) - {}^0\nabla_d g_{ab}(\lambda)\} \tag{4.20}$$

όπου πάντα χρησιμοποιούμε ως πραγματική μετρική τη διαταραγμένη, και με αυτήν ανεβάζουμε και κατεβάζουμε δείκτες. Για το ρυθμό μεταβολής του πεδίου $C^c{}_{ab}$ ως προς τη διαταραχή λ έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{C}^c{}_{ab} = \left.\frac{dC^c{}_{ab}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2} {}^0g^{cd}\{{}^0\nabla_a {}^0g_{bd} + {}^0\nabla_a \gamma_{bd} + {}^0\nabla_b {}^0g_{ad} \\ &+ {}^0\nabla_b \gamma_{ad} - {}^0\nabla_d {}^0g_{ab} - {}^0\nabla_d \gamma_{ab}\} \end{aligned}$$

αλλα εφόσον ${}^0\nabla_d {}^0g_{ab} = 0$ οι τρεις όροι φεύγουν και μένει

$$\dot{C}^c{}_{ab} = \frac{1}{2} {}^0g^{cd}\{{}^0\nabla_a \gamma_{bd} + {}^0\nabla_b \gamma_{ad} - {}^0\nabla_d \gamma_{ab}\} \tag{4.21}$$

Μέσω του τανυστικού πεδίου $C^c{}_{ab}$ υπολογίζουμε επίσης τον τανυστή Riemann

$$\begin{aligned} {}^\lambda\nabla_a {}^\lambda\nabla_b \omega_c &= {}^\lambda\nabla_a({}^0\nabla_b \omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d) \\ &= {}^0\nabla_a({}^0\nabla_b \omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d) - C^e{}_{ab}({}^0\nabla_e \omega_c - C^d{}_{ec}\omega_d) \\ &- C^e{}_{ac}({}^0\nabla_b \omega_e - C^d{}_{be}\omega_d) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση 2.26. Έτσι

$$\begin{aligned} {}^\lambda R_{abc}{}^d \omega_d = 2 {}^\lambda\nabla_{[a} {}^\lambda\nabla_{b]}\omega_c &= 2 {}^0\nabla_{[a} {}^0\nabla_{b]}\omega_c - {}^0\nabla_a(C^d{}_{bc}\omega_d) + {}^0\nabla_b(C^d{}_{ac}\omega_d) \\ &- 2C^d{}_{[ab]}({}^0\nabla_e \omega_c - C^d{}_{ec}\omega_d) - C^e{}_{ac}\nabla_b \omega_e \\ &+ C^e{}_{bc}\nabla_a \omega_e + C^e{}_{ac}C^d{}_{be}\omega_d - C^e{}_{bc}C^d{}_{ae}\omega_d \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$ και ότι $2 {}^0\nabla_{[a} {}^0\nabla_{b]}\omega_c = {}^0R_{abc}{}^d\omega_d$ και

$${}^0\nabla_a(C^d{}_{bc}\omega_d) = C^d{}_{bc} {}^0\nabla_a \omega_d + ({}^0\nabla_a C^d{}_{bc})\omega_d$$

με μια αλλαγή στους βωβούς δείκτες καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} {}^\lambda R_{abc}{}^d \omega_d &= {}^0R_{abc}{}^d \omega_d - 2({}^0\nabla_{[a} C^d{}_{b]c})\omega_d + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}\omega_d \\ &= [{}^0R_{abc}{}^d - 2 {}^0\nabla_{[a} C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e}]\,\omega_d \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$^{\lambda}R_{abc}{}^{d} = {}^{0}R_{abc}{}^{d} - 2({}^{0}\nabla_{[a}C^{d}{}_{b]c}) + 2C^{e}{}_{c[a}C^{d}{}_{b]e} \tag{4.22}$$

Από εδώ και πέρα μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα οποιοδήποτε γεωμετρικό μέγεθος μας ενδιαφέρει, όπως για παράδειγμα τον τανυστή Ricci :

$$^{\lambda}R_{ac} = {}^{\lambda}R_{abc}{}^{b} = {}^{0}R_{ac} - 2{}^{0}\nabla_{[a}C^{b}{}_{b]c} + 2C^{e}{}_{c[a}C^{b}{}_{b]e} \tag{4.23}$$

και το ρυθμό μεταβολής του $\dot{R}_{ab}$:

$$\dot{R}_{ac} = \frac{d}{d\lambda}R_{ab}\bigg|_{\lambda=0} = 0 - 2{}^{0}\nabla_{[a}\dot{C}^{b}{}_{b]c} + 2\left[\dot{C}^{e}{}_{c[a}C^{b}{}_{b]e} + 2C^{e}{}_{c[a}\dot{C}^{b}{}_{b]e}\right]\bigg|_{\lambda=0}.$$

Αλλά εφόσον εξ΄ ορισμού οι συνιστώσες του $C^{c}{}_{ab}(\lambda)$ μηδενίζεται για $\lambda = 0$, μόνο ο γραμμικός ως προς C όρος επιβιώνει ενώ οι δύο τελευταίοι φεύγουν. Άρα τελικά

$$\dot{R}_{ab} = -2\,{}^{0}\nabla_{[a}\dot{C}^{c}{}_{c]b} \tag{4.24}$$

4.2.2 Δράση Hilbert - Λαγκρανζιανή πεδίου Einstein στο κενό

Όπως είπαμε προηγουμένως, η δυναμική μεταβλητή των εξισώσεων Einstein είναι στην ουσία το τανυστικό πεδίο της μετρικής g_{ab}, μέσω της οποίας πρέπει να μπορούν να εκφραστούν όλα τα γεωμετρικά μεγέθη της θεωρίας, σύμφωνα με την αρχή της γενικής συναλλοιότητας. Για λόγους ευκολίας θεωρούμε ως μεταβλητή την 'πάνω' μετρική g^{ab} για την οποία και κατασκευάζω τη μονοπαραμετρική οικογένεια πεδίων, οπότε το διαφορικό της ορίζεται ως

$$\delta g^{ab} = \frac{dg^{ab}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \tag{4.25}$$

και μπορεί εύκολα να συνδεθεί με το $\gamma_{ab} = \frac{dg_{ab}}{d\lambda}\big|_{\lambda=0}$ που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μέσω της ταυτότητας $g^{ac}g_{cb} = \delta^{a}{}_{b}$ που ισχύει παντού. Έτσι

$$\frac{d(g_{ac}g^{cd})}{d\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dg_{ac}}{d\lambda}g^{cd} = -g_{ac}\delta g^{cd} \;\Rightarrow\; \delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}$$

Ψάχνουμε λοιπόν να βρούμε κατ΄ αρχάς για τις εξισώσεις Einstein στο κενό την κατάλληλη δράση (και συνεπώς την κατάλληλη Λαγκρανζιανή πυκνότητα). Στο κενό ο τανυστής τάσεων-ενέργειας μηδενίζεται ($T_{ab} = 0$)και η εξίσωση παίρνει την απλή μορφή

$$G_{ab} \equiv R_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} R = 0. \tag{4.26}$$

Το 1915 δώθηκε από τον Hilbert ο τρόπος αναπαραγωγής της παραπάνω 'γεωμετροδυναμικής ' εξίσωσης από την απλούστερη αρχή ελάχιστης δράσης που θα μπορούσε να φανταστεί κανείς. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα επισημαίνεται και ως *γεωμετρική Λαγκρανζιανή* ($\mathscr{L}_{geom}$) καθόλου τυχαία, αφού δεν περιλαμβάνει τη δράση κάποιου πεδίου που οφείλεται στην ύπαρξη ύλης.

$$L_{geom} = \frac{1}{16\pi} R \quad \text{και επομένως} \quad \mathscr{L}_{geom} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} R \tag{4.27}$$

Η αντίστοιχη δράση που προκύπτει ονομάζεται *δραση Hilbert* και ολοκληρώνει απλά τη Λαγκρανζιανή με το σταθερό στοιχείο όγκου $\mathbf{e} \, (= dx^4)$

$$S[g^{ab}] = \int_\Omega \mathscr{L}_{geom} \mathbf{e} = \int_\Omega \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} R dx^4 \quad . \tag{4.28}$$

Ο παράγοντας κανονικοποίησης ($1/16\pi$) δε θα μας απασχολήσει προς το παρόν, απλώς παρατίθεται για λόγους πληρότητας. Για την ακρίβεια μπορεί να παραληφθεί πλήρως όταν μελετάμε μόνο τις εξισώσεις κενού. Ο ορισμός της συναρτησιακής παραγώγου, εδώ ως προς g^{ab} δίνει

$$\int_\Omega \boldsymbol{\chi} \, \delta g^{ab} = \frac{dS}{d\lambda} = \int_\Omega \chi_{ab} \delta g^{ab} = \int_\Omega \chi_{(ab)} \delta g^{ab} \tag{4.29}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η μετρική είναι παντού και πάντα συμμετρική ως προς τους δείκτες της. Αυτό σημαίνει αυτόματα μια απροσδιοριστία της συναρτησιακής παραγώγου χ_{ab} ως προς την προσθήκη τυχαίου αντισυμμετρικού τανυστή. Έχοντας να διαλέξουμε από μια απειρία τέτοιων τανυστών, συμφωνούμε να διαλέξουμε το χ_{ab} τέτοιο ώστε να είναι συμμετρικό εξαλείφοντας την απροσδιοριστία αυτή. Έτσι έχουμε $\chi_{ab} = \chi_{(ab)}$ και $\chi_{[ab]} = 0$

Αυτό που μένει να κάνουμε στην ουσία είναι να εκφράσουμε την ποσότητα $\delta\mathscr{L}_{geom}$ με τέτοιον τρόπο ώστε *να βγεί έξω* ένα ολικό διαφορικό δg^{ab} και θα έχουμε βρεί αυτόματα το χ.

$$\delta S = \int_{\Omega} \delta \mathscr{L}_{geom} dx^4 \tag{4.30}$$

$$\delta \mathscr{L}_{geom} = \frac{d}{d\lambda}(\sqrt{-g}\, g^{ab} R_{ab})\bigg|_{\lambda=0} = R\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{-g}g^{ab}(\delta R_{ab}) \tag{4.31}$$

Από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας για να καταλήξουμε στην επιθυμητή μορφή.

Ξεκινάμε με την ποσότητα μεταβολής του $g = det(g_{\mu\nu})$, της ορίζουσας δηλαδή του πίνακα συνιστωσών της μετρικής. Έχουμε :

$$\delta\sqrt{-g} = \delta\sqrt{|det(g_{\mu\nu})|} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\delta|g| \tag{4.32}$$

Για τυχαίο πίνακα με στοιχεία που εξαρτώνται από μια παράμετρο λ (μονοπαραμετρική οικογένεια πινάκων $M(\lambda)$) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{det[M(\lambda)]}\frac{d}{d\lambda}det[M(\lambda)] &= \frac{dln(det[M(\lambda)])}{d\lambda} = Tr\left\{M^{-1}(\lambda)\frac{dM(\lambda)}{d\lambda}\right\} \Rightarrow \\ \delta[det(M)] &= det[M]Tr\{M^{-1}(\delta M)\} \end{aligned}$$

$$\delta g = g\, Tr\{g_{\mu\lambda}\delta g^{\lambda\nu}\}$$

Το ίχνος του παραπάνω $\binom{1}{1}$ τανυστή βρίσκεται προφανώς συστέλλοντας τους δύο δείκτες, ώστε να αθροίσουμε για τα διαγώνια στοιχεία. Είναι δηλαδή $Tr\{g_{ac}\delta g^{cb}\} = g_{ab}\delta g^{ab}$ και τελικά

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \tag{4.33}$$

Για να υπολογίσουμε τον δεύτερο όρο της εξίσωσης 4.31 χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας στην οποία βρήκαμε το δR_{ab} να παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} &= -2\,{}^0\nabla_{[a}\dot{C}^c{}_{c]b} \\ &= -2\left[\frac{1}{2}{}^0g^{cd}\{{}^0\nabla^0_{[a}\nabla_{c]}\gamma_{bd} +{}^0\nabla^0_{[a}\nabla_{|b|}\gamma_{c]d} -{}^0\nabla^0_{[a}\nabla_{|d|}\gamma_{c]b}\}\right] \\ &= -{}^0g^{cd0}\nabla_a{}^0\nabla_b\gamma_{cd} - {}^0g^{cd0}\nabla_c{}^0\nabla_d\gamma_{ab} + 2\,{}^0g^{cd0}\nabla^0_c\nabla_{(b}\gamma_{a)d} \end{aligned}$$

Εδώ μπορούμε να παραλείψουμε τα μηδενικά στο συμβολισμό εφόσον θα δουλεύουμε πλέον μόνο με την αρχική μετρική και την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο, ενώ θα αλλάξουμε το συμβολισμό από γ_{ab} σε δg_{ab} για να γίνει πιο προφανές το αποτέλεσμα. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με g_{ab} παίρνουμε,

$$
\begin{aligned}
g^{ab}\delta R_{ab} &= -\frac{1}{2}g^{ab}\,g^{cd}\nabla_a\nabla_b\delta g_{cd} - \frac{1}{2}g^{ab}\,g^{cd}\nabla_c\nabla_d\delta g_{ab} + g^{ab}\,g^{cd}\nabla_c\nabla_{(b}\delta g_{a)d} \\
&= -g^{cd}\nabla^a\nabla_a\delta g_{cd} + g^{ab}\nabla_c\nabla_{(b}\delta g_{a)c} \\
&= \nabla^a\left[-g^{cd}\nabla_a\delta g_{cd}\right] + \nabla^a\nabla^b\delta g_{ab} \quad ,
\end{aligned}
$$

ή αλλιώς,

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a v_a \tag{4.34}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει

$$v_a = \nabla^b\delta g_{ab} - g^{cd}\nabla_a\delta g_{cd} \tag{4.35}$$

και επίσης διώξαμε τον αντιμεταθέτη των δεικτών αφού γίνεται συστολή με το συμμετρικό τανυστή g^{ab}.

Έτσι τελικά βλέπουμε ότι η μεταβολή της Λαγκρανζιανής (εξ. 4.31) μέσω των 4.33 και 4.34 γίνεται:

$$\delta\mathscr{L}_G = \sqrt{-g}\,[\nabla^a v_a + (R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab})\delta g^{ab}] \tag{4.36}$$

και η μεταβολή της δράσης S_G γίνεται

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = \int_\Omega \frac{d\mathscr{L}_G}{d\lambda}\mathbf{e} = \int_\Omega \nabla^a v_a\,\epsilon + \int_\Omega (R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab})\delta g^{ab}\,\epsilon \tag{4.37}$$

Εδώ φαίνεται καθαρά ότι ο πρώτος όρος θα μας δώσει ένα συνοριακό ολοκλήρωμα, αφού εφαρμόσουμε το θεώρημα Stokes για το πεδίο $\nabla_a v^a$, ώστε να γίνει

$$\int_\Omega \nabla^a v_a \epsilon = \int_{\partial\Omega} v_a n^{a\,(3)}\epsilon \tag{4.38}$$

Με n^a το ορθοκανονικό στο σύνορο διανυσματικό πεδίο, και ${}^{(3)}\mathbf{e}$ να συμβολίζει το στοιχείο όγκου που επάγεται στη 3-διάστατη υπερεπιφάνεια (υποπολλαπλότητα) $\partial\Omega$ από το $\mathbf{e}$ μέσω της ${}^{(3)}e_{abc} = e_{dabc}\,n^d$. Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι ο συνοριακός αυτός όρος μηδενίζεται υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, ή μπορεί να μηδενιστεί αυτόματα με έναν επαναπροσδιορισμό της δράσης S_G.

Συνοριακοί όροι

Υποθέτουμε ότι το διανυσματικό πεδίο v^a είναι μη μηδενικής νόρμας (μη φωτοειδές) και έχουμε

$$v_a n^a = n^a g^{bc}[\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}] \tag{4.39}$$

και περιορίζοντας το μετρικό τανυστή πάνω στην υπερεπιφάνεια $\partial\Omega$, όπως κάναμε στην 3.3.3, μέσω της επαγόμενης μετρικής $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$:

$$v_a n^a = n^a h^{bc}[\nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_a \delta g_{bc}]. \tag{4.40}$$

Εφόσον πάνω στο σύνορο έχουμε συμφωνήσει να κρατάμε τις συνθήκες για τις δυνατές μετρικές g_{ab}, ότι δηλαδή $\delta g_{ab}|_{\partial\Omega} = 0$, έπεται ότι $h^{bc}\nabla_c \delta g_{ab}\big|_{\partial\Omega} = 0$, καθώς η ποσότητα αυτή 'μεταφέρει' τη δg_{ab} πάνω στην επιφάνεια $\partial\Omega$.

$$\Rightarrow v_a n^a = -n^a h^{bc} \nabla_a \delta g_{bc} \tag{4.41}$$

Έχουμε δεί ότι η εξωγενής καμπυλότητα εκφράζεται μέσω της σχέσης $K = K^a{}_a = h^a{}_b$, ενώ η μεταβολή της πάνω στο σύνορο είναι

$$\delta K = \frac{dK}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = h^a{}_b\, \delta(\nabla_a n^b) \tag{4.42}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το διανυσματικό πεδίο n^a είναι ένα καθορισμένο και αμετάβλητο γεωμετρικό μέγεθος (καθορίζει το σύνορο της ολοκληρωτέας περιοχής) έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta(\nabla_a n^b) &= \frac{d(\nabla_a n^b)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{{}^{\lambda}\nabla_a n^b - {}^{0}\nabla_a n^b}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{{}^{\lambda}C^b{}_{ac} n^c}{\lambda} \\
&= \frac{dC^b{}_{ac}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} n^c = (\delta C^b{}_{ac}) n^c
\end{aligned}$$

Έτσι τελικά μέσω της εξ.4.21

$$\delta K = \frac{1}{2} n^c h^a{}_b g^{bd}[\nabla_a \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ac}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} n^c [h^{ad}\nabla_a \delta g_{cd} + h^{ad}\nabla_c \delta g_{ad} - h^{ad}\nabla_d \delta g_{ac}] \\
&= \frac{1}{2} n^c h^{ad}\nabla_c \delta g_{ad} = -\frac{1}{2} n^a v_a
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
n^a v_a = -2\,\delta K \tag{4.43}
$$

Και η εξ. 4.37 γίνεται

$$
\delta S_G = \int_{\partial\Omega} v_a n^a + \int_{\Omega} (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \delta g^{ab} = -2 \int_{\partial\Omega} \delta K + \int_{\Omega} G_{ab} \delta g^{ab} \tag{4.44}
$$

Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει ότι οι συνοριακοί όροι δεν εξαφανίζονται εν γένει, παρα μόνο στην ειδική περίπτωση κατά την οποία κρατάμε σταθερή, εκτός από τη μετρική g_{ab} (ή h_{ab}) πάνω στο σύνορο, και την εξωγενή καμπυλότητα K, η οποία αποτελεί ένα μέγεθος που 'μετράει' το ρυθμό μεταβολής της μετρικής προς τη διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια του συνόρου (βλ. ενότητα 3.3.3). Στην ουσία, στις μεταβολές που παίρνουμε για το πεδίο της μετρικής, πρέπει να επιβάλουμε την επιπλέον συνθήκη ότι οι πρώτες παράγωγοι της μετρικής παραμένουν επίσης σταθερές.

Ωστόσο ο πρόσθετος συνοριακός όρος που εμφανίστηκε μπορεί να εξαλειφθεί με έναν απλό επαναπροσδιορισμό της γεωμετρικής δράσης S_G. Έτσι θέτουμε εκ νέου :

$$
S'_G = S_G + 2 \int_{\partial\Omega} K\,, \tag{4.45}
$$

και τώρα η συνθήκη ακρότατης δράσης για τη νέα S'_G θα απαλείψει τον ανεπιθύμητο όρο δίνοντας την εξίσωση Einstein στο κενό

$$
\delta S'_G = 2 \int_{\partial\Omega} \delta K - 2 \int_{\partial\Omega} \delta K + \int_{\Omega} G_{ab} \delta g^{ab} = \int_{\Omega} G_{ab} \delta g^{ab}\,, \tag{4.46}
$$

δηλαδή

$$
\chi_{ab} = \frac{\delta S'_G}{\delta g^{ab}} = G_{ab} = R_{ab} + g_{ab}\frac{1}{2}R \tag{4.47}
$$

και επομένως

$$
\frac{\delta S'_G}{\delta g^{ab}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G_{ab} = 0. \tag{4.48}
$$

4.2.3 Δράση για την εξίσωση Einstein στην ύλη

Είδαμε λοιπόν πώς η εξίσωση Einstein για το κενό απορρέει από μια πολύ απλή Λαγκρανζιανή πυκνότητα. Είδαμε επίσης τις αντίστοιχες Λαγκρανζιανές για τη διάδοση των πεδίων που υπακούουν στις εξισώσεις Klein-Gordon και Maxwell στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski . Η παραπάνω όμως προσπάθεια δε θα είχε κανένα ιδιαίτερο νόημα αν απλώς έδινε αυτά τα ειδικά αποτελέσματα ξεχωριστά. Το μυστικό της επιτυχίας μιας Λαγκρανζιανής ή Χαμιλτονιανής διατύπωσης, και του λογισμού των μεταβολών, είναι η ευκολία και απλότητα με την οποία μπορεί να συνδυάσει κανείς συνεισφορές από τα διάφορα, αρχικά ασύζευκτα, υλικά πεδία.

Οι εξισώσεις Einstein στην ύλη, σε περιοχή δηλαδή του χωρόχρονου όπου $T_{ab} \neq 0$, υπό την ύπαρξη κάποιου υλικού πεδίου, προκύπτουν μέσω του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού με έναν πολύ απλό τρόπο, κατασκευάζοντας μια συνολική Λαγκρανζιανή πυκνότητα με συνεισφορές από όλα τα υπάρχοντα πεδία. Η Λαγκρανζιανή αυτή είναι απλώς το άθροισμα των ξεχωριστών Λαγκρανζιανών, οι οποίες βέβαια οφείλουν να είναι εκπεφρασμένες σε συναλλοίωτη μορφή, προκειμένου να έχουν ισχύ στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι νέες εξισώσεις για το μη κενό χωρόχρονο υπολογίζονται κατά τα παραπάνω, όταν απαιτήσουμε η συνολική δράση να εμφανίζει ακρότατο κατά τη μεταβολή της ώς προς το κάθε πεδίο.

Πρώτα όμως θα πρέπει να βρούμε την έκφραση των γνωστών Λαγκρανζιανών πυκνοτήτων στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Αυτό γίνεται εύκολα γενικεύοντας τις εξισώσεις κατά τη γνωστή φόρμουλα σύμφωνα με την οποία αντικαθιστούμε τη μετρική Minkowski όπου χρειάζεται με μια αυθαίρετη μετρική, $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$, καθώς και τις μερικές παραγώγους με συναλλοίωτες, $\partial_a \rightarrow \nabla_a$. Τέλος για τη μετάβαση σε χωρόχρονο με τυχαία μετρική, πρέπει να επισημανθεί το γεγονός ότι, εφόσον έχουμε να κάνουμε με τανυστικές πυκνότητες, εμφανίζεται επιπλέον ο παράγοντας $\sqrt{-g}$, καθώς στην περίπτωση Minkowski μετρικής το στοιχείο όγκου ήταν τετριμμένο και σταθερό παντού και πάντα, και συνεπώς ο αντίστοιχος παράγοντας έδινε πάντα μονάδα.

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη μπορούμε για παράδειγμα να κατασκευάσουμε τις Λαγκρανζιανές πυκνότητες για το πεδίο K-G και το H/M πεδίο από τις αντίστοιχες που βρήκαμε στον επίπεδο χωρόχρονο. Η εξίσωση 4.6 για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία λοιπόν θα γίνει

$$\mathscr{L}_{EM} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}g^{ac}g^{bd}F_{ab}F_{cd} = -\sqrt{-g}g^{ac}g^{bd}\nabla_{[a}A_{b]}\nabla_{[c}A_{d]}. \tag{4.49}$$

Ομοίως η εξίσωση 4.11 για τα πεδία Klein-Gordon

$$\mathscr{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi + m^2\phi^2) \tag{4.50}$$

και οι δράσεις τους S_{EM}, S_{KG} θα δώσουν αντίστοιχα τις εξισώσεις Maxwell και Klein-Gordon σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Γενικεύοντας αν έχουμε ένα υλικό πεδίο M κατασκευάζουμε τη νέα Λαγκρανζιανή $\mathscr{L}_M$ και μέσω της δράσης S_M καταλήγουμε στις εξισώσεις του πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Η ολική Λαγκρανζιανή που θα μας δώσει τις εξισώσεις Einstein παρουσία ύλης (coupled Einstein-matter field equations) κατασκευάζεται προσθέτοντας τη γεωμετρική Λαγκρανζιανή και τη Λαγκρανζιανή του υλικού πεδίου, παρουσία ενός κατάλληλου σταθερού συντελεστή α_M ,

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_G + \alpha_M\mathscr{L}_M \quad . \tag{4.51}$$

Η ευελιξία που παρουσιάζει ο φορμαλισμός αυτός έγκειται στο γεγονός ότι η κάθε μεταβολή δρα ανεξάρτητα στην κάθε Λαγκρανζιανή και συγκεκριμένα μια μεταβολή $\delta\psi$ στο υλικό πεδίο θα αφήσει τη γεωμετρική Λαγκρανζιανή $\mathscr{L}_G$ αναλλοίωτη (καθώς δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το πεδίο αυτό), και θα επάγει μια αντίστοιχη μεταβολή στην υλική Λαγκρανζιανή $\mathscr{L}_M$. Με λίγα λόγια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι στην εξίσωση Einstein έχουμε κατά μια έννοια διαχωρισμένη την 'πηγή' (ύλη) στο δεξί μέλος και τον 'δέκτη' (γεωμετρία - καμπυλότητα) στο αριστερό.

Έτσι για μια μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφώσεων του πεδίου ψ_λ η συναρτησιακή παράγωγος της ολικής δράσης

$$S[\psi] = \int_\Omega (\mathscr{L}_G[\psi] + \alpha_M\mathscr{L}_M[\psi]) = S_G + S_M \tag{4.52}$$

θα υπολογίζεται ίδια με αυτή του υλικού πεδίου

$$\delta S = \delta S_M = \int_\Omega \delta \mathscr{L}_M = \int_\Omega \chi[\delta\psi] \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta \psi} = \chi = \frac{\delta S_M}{\delta \psi}\,, \tag{4.53}$$

γεγονός που σημαίνει ότι εμφάνιση ακρότατου της δράσης ως προς το πεδίο ψ ισοδυναμεί με το να ικανοποιεί η ψ τις πεδιακές της εξισώσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δε, παρουσιάζει η εφαρμογή του λογισμού μεταβολών για το τανυστικό πεδίο της μετρικής, καθώς και ο υπολογισμός της αντίστοιχης συναρτησιακής παραγώγου της δράσης ως προς αυτό. Ξεκινάμε θεωρώντας τη μονοπαραμετρική οικογένεια πεδίων g^{ab} όπως πριν, οπότε και προκύπτουν οι εξής μεταβολές :

$$\delta \mathscr{L}_G = \left.\frac{d\mathscr{L}_G}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = G_{ab}\delta g^{ab}\,, \tag{4.54}$$

για τη γεωμετρική και

$$\delta \mathscr{L}_M = \left.\frac{d\mathscr{L}_M}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \sqrt{-g}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}\,\delta g^{ab} \tag{4.55}$$

για την υλική Λαγκρανζιανή. Βρίσκουμε τη μεταβολή της ολικής δράσης

$$\delta S[g^{ab}] = \int_\Omega [\delta\mathscr{L}_G + \alpha_M \delta\mathscr{L}_M] = \int_\Omega [G_{ab} + \alpha_M\sqrt{-g}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}]\delta g^{ab}\,, \tag{4.56}$$

και τη συναρτησιακή της παράγωγο

$$\chi_{ab} = G_{ab} + \alpha_M\sqrt{-g}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} \tag{4.57}$$

και βλέπουμε ότι τελικά η αρχή ακρότατης δράσης δίνει :

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ab}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G_{ab} = R_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}R = -\alpha_M\sqrt{-g}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}\,. \tag{4.58}$$

Εύκολα βλέπουμε πλέον πως αν *ορίσουμε* τον τανυστή τάσησ-ενέργειας του υλικού πεδίου (matter field stress-energy tensor) T_{ab} ως

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \tag{4.59}$$

έχουμε αμέσως αναπαράγει την εξίσωση Einstein 3.30.

$$G_{ab} = 8\pi T^{ab}$$

Ιδιότητες του τανυστή T_{ab}

Με μια πρώτη ματιά η αντιστοίχηση της συναρτησιακής παραγώγου της δράσης του υλικού πεδίου ως προς τη μετρική με τον τανυστή ενέργειασ-ορμής του πεδίου δε μοιάζει αρκετά πειστική. Θα φανεί όμως στη συνέχεια ότι ο ορισμός αυτός συνεπάγεται για τον T_{ab}όλες τις ιδιότητες που θα μπορούσε κανείς να ζητήσει. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι η δράση S_M είναι βαθμωτό μέγεθος, αμέσως αποδεικνύεται η *συμμετρία* $T_{ab} = T_{ba}$, ώς συνέπεια της συμμετρικότητας της μετρικής g_{ab} και των μεταβολών της.

Η γενική συναλλοιώτητα στην περίπτωση της δράσης και των μεταβολών της μας λέει στην ουσία ότι η βαθμωτή ποσότητα δS_M πρέπει να παραμένει α-ναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς (diffeomorphism invariance). Όπως έχουμε πει, διαφορομορφισμός είναι μια C^∞ απεικόνιση $\phi : M \to M$, η οποί-α είναι ένα προς ένα και επί, και η αντίστροφή της είναι επίσης C^∞, μπρούμε δηλαδή να το φανταστούμε σα μια ομαλή παραμόρφωση της πολλαπλότητας M στον εαυτό της. Κάθε μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορομορφισμών (αντί-στοιχη απεικόνιση αλλά τώρα από $\mathbb{R} \times M \to M$ έτσι ώστε $\forall\, t \in \mathbb{R}$, η κάθε ϕ_t να είναι διαφορομορφισμός) μπορεί να συσχετιστεί με ένα διανυσματικό πεδίο v. Αντιστρόφως μπορούμε να πούμε ότι ένα αυθαίρετο διανυσματικό πεδίο v^a γεννά, μέσω της οικογένειας εφαπτόμενων σε αυτό καμπύλων, μια οικογένεια διαφορομορφισμών πάνω στην M, ή καλύτερα, το ίδιο το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο p αποτελεί τον απειροστό γεννήτορα που 'τραβάει' κατά Lie τα πεδία κατά μήκος των καμπύλων αυτών.

Συμμετρία κάποιου (τανυστικού) μεγέθους $\mathbf{T}$ κάτω από διαφορομορφισμό σημαίνει αναλλοιώτητα του μεγέθους αυτού κάτω από τη δράση της ϕ^* (βλ. ενότητα 2.2.3). Αυτό εκφράζεται μέσω της σχέσης $\phi^*\mathbf{T} = \mathbf{T}$ ή αλλιώς $\pounds_v \mathbf{T} = 0$. Αν αυτό ισχύει παντού και για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε και μόνον τότε ο ϕ_t είναι μετασχηματισμός συμμετρίας για τον $\mathbf{T}$. Έτσι συμμετρία της υλικής δράσης κάτω από διαφορομορφισμούς σημαίνει, για την οικογένεια ϕ_t που γεννάται από ένα διανυσματικό πεδίο ξ^a, ότι $S_M[g^{ab}, \psi] = S_M[\phi_t^* g^{ab}, \phi_t^* \psi]$, ή διαφορετικά $\frac{dS_M}{dt} = 0$. Έχουμε δεί κατά τη μελέτη της παραγώγισης Lie ότι η μεταβολή της μετρικής σε αυτή την περίπτωση μας δίνει

$$\delta g^{ab} = \left.\frac{dg^{ab}}{dt}\right|_{t=0} = \pounds_\xi g^{ab} = 2\nabla^{(a}\xi^{b)} = \nabla^a\xi^b + \nabla^b\xi^a \tag{4.60}$$

που στην πραγματικότητα είναι και η ελευθερία βαθμίδας του πεδίου της μετρικής. Έχουμε λοιπόν για τη συνολική μεταβολή της δράσης :

$$\frac{dS_M}{dt} = \int_\Omega \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}\delta g^{ab} + \int_\Omega \frac{\delta S_M}{\delta\psi}\delta\psi = 0 \tag{4.61}$$

και αν η ψ ικανοποιεί την εξίσωση του υλικού πεδίου οπότε και $\frac{\delta S_M}{\delta\psi} = 0$ για την πραγματική διαμόρφωση της ψ , τότε φεύγει ο δεύτερος όρος και, μέσω της εξ. 4.59, μένει τελικά

$$\int_\Omega \sqrt{-g}T_{ab}\nabla^{(a}\xi^{b)}\mathbf{e} = 0 \tag{4.62}$$

και λόγω της συμμετρικότητας του T_{ab} γίνεται

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega T_{ab}\nabla^a\xi^b\epsilon = 0 \;\Rightarrow\\
&\int_\Omega \nabla^a(T_{ab}\xi^b)\epsilon - \int_\Omega(\nabla^a T_{ab})\xi^b\epsilon = 0 \;\Rightarrow\\
&\int_{\partial\Omega} T_{ab}\xi^b n^{a\;(3)}\epsilon - \int_\Omega(\nabla^a T_{ab})\xi^b\epsilon = 0 \;\Rightarrow\\
&\int_\Omega(\nabla^a T_{ab})\xi^b\epsilon = 0\,.
\end{aligned}$$
[1]

Εφόσον η παραπάνω εξίσωση ισχύει για αυθαίρετο διάνυσμα ξ^a, συνεπάγεται πως ταυτοτικά

$$\nabla^a T_{ab} = 0\,, \tag{4.63}$$

κάτι που προσδίδει στον τανυστή ενέργειασ-ορμής την επιθυμητή ιδιότητα της *διατήρησης*. Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει την υποψία ότι ο ορισμός που διατυπώθηκε προηγουμένως είναι συμβατός με την κλασική έννοια του τανυστή ενέργειας ορμής για το υλικό πεδίο ψ.

Αν μάλιστα στη θέση της υλικής δράσης βάλουμε την S_G, η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται στον τανυστή Einstein G_{ab} και μας δίνει την ταυτότητα Bianchi 2.79 . *Η διατήρηση του τανυστή Einstein δηλαδή, στη Λαγκρανζιανή διατύπωση, είναι άμεσο αποτέλεσμα της συμμετρίας της γεωμετρικής δράσης κάτω από διαφορομορφισμούς.* Αρκετά κομψό.

4.3 Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός της ΓΘΣ

4.3.1 Εισαγωγικά

Η συνταγή για τη μετάβαση από μια Λαγκρανζιανή διατύπωση στην αντίστοιχη Χαμιλτονιανή, είναι σχετικά απλή υπόθεση και καθιερωμένη διαδικασία. Η ουσία βρίσκεται στην επαναδιατύπωση της θεωρίας σε μετασχηματισμένες κατα Legendre γενικευμένες συντεταγμένες. Ο μετασχηματισμός Legendre ορίζεται ως εξής : Ορίζουμε ως μετασχηματισμό Legendre μιας συνάρτησης $f(x)$ μια νέα συνάρτηση μιας νέας μεταβλητής $f^*(p)$ μέσω της σχέσης

$$f^*(p) = max_x(px - f(x)). \tag{4.64}$$

Είναι προφανές ότι για να ικανοποιείται το ακρότατο ως προς x πρέπει η παράγωγος της ποσότητας στην παρένθεση να δίνει μηδέν, δηλαδή η νέα μεταβλητή θα είναι η $p = \frac{df}{dx}$, και είναι αυτό που ονομάζουμε γενικευμένη ορμή.

Στην κλασική μηχανική, βρίσκουμε πρώτα τη Λαγκρανζιανή ενός συστήματος ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων και των πρώτων παραγώγων τους, $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ (και ίσως του χρόνου t). Στη συνέχεια μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού για τις $\dot{q}_i$ δημιουργούμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.65}$$

και κατασκευάζουμε τη νέα συνάρτηση των (q_i, p_i) , την οποία ονομάζουμε *Χαμιλτονιανή του συστήματος* και συμβολίζουμε με H :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i q_i - L(q_i, \dot{q}_i) \tag{4.66}$$

Ο Χαμιλτονιανός φορμαλισμός στην κλασική μηχανική, αλλάζοντας τις δυναμικές μεταβλητές από $\dot{q}_i$ σε p_i, μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις 2ου βαθμού του Λαγκρανζιανού προβλήματος στο n-διάστατο χώρο σε διαφορικές εξισώσεις 1ου βαθμού σε 2n-διάστατο φασικό χώρο οι οποίες είναι αρκετά ευκολότερες προς επίλυση. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί η αντιστοιχία της Χαμιλτονιανής H με την ολική ενέργεια του συστήματος ($T + V$ στην κλασική περίπτωση).

Πηγαίνοντας από το διακριτό στο συνεχές (δηλαδή από τις διακριτές μεταβλητές $q_i(t) \to q(x,t)$), με χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό της συνεχούς χορδής, και με αντίστοιχα βήματα, επεκτείνουμε το φορμαλισμό στις θεωρίες πεδίου, όπου τώρα τα δυναμικά μεγέθη είναι πεδία (ψ) που εκτείνονται σε ολόκληρο το χώρο. Μετα το μετασχηματισμό Legendre οι δυναμικές μεταβλητές θα είναι το πεδίο ψ και η αντίστοιχη *συζηγής ορμή* του, $\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}}$. Εδώ κρατάμε το συμβολισμό $\dot{q}$ υπονοώντας παραγώγιση ως προς τη χρονική συντεταγμένη t (πιο σωστά θα συμβολίζαμε με $\pounds_t q$). Ο χώρος όλων των δυνατών μεταβολών $\delta\psi$ του πεδίου ψ είναι ένας απειροδιάστατος συναρτησιακός χώρος και ο χώρος διαμόρφωσης των συζυγών ορμών είναι ο δυικός του. Η Χαμιλτονιανή είναι πλέον το ολοκλήρωμα μιας *Χαμιλτονιανής πυκνότητας* $\mathscr{H}$ σε όλο το χώρο, την οποία ορίζουμε αντίστοιχα ως

$$\mathscr{H}(\psi, \pi) = \pi\dot{\psi} - \mathscr{L}\,, \tag{4.67}$$

όπου εννοείται ότι η ποσότητα $\dot{\psi}$ είναι εκπεφρασμένη σε λυμένη μορφή, ως συνάρτηση $\dot{\psi}(\psi, \pi)$. Ξεχνώντας για λίγο τον τρόπο με τον οποίο φτιάξαμε τις συζυγείς ορμές των πεδίων, ας τις μεταχειριστούμε ως ένα νέο πεδίο που ανήκει στο δυικό χώρο του ψ, αλλά είναι ανεξάρτητο από αυτό, και ας δούμε τι συνεπάγεται η απαίτηση η δράση να εμφανίζει ακρότατο.

Η συνθήκη ακρότατης δράσης μεταφράζεται για τη Χαμιλτονιανή με παρόμοιο τρόπο. Μετασχηματίζοντας από τη Λαγκρανζιανή στη Χαμιλτονιανή διατύπωση απλοποιούμε αρκετά τη μορφή των εξισώσεων και τις φέρνουμε σε μια αρκετά πιο επιλύσιμη μορφή. Έστω $\mathscr{L}$ Λαγκρανζιανή ενός πεδίου ψ το οποίο ικανοποιεί τις αντίστοιχες πεδιακές εξισώσεις που προκύπτουν από την αρχή ακρότατης δράσης. Θα δείξουμε παρακάτω ότι οι ισοδύναμες εξισώσεις που προκύπτουν από την αρχή ακρότατης δράσης της Λαγκρανζιανής διατύπωσης θα είναι τώρα οι εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{\psi} \equiv \pounds_t \psi = \frac{\delta H}{\delta \pi} \tag{4.68}$$

και

$$\dot{\pi} \equiv \pounds_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta \psi}\,. \tag{4.69}$$

όπου η τελεία συμβολίζει παραγώγιση κατά Lie πάνω στην κατεύθυνση κατά την οποία έχουμε ορίσει το χρόνο να 'ρέει'. Ας δούμε τι συνεπάγεται η εξίσωση 4.5

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \psi}\right|_{\psi} = 0 \tag{4.70}$$

για τυχαίο πεδίο ψ την τιμή του οποίου θα ορίσουμε ως τη μεταβλητή q του συστήματος.

Ορίζουμε ένα νέο ολοκλήρωμα αντίστοιχο της δράσης για τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{\Omega} \mathscr{H} \tag{4.71}$$

μόνο που τώρα έχουμε τη δυνατότητα να διακρίνουμε μεταξύ χωρικού και χρονικού μέρους της ολοκλήρωσης. Έτσι λοιπόν μπορούμε να γράψουμε :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \mathscr{H} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (\pi \dot{q} - \mathscr{L}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \pi \dot{q} \; - \; S \tag{4.72}$$

Ας θεωρήσουμε ξανά μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφώσεων του πεδίου ψ με το οποίο στην περίπτωση αυτή έχουμε ταυτίσει τη μεταβλητή q, έτσι ώστε $\delta\psi = 0$ στα άκρα t_1, t_2.

$$\delta J = \left.\frac{dJ}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \mathscr{H}(\pi, q), \tag{4.73}$$

$$\text{με} \qquad \delta \mathscr{H} = \frac{\delta H}{\delta q}\delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi}\delta \pi \tag{4.74}$$

Έτσι έχουμε σε συνδυασμό με την 4.72:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\delta H}{\delta q}\delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi}\delta \pi\right] \;&=\; \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \delta(\pi \dot{q}) \;-\; \delta S \quad \Rightarrow \\ \int_{\Omega} \left[\frac{\delta H}{\delta q}\delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi}\delta \pi\right] \;&=\; \int_{\Omega} (\dot{q}\, \delta\pi + \pi\, \delta\dot{q}) - \delta S. \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι συνοριακοί όροι που περιέχουν την ποσότητα q μηδενίζονται:

$$\int_{t_1}^{t_2} \pi\, \delta\dot{q} = \int_{t_1}^{t_2} \pi\, (\dot{\delta q}) = \left(\pi\, \delta q\right)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\pi}\, \delta q = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\pi}\, \delta q\,. \tag{4.75}$$

και άρα θα είναι

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_\Omega \left[\frac{\delta H}{\delta q}\,\delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi}\,\delta\pi - \dot q\,\delta\pi + \dot\pi\,\delta q\right] \\ &= \int_\Omega \left[(\frac{\delta H}{\delta q} + \dot\pi)\,\delta q + (\frac{\delta H}{\delta \pi} - \dot q)\,\delta\pi\right]\end{aligned}$$

Αν τώρα επιβάλουμε, σύμφωνα με τα παραπάνω να είναι $\frac{\delta S}{\delta\psi} = 0$, τότε οι ισοδύναμες εξισώσεις προκύπτουν για $\psi \to q$ και $\psi \to \pi$ αντίστοιχα ότι είναι:

$$\chi_q = \frac{\delta S}{\delta q} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{\delta H}{\delta q} + \dot\pi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot\pi = -\frac{\delta H}{\delta q} \tag{4.76}$$

και

$$\chi_\pi = \frac{\delta S}{\delta \pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{\delta H}{\delta pi} - \dot q) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \dot q\,. \tag{4.77}$$

Έτσι βλέπουμε ότι η Χαμιλτονιανή όπως ορίστηκε από την εξίσωση 4.67 είναι μια Χαμιλτονιανή του συστήματος με τις επιθυμητές ιδιότητες (για τις εξισώσεις πεδίου) αφού η ακρότατη δράση καταλήγει στις δύο εξισώσεις Hamilton .

Απαραίτητη προϋπόθεση για τη μετάβαση σε μια Χαμιλτονιανή διατύπωση της ΓΘΣ, όπως και σε κάθε άλλη περίπτωση, είναι ο *διαχωρισμός μεταξύ χώρου και χρόνου.* Χωρίς την ύπαρξη κατεύθυνσης κατά την οποία ο χρόνος ρέει δε θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για χρονική εξέλιξη του συστήματος

Στην ΕΘΣ η επιλογή μιας χρονικής συνάρτησης είναι κάτι το τετριμμένο, καθώς είναι δυνατή η επιλογή ενός παγκόσμιου αδρανειακού συστήματος αναφοράς και οι υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου Σ_t είναι επίπεδες χωροειδείς *φέτες*. Στη γενική όμως περίπτωση όπου ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος, μπορούμε να επιλέξουμε μια τέτοια παγκόσμια χρονική συνάρτηση t και το αντίστοιχο χρονικό διανυσματικό πεδίο t^a μόνο στην περίπτωση *καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου*, οπότε και η κάθε υπερεπιφάνεια Σ_t θα είναι μια επιφάνεια Cauchy και μπορεί να ταυτιστεί, μέσω των ολοκληρωτικών του t^a καμπύλων, με την 'αρχική' Σ_0.

Στη ΓΘΣ λοιπόν αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι, ξεκινώντας από μια αρχική τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια Cauchy Σ_0 και έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία και τη διαμόρφωση των υλικών πεδίων πάνω σε αυτή, να μπορέσουμε να προβλέψουμε την εξέλιξη όλων αυτών των μεγεθών σε μια τυχαία χωρική 'φέτα' Σ_t .

4.4 Χαμιλτονιανή του Η/Μ πεδίου

Θα κατασκευάσουμε τη Χαμιλτονιανή διατύπωση της θεωρίας του Ηλεκτρομαγνητισμού στον επίπεδο χώρο Minkowski. Η κατασκευή της Η/Μ Χαμιλτονιανής δεν είναι μια τετριμμένη διαδικασία καθώς όπως θα δούμε δεν είναι εύκολο να ξεχωρίσει κανείς τις πραγματικές δυναμικές μεταβλητές του πεδίου και για το λόγο αυτό προκύπτουν σύνδεσμοι. Ξεκινάμε από τη γνωστή Λαγκρανζιανή πυκνότητα που βρήκαμε στην εξίσωση 4.6.

Προσπαθούμε κατ΄ αρχάς να εκφράσουμε την Ηλεκτρομαγνητική Λαγκρανζιανή με όρους διανυσματικού λογισμού. Το τετραδιάνυσμα του πεδίου A^a αναλύεται σε $A^a = (A^0, \vec{A})$, όπου $V = -A_0 = -A_a n^a$ το ηλεκτρικό δυναμικό και $\vec{A} =^{(3)} A_a = h_a{}^b A_b$ σε κατάλληλα προσαρμοσμένη βάση. Έτσι η εξίσωση 4.6 γίνεται

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{EM} &= -\partial_a A_b \partial^{[a} A^{b]} = -\frac{\partial_a A_b(\partial^a A^b - \partial^b A^a)}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\dot{\vec{A}}^2 - \dot{\vec{A}}\cdot\vec{\nabla}A^0 + \vec{\nabla}A^0\cdot\vec{\nabla}A^0 - \vec{\nabla}A^0\cdot\dot{\vec{A}} - (\vec{\nabla}\times\vec{A})(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]
\end{aligned}$$

Για να φανεί η εξάρτηση από τις χρονικές και χωρικές συνιστώσες του Η/Μ πεδίου ξεχωριστά, διαχωρίσαμε το A^a στη χρονική συνιστώσα A^0 και το χωρικό τρισδιάστατο διάνυσμα $\vec{A} = A^i\,, i = 1, 2, 3$. Αναλόγως σπάμε τη ∂^a σε ∂^0 και $\vec{\nabla}$, ενώ με βάση τη μετρική Minkowski που έχουμε διαλέξει εύκολα υπολογίζονται οι συνιστώσες των 1-μορφών από τις αντίστοιχες διανυσματικές και όλα τα μεγέθη μπορούν να μεταφραστούν διανυσματικά. Έτσι θα πάρουμε για παράδειγμα: $A_0 = -A^0 = -V \quad , \quad A_i = A^i = \vec{A}$, $i = 1, 2, 3$. Επίσης $\partial_0 = -\partial^0 = -\dot{(\,)}$ και $\partial_i = \partial^i = \vec{\nabla}$.

Γράψαμε πρώτα τους όρους με $a = 0$, $b = 1, 2, 3$, μετά $a = 1, 2, 3$, $b = 0$ και τέλος για $a, b = \{1, 2, 3\}$ (από τους οποίους προκύπτει το εξωτερικό γινόμενο). Λόγω αντισυμμετρικότητας δεν υπάρχουν όροι με $a = b$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι για τον τελευτάιο όρο είναι $(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B}$, αυτό που καλούμε δηλαδή μαγνητικό πεδίο. Τελικά

$$\mathscr{L}_{EM} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V)(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}V) - \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tag{4.78}$$

Θα θεωρήσουμε σε αυτή την έκφραση της Λαγκρανζιανής ως μεταβλητές του Η/Μ πεδίου το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ και το δυναμικό V. Θα βρούμε τώρα τη συζυγή ορμή του πεδίου ως προς το $\vec{A}$, την οποία θα συμβολίσουμε με $\vec{\pi}$, και την αντίστοιχη ως προς το V που θα συμβολίσουμε με π_V. Έχοντας ήδη βρει την έκφραση $\mathscr{L}_{EM} = \mathscr{L}_{EM}(\vec{A}, V, \dot{\vec{A}}, \dot{V}, \ldots)$, εξίσωση 4.78 μπορούμε να υπολογίσουμε την $\vec{\pi}$.

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathscr{L}_{EM}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \frac{1}{2}2(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} \cdot V) = (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} \cdot V) = -\vec{E} \tag{4.79}$$

Προχωρώντας στην εύρεση του

$$\pi_V = \frac{\partial \mathscr{L}_{EM}}{\partial \dot{V}} \tag{4.80}$$

παρατηρούμε πως λόγω της αντισυμμετρικότητας του τανυστή του Η/Μ πεδίου F_{ab} δε μπορούν να εμφανιστούν χρονικές παράγωγοι της χρονικής συνιστώσας A^0, επομένως

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{EM}}{\partial \dot{V}} = 0 \quad ή \quad \pi_V = 0 \tag{4.81}$$

εκ ταυτότητας. Έτσι στη Χαμιλτονιανή διατύπωση το δυναμικό V είναι μια μη δυναμική μεταβλητή του συστήματος, που σύμφωνα με την κλασική δυναμική προέρχεται από τη γνωστή ελευθερία βαθμίδας της $\mathscr{L}_{EM}$ ως προς το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_a. Το γεγονός αυτό δε μας επιτρέπει να προχωρήσουμε στη διατύπωση της Χαμιλτονιανής όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο μέσω της χρήσης του $\dot{q}$. Για την άρση της απροσδιοριστίας αυτής μπορούμε να αγνοήσουμε τη συνεισφορά της ποσότητας V και να ταυτίσουμε τη δυναμική μεταβλητή q με το διάνυσμα $\vec{A}$.

Συνεπώς η συζυγής ορμή του πεδίου θα είναι απλώς η $\vec{\pi}$ που υπολογίσαμε και τώρα μπορούμε να βρούμε την έκφραση της Χαμιλτονιανής σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό. Η $H_{EM} = \int_{\Sigma_t} \mathscr{H}_{EM}$ που θα προκύψει θα είναι ένα συναρτησιακό των $\vec{\pi}$ και $\vec{A}$, ενώ το V θα είναι στην ουσία ένας πολλαπλασιαστής Lagrange .

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}_{EM}(\vec{\pi}, \vec{A}) &= \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathscr{L}_{EM} = \vec{\pi} \cdot (\vec{\pi} - \vec{\nabla} V) - \mathscr{L}_{EM} \\
&= \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} V - \frac{1}{2}\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&= \frac{1}{2}\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla}(\vec{\pi}\, V) + V \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})
\end{aligned}
$$

Ενώ ο προτελευταίος όρος θα φύγει στην ολοκλήρωση της Χαμιλτονιανής πυκνότητας αφήνοντας έναν συνοριακό όρο που θα μηδενιστεί όταν εκτείνουμε τα όρια στο άπειρο (όπως ακριβώς κάνουμε στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό καθώς εδώ έχουμε $\vec{\pi} = -\vec{E}$).

Η επιπλέον πληροφορία σχετικά με τις μεταβολές ως προς V συνοψίζεται στην εξίσωση-σύνδεσμο

$$
\frac{\delta H_{EM}}{\delta V} = 0 \quad \text{, η οποία δίνει} \tag{4.82}
$$

$$
\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{4.83}
$$

και μαζί με τις εξισώσεις Hamilton

$$
\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{\pi}} \tag{4.84}
$$

$$
\dot{\vec{\pi}} = -\frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{A}} \tag{4.85}
$$

συμπληρώνει τις εξισώσεις Maxwell . Για να το δούμε αυτό ξεκινάμε με την 1η εξίσωση Hamilton :

$$
\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{\pi}} \text{ , με } H_{EM} = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2}\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{B} \, . \tag{4.86}
$$

Θεωρούμε λοιπόν λεία μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφώσεων του πεδίου των συζυγών ορμών, $\vec{\pi}_\lambda$, κρατώντας τα υπόλοιπα μεγέθη σταθερά. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta H_{EM} &= \left.\frac{dH_{EM}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma_t} \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2}\vec{\pi}\cdot\vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{B} - \vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}V\right]\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \int_{\Sigma_t}\left[\vec{\pi}\frac{d\vec{\pi}}{d\lambda} + \vec{B}\frac{d\vec{B}}{d\lambda} - \vec{\nabla}V\cdot\frac{d\vec{\pi}}{d\lambda} - \vec{\pi}\cdot\frac{d\vec{\nabla}V}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} .
\end{aligned}$$

Ο 2ος και 4ος όρος φεύγουν εφόσον οι μεταβολές γίνονται μόνο για το π και τελικά προκύπτει:

$$\delta H_{EM} = \int_{\Sigma_t} (\vec{\pi} - \vec{\nabla}V)\,\delta\vec{\pi} \Rightarrow \frac{\delta H_{EM}}{\delta\vec{\pi}} = \vec{\pi} - \vec{\nabla}V \tag{4.87}$$

Άρα τελικά προκύπτει

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H_{EM}}{\delta\vec{\pi}} = -\vec{E} - \vec{\nabla}V\,. \tag{4.88}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την έκφραση για τη 2η εξίσωση Hamilton

$$\dot{\vec{\pi}} = -\frac{\delta H_{EM}}{\delta\vec{A}}\,. \tag{4.89}$$

Ας θεωρήσουμε μονοπαραμετρική οικογένεια διαμορφωσεων του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, $\vec{A}_\lambda$. Θα έχουμε τότε:

$$\begin{aligned}
\delta H_{EM} &= \left.\frac{dH_{EM}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left[(\vec{\nabla}\times\vec{A})(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right] \\
&= \int_{\Sigma_t} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\frac{d}{d\lambda}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \\
&= \int_{\Sigma_t} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})
\end{aligned}$$

και από γνωστές ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού, χρησιμοποιώντας επίσης κατά παράγοντες ολοκλήρωση καταλήγουμε στη:

$$\delta H_{EM} = \int_{\Sigma_t} \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\delta\vec{A}, \tag{4.90}$$

από όπου φυσικά προκύπτει ότι

$$\frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{A}} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tag{4.91}$$

Επομένως η 2η εξισωση Hamilton γίνεται:

$$\dot{\vec{\pi}} = -\dot{\vec{E}} = -\frac{\delta H_{EM}}{\delta \vec{A}} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \tag{4.92}$$

Η παραπάνω 'απόρριψη' του V ως δυναμική μεταβλητή και η κατά συνέπεια επιβολή του συνδέσμου $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ως επιπλέον προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιείται από το Η/Μ πεδίο πέραν των δυναμικών εξισώσεων πεδίου, μας δείχνει ότι δεν έχουμε ακόμη ξεχωρίσει πλήρως τους καθαρούς βαθμούς ελευθερίας του συστήματος. Λέμε ότι πρόκειται για έναν Χαμιλτονιανό φορμαλισμό με συνδέσμους (constrained Hamiltonian formulation) και τέτοιος θα προκύψει επίσης κατά μελέτη των πεδιακών εξισώσεων Einstein στη Χαμιλτονιανή διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Τέτοιου είδους μη δυναμικές μεταβλητές και οι αντίστοιχοι σύνδεσμοι (παρόμοιοι με τον 4.82) θα εμφανίζονται σε κάθε θεωρία με ελευθερία βαθμίδας.

4.5 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός του πεδίου K-G

Η περίπτωση ενός Klein-Gordon πεδίου σε χώρο Minkowski είναι εξαιρετικά πιο απλή σε σχέση με το Η/Μ πεδίο, όχι μόνο επειδή έχουμε να κάνουμε με βαθμωτό και όχι διανυσματικό μέγεθος, αλλά και λόγω της ξεκάθαρης μορφής των εξισώσεων και των δυναμικών μεταβλητών, $\phi, \dot{\phi}$. Εδώ δεν εμφανίζεται αντίστοιχη απροσδιοριστία του πεδίου, όπως συνέβη στον ηλεκτρομαγνητισμό, οπότε και δε θα υπάρξουν σύνδεσμοι στη Χαμιλτονιανή διατύπωση. Έτσι θα έχουμε:

$$\mathscr{L}_{KG} = -\frac{1}{2}(\partial_a \phi \partial^a \phi + m^2 \phi^2)\,, \tag{4.93}$$

ή αλλιώς διανυσματικά,

$$\mathscr{L}_{KG} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi - m^2\phi^2] \tag{4.94}$$

Από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα βρίσκουμε τη συζυγή ορμή π του πεδίου K-G και στη συνέχεια ορίζουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα K-G κατά τα γνωστά.

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}_{KG}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \tag{4.95}$$

$$\mathscr{H}_{KG} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L}_{KG} = \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4.96}$$

Η ολική Χαμιλτονιανή που εκφράζει την ολική ενέργεια του πεδίου K-G σε όλη την έκταση της χωρικής φέτας Σ_t θα είναι ίση με $H_{KG} = \int_{\Sigma_t} \mathscr{H}_{KG}$ και οι ισοδύναμες προς τις εξισώσεις πεδίου θα είναι οι:

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H_{KG}}{\delta \pi} \tag{4.97}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H_{KG}}{\delta \phi}\,. \tag{4.98}$$

Η 1η εξίσωση δίνει προφανώς $\dot{\phi} = \pi$ δηλαδή τίποτα καινούριο, ενώ η 2η θα μας δώσει στην ουσία την εξίσωση K-G . Θεωρούε μεταβολές ως προς τη μεταβλητή ϕ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta H_{KG} &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_t} \frac{d}{d\lambda}(\pi^2 + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi^2) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_t} (-2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\delta\phi + 2m^2\phi\delta\phi) \\
&= \int_{\Sigma_t} m^2\phi\delta\phi \;-\; \int_{\partial\Sigma_t} (\vec{\nabla}\phi\,\delta\phi) \;+\; \int_{\Sigma_t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi)\,\delta\phi \Rightarrow \\
\delta H_{KG} &= \int_{\Sigma_t} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi\right]\,\delta\phi \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta H_{KG}}{\delta \phi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi + m^2\phi \tag{4.99}$$

Τελικά η εξίσωση Hamilton μας δίνει:

$$-\frac{\delta H_{KG}}{\delta\phi} = \dot{\pi} \Rightarrow -\ddot{\phi} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi - m^2\phi = 0 \tag{4.100}$$

ή αλλιώς

$$\partial_a\partial^a\phi - m^2\phi = 0. \tag{4.101}$$

4.6 Χαμιλτονιανή διατύπωση εξισώσεων Einstein

Προχωρούμε στην αναζήτηση μιας Χαμιλτονιανής διατύπωσης για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και τις εξισώσεις Einstein . Εδώ έχουμε τανυστικές εξισώσεις με το τανυστικό πεδίο g_{ab} της μετρικής να παίζει το ρόλο της δυναμικής μεταβλητής q. Στην αρχή κάθε προσπάθειας μετάβασης από τη Λαγκρανζιανή στη Χαμιλτονιανή διατύπωση, αυτό που κάνουμε είναι να ξεχωρίζουμε μια 'κατεύθυνση ροής του χρόνου', ένα χρονοειδές δηλαδή διανυσματικό πεδίο στην M το οποίο γεννάται από μια παγκόσμια χρονική συνάρτηση t ικανοποιώντας τη σχέση $t^a\nabla_a t = 1$. Ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο υπάρχει πάντα όπως είδαμε στο θεώρημα 3.2.3 όταν ο χωρόχρονος είναι καθολικά υπερβολικός.

Εφόσον όμως εδώ η δυναμική μεταβλητή ως προς την οποία πρέπει τελικά να επιλύσουμε τις εξισώσεις είναι η ίδια η μετρική βάσει της οποίας διαλέγουμε και αναλύουμε στην υπερεπιφάνεια Σ_t το χρονικό διανυσματικό πεδίο, φαίνεται πως καλούμαστε εκ των πρωτέρων να χρησιμοποιήσουμε κάτι που ακόμα δε γνωρίζουμε. Κάτι τέτοιο όμως δε μας εμποδίζει να προχωρήσουμε το συλλογισμό μας υποθέτοντας ότι έχουμε στα χέρια μας έναν καθολικά υπερβολικό χωρόχρονο (M, g_{ab}) με μια συγκεκριμένη μετρική η οποία παίρνει συγκεκριμένες τιμές πάνω σε μία επιφάνεια Cauchy Σ_0 και η οποία αναλύει το χρονικό διάνυσμα t^a σε κάθετη και εφαπτόμενη σε αυτή συνιστώσα. Εκ του αποτελέσματος θα κρίνουμε τελικά τα συμπεράσματα που θα προκύψουν για τη δυναμική της μετρικής g_{ab} από τη Χαμιλτονιανή διατύπωση των εξισώσεων.

Ξεκινάμε λοιπόν με την παγκόσμια χρονική συνάρτηση t και μια επιφάνεια Cauchy Σ_0 σταθερού χρόνου $t = t_0$, στην οποία το ορθομοναδιαίο διανυσματικό πεδίο ονομάζουμε n^a. Αναλύοντας το διάνυσμα t^a σε κάθε σημείο της Σ_t σε κάθετο και εφαπτόμενο σε αυτή, ορίζουμε, όπως και στις εξισώσεις 3.33,3.34 τη συνάρτηση N (lapse function), που δίνει το μέτρο της κάθετης συνιστώσας και συνεπώς του σχετικού ρυθμού του ιδιόχρονου, και το διάνυσμα ολίσθησης (shift vector) N^a, το οποίο 'δείχνει' πώς 'ολισθαίνει' μια επιφάνεια σταθερού t σε σχέση με την αμέσως προηγούμενή της:

$$N = -g_{ab}t^a n^b = (n^a \nabla_a t)^{-1}\,, \tag{4.102}$$

$$N_a = h^a{}_b t^b\,, \tag{4.103}$$

όπου, όπως και στην ενότητα 3.3.3, $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ είναι η επαγόμενη μετρική πάνω στην τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια Σ_0. Βολεύει γενικά να θεωρήσουμε αντί της μετρικής g_{ab}, τη χωρική μετρική h_{ab} μαζί με τη συνάρτηση N και το δυικό του διανύσματος ολίσθησης N_a ως τις μεταβλητές του πεδίου μας, όπου φυσικά $N^a = h_{ab}N^b$. Έτσι γίνεται πιο εμφανής ο διαχωρισμός που απαιτείται από το Χαμιλτονιανό φορμαλισμό μεταξύ χωρικής και χρονικής εξέλιξης των πεδίων.

Πρέπει όμως πρώτα να μεταφράσουμε όλα όσα έχουμε πει για τη Λαγκρανζιανή διατύπωση σε όρους που περιέχουν τις νέες μας μεταβλητές. Θέλουμε δηλαδή αρχικά να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή και δράση Hilbert, δηλαδή το βαθμωτό Ricci, R καθώς και το στοιχείο όγκου μέσω των ποσοτήτων h_{ab}, N_a, N. Προς το παρόν θα προτιμήσουμε να ασχοληθούμε με την απλή δράση Hilbert παρά με την τροποποιημένη της εξ.4.45 αγνοώντας δηλαδή τη συνεισφορά επιφανειακών όρων.

$$\mathscr{L}_G = R\sqrt{-g}$$

Καταρχάς, σύμφωνα με τον ορισμό της χωρικής τρισδιάστατης μετρικής h_{ab}, είναι σαφές ότι η γνώση των h_{ab}, N_a και N ισοδυναμεί με τη γνώση της χωροχρονικής μετρικής g_{ab}. Αυτό φαίνεται καθαρά αν αναλύσουμε το t^a στις συνιστώσες και αντικαταστήσουμε το n^a στην εξ.3.31 :

$$t^a = N^a + Nn^a \Rightarrow n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a). \tag{4.104}$$

Από την 3.31 έχουμε:

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b). \tag{4.105}$$

Ξεκινάμε λοιπόν με μεταβλητές πεδίου τις h_{ab}, N_a, N. Θα δούμε όμως στη συνέχεια πως οι N_a και N δε θα μπορέσουν να χαρακτηριστούν ως δυναμικές μεταβλητές (σε αντιστοιχία με το V του Ηλεκτρομαγνητισμού), καθώς οι χρονικές τους παράγωγοι δεν εμφανίζονται στην έκφραση της Χαμιλτονιανής. Έτσι οι συζυγείς ορμές ως προς τα μεγέθη αυτά θα προκύπτουν εκ ταυτότητος μηδέν, και αντί για δυναμικές εξισώσεις θα πάρουμε αντίστοιχα δύο Χαμιλτονιανούς συνδέσμους.

Η καμπυλότητα R μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ορισμού του τανυστή Einstein και των αποτελεσμάτων που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$G_{ab} = R_{ab} + g_{ab}\frac{1}{2}R \Rightarrow -g_{ab}n^a n^b R = R = 2(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b), \tag{4.106}$$

εφόσον το n^a είναι ορθομοναδιαίο στη Σ_t και χρονοειδές. Ο πρώτος όρος σύμφωνα με την εξίσωση 3.60 μπορεί να γραφτεί ως:

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}\left[{}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2\right], \tag{4.107}$$

όπου εδώ εμφανίζονται όροι που περιέχουν την εξωγενή καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας Σ_t, K_{ab}, ενώ $K = K_a{}^a$. Έχουμε δει πως ο τανυστής K_{ab} σχετίζεται άμεσα με την έννοια μιας χρονικής παραγώγου της τρισδιάστατης μετρικής h_{ab} και θα φανεί στη συνέχεια πώς θα προκύψει η εξάρτηση της Χαμιλτονιανής από την $\dot{h}_{ab}$.

Ο δεύτερος όρος της 4.106 μπορεί να αναλυθεί περεταίρω με τη βοήθεια του τανυστή Riemann και του ορισμού 2.65:

$$\begin{aligned} R_{ab}n^a n^b &= R_{acb}{}^c n^a n^b = -n^a(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^c \\ &= -\nabla_a(n^a\nabla_c n^c) + (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) + (\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c), \end{aligned}$$

όπου αρχικά κάναμε χρήση της εξίσωσης 2.67. Συνεχίζοντας να αγνοούμε τους συνοριακούς όρους θα πετάξουμε τον 1^o και 3^o όρο ως ολικές αποκλίσεις διανυσματικών πεδίων.

Από τον ορισμό της εξωγενούς καμπυλότητας, εξίσωση 3.36 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_a n^a &= h^{ab}\nabla_a n^b = h^{ab}K_{ab} = K^a{}_a = K \\ &\Rightarrow (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) = K^2.\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}(\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) &= h_{ab}\nabla_c n_b h_{ab}\nabla^b n^c \\ &= K_{ca}K^{ac} = K_{ac}K^{ac} \qquad (4.108)\end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$R_{ab}n^a n^b = K^2 - K_{ac}K^{ac} + [\nabla_a(\ldots)] \qquad (4.109)$$

Όπως είδαμε ο τανυστής K_{ab} μπορεί να ερμηνευθεί και ως ρυθμός μεταβολής της h_{ab} κατά την κατεύθυνση του κάθετου προς την επιφάνεια Σ_t διανύσματος n^a. Από τον κανόνα παραγώγισης κατά *Lie* εξ.2.60 βρίσκουμε την αναλυτική έκφραση.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab} = \frac{1}{2}[n^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b n^c + h_{cb}\nabla_a n^c] \qquad (4.110)$$

Από τη σχέση 4.104 έχουμε ότι $N\pounds_n = (\pounds_t - \pounds_N)$.

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{2N}[Nn^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(Nn^c) + h_{cb}\nabla_a(Nn^c)] \\ &= \frac{1}{2N}[t^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(t^c) + h_{cb}\nabla_a(t^c) \\ &\quad -N^c\nabla_c h_{ab} - h_{ac}\nabla_b(N^c) - h_{cb}\nabla_a(N^c)] \\ &= \frac{1}{2N}[\pounds_t h_{ab} - \pounds_N h_{ab}].\end{aligned}$$

Αλλα εφόσον ο τανυστής K_{ab} είναι εξ' ολοκλήρου περιορισμένος 'πάνω' στην υπερεπιφάνεια Σ_t, με την έννοια ότι $K_{ab}n^a = K_{ab}n^b = 0$, το ίδιο θα ισχύει και για το δεξί μέλος και θα είναι $K_{ab} = h_a{}^c h_b{}^d K_{cd}$. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι κάθε όρος ξεχωριστά μέσα στην αγκύλη θα έχει την ίδια ιδιότητα, αλλά μόνο ο συνδυασμός των δύο. Έτσι:

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{2N}h_a{}^c h_b{}^d[\pounds_t h_{cd} - \pounds_N h_{cd}] \\ &= \frac{1}{2N}[h_a{}^c h_b{}^d\pounds_t h_{cd} - h_a{}^c h_b{}^d\pounds_N h_{cd}]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2N}[\dot{h_{ab}} - D_a N_b - D_b N_a]\,, \qquad (4.111)$$

αφού έχουμε δείξει ότι $\pounds_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a$, και ο 2ος όρος είναι η προβολή της παράστασης αυτής σύμφωνα με τον ορισμό της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου. Υπολογίζουμε τώρα τα $K_{ab}K^{ab}, K^2$.

$$\begin{aligned} K_{ab}K^{ab} &= h^{ac}h^{bd}K_{ab}K_{cd} \\ &= \frac{h^{ac}h^{bd}}{4N^2}[\dot{h}_{ab} - 2D_{(a}N_{b)}][\dot{h}_{cd} - 2D_{(c}N_{d)}] \end{aligned}$$

$$K^2 = (h^{ab}K_{ab})^2 = \frac{1}{4N^2}(h^{ab}\dot{h}_{ab} - 2D^b N_b)^2 \qquad (4.112)$$

Όσο για το στοιχείο όγκου $\sqrt{-g}e_{abcd}$ εύκολα εκφράζεται μέσω της τρισδιάστατης μετρικής. Ψπολογίζουμε τις συνιστώσες της μετρικής στο σύστημα $(t^a, (x_\mu)^a)$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις [3-μετρικη] και [αναλυση-τ] έχουμε:

$$g_{ab}t^a t^b = g_{00} = N^a N_a - N^2 \qquad (4.113)$$

$$g_{ab}t^a(x_\mu)^b = N h_{ab}n^a(x_\mu)^b + h_{ab}N^a(x_\mu)^b + n_a n_b t^a(x_\mu)^b = N^\mu \qquad (4.114)$$

$$g_{ab}(x_\mu)^a(x_\nu)^b = h_{\mu\nu} \qquad (4.115)$$

και υπολογίζεται ότι η ορίζουσα θα είναι:

$$det(g_{\mu\nu}) = -N^2 det(h_{\mu\nu}) \Rightarrow \sqrt{-g} = N\sqrt{h} \qquad (4.116)$$

άρα τελικά το 4-διάστατο στοιχείο όγκου θα είναι το $\epsilon = N\sqrt{h}dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Έχουμε επίσης ${}^{(3)}\epsilon = \sqrt{h}{}^{(3)}e_{abc}$, καθώς η (3)-γεωμετρία της Σ_t καθορίζεται από τη μετρική h_{ab} και αυτό θα χρησιμοποιείται για την ολοκλήρωση πάνω στη χωρική επιφάνεια.

Έτσι τελικά έχουμε τη γεωμετρική Λαγκρανζιανή μεταφρασμένη σε όρους h_{ab}, N^a, N και D_a να παίρνει την αναλυτικότερη μορφή:

$$\mathscr{L}_G = N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K_{ac}K^{ac} - K^2) = \qquad (4.117)$$

$$\sqrt{h}N\left\{{}^{(3)}R + \frac{1}{4N^2}h^{ac}h^{bd}[\dot{h_{ab}} - 2D_{(a}N_{b)}][\dot{h_{cd}} - 2D_{(c}N_{d)}] - \frac{1}{4N^2}[h^{ab}\dot{h_{ab}} - h^{ab}D_{(a}N_{b)}]^2\right\} \qquad (4.118)$$

Εδώ βλέπουμε ότι πράγματι στη Λαγκρανζιανή μας πυκνότητα δεν εμφανίζονται χρονικές παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές N, N_a γεγονός που στη συνέχεια θα μας δώσει δύο αντίστοιχους συνδέσμους αντί για δυναμικές εξισώσεις των μεταβλητών αυτών.

Ο όρος του ${}^{(3)}R$ δεν περιέχει καθόλου τη μεταβλητή $\dot{h_{ab}}$, αφού περιορίζεται μόνο σε χωρικές παραγώγους πάνω στην επιφάνεια Σ_t και μπορούμε εύκολα να βρούμε τη γεωμετροδυναμική ορμή, που είναι το συζηγές πεδίο της γεωμετρικής μεταβλητής h_{ab}.

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathscr{L}_G}{\partial \dot{h_{ab}}} = \frac{N\sqrt{h}}{4N^2}\left[2h^{ac}h^{bd}(\dot{h_{cd}} - 2D_{(c}N_{d)}) - h^{ab}(h^{cd}\dot{h}_{cd} - 2h^[cd]D_{(c}N_{d)})\right] \Rightarrow$$

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}[K^{ab} - Kh_{ab}] \tag{4.119}$$

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός της γεωμετρικής Χαμιλτονιανής πυκνότητας $\mathscr{H}_G$ από τη εξ.4.67 .

$$\mathscr{H}_G = \pi^{ab}\dot{h_{ab}} - \mathscr{L}_G = [2K_{ab}N + 2D_{(a}N_{b)}] \cdot \pi^{ab} - \sqrt{h}N[{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2] \tag{4.120}$$

Η συμμετρία $\pi^{ab} = \pi^{ba}$ προκύπτει από τις αντίστοιχες των συστατικών του h^{ab} και K^{ab}. Έτσι ο 2ος όρος γίνεται:

$$2\pi^{ab}D_{(a}N_{b)} = 2\pi^{ab}D_aN_b \tag{4.121}$$

Θέλουμε τώρα να εκφράσουμε όλους τους υπόλοιπους όρους (συγκεκριμένα τα K_{ab}, K) συναρτήσει των π^{ab}, h^{ab} και N. Από την εξ.4.119 λύνουμε ως προς K^{ab} και γράφουμε την ίδια εξίσωση για το K_{ab}. Από τη συστολή βρίσκουμε το K: $K = K^a{}_a = h_{ab}K^{ab}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}) \Rightarrow K^{ab} = h^{-1/2}\pi^{ab} + Kh^{ab} \tag{4.122}$$

ομοίως

$$K_{ab} = h^{-1/2}\pi_{ab} + Kh_{ab} \tag{4.123}$$

και

$$K = K^a{}_a = h_{ab}h^{-1/2}\pi^{ab} + h_{ab}h^{ab}K \Rightarrow K = -\frac{h^{-1/2}\pi}{2} \tag{4.124}$$

γιατί $h_{ab}h^{ab} = h^a{}_a = Tr[h] = g^a{}_a n^a n_a = 3$, άρα,

$$2K_{ab}N\pi^{ab} = 2Nh^{-1/2}\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{2Nh^{-1/2}}{2}\pi h_{ab}\pi^{ab}$$
$$= 2Nh^{-1/2}\pi_{ab}\pi^{ab} - Nh^{-1/2}\pi^2$$

και

$$\begin{aligned}\sqrt{h}N(K_{ab}K^{ab}) &= \sqrt{h}N(h^{-1}\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{h^{-1}}{2}\pi_{ab}h^{ab}\pi - \frac{h^{-1}}{2}h_{ab}\pi^{ab}\pi + \frac{h^{-1}}{4}h_{ab}h^{ab}\pi^2) \\ &= Nh^{-1/2}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \pi^2 + \frac{3\pi^2}{4}) \\ &= Nh^{-1/2}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{4})\,,\end{aligned}$$

$$\sqrt{h}NK^2 = \sqrt{h}N\frac{h^{-1}}{4}\pi^2 = h^{-1/2}N\frac{\pi^2}{4} \tag{4.125}$$

Άρα τελικά

$$\mathscr{H}_G = -\sqrt{h}N^{(3)}R + 2\pi^{ab}D_aN_b + Nh^{-1/2}[2\pi_{ab}\pi^{ab} - \pi^2 - \pi_{ab}\pi^{ab} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}] \tag{4.126}$$
$$= -\sqrt{h}N^{(3)}R + 2\pi^{ab}D_aN_b + Nh^{-1/2}[\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}]\,. \tag{4.127}$$

Για να αποφύγουμε παραγώγους ως προς N_b στο 2ο όρο θα κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση και η Χαμιλτονιανή έρχεται στην τελική μορφή:

$$\mathscr{H}_G = -\sqrt{h}N^{(3)}R + Nh^{-1/2}[\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}] + \sqrt{h}[2D_a(h^{-1/2}\pi^{ab}N_b) - 2N_bD_a(h^{-1/2}\pi^{ab})\,. \tag{4.128}$$

Ο 3ος όρος είναι ολική απόκλιση του $\pi^{ab}N_b$ και κατά την ολοκλήρωση πάνω στη Σ_t θα φύγει ως συνοριακός όρος. Ο όρος που περιέχει την τρισδιάστατη καμπυλότητα ${}^{(3)}R$ εξαρτάται αποκλειστικά από τη μετρική της επιφάνειας, h_{ab} και τις παραγώγους πάνω στην επιφάνεια αυτή (D_a), όπως ακριβώς εξαρτάται ο 4-D Ricci τανυστής από τη g_{ab}. Έτσι δεν περιμένουμε να εμφανίζει μεταβολή με την εφαρμογή μεταβολών στο πεδίο της συζυγούς ορμής π^{ab}.

Ο 1ος Χαμιλτονιανός σύνδεσμος δίνεται από τη μεταβολή της $\mathscr{H}_G$ ως προς το N: $\frac{\delta \mathscr{H}_G}{\delta N} = 0$, και εφόσον η εξάρτηση είναι γραμμική εύκολα παίρνουμε

$$\frac{\delta \mathscr{H}_G}{\delta N} = -\sqrt{h}\,{}^{(3)}R + h^{-1/2}[\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}] = 0 \tag{4.129}$$

Ο 2ος σύνδεσμος θα είναι μια διανυσματική εξίσωση που προέρχεται από τη μεταβολή της $\mathscr{H}_G$ ως προς το διάνυσμα N_a:

$$\frac{\delta \mathscr{H}_G}{\delta N_a} = 0 \Rightarrow h^{-1/2} D_b \pi^{ab} = 0 \,. \tag{4.130}$$

Έτσι λοιπόν όλες οι δυνατές αρχικές συνθήκες που θέλουμε να επιβάλουμε στην επιφάνεια Σ_0 για τα πεδία των μεταβλητών h_{ab}, π^{ab} θα πρέπει να ικανοποιούν τους δύο παραπάνω συνδέσμους. Είναι το ανάλογο των εξισώσεων 3.59 και 3.60 για τη Χαμιλτονιανή διατύπωση.

Αφού τώρα λύσαμε ως προς τις μεταβολές των μη δυναμικών μεταβλητών και βγάλαμε τους Χαμιλτονιανούς συνδέσμους για τη γεωμετρία της κάθε επιφάνειας Σ, θα ολοκληρώσουμε τη Χαμιλτονιανή διατύπωση, βρίσκοντας τις δυναμικές εξισώσεις Χάμιλτον 4.76 και 4.77.

Η εξίσωση 4.77 θα μας δώσει:

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta \mathscr{H}_G}{\delta \pi^{ab}} \,. \tag{4.131}$$

Βρίσκουμε ως συνήθως ότι για μονοπαραμετρική οικογένεια μεταβολών του π^{ab} θα έχουμε τις αντίστοιχες μεταβολές: $\delta \pi^{ab} = \frac{d\pi^{ab}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$

$$\delta(\pi_{ab}\pi^{ab}) = \frac{d(h^{ac}h^{bd}\pi_{cd}\pi_{ab})}{d\lambda}\Bigg|_{\lambda=0} = 2\pi_{ab}\,\delta\pi^{ab} \,, \tag{4.132}$$

$$\delta(\pi^2) = 2\pi \frac{d(h_{ab}\pi^{ab})}{d\lambda} = 2\pi h_{ab}\,\delta\pi^{ab} \,. \tag{4.133}$$

Και έτσι, χρησιμοποιώντας την εξ.4.126 ως πιο εύχρηστη ως προς το π^{ab}:

$$\begin{aligned}
\delta H_G &= \int_{\Sigma_t} \left[N h^{-1/2} \, \frac{d(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})}{d\lambda}\Bigg|_{\lambda=0} + 2D_a N_b \, \frac{d\pi^{ab}}{d\lambda}\Bigg|_{\lambda=0} \right] \\
&= \int_{\Sigma_t} \left[N h^{-1/2} (2\pi_{ab}\,\delta\pi^{ab} - \frac{1}{2} 2\pi h_{ab}\,\delta\pi^{ab}) + 2D_a N_b\,\delta\pi^{ab} \right] \\
&= \int_{\Sigma_t} \left[2N h^{-1/2} (\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}) + 2D_{(a}N_{b)} \right] \delta\pi^{ab}
\end{aligned}$$

Εδώ έχουντας υπόψη ότι η π^{ab} είναι συμμετρική, αντικαταστήσαμε $D_a N_b = D_{(a}N_{b)}$, γιατί όπως έχουμε πει διαλέγουμε πάντα τη μόνη δυνατή συμμετρική συναρτισιακή παράγωγο $\chi_{ab}=\frac{\delta H_G}{\delta\pi^{ab}}$ η οποία θα κάνει συστολή σε όλους τους δείκτες με ένα συμμετρικό πεδίο. Αυτή θα είναι ίση με:

$$\frac{\delta H_G}{\delta\pi^{ab}}=2Nh^{-1/2}(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab})+2D_{(a}N_{b)} \tag{4.134}$$

Επομένως η 1η εξίσωση Χάμιλτον θα δώσει:

$$\dot{h_{ab}}=2Nh^{-1/2}(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab})+2D_{(a}N_{b)} \tag{4.135}$$

Θα συνεχίσουμε με τη μεταβολή δου πεδίου h_{ab} που θα δώσει με τη σειρά του:

$$\delta h_{ab} = \left.\frac{dh_{ab}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \tag{4.136}$$

$$\delta h = h\,\delta(h_{ab})\,h^{ab} \tag{4.137}$$

$$\delta h^{-1/2} = -\frac{h^{-3/2}}{2}\delta h=-\frac{1}{2}h^{-1/2}h^{ab}\,\delta h_{ab} \tag{4.138}$$

$$\delta h^{1/2} = \frac{1}{2}h^{1/2}h^{ab}\,\delta h_{ab}\,. \tag{4.139}$$

Για τον 1ο όρο της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θα πάρουμε τη μεταβολή:

$$\delta(\sqrt{h}\,{}^{(3)}R)=\delta(\sqrt{h}\,h_{ab}\,{}^{(3)}R^{ab})=\delta(\sqrt{h})\,{}^{(3)}R+\sqrt{h}\delta(h_{ab})\,{}^{(3)}R^{ab}+\sqrt{h}\,h_{ab}\,\delta\left({}^{(3)}R^{ab}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sqrt{h}\,h^{ab}\,{}^{(3)}R+\sqrt{h}\,{}^{(3)}R^{ab}\right]\delta h_{ab}+\sqrt{h}h_{ab}\,\delta\left({}^{(3)}R^{ab}\right)\,. \tag{4.140}$$

Πρέπει τώρα να αναλύσουμε τη μεταβολή του τανυστή Ricci ώστε να καταλήξουμε σε μια έκφραση συναρτήσει του δh_{ab}. Γνωρίζουμε από την εξ.4.34 ότι

$$h^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab}=D^a v_a\,,\ \text{όπου}\ v_a=D^b\,\delta h_{ab}-h^{cd}D_a\,\delta h_{cd}\,.$$

Όμως είναι:

$$\delta\left(h_{ab}{}^{(3)}R^{ab}\right)=\delta\left(h^{ab(3)}R_{ab}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h_{ab}\delta^{(3)}R^{ab} &= \delta\left(h^{ab(3)}R_{ab}\right)-{}^{(3)}R^{ab}\,\delta h_{ab} \\ &= {}^{(3)}R^{cd}h_{ac}h_{bd}\,\delta h^{ab}+h^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab}-{}^{(3)}R^{ab}\,\delta h_{ab} \\ &= -{}^{(3)}R^{cd}\delta h_{cd}-{}^{(3)}R^{ab}\,\delta h_{ab}+h^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab}\,, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση $\delta h_{ab} = -h_{ac}h_{bd}\delta h^{ab}$. Με μια απλή μετονομασία των βωβών δεικτών θα πάρουμε:

$$\delta\left(h_{ab}{}^{(3)}R^{ab}\right) = -2^{(3)}R^{ab}\,\delta h_{ab} + h^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab} \tag{4.141}$$

Συνεπώς ο 1ος όρος της Χαμιλτονιανής 4.128 θα γίνει:

$$\delta(N\sqrt{h}^{(3)}R) = N\sqrt{h}\left[\frac{1}{2}h^{ab(3)}R - {}^{(3)}R^{ab}\right]\,\delta h_{ab} + N\sqrt{h}h^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab}\,, \tag{4.142}$$

και συνεχίζουμε με τον τελευταίο όρο που όπως είπαμε γίνεται:

$$\sqrt{h}Nh^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab} = \sqrt{h}ND^{a}\left[D^{b}\,\delta h_{ab} - h^{cd}D_{a}\,\delta h_{cd}\right]\,. \tag{4.143}$$

Θα αναλύσουμε διαδοχικά κατά παράγοντες ώστε στη συνέχεια να αγνοήσουμε τις ολικές αποκλίσεις που θα δώσουν εν τέλει επιφανιακούς όρους με την ολοκλήρωση της πυκνότητας πάνω στη Σ_t. Έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned} ND^{a}D^{b}\delta h_{ab} &= D^{a}\left[N\,D^{b}\delta h_{ab}\right] - D^{b}\delta h_{ab}\,D^{a}N \\ &= -D^{b}\left[(D^{a}N)\,\delta h_{ab}\right] + D^{b}D^{a}N\cdot\delta h_{ab} \\ &= D^{b}D^{a}N\cdot\delta h_{ab} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} ND^{a}\left[h^{cd}D_{a}\delta h_{cd}\right] &= h^{cd}ND^{a}D_{a}\delta h_{cd} \\ &= h^{cd}D^{a}\left[ND_{a}\delta h_{cd}\right] - h^{cd}(D^{N})(D_{a}\delta h_{cd}) \\ &= -h^{cd}D_{a}\left[\delta h_{cd}D^{a}N\right] + h^{cd}D_{a}D^{a}N\cdot\delta h_{cd} \\ &= h^{cd}D_{a}D^{a}N\cdot\delta h_{cd} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας μπορούμε να γράψουμε τον τελευτάιο όρο της 4.126:

$$\sqrt{h}Nh^{ab}\,\delta^{(3)}R_{ab} = \left[D^{b}D^{a}N + h^{ab}D_{c}D^{c}N\right]\cdot\delta h_{ab} \tag{4.144}$$

και τελικά τον 1ο όρο της Χαμιλτονιανής:

$$\delta(N\sqrt{h}^{(3)}R) = \left[N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2}h^{ab(3)}R - {}^{(3)}R^{ab}\right) + \sqrt{h}D^{b}D^{a}N + \sqrt{h}h^{ab}D_{c}D^{c}N\right]\cdot\delta h_{ab} \tag{4.145}$$

Στη συνέχεια θα έχουμε για τον 2ο όρο της εξ.4.128 :

$$\begin{aligned}
\delta\left(Nh^{-1/2}\,\pi^{cd}\pi_{cd}\right) &= N\,\pi^{cd}\pi_{cd}\,\delta(h^{-1/2}) + Nh^{-1/2}\,\delta(\pi^{cd}\pi_{cd}) \\
&= -\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\,h^{ab}\pi^{cd}\pi_{cd}\,\delta h_{ab} + Nh^{-1/2}\,\delta(h_{ac}h_{bd}\pi^{cd}\pi^{ab})\,.
\end{aligned}$$

Εδώ η μεταβολή του τελευταίου όρου θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
\delta(h_{ac}h_{bd}\pi^{cd}\pi^{ab}) &= \pi^{cd}\pi^{ab}\,\delta(h_{ac}h_{bd}) \\
&= \pi^{cd}\pi^{ab}h_{bd}\,\delta h_{ac} + \pi^{cd}\pi^{ab}h_{ac}\,\delta h_{bd} \\
&= \pi^{cd}\pi^{a}{}_{d}\,\delta h_{ac} + \pi^{ab}\pi_{a}{}^{d}\,\delta h_{bd} \\
&= \left(\pi^{ac}\pi^{b}{}_{c} + \pi^{ac}\pi_{c}{}^{b}\right)\,\delta h_{ab}\,,
\end{aligned}$$

άρα,

$$\delta(\pi^{cd}\pi_{cd}) = 2\pi^{ac}\pi_{c}{}^{b}\,\delta h_{ab} \tag{4.146}$$

και

$$\delta\left(Nh^{-1/2}\,\pi^{cd}\pi_{cd}\right) = \left[-\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\,h^{ab}\pi^{cd}\pi_{cd} + 2Nh^{-1/2}\pi^{ac}\pi_{c}{}^{b}\right]\,\delta h_{ab}\,. \tag{4.147}$$

Επίσης θα έχουμε:

$$\delta(\pi^2) = 2\pi\pi^{ab}\,\delta h_{ab}\,,$$

οπότε,

$$\delta\left(\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\pi^2\right) = \left[-\frac{1}{4}Nh^{-1/2}h^{ab}\pi^2 + Nh^{-1/2}\pi\pi^{ab}\right]\,\delta h_{ab}$$

Τέλος προχωράμε στον 3ο όρο της εξ.4.128 ο οποίος θα δώσει:

$$\delta(\pi^{ab}D_aN_b) = \pi_{ca}D_cN^b \tag{4.148}$$

Άρα ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.128 και αντικαθιστώντας τις μεταβολές 4.145 , 4.148 , 4.148 παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta H_G &= \int_{\Sigma_t}[-N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2}h^{ab(3)}R - {}^{(3)}R^{ab}\right) - \sqrt{h}D^bD^aN \\
&\quad +\sqrt{h}h^{ab}D_cD^cN + \frac{1}{4}Nh^{-1/2}h^{ab}\pi^2 - Nh^{-1/2}\pi\pi^{ab} \\
&\quad -\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\,h^{ab}\pi^{cd}\pi_{cd} + 2Nh^{-1/2}\pi^{ac}\pi_{c}{}^{b} - 2\pi_{c(a}D_cN^{b)}]\,\delta h_{ab}\,,
\end{aligned}$$

συνεπώς η συναρτησιακή παράγωγος της Χαμιλτονιανής ως προς τη μετρική h_{ab} θα μας δώσει τη 2η εξίσωση Χάμιλτον 4.76 που γίνεται:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ab} &= -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} = N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2}h^{ab(3)}R - {}^{(3)}R^{ab}\right) + \sqrt{h}D^b D^a N \\
&\quad -\sqrt{h}h^{ab}D_c D^c N - \frac{1}{4}Nh^{-1/2}h^{ab}\pi^2 + Nh^{-1/2}\pi\pi^{ab} \\
&\quad +\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\,h^{ab}\pi^{cd}\pi_{cd} - 2Nh^{-1/2}\pi^{ac}\pi_c{}^b - 2\pi_{c(a}D_c N^{b)}
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική της χωροχρονικής γεωμετρίας στη ΓΘΣ σε Χαμιλτονιανή μορφή αποτελούνται από τους δύο συνδέσμους:

$$-{}^{(3)}R + h^{-1}[\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}] = 0 \tag{4.149}$$

$$D_b(h^{-1/2}\pi^{ab}) = 0 \tag{4.150}$$

και τις δύο δυναμικές εξισώσεις της μεταβλητής h_{ab} και της συζυγούς της ορμής π^{ab},

$$\dot{h_{ab}} = 2Nh^{-1/2}(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}) + 2D_{(a}N_{b)} \quad , \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ab} &= -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} = N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2}h^{ab(3)}R - {}^{(3)}R^{ab}\right) + \sqrt{h}D^b D^a N \\
&\quad -\sqrt{h}h^{ab}D_c D^c N - \frac{1}{4}Nh^{-1/2}h^{ab}\pi^2 + Nh^{-1/2}\pi\pi^{ab} \\
&\quad +\frac{1}{2}Nh^{-1/2}\,h^{ab}\pi^{cd}\pi_{cd} - 2Nh^{-1/2}\pi^{ac}\pi_c{}^b - 2\pi_{c(a}D_c N^{b)}
\end{aligned}$$

Είπαμε προηγουμένως ότι οι Χαμιλτονιανοί σύνδεσμοι προέρχονται από αντίστοιχες ελευθερίες βαθμίδας της θεωρίας. Στον Ηλεκτρομαγνητισμό, η ελευθερία αυτή οφείλεται στην απροσδιοριστία του Η/Μ δυναμικού. Στη Γενική Σχετικότητα οι σύνδεσμοι προέρχονται από τις 'εξισώσεις κίνησης ' των μη δυναμικών μεταβλητών N, N^a. Η αντίστοιχες ελευθερίες εδώ εντοπίζονται στην παραμετροποίηση της χρονικής συνάρτησης και στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων πάνω σε κάθε χωρική φέτα Σ_t. Οι βασικές αρχές της ΓΘΣ μας επιβάλλουν μια αναλλοιότητα των τανυστικών εξισώσεων κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς (diffeomorphism invariance) . Με το να άρουμε την απροσδιοριστία αυτή θεωρώντας κλάσεις ισοδυναμίας των δυνατών μετρικών $\tilde{h}_{ab}$, όπου όλα τα στοιχεία της κλάσης περιγράφουν τον ίδιο χωρόχρονο, ενσωματώνουμε στην ουσία τον 2ο σύνδεσμο. Έχουμε δει ότι η ελευθερία βαθμίδας της μεταβολής της μετρικής εκφράζεται από ένα αυθαίρετο διανυσματικό πεδίο v^a, ώστε δύο μετρικές, στοιχεία της ίδιας κλάσης να δίνουν μεταβολές που διαφέρουν κατά $\delta h_{ab} = \delta h'_{ab} + D_{(a}v_{b)}$. Έτσι αν θεωρήσουμε τον χώρο των κλάσεων αυτών, γνωστό και ως υπερχώρο (superspace), ως το χώρο δυνατών διαμορφώσεων της μετρικής, τότε για να είναι συμβατός ο ορισμός του πεδίου συζυγούς ορμής, πρέπει η τελευταία να ικανοποιεί:

$$\int \pi^{ab}\, \delta h'_{ab} = \int \pi^{ab}\, \delta h_{ab} \Rightarrow \tag{4.152}$$

$$\int \pi^{ab}(\delta h_{ab} + D_{(a}v_{b)}) = \int \pi^{ab}\, \delta h_{ab} \tag{4.153}$$

ώστε να δίνει το ίδιο βαθμωτό για όλα τα στοιχεία κάθε κλάσης ισοδυναμίας. Η τελευταία σχέση ισχύει για τυχαίο διανυσματικό πεδίο, επομένως χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του π^{ab}

$$\int v_b\, D_a \pi^{ab} = 0 \Rightarrow D_a(h^{-1/2}\pi^{ab}) = 0 \tag{4.154}$$

βλέπουμε δηλαδή ότι ο σύνδεσμος ικανοποιείται αυτόματα.

Το ίδιο δυστυχώς δε συμβαίνει με τον 1ο σύνδεσμο, εξ. 4.129, ο οποίος δεν αίρεται τοσο απλά. Η μορφή του συνδέσμου αυτού αποτέλεσε μεγάλο εμπόδιο κατά την προσπάθεια δημιουργίας μιας κβαντικής θεωρίας για τη βαρύτητα. Παρόλα αυτά μεγάλη πρόοδος σημειώθηκε τις τελευταίες μόλις δεκαετίες μετά κυρίως τη μετάβαση σε συντεταγμένες Ashtekar . Μέσω των νέων αυτών μιγαδικών συντεταγμένων οι σύνδεσμοι της ΓΘΣ ξαναγράφονται σε πολυονυμική μορφή, γεγονός που ανοίγει το δρόμο για την κανονική κβάντωση της θεωρίας.

Μια κβαντική θεωρία για τη βαρύτητα θα δώσει ερμηνείες αλλα και προβλέψεις πάνω σε καίρια ερωτήματα που έχει θέσει η σύγχρονη φυσική. Η αναζήτηση μιας ενοποιημένης θεωρίας για της θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις, η γεωμετρία του χωρόχρονου στην κλίμακα Planck ή σε πολύ ισχυρά βαρυτικά πεδία, η εντροπία και η ακτινοβολία μιας μαύρης τρύπας, η χωροχρονική ανωμαλία της μεγάλης έκρηξης και η δομή και προέλευση του σύμπαντος γενικότερα είναι τα πιο σημαντικά από αυτά. Δυστυχώς όμως δεν αναμένεται στο κοντινό τουλάχιστον μέλλον η ανθρώπινη τεχνολογία να να έχει τη δυνατότητα πειραματικής επαλήθευσης ή απόρριψης μιας υποψήφιας νέας θεωρίας για τη βαρύτητα.

Βιβλιογραφία

[1] R.M. Wald *General Relativity* 1984

[2] B.F. Schutz *Introduction to General Relativity*

[3] B.F. Schutz *Geometrical methods of mathematical physics*

[4] C. Misner K. Thorne and J. Wheeler *Gravitation*

[5] S. Hawking-G. Ellis *The large scale structure of space-time*

[6] G. 't Hooft *Introduction to General Relativity*

[7]

[8] Hobson-Efstathiou-Lasenby *General Relativity: An Introduction for Physicists*

[9] A. Ashtekar *A Generalized Wick Transform for Gravity*

[10] T. Thiemann

[11] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*

[12] S. Weinberg *Quantum Fields in Curved Spacetime*