ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Αναπτύχθηκε από Gauss, Cauchy, Abel, Hamilton, Lie .....

Θεωρία ομάδων + κβαντομηχανική (Wigner, Weyl, ...)

Γιατί μελετάμε στη φυσική ΘΟ?

Αποδεικνύεται ότι οι μετασχηματισμοί συμμετρίας που αφήνουν αναλλοίωτο ένα φυσικό σύστημα αποτελούν <u>ομάδα</u>

Είδη συμμετριών:
- → Γεωμετρικές
- → Δυναμικές

Γεωμετρικές: Συμμετρίες γεωμετρίας (π.χ. κρυσταλλογραφία)

Δυναμικές Συμμετρίες: Συμμετρίες που αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις κίνησης.

π.χ.:

Διατήρηση ενέργειας: $\longrightarrow$ αναλλοιώτητα κάτω από
$\underline{t \to t + const}$

Διατήρηση ορμής $\longrightarrow$ αναλλοιώτητα κάτω από
$x \to x + \underline{const}$

Διατήρηση στροφορμής $\longrightarrow$ αναλλοιώτητα κάτω από
<u>στροφές</u>.

Πρόβλημα του Kepler:

1) επίπεδη τροχιά
2) τροχιά είναι κωνική τομή με μήκος ημιάξονα σταθερό
3) το διάνυσμα που ενώνει τις 2 εστίες είναι σταθερό
(σταθερό περιήλιο)

$\longrightarrow$ Διάνυσμα Runge-Lenz διατηρείται.

Διατήρηση στροφορμής

Διατήρηση ενέργειας & στροφορμής

ΟΜΑΔΕΣ:

$G = \{ E, A, B, C \dots \}$

G ομάδα ⇒ σύνολο στοιχείων εφοδιασμένο με πράξη ή νόμο σύνθεσης (προσθετική ή πολλαπλασιαστική) με τις εξής ιδιότητες:

1) $A \in G,\ B \in G \Rightarrow \exists\ C \in G,\ C' \in G$:

$$A * B = C, \qquad B * A = C'$$
$$(AB = C \qquad BA = C')$$

(G: κλειστό ως προς $*$)

2) Προσεταιριστική ιδιότητα

$$(AB)C = A(BC)$$

3) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο E:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

4) Υπάρχει αντίστροφο:

$$\forall A \in G \quad \exists\ B: \quad AB = BA = E$$

$$\underline{B = A^{-1}}$$

Επειδή $A \in G$ $\quad A.A \in G \Rightarrow$

$$A.A..A \in G \Rightarrow A^n \in G$$

Για ομάδα με <u>πεπερασμένο</u> σύνολο στοιχείων g. ∃ ακέραιος $n \leq g$:

$$A^n = E$$

<u>Άσκηση</u>: Κάτω από ποιά προϋπόθεση το σύνολο

$$G = \{A, A^2, A^3\}$$

αποτελεί ομάδα;

Τάξη ομάδας. = αριθμός στοιχείων της ομάδας

Αν μία ομάδα έχει g στοιχεία (g πεπερασμένο) η ομάδα λέγεται πεπερασμένη και η τάξη της συμβολίζεται <u>g</u>

Αν έχει άπειρα στοιχεία λέγεται <u>άπειρη ομάδα</u>

Αν τα στοιχεία της είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς λέγεται <u>διακριτή</u> (discrete)

Διαφορετικά λέγεται <u>συνεχής</u>. (Μή αριθμήσιμο αριθμό στοιχείων)

Παραδείγματα:

1) $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ $\quad (* = \text{πολ/σμός})$

2) $\mathbb{C}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ $\quad (* = \text{πολ/σμός})$

3) $N = \{\ldots -1, 0, 1 \ldots\}$ $\quad (* = +)$

4) $\mathbb{R} - \{0\}$ $\quad (* = \text{πολ/σμός})$

5) Σύνολο $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα $\neq 0$.

Όταν $\forall A, B \in G$ $\quad AB = BA \Longrightarrow$ ομάδα <u>ΑΒΕΛΙΑΝΗ</u>

ΑΣΚΗΣΗ:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποιός ο πίνακας πολ/σμού;

	E	σ_1	σ_2	$\ldots$
E				
σ_1				
σ_2				
$\vdots$				

ΟΜΟΙΩΣ:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ +\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	E	F	C	D
B	B	E	A	D	F	C
C	C	D	F	E	A	B
D	D	F	C	B	E	A
F	F	C	D	A	B	E

Η αλλαγή $2 \leftrightarrow 3$ γραμμών φέρνει τον πίνακα με ταυτοτικό στοιχείο στη διαγώνιο

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού των στοιχείων μιας ομάδας καθορίζει πλήρως την ομάδα.

Ομάδες με το ίδιο πίνακα πολλαπλασιασμού είναι ισόμορφες.

ΙΣΟΜΟΡΦΕΣ ΟΜΑΔΕΣ:

1) ίδια τάξη
2) $\exists$ 1-1 αντιστοιχία των στοιχείων τους τέτοια ώστε

αν $G \ni A \leftrightarrow A' \in G'$, $G \ni B \to B' \in G'$, $G \ni C \to C' \in G'$

$$AB = C \Rightarrow A'B' = C'$$

Συμμετρικές ομάδες S_n

Πολύ σημαντικές στα μαθηματικά (Θεώρημα Cayley).

— // — στη φυσική.

π.χ. Κυματοσυνάρτηση φερμιονίων αντισυμμετρική και άρα αντιμετάθεση δύο οποιαδήποτε φερμιόνια.

Μεταθέσεις:

1) $n!$ μεταθέσεις n αντικειμένων

2) Συμβολισμός π.χ.: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Δηλ.: η P αντιπροσωπεύει τη μετάθεση της διάταξης $(1,2,3,4) \longrightarrow (4,1,3,2)$

$1 \to 4, \quad 2 \to 1, \quad 3 \to 3, \quad 4 \to 2$

3) Αντιμετάθεση 2 στοιχείων:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\,1)$$

4) Πολλαπλασιασμός μεταθέσεων:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

Διατάσσοντας τα $l_1 \dots l_n$ κατά αύξουσα σειρά

παίρνουμε τη μετάθεση:

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m_1' & m_2' & \dots & m_n' \end{pmatrix}$$

Π.χ.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot Q = \;;$$

5) Ποιός ο αντίστροφος μιας μετάθεσης P;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

πράγματι:

$$P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = I$$

6) Κύκλος.

Κάθε μετάθεση γράφεται σαν γινόμενο μεταθέσεων χωρίς κοινά στοιχεία. Κάθε όρος του γινομένου λέγεται κύκλος:

π.χ:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{3-\text{κύκλος}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\,5\,6)(2\,4)$$

Μήκος κύκλου είναι ο αριθμός των στοιχείων του.

Κάθε κύκλος είναι αναλλοίωτος κάτω από κυκλική αλλαγή των στοιχείων του.

π.χ $(1\,5\,6) = (6\,1\,5) = (5\,6\,1)$

αλλά $(1\,5\,6) \neq (1\,6\,5)$

7) Κάθε κύκλος γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων (αντιμετάθεση = κύκλος δύο στοιχείων).

Π.χ. $(156) = (16)(15)$

Πράγματι $(16) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$(15) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$(16)(15) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (615) =$$

$$= (561) = (156)$$

Γενικά:

$$\boxed{(1\ 2\ 3 \ldots n) = (1n)(1\ n-1)(1\ n-2) \ldots (13)(12)}$$

Note: α) Αντιμεταθέσεις μετατίθενται αν δεν έχουν κοινά στοιχεία

β) Η ανάλυση ενός κύκλου σε γινόμενο αντιμεταθέσεων δεν είναι μοναδική.

$(156) = (16)(15)$

Π.χ. $(156) = (615) = (65)(61)$

δ) Ο αριθμός $\underline{\ell}$ των αντιμεταθέσεων που αναλύεται μία μετάθεση είναι πάντα άρτιο ή πάντα περιττό.

$\underline{\underline{(-1)^{\ell}}}$ λέγεται πάριτι

ε) <u>Οι μεταθέσεις αποτελούν ομάδα.</u> (S_n)

1) Γινόμενο μεταθέσεων είναι μετάθεση.

2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ ταυτοτική

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

π.χ

$S_1 = \{E\}$ 1 στοιχείο

$S_2 = \{E,\ P = (1,2)\}$ 2 στοιχεία

$S_3 =$ συμμετρική ομάδα 3 στοιχείων:

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23)$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2)$, $\quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3)$

$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$ $\quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$ $\quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = $

Άρα τα στοιχεία της S_3 είναι:

1) $P_E = P_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = (1)(2)(3)$ $\qquad p(P_E) = (-1)^3 = -1$

2) $P_A = P_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (123) = (13)(12)$ $\qquad p(P_A) = (-1)^2 = +1$

3) $P_B = P_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (132) = (12)(13)$ $\qquad p(P_B) = (-1)^2 = +1$

4) $P_C = P_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = (1)(23)$ $\qquad p(P_C) = (-1)^2 = +1$

5) $P_D = P_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = (2)(13)$ $\qquad p(P_D) = (-1)^2 = +1$

6) $P_F = P_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (3)(12)$ $\qquad p(P_F) = (-1)^2 = +1$

$$P_A \cdot P_B = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&3&1\\2&3&1\end{pmatrix} = P_E$$

$$P_D \cdot P_C = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix} = (132) = P_B$$

⋮

etc γνώριμα

Πίνακας πολ/σμού S_3:

	P_E	P_A	P_B	P_C	P_D	P_F
P_E	P_E	P_A	P_B	P_C	P_D	P_F
P_A	P_A	P_B	P_E	P_F	P_C	P_D
P_B	P_B	P_E	P_A	P_D	P_F	P_C
P_C	P_C	P_D	P_F	P_E	P_A	P_B
P_D	P_D	P_F	P_C	P_A	P_E	P_A
P_F	P_F	P_C	P_D	P_A	P_B	P_E

S_3 ομάδα

Εφαρμογές:

1) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση 2 ταυτοτικών σωματιδίων (μποζονίων) α και β όταν περιγράφεται το καθένα από κυματοσυναρτήσεις $\psi_a(1)$, $\psi_\beta(2)$ και δεν αλληλεπιδρούν.

Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι η

$$\psi = \psi_a(1)\,\psi_\beta(2)$$

αλλά δεν είναι συμμετρική ως προς την ανταλλαγή των $a \leftrightarrow \beta$ (όπως πρέπει για μποζόνια)

Κατασκευάζουμε τους τελεστές συμμετροποίησης & αντισυμμετροποίησης:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E + C(12)\right)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E - C(12)\right)$$

Τότε $S\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(1)\,\psi_\beta(2) + \psi_a(2)\,\psi_\beta(1)\right) = \psi_B$

η ψ_B είναι συμμετρική κάτω από $a \leftrightarrow \beta$

Ομοίως: η

$$\psi_F = \mathcal{A}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(1)\,\psi_\beta(2) - \psi_a(2)\,\psi_\beta(1)\right)$$

και η ψ_F περιγράφει φερμιόνια γιατί η ψ_F αντισυμμετρική κάτω από $a \leftrightarrow \beta$

2) Κυματοσυνάρτηση τριών μη-αλληλεπιδρώντων ταυτοτικών σωματιδίων

Κυματοσυνάρτηση σωματιδίων $\psi_a(1), \psi_\beta(2), \psi_\gamma(3)$:

$$\psi = \psi_a(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)$$

Τελεστές συμμετροποίησης, αντισυμμετροποίησης:

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(E + (12) + (13) + (23) + (123) + (213)\right)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(E - (12) - (13) - (23) + (123) + (213)\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_B = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(&\psi_a(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) + \psi_a(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3) \\ &+ \psi_a(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1) + \psi_a(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2) \\ &+ \psi_a(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1) + \psi_a(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)\Big)\end{aligned}\right\} \text{μποζόνια}$$

ψ_B συμμετρική σε κάθε αλλαγή $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\beta \leftrightarrow \gamma$, $\gamma \leftrightarrow \alpha$

$$\begin{aligned}\psi_F = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(&\psi_a(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) - \psi_a(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3) \\ &- \psi_a(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1) - \psi_a(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2) \\ &+ \psi_a(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1) + \psi_a(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)\Big)\end{aligned}$$

ψ_F ολικά αντισυμμετρική.

Ασκήσεις:

1) Να εξετασθεί κατά πόσον οι αριθμοί:

$$z_m = e^{2\pi i \frac{m}{n}} \qquad m = 0, \dots n-1$$

αποτελούν ομάδα.

2) Έστω οι συναρτήσεις.

$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1-x, \quad f_3(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x}$

$f_5(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_6 = \frac{x-1}{x}$

με πράξη σύνθεσης τη γνωστή σύνθεση συναρτήσεων

$$(f_5 f_4)(x) = f_5(f_4(x)) = f_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1} = f_3$$

i) Να δειχτεί ότι:

$$f_5^{-1} = f_6, \quad f_6^{-1} = f_5, \quad f_i^{-1} = f_i \quad i = 1,2,3,4$$

ii) Αποτελούν ομάδα;

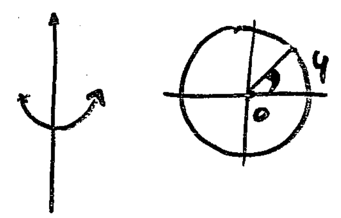
ΟΜΑΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών.

Ιδιαίτερα γραμμικοί μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτο ένα φυσικό σύστημα (διατηρούν τις αποστάσεις και φέρνουν το σύστημα σε σύμπτωση με τον εαυτό του) μετασχηματισμοί συμμετρίας
↓
αποτελούν ομάδα

Γεωμετρικές συμμετρίες:

3 πράξεις:

1) 

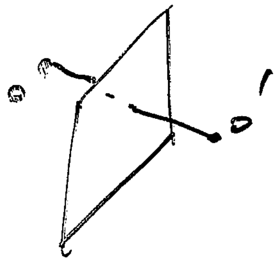
Στροφή κατά γωνία φ συγκεκριμένης φοράς γύρω από άξονα

Στροφή κατά $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ αντιστοιχεί σε πράξη συμμετρίας που συμβολίζεται C_n.

k-διαδοχικές στροφές συμβολίζονται με C_n^k.

Προφανώς $C_n^n = E$.

2) Κατοπτρισμός ως προς επίπεδο.

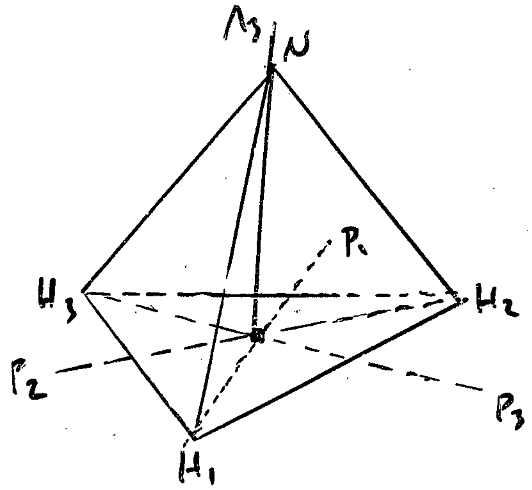


Συμβολίζεται με $\underline{\underline{\sigma}}$.

3) Απλή μετατόπιση του συστήματος.

Παράδειγμα.

Ομάδα συμμετρίας ορθής πυραμίδας με βάση ισόπλευρο τρίγωνο (μόριο NH_3)



Πράξεις συμμετρίας:

1) Ακινησία (ταυτοτικό E)

2) Στροφή γύρω από A_3.

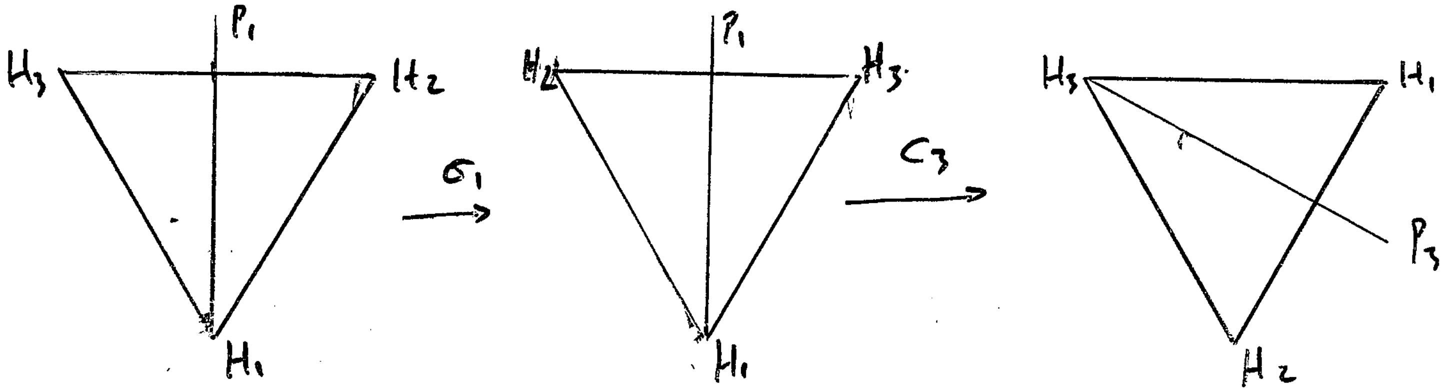
$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow C_3$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} \longrightarrow C_3^2 = C_3 C_3$$

$$\varphi = 2\pi \longrightarrow C_3^3 = E$$

3) Κατοπτρισμοί $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ως προς τα επίπεδα P_1, P_2, P_3

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$



$$C_3\sigma_1 = \sigma_3$$

C_{3v}	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

πχ: $\sigma_2(C_3\sigma_1) = \sigma_2\sigma_3 = C_3$

$(\sigma_2 C_3)\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1 = C_3$

$\exists$ αντίστροφος

C_{3v} ομάδα

Στοιχεία της ομάδας μπορούν να γεννηθούν από άλλα στοιχεία παίρνοντας γινόμενα και δυνάμεις αυτών.

Το ελάχιστο σύνολο στοιχείων της G από τα οποία με πολ/σμούς ή δυνάμεις προκύπτουν όλα τα στοιχεία της ομάδας λέγονται <u>ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ</u>.

π.χ. $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Γεννήτορες: $\{C_3, \sigma_1\}$

$E = C_3^3$
$C_3^2 = C_3 . C_3$
$\sigma_3 = C_3 \sigma_1$
$\sigma_2 = C_3 C_3 \sigma_1$

Η ελάχιστη δύναμη k : $A^k = E$ λέγεται τάξη του στοιχείου A.

Αν μία ομάδα έχει ένα γεννήτορα A τότε τα στοιχεία της είναι τα: $G = \{E, A, A^2, \ldots A^n\}$ $n = g-1$. $(A^g = E)$

<u>G : κυκλική ομάδα.</u>

Θεώρημα Cayley.

Κάθε ομάδα G τάξης g. είναι ισομορφική με κάποια υποομάδα του S_g.

Συζυγή στοιχεία και κλάσεις.

Έστω $A, B \in G$ τότε:

$$A^{-1} B A = C \in G$$

B, C συζυγή στοιχεία

Δύο στοιχεία $B \in G$, $C \in G$ λέγονται συζυγή αν υπάρχει $A \in G$:

$$A^{-1} B A = C \Leftrightarrow B = A C A^{-1}$$

Δηλαδή αν συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Γι' αυτό λέγονται και <u>όμοια</u> στοιχεία

* Αν B συζυγεί C και C συζυγεί D

τότε B συζυγεί D.

$$\left.\begin{array}{l} B, C \text{ συζυγή} \Leftrightarrow \quad ABA^{-1} = C \\ C, D \text{ συζυγή} \Leftrightarrow \quad XCX^{-1} = D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$X(ABA^{-1})X^{-1} = D \Rightarrow \quad XABA^{-1}X^{-1} = D \Rightarrow$$

$$(XA)B(XA)^{-1} = D \quad \Rightarrow \quad B, D \text{ συζυγή}$$

Άρα μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία μιας ομάδας σε σύνολα έτσι ώστε κάθε σύνολο να περιέχει στοιχεία όμοια μεταξύ τους ενώ διαφορετικά σύνολα να περιέχουν στοιχεία ανόμοια μεταξύ τους.

Τέτοια σύνολα λέγονται συζυγείς κλάσεις

ή απλά <u>ΚΛΑΣΕΙΣ</u>

Πώς βρίσκουμε τις κλάσεις μιας ομάδας?

Ξεκινάμε από ένα στοιχείο, έστω $A \in G$ και φτιάχνουμε όλα τα συζυγή στοιχεία του Y_A με τη σχέση

$$\{Y_A\} = \{XAX^{-1}, \forall X \in G\}$$

Από τα στοιχεία Y_A κρατάμε εκείνα που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Μετά παίρνουμε το στοιχείο $B \in G$ που δεν ανήκει στην $\{Y_A\}$ και φτιάχνουμε την $\{Y_B\}$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα:

Κλάσεις της ομάδας C_{3v}

1) $\{E\}$, περιέχει το ταυτοτικό

2) Έστω το στοιχείο C_3. Φτιάχνουμε τα XC_3X^{-1}

$X = E \qquad XC_3X^{-1} = C_3$

$X = C_3 \qquad XC_3X^{-1} = C_3C_3C_3^{-1} = C_3$

$X = C_3^2 \qquad C_3^2C_3(C_3^2)^{-1} = C_3^3C_3^{-1}C_3^{-1} = EC_3 = C_3$

$X = \sigma_1 \qquad \sigma_1C_3\sigma_1^{-1} = \sigma_1C_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1 = C_3^2$

$X = \sigma_2 \qquad \sigma_2C_3\sigma_2^{-1} = \sigma_2C_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2 = C_3^2$

$X = \sigma_3 \qquad \sigma_3C_3\sigma_3^{-1} = \sigma_3C_3\sigma_3 = \sigma_1\sigma_3 = C_3^2$

Η άλλη κλάση είναι λοιπόν

$$\{C_3, C_3^2\}$$

3) Συνεχίζοντας βρίσκουμε την κλάση

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Κλάσεις της C_{3v} : $\{E\}$, $\{C_3, C_3^2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

✱ Οι κλάσεις αβελιανής ομάδας είναι όσα και τα στοιχεία της.

Κλάσεις ισοδυναμίας συμμετρικής ομάδας S_n

Οι κλάσεις της S_n είναι οι:

$1^η$ κλάση	κύκλοι	μήκους	1	$\{(1),(2)\dots(n)\}$
$2^η$ —״—	—״—	—״—	2	$\{(12)(13)\dots\}$
$3^η$ —״—	—״—	—״—	3	$\{(123),\dots\}$
⋮				
$n^η$ —״—	—״—	—״—	n	$\{(1\dots n)\dots\}$

Έστω

v_1	κύκλοι	μήκους	1
v_2	—״—	—״—	2
⋮			
v_n	—״—	—״—	n

$\{1^{v_1}, 2^{v_2}\dots n^{v_n}\}$ κλάση του S_n

∴ Ισχύει $\boxed{v_1+2v_2+\dots nv_n=n}$

Για να βρούμε τα στοιχεία της κλάσεις θεωρούμε όλους τους κύκλους της κλάσης:

π.χ. για $n=3$ έχουμε $v_1+2v_2+3v_3=3$

$\{1^3\}$: $v_1=3$, $v_2=v_3=0$ $\{(1),(2),(3)\}$

$\{1,2\}$: $v_1=1$, $v_2=2$ $v_3=0$ $\{(12),(13),(23)$

$\{3\}$: $v_1=v_2=0$, $v_3=1$ $\{(123),(213)$

ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ - ΣΥΝΣΥΝΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο H είναι υποομάδα μίας ομάδας G αν:

1) τα στοιχεία του H αποτελούν ομάδα.

2) $x \in H \Rightarrow x \in G$ $\qquad H \subset G$

Το ταυτοτικό στοιχείο καθώς και ολόκληρη η ομάδα G είναι υποομάδα. (Αν $H \neq G$, H γνήσια υποομάδα).

π.χ:

Ομάδα C_{3v}:

Υποομάδα στροφών: $H_1 = \{E, C_3, C_3^2\}$

άλλες υποομάδες: $H_2 = \{E\}$

$H_3 = \{E, \sigma_1\}$

$H_4 = \{E, \sigma_2\}$

$H_5 = \{E, \sigma_3\}$

Δύο στοιχεία που είναι όμοια στην G δεν είναι αναγκαστικά όμοια στα στοιχεία υποομάδας $H \subset G$. (Το στοιχείο που κάνει τα δύο στοιχεία όμοια στη G μπορεί να μην ανήκει στην $H \subset G$).

Έστω τώρα υποομάδα $H \subset G$ που περιέχει τα στοιχεία:

$$H = \{E, A_1, A_2 \dots A_h\}$$

και είναι τάξης h.

Κατασκευάζουμε τώρα τα γινόμενα:

$$HX = \{X, A_1X, A_2X, \dots A_hX\} \qquad X \in G.$$

Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

1) $X \in H \Rightarrow HX = H$

2) $X \notin H \Rightarrow HX \cap H = \phi$ (HX, H δεν έχουν κοινά στοιχεία)

Έστω $A_kX \in H$ με $X \notin H$, $A_k \in H$

Τότε: $A_k^{-1} \in H \Rightarrow A_k^{-1}(A_kX) \in H \Rightarrow X \in H$!

HX : δεξιό συνσύνολο της ομάδας H

XH : αριστερό —"— —"—

Το ταυτοτικό στοιχείο επειδή ανήκει στην H δεν ανήκει σε κανένα συνσύνολο. $\Rightarrow$

<u>Συνσύνολα δεν είναι ομάδες.</u>

Παράδειγμα:

Θεωρούμε την υποομάδα στροφών $H_1 = \{E, C_3, C_3^2\}$ της ομάδας $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Τότε:

$$H_1\sigma_1 = \{E\sigma_1, C_3\sigma_1, C_3^2\sigma_1\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$
$$H_1\sigma_2 = \{E\sigma_2, C_3\sigma_2, C_3^2\sigma_2\} = \{\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3\}$$
$$H_1\sigma_3 = \{E\sigma_3, C_3\sigma_3, C_3^2\sigma_3\} = \{\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1\}$$

ομοίως: $\sigma_1 H_1 = \sigma_2 H_1 = \sigma_3 H_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Θεώρημα: Δύο συνσύνολα (αμφότερα δεξιά ή αριστερά) ή ταυτίζονται ή δεν έχουν κοινά στοιχεία

Απόδειξη: Έστω τα HX κ HY. Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

1) $Y \notin HX \Rightarrow HX \cap HY = \emptyset$

Έστω $A_k \in H$, $A_\ell \in H$:

$$A_k X = A_\ell Y \Rightarrow Y = A_\ell^{-1} A_k X = \underbrace{(A_\ell^{-1} A_k)}_{\in H} X \in HX \,!$$

2) $Y \in HX \Rightarrow HX = HY$ —

Αν $Y \in HX \Rightarrow \exists\, A_k \in H: \; Y = A_k X \Rightarrow$

$$X = A_k^{-1} Y \Rightarrow \underline{HY = HA_kX = HX}$$

Θεώρημα Langrange:

Η τάξη h μιάς υποομάδας της ομάδας G τάξης $g<\infty$ είναι τέλειος διαιρέτης του g: ο αριθμός g/h είναι ακέραιος

Έστω η τάξη ενός στοιχείου A είναι n. Τότε το σύνολο: $\{A, A^2, \ldots A^n = E\}$ αποτελεί υποομάδα τάξης n

Άρα η τάξη ενός στοιχείου μίας πεπερασμένης ομάδας είναι διαιρέτης της τάξης της ομάδας. (g/n ακέραιος)

Κανονικές υποομάδες

Έστω $H \subset G$ και Hx, xH τα δεξιά ή αριστερά συνσύνολα αυτής με το στοιχείο $x \in G$. Αν:

$$Hx = xH \quad \forall\, x \in G$$

H λέγεται <u>κανονική</u> ή <u>αναλλοίωτη υποομάδα</u> της G

$$\Downarrow$$

$$xHx^{-1} = H$$

Αν $H \subset G$ κανονική, και $\longrightarrow$ $xH_ix^{-1} = H_j$

$H_i, H_j \in H$

άρα αν H κανονική και περιέχει ένα στοιχείο, θα περιέχει και το συζυγές (όμοιο) αυτού. Συνεπώς κανονικές υποομάδες περιέχουν πλήρεις κλάσεις μιας μεγάλης ομάδας.

Ισχύει και το αντίστροφο: αν μία υποομάδα $H \subset G$ περιέχει πλήρεις κλάσεις μίας μεγαλύτερης ομάδας G τότε είναι αναγκαστικά κανονική

Απλές ομάδες.

* Μία ομάδα καλείται <u>απλή</u> άν δεν περιέχει καμμιά μή τετριμένη αναλλοίωτη (κανονική) υποομάδα.

Παράδειγμα: Εστω η υποομάδα C_{3v} και η υποομάδα αυτής $H = \{E, C_3, C_3^2\}$

Βρήκαμε παραπάνω οτι:

$\sigma_1 H = H\sigma_1 = H\sigma_2 = \sigma_2 H = \sigma_3 H = H\sigma_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Άρα δεξιά και αριστερά σύνολα ταυτίζονται και η H είναι κανονική (αναλλοίωτη) υποομάδα της C_{3v}.

Τότε, επειδή H κανονική, περιέχει πλήρεις κλάσεις της C_{3v}. Πράγματι περιέχει τις κλάσεις $\{E\}$, $\{C_3, C_3^2\}$ της C_{3v}.

Οι άλλες υποομάδες της C_{3v} είναι οι $\{E, \sigma_1\}$, $\{E, \sigma_2\}$, $\{E, \sigma_3\}$ και <u>δέν</u> είναι κανονικές γιατί περιέχουν μόνον <u>ένα</u> στοιχείο από την κλάση $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Ομάδες παραγόντων πηλίκου.

Έστω H μία κανονική υποομάδα της G.

Σχηματίζουμε τα δυνατά συνσύνολα:

$$K_i = HX_i = X_i H \qquad X_i \in G\,,\ X_i \notin H,\ i=1,\dots k$$

Έτσι ώστε $\quad kh + h = g \qquad \left(k = \frac{g}{h} - 1\right)$

h η τάξη του H κ' g η τάξη της G.

Ορίζουμε το γινόμενο K_{ij} δύο συνσυνόλων K_i, K_j

ως: $\quad K_{ij} = \{ A_\alpha A_\beta\,,\ A_\alpha \in K_i,\ A_\beta \in K_j \}$

(Φυσικά εννοείται ότι κρατάμε κάθε στοιχείο μία φορά)

Παράδειγμα: Έστω $H = \{E, C_3, C_3^2\}$, $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

έχουμε ότι $k = \frac{g}{h} - 1 = \frac{6}{3} - 1 = 1$ ένα στοιχείο του

C_{3v} αρκεί για να γεννήσει όλα τα συνσύνολα

Διαλέγουμε το $X_1 = \sigma_1$. Τότε έχουμε ότι:

$$K_1 = H\sigma_1 = \sigma_1 H = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

Και $\quad K_{11} = \{\sigma_1^2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_3\sigma_2, \sigma_3^2\} \Rightarrow$

$$K_{11} = \{E, C_3, C_3^2\} \quad \text{δηλ.} \quad K_{11} = H$$

$$K_1 K_1 = H$$

Γενικά, αν το σύνολο των συνόλων $K_1 .. K_k$ συμπληρωθεί με την κανονική υποομάδα H τότε το σύνολο των στοιχείων $K = \{K_1, K_2, .. K_k, H\}$ αποτελεί ομάδα με νόμο πολ/σμού όπως ορίσαμε παραπάνω. Η ομάδα K λέγεται ομάδα παραγόντων πηλίκου (factor or quotient group) της ομάδας G και γράφουμε:

$$\boxed{K = G/H}$$

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

$$C_{3v}/H = \{K_1, H\}$$

με πίνακα πολ/σμού:

$$K_1 H = H K_1 = K_1 \qquad K_1 K_1 = H, \quad H H = H$$

Το σύνολο H παίζει το ρόλο του ταυτοτικού

∃ λοιπόν μία αντιστοιχία μεταξύ των ομάδων C_{3v}/H και C_{3v} με την έννοια:

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leftrightarrow K_1 \quad , \quad H = \{E, C_3, C_3^2\} \leftrightarrow E$$

Είναι ένας

<u>ομοιομορφισμός</u>: = μία απεικόνιση μεταξύ δύο ομάδων G και G' τέτοια ώστε διατηρεί το γινόμενο ομάδων αλλά δεν είναι 1-1.

Άσκηση:

Έστω G μία κυκλική ομάδα τάξης 12 με γεννήτορα A. Έστω H η ομάδα με γεννήτορα A^3. Να βρεθούν όλα τα σύνολα του H στην G και ο πίνακας πολ/σμού για την ομάδα παραγόντων G/H.

Άμεσο γινόμενο ομάδων

Έστω οι ομάδες:

$G = \{A_1 = E, A_2, \dots A_g\}$ τάξης g.

$G' = \{B_1 = E, B_2, \dots B_{g'}\}$ —''— g'

τέτοιες ώστε:

i) το μόνο κοινό στοιχείο είναι το ταυτοτικό.

ii) $XY' = Y'X \quad \forall\, X \in G,\ Y' \in G'$

Τότε ορίζουμε το άμεσο γινόμενο των G, G' να είναι η ομάδα $G \otimes G'$ τάξης gg' και στοιχεία:

$$G \otimes G' = \{E, B_1 \dots B_{g'}, A_1 \dots A_g, A_1 B_1, \dots, A_1 B_{g'} \dots A_g B_1 \dots A_g B_{g'}\}$$

Ερώτηση: Η ομάδα $G \otimes G'$ είναι απλή;

Παράδειγμα: Να βρεθεί το άμεσο γινόμενο των ομάδων $G = \{E, \sigma_x\}$ και $G' = \{E, I\}$ όπου

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G \otimes G' = \{E, \sigma_x, I, \sigma_x I\} = \{E, \sigma_x, I, -\sigma_x\}$$

Αναπαραστάσεις ομάδων

Στη φυσική τα στοιχεία μιάς ομάδας είναι τελεστές που δρούν σ'ένα χώρο Hilbert. Επομένως σε κατάλληλη βάση τα στοιχεία της ομάδαι αναπαριστώνται με πίνακες.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $G = \{E, A, B, \ldots X \ldots\}$ ομάδα τάξης g.

Έστω σύνολο g τετραγωνικών πινάκων με ορίζουσα $\neq 0$.

$T(G) = \{T(E), T(A), T(B), \ldots T(X) \ldots\}$, με ιδιότητα:

$$\begin{matrix} X \to T(X) \\ Y \to T(Y) \\ XY = Z \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} T(X)\,T(Y) = T(Z) \\ T(E) = (E) \\ T(X^{-1}) = T(X)^{-1} \end{matrix}$$

Τότε το $T(G)$ αποτελεί μία αναπαράσταση της G.

Είναι δυνατόν να έχουμε $T(X) = T(Y)$ με $X \neq Y$.

Αν $A \neq B \Rightarrow T(A) \neq T(B)$ η αναπαράσταση λέγεται πιστή.

Αναπαραστάσεις τελεστών που αποτελούν ομάδα.

Έστω τα στοιχεία μιας ομάδας G που είναι τελεστές σ'ένα N-διάστατο χώρο Hilbert με διανύσματα βάσης $|i\rangle$ $(i=1\ldots N)$

Τότε
$$A|i\rangle = \sum_{j=1}^{N} (\alpha)_{ji}|j\rangle$$
$$B|i\rangle = \sum_{j=1}^{N} (\beta)_{ji}|j\rangle$$

και επομένως

$$AB|i\rangle = A\sum_{j=1}^{N}(\beta)_{ji}|j\rangle = \sum_{j=1}^{N}(\beta)_{ji}\,A|j\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\beta)_{ji}(\alpha)_{jk}|k\rangle = C|i\rangle$$

όπου $C|i\rangle = \sum \gamma_{ik}|k\rangle$ με $(\gamma)=(\alpha)(\beta)$

Θέτοντας $(\gamma)=T(C)$ έχουμε $T(A)T(B)=T(C)=T(AB)$

Έτσι οι πίνακες $(\alpha), (\beta)\ldots$ αποτελούν μία αναπαράσταση της ομάδας.

Αν οι τελεστές συμμετρίες που δρουν στις συντεταγμένες ως μετασχηματισμοί της μορφής: $\vec{r}\xrightarrow{A}\vec{r}'=A\vec{r}$ αποτελούν ομάδα. Στο μετασχηματισμό A αντιστοιχεί γραμμικός τελεστής O_A που δρα στον συναρτησιακό χώρο $f(r)$ τότε:

$O_A f(A\vec{r}) = f(\vec{r})$ ή $\boxed{O_A f(\vec{r}) = f(A^{-1}\vec{r})}$

Τρόποι κατασκευής αναπαραστάσεων.

Έστω $T(x)$ $x \in G$ μία αναπαράσταση διάστασης k.

Από αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε:

1) $$T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & (E) \end{array}\right) \quad x \in G$$

τότε $$T'(A)\,T'(B) = \left(\begin{array}{c|c} T(A) & 0 \\ \hline 0 & (E) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} T(B) & 0 \\ \hline 0 & (E) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} T(A)T(B) & 0 \\ \hline 0 & (E) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T(C) & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right) = T'(AB)$$

άρα $T'(x)$ αναπαράσταση μεγαλύτερης διάστασης.

2) Αναγωγή αναπαραστάσεων (διάσταση k $\downarrow$ διάσταση $k' < k$)

3) Συναφής αναπαράσταση:

Αν $T(x)$ αναπαράσταση τότε

$$\bar{T}(x) = [T^{+}(x)]^{-1} \quad \text{αναπαράσταση}$$

$$\bar{T}(x)\bar{T}(y) = [T^{+}(x)]^{-1}[T^{+}(y)]^{-1} = [T^{+}(y)T^{+}(x)]^{-1}$$
$$= [(T(x)T(y))^{+}]^{-1} = (T(c)^{+})^{-1} = \bar{T}(xy)$$

4) Μιγαδική αναπαράσταση:

$$T^{*}(x) = [T(x)]^{*} \quad x \in G.$$

$$T^{*}(xy) = (T(x)T(y))^{*} = T^{*}(x)T^{*}(y)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε:

$$T_2(x) = S^{-1} T_1(x) S \quad \forall x \in G.$$

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(\vec{r}) = \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \qquad \vec{k} = \text{σταθ.}$$

Θεωρούμε μία στροφή των αξόνων κατά γωνία $\theta = \pi/2$

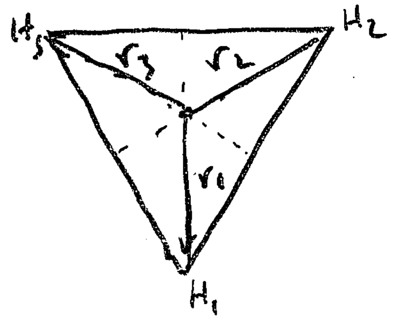
Να βρεθεί ο πίνακας (A):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

και να υπολογιστεί η $O_A f(\vec{r})$

Άσκηση: Να δειχτεί ότι αν $\Gamma(x)$ $x \in G$ είναι αναπαράσταση της ομάδας G, οι $\Gamma^{-1}(x)$ και $\Gamma^{\dagger}(x)$ δεν είναι αναπαραστάσεις.

Παράδειγμα: Μία αναπαράσταση της C_{3v}.



$$|1\rangle \leftrightarrow \vec{r}_1, \quad |2\rangle \leftrightarrow \vec{r}_2, \quad |3\rangle \leftrightarrow \vec{r}_3$$

$$\begin{array}{lll}
C_3|1\rangle = |2\rangle & C_3|2\rangle = |3\rangle & C_3|3\rangle = |1\rangle \\
C_3^2|1\rangle = |3\rangle & C_3^2|2\rangle = |1\rangle & C_3^2|3\rangle = |2\rangle \\
\sigma_1|1\rangle = |1\rangle & \sigma_1|2\rangle = |3\rangle & \sigma_1|3\rangle = |2\rangle \\
\sigma_2|1\rangle = |3\rangle & \sigma_2|2\rangle = |2\rangle & \sigma_2|3\rangle = |1\rangle \\
\sigma_3|1\rangle = |2\rangle & \sigma_3|2\rangle = |1\rangle & \sigma_3|3\rangle = |3\rangle
\end{array}$$

Επομένως:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

πιστή αναπαράσταση της C_{3v}.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.

Έστω μία ομάδα τάξης g.

Η κανονική αναπαράσταση της G είναι μία αναπαράσταση διάστασης g (πίνακες $g\times g$) που φτιάχνεται από τον πίνακα πολλ/σμού ως εξής:

1) Γράφουμε οριζόντια τα στοιχεία της ομάδας έτσι ώστε το ουδέτερο στοιχείο να είναι πρώτο.

2) Γράφουμε στην κατακόρυφο τα αντίστροφα.

3) Συμπληρώνουμε τον πίνακα πολλ/σμού (το ουδέτερο στοιχείο βρίσκεται στην διαγώνιο)

4) Σχηματίζουμε τον πίνακα $\Gamma(X)$ βάζοντας 1 στη θέση που υπάρχει το X και 0 στις υπόλοιπες θέσεις.

Π.χ για την ομάδα C_{3v}:

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

$$\Gamma(E) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(C_3^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ΜΟΝΑΔΙΑΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Θεώρημα: Κάθε αναπαράσταση ομάδας πεπερασμένης τάξης είναι ισοδύναμη με μία μοναδιακή αναπαράσταση.

Δηλ. αν $T(x), x \in G$ είναι αναπαράσταση της G, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S:

$$T'(x) = S^{-1} T(x) S$$

$$T'(x) T'^{+}(x) = T'(e).$$

Οι μοναδιακές αναπαραστάσεις συμβολίζονται με $\{\Gamma(x), x \in G\}$.

Απόδειξη:

$$H = \sum_{x \in G} T(x) T^{+}(x)$$

$H = H^{+} \Rightarrow$ ιδιοτιμές του $H \in \mathbb{R}$ κ $\exists$ U μοναδιακός

$D = U^{+} H U$ $\quad$ D διαγώνιος $[D_{ij} = \delta_{ij} d_i]$

$$D = U^{-1} \sum T T^{+} U = \sum U^{-1} T U U^{-1} T^{+} U = \sum_{x} T'(x) T'^{+}(x)$$

$$T'(x) = U^{-1} T U$$

$D = \sum_{x \in G} |T'_{ij}|^2 \Rightarrow$ ιδιοτιμές $d_i \geq 0 \Rightarrow$

$\exists$ $D^{1/2}$ και ορίζουμε $V = U D^{1/2} \Rightarrow$

$$\boxed{\Gamma(x) = V^{-1} T V \text{ μοναδιακός}}$$

$$V^{-1} = D^{-1/2} U^{+}$$

$$\Gamma(x) = D^{-1/2} U^{+} T U D^{1/2} = D^{-1/2} T' D^{1/2}$$

$$\Gamma^{+}(x) = D^{+1/2} T' D^{-1/2}$$

$$\Gamma(x) \Gamma^{+}(x) = D^{-1/2} T'(x) D T'^{+}(x) D^{-1/2}$$

$$= D^{-1/2} T'(x) \sum_{y \in G} T'(y) T'^{+}(y) T'^{+}(x) D^{-1/2}$$

$$= D^{-1/2} \sum_{y} T'(x) T'(y) [T'(x) T'(y)]^{+} D^{-1/2}$$

$$= D^{-1/2} \sum_{y} \underbrace{T'(xy) T'^{+}(xy)}_{D} D^{-1/2} =$$

$$= D^{-1/2} D D^{-1/2} = E$$

ΘΕΩΡΗΜΑ II: Η κανονική αναπαράσταση είναι μοναδιακή (και αναγωγίσιμη).

ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ.

Η αναπαράσταση των στοιχείων μιάς ομάδας εξαρτάται από τη βάση. Υπάρχουν χαρακτηριστικά στοιχεία ανεξάρτητα από τη βάση;

Από τη θεωρία πινάκων ξέρουμε ότι ένα τέτοιο στοιχείο είναι το ίχνος του πίνακα.

Χαρακτήρας μιάς αναπαράστασης ορίζεται το σύνολο

$$\{\chi(x),\ x\in G\}$$

των ιχνών όλων των πινάκων της αναπαράστασης:

$$\chi(x) = tr\,(\Gamma(x))$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αναπαραστάσεις συζυγών στοιχείων έχουν τον ίδιο χαρακτήρα

Αναπαραστάσεις στοιχείων μιάς κλάσης έχουν το ίδιο ίχνος και άρα ο χαρακτήρας είναι συνάρτηση των κλάσεων της ομάδας.

Αν έχουμε k κλάσεις σε μία ομάδα π.χ. $K_1, \dots K_k$, οι δυνατοί χαρακτήρες είναι k το πλήθος.

ΑΣΚΗΣΗ:

Συμμετρική ομάδα S_3.

Στοιχεία:

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$E=(1)(2)(3)$
$A=(123)=(13)(12)$
$B=(132)=(12)(13)$
$C=(1)(23)$
$D=(2)(13)$
$F=(12)(3)$

Πίνακας πολ/σμού:

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	E	F	C	D
B	B	E	A	D	F	C
C	C	D	F	E	A	B
D	D	F	C	B	E	A
F	F	C	D	A	B	E

1) Να βρεθεί η κανονική αναπαράσταση της S_3.

2) Να δειχτεί ότι οι πίνακες:

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&0\end{pmatrix}\quad P_6=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

αποτελούν αναπαράσταση της S_3.

3) Πόσοι και ποιοί οι χαρακτήρες των αναπαραστάσεων της ερ. 2).

ΑΣΚΗΣΗ:

Να εξετασθεί κατά πόσο η αναπαράσταση:

$$\Gamma(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αναγωγίσιμη. Αν ναί, ποιός είναι ο πίνακας S που κάνει την αναγωγή.

Λήμματα Schur. Θεώρημα ορθογωνιότητας.

1. (Πρώτο Λήμμα Schur.)

Έστω $\Gamma^{(i)}(x)$, $x \in G$ είναι οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας G και έστω πίνακας (ρ) τέτοιος ώστε:

$$\Gamma^{(i)}(x)(\rho) = (\rho)\,\Gamma^{(i)}(x) \qquad \forall\, x \in G$$

τότε $(\rho) = \lambda\,(\epsilon)$ $\lambda \in \mathbb{C}$, (ϵ) = ταυτοτικός.

Ο (ρ) είναι αναγκαστικά πολλαπλάσιο του ταυτοτικού εφόσον οι $\Gamma^{(i)}(x)$ είναι μη-αναγωγίσιμοι.
Αντίστροφα αν $(\rho) \neq \lambda(\epsilon) \Rightarrow \Gamma^{(i)}$ είναι αναγωγίσιμες.

2. (Δεύτερο Λήμμα Schur)

Έστω δίνονται δύο μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις $\Gamma^{(i)}$ και $\Gamma^{(j)}$ και έστω πίνακας (ρ) τέτοιος ώστε:

$$(*) \quad \Gamma^{(i)}_{(x)}(\rho) = (\rho)\,\Gamma^{(j)}_{(x)} \qquad \forall\, x \in G$$

τότε ο πίνακας (ρ) ή είναι ταυτοτικά μηδέν ή είναι ομαλός τετραγωνικός [δηλ: $\det(\rho) \neq 0$].

Αν υπάρχει πίνακας $(\rho) \neq 0$ που ικανοποιεί το $(*)$ τότε η $\Gamma^{(i)}$ και $\Gamma^{(j)}$ είναι ισοδύναμες.

ΜΕΓΑΛΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ.

Αν $\Gamma^{(i)}(x)$, $x\in G$ είναι μη-αναγωγίσιμο αναπαραστάσεις της ομάδας G τάξεως g, με διαστάσεις l_i αντίστοιχα

τότε:
$$\boxed{\sum_{x\in G} \Gamma^{(i)}_{\alpha\beta}(x)\, \Gamma^{(j)*}_{\gamma\delta}(x) = \left(\frac{g}{l_i}\right)\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}}$$

Για $a=\beta$, $\gamma=\delta$ έχουμε:

$$\sum_{x} \Gamma^{(i)}_{aa}(x)\Gamma^{(j)*}_{\gamma\gamma}(x) = \left(\frac{g}{l_i}\right)\delta_{ij}\,\delta_{a\gamma} \longrightarrow$$

$$\sum_{x}\Big\{\sum_a \Gamma^{(i)}_{aa}\Big\}\Big\{\sum_\gamma \Gamma^{(j)*}_{\gamma\gamma}\Big\} = \left(\frac{g}{l_i}\right)\delta_{ij}\sum_{a,\gamma}\delta_{a\gamma} = \frac{g}{l_i}\delta_{ij}\, l_i = g\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{x\in G} \chi^{(i)}(x)\, \chi^{(j)*}(x)}_{\text{χαρακτήρες}} = g\,\delta_{ij}$$

Αν η G έχει k κλάσεις $K_1, K_2 \ldots K_k$ με αριθμό στοιχείων $g_1, \ldots g_k$ αντίστοιχα, έχουμε

$$\sum_{a=1}^{k} g_a \chi^i_a \chi^{j*}_a = g\,\delta_{ij} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\sum_{a=1}^{k} \sqrt{\frac{g_a}{g}}\,\chi^{(i)}_a \sqrt{\frac{g_a}{g}}\,\chi^{j*}_a = \delta_{ij}}$$

Οι συναρτήσεις: $\quad e^{(i)}_a = \sqrt{\dfrac{g_a}{g}}\,\chi^{(i)}_a$

αποτελούν ορθοκανονικά διανύσματα στον k-διάστατο χώρο των κλάσεων της ομάδας G.

Κανόνας για να ελέγξουμε αν μία αναπαράσταση είναι αναγωγίσιμη.

Σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$M_i^a = \sum_{x \in K_a} \Gamma^i(x)$$

(άθροισμα των αναπαραστάσεων μίας κλάσης)

Αν M_a^i είναι πολ/σιο του ταυτοτικού, τότε η αναπαράσταση είναι μή-αναγωγίσιμη. Αν όχι, η αναπαράσταση είναι αναγωγίσιμη.

<u>Παράδειγμα:</u> Ποιά αναπαράσταση είναι αναγωγίσιμη και ποιά όχι.

C_{3v}: (I)

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_{3v}: (II)

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C_3^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ. (ΜΗ-ΑΝΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ).

1. $n = k$.

Ο αριθμός των μη-αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων μιας ομάδας ισούται με τον αριθμό των κλάσεων της ομάδας.

2. $$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = g$$

3. $$\Gamma^{\kappa\alpha\nu}(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i \, \Gamma^{i}(x) \qquad x \in G$$

4. $$\sum_{i} \sqrt{\frac{g_a}{g}}\, \chi_a^{(i)} \sqrt{\frac{g_a}{g}}\, \chi_\beta^{(i)*} = \delta_{a\beta}$$

5. $$\sum_{a} \sqrt{\frac{g_a}{g}}\, \chi_a^{(i)} \sqrt{\frac{g_a}{g}}\, \chi_a^{(j)*} = \delta_{ij}$$

6. $$\sum_{x \in G} \sqrt{\frac{l_i}{g}}\, \Gamma^{(i)}_{a\beta}(x) \sqrt{\frac{l_j}{g}}\, \Gamma^{(j)*}_{\gamma\delta}(x) = \delta_{ij}\, \delta_{a\gamma}\, \delta_{\beta\delta}$$

7. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{a=1}^{l_i} \sum_{\beta=1}^{l_i} \sqrt{\frac{l_i}{g}}\, \Gamma^{(i)}_{a\beta}(x) \sqrt{\frac{l_i}{g}}\, \Gamma^{(i)*}_{a\beta}(x') = \delta_{xx'}$$

Παράδειγμα:

1) Να βρεθούν οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μίας αβελιανής ομάδας.

Κάθε στοιχείο αβελιανής ομάδας συγκροτεί δική του κλάση. Άρα $k=g$. $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{g} l_i^2 = g \Rightarrow l_i = 1, \quad i=1..g$$

όλες οι μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μιας αβελιανής ομάδας είναι μονοδιάστατες.

Για μονοδιάστατες αναπαραστάσεις, οι χαρακτήρες συμπίπτουν με την αναπαράσταση.

ΟΜΑΔΑ ΔΥΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ:

$$G = \{A, A^2=E\}$$

κλάσεις $= 2 \Rightarrow 2$ μη-αναγωγίσιμες μονοδιάστατες αναπαραστάσεις:

Πίνακας χαρακτήρων: $\left(\chi_a^{i} \right)$ $i \leftarrow$ αριθμός αναπαράστασης, $a \rightarrow$ κλάσεις

$i \backslash a$	$\{E\}$	$\{A\}$
1	1	a
2	1	β

$$\sum_i \sqrt{\frac{g_a}{g}}\, \chi_a^{(i)} \sqrt{\frac{g_\beta}{g}}\, \chi_\beta^{(i)} = \delta_{a\beta}$$

$\left[\begin{array}{l} a=\{E\} \\ \beta=\{E\} \end{array} \rightarrow 1+1=2 \right]$ $\left[\begin{array}{l} a=\{E\} \\ \beta=\{A\} \end{array} \rightarrow a+\beta=0 \right]$

$\left[\begin{array}{l} a=\{A\} \\ \beta=\{A\} \end{array} \rightarrow a^2+\beta^2=2 \right]$

$$\left. \begin{array}{l} a+\beta=0 \\ a^2+\beta^2=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ \beta=-1 \end{array}$$

ΟΜΑΔΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω το σύνολο των πινάκων

$$(a) = (a_{ij}) \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad \det(a) \neq 0$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα

1) α. Γενική Γραμμική ομάδα: $GL(n,\mathbb{C})$

$n \times n$ - πίνακες με $\det \neq 0$ ή στοιχεία μιγαδικοί αριθμοί

Διάσταση: $d(GL(n,\mathbb{C})) = 2n^2$

β. $GL(n,\mathbb{R})$ στοιχεία πραγματικοί αριθμοί.

$$d(GL(n,\mathbb{R})) = n^2$$

2. Ειδική Γραμμική ομάδα: $SL(n,\mathbb{C})$ $(\det = 1)$

$$d(SL(n,\mathbb{C})) = 2(n^2-1)$$

$SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$

$$d(SL(n,\mathbb{R})) = n^2-1$$

3. Μοναδιαίες ομάδες: $U(n)$

Πίνακες μοναδιακοί:

$$UU^{\dagger} = I$$

$$d(U(n)) = n^2$$

4. Ειδικές μοναδιακές ομάδες: $SU(n)$

μοναδιακοί πίνακες με $\det = 1$

$$d(SU(n)) = n^2 - 1$$

5. Ορθογώνιες ομάδες. $O(n)$

ορθογώνιοι πίνακες:

$$OO^{T} = I$$

$$d(O(n,\mathbb{C})) = n(n-1)$$

$$d(O(n)) = \frac{1}{2}n(n-1) \qquad O(n) = O(n,\mathbb{R})$$

$SO(n)$ ειδική ορθογώνια <u>$\det = 1$</u>

Οι ομάδες $O(n)$ κ $U(n)$ διατηρούν το εσωτ. γινόμενο σε πραγματικούς κ μιγαδικούς χώρους.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ:

1) $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$

2) $e^{A+B} = e^A e^B$ μόνον και μόνον τότε για $[A,B]=0$

3) $B^{-1} e^A B = e^{B^{-1}AB}$

4) $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$

5) $a^T = -a \qquad e^a \in O(n)$

$a^{\dagger} = -a \qquad e^a \in U(n)$

$a^{\dagger} = a \qquad e^{ia} \in U(n)$

6) $e^{-A} B e^A = B + [B,A] + \frac{1}{2!}[[B,A],A] + \dots$

(Campbell-Hausdorff)

ΟΜΑΔΕΣ LIE

Έστω τα στοιχεία A μίας ομάδας G μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει r συνεχών παραμέτρων $a_1 \dots a_r$, δηλ.

$$A \equiv \varphi(a_1, a_2, \dots a_r) = \varphi(a)$$

διαλεγμένες έτσι ώστε:

$$E = \varphi(0, 0, \dots 0)$$

Οι r παράμετροι $a_1 \dots a_r$ είναι ελάχιστοι.

r = τάξη (διάσταση) της G. (ομάδες Lie)

$$\varphi(a)\varphi(\beta) = \varphi(\gamma)$$

$$\gamma = f(a, \beta) \qquad f \text{ διαφορίσιμη ως προς } a, \beta$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το στοιχείο A γύρω από το ταυτοτικό στοιχείο.

$$A = \varphi(a) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{r} a_i \left.\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}\right|_{a_i=0} + \dots$$

Θέτουμε

$$X_k = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}\right|_{a_k=0}$$

$$A^{-1} = E - \sum_{i=1}^{r} a_i X_i + \dots$$

$$A = E + \sum_{i=1}^{r} a_i X_i + \dots$$

X_k: γεννήτορες της ομάδας G

$\exists$ r γεννήτορες (όση είναι και η διάσταση της G)

και ικανοποιούν:

(0) $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^{k} X_k$

C_{ij}^{k} είναι οι σταθερές δομής της ομάδας

Ικανοποιούν:

1). $C_{ij}^{k} = - C_{ji}^{k}$

2) $[[X_i, X_j], X_k] + [[X_k, X_i], X_j] + [[X_j, X_k], X_i] = 0$ ή

$C_{ij}^{\ell} C_{\ell k}^{m} + C_{ki}^{\ell} C_{\ell j}^{m} + C_{jk}^{\ell} C_{\ell i}^{m} = 0$ (Jacobi)

Οι σχέσεις (0), (1), (2) ορίζουν μία άλγεβρα Lie.

Μετασχηματισμοί.

Θεωρούμε ομάδα Lie G που δρά σε χώρο με συντεταγμένες x^μ:

$$x^\mu \xrightarrow{G} x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς έχω:

$$x'^\mu - x^\mu = \delta x^\mu = \sum_i U^\mu_i \, \delta a^i \qquad i=1,\dots \dim G$$

↳ απειροστοί παράμετροι της G.

Ο απειροστός μετασχηματισμός $x \to x' = x + \delta x$ επάγει των μετασχηματισμό των συναρτήσεων:

$$F(x) \to F(x) + \delta F(x) \quad \text{όπου:}$$

$$\delta_G F(x) = \sum_\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \delta x^\mu =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x^\mu} U^\mu_i \, \delta a^i = \sum_\mu \delta a^i U^\mu_i \frac{\partial}{\partial x^\mu} F \Rightarrow$$

$$\delta_G = \sum_{\mu, i} \delta a^i \, U^\mu_i \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_i \delta a^i X_i$$

↳ γεννήτορας

$$X_i = \sum_\mu U^\mu_i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Παραδείγματα:

* SO(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x' = \cos\theta\, x + \sin\theta\, y$$
$$y' = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y$$

για $\theta = 0$ $x' = x$, $y' = y$

άρα για απειροστό μετασχηματισμό έχω:

$\theta = 0 + \delta a \to$

$$x' = x + \delta a\, y \qquad x = x'$$
$$y' = y - \delta a\, x \qquad y = y' \quad \Big\} \Rightarrow$$

$$\delta x^1 = y\,\delta a \qquad \left(\delta x^\mu = \sum_i U_i^\mu \delta a^i \right) \quad i = 1 \Rightarrow$$
$$\delta x^2 = -x\,\delta a$$

$$U^1 = y, \quad U^2 = -x$$

γεννήτορας:

$$X = \sum_\mu U_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = U^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + U^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = -i J_z$$

SO(3)

3x3 Πίνακες που ικανοποιούν:

$$OO^T = I$$

γράφω $\quad O = I + B \quad$ (B infinitesimal)

τότε $\quad OO^T = I \Rightarrow B + B^T = 0 \Rightarrow B$ αντισυμμετρικός

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = O\vec{x} = (I+B)\vec{x} = \vec{x} + B\vec{x} \Rightarrow \underline{\delta\vec{x} = B\vec{x}}$$

$$\begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \delta x^2 \\ \delta x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta x^1 &= a x^2 - b x^3 \\ \delta x^2 &= -a x^1 + c x^3 \\ \delta x^3 &= b x^1 - c x^2 \end{aligned}}$$

Συγκρίνω με $\quad \delta x^\mu = \sum_i U^\mu_i \, \delta a^i$. Θέτω $\delta a^3 = a$, $\delta a^2 = b$, $\delta a^1 = c$

$$\left.\begin{aligned} \delta x^1 &= x^2 \delta a^3 - x^3 \delta a^2 \\ \delta x^2 &= -x^1 \delta a^3 + x^3 \delta a^1 \\ \delta x^3 &= x^1 \delta a^2 - x^2 \delta a^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &U^1_3 = x^2, \ U^1_2 = -x^3 \\ &U^2_3 = -x^1, \ U^2_1 = x^3 \\ &U^3_2 = x^1, \ U^3_1 = -x^2 \end{aligned}$$

$$X_i = \sum_\mu U^\mu_i \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

$$\boxed{X_1 = U^2_1 \frac{\partial}{\partial x^2} + U^3_1 \frac{\partial}{\partial x^3} = x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}}$$

$$\boxed{X_2 = U^1_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + U^3_2 \frac{\partial}{\partial x^3} = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}}$$

$$\boxed{X_3 = U^2_3 \frac{\partial}{\partial x^2} + U^1_3 \frac{\partial}{\partial x^1} = -x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}}$$

Άσκηση:

Ποιός είναι ο γεννήτορας του μετασχηματισμού

$$x' = ax$$
$$y' = \frac{1}{a} y.$$

— Για $a = 1$ έχω $x' = x,\ y' = y$ άρα θέτω:

$$a = 1 + \delta a \quad \text{τότε:}$$

$$x' = (1 + \delta a)x = x + x\delta a$$

$$y' = \frac{1}{1+\delta a}\cancel{y} = (1 - \delta a)y = y - \delta a y$$

$$\left.\begin{aligned} \delta x^1 &= x^1 \delta a \\ \delta x^2 &= -x^2 \delta a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} U^1 &= x^1 \\ U^2 &= -x^2 \end{aligned}$$

άρα ο γεννήτορας είναι:

$$X = U^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + U^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$U(2)$.

ικανοποιούν:

$I \qquad \det U = 1$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ τότε $U^{+} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \Rightarrow$

$^* + bb^* = 1$

$^* + bd^* = 0 \qquad ad - bc = 1$

$^* + db^* = 0$

$^* + dd^* = 1$

(1)-(4) λύνονται με:

$d = a^*, \quad c = -b^*$

$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$

Η ομάδα $SU(2)$ διατηρεί το μήκος:

$$\underline{x^2+y^2+z^2.} \qquad (\text{όπως η } SO(3))$$

Πράγματι έστω: $M = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$

$$M \to M' = UMU^{+} \quad \text{όπου} \quad M' = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\det M' = \det M$ και άρα:

$$\underline{x'^2+y'^2+z'^2 = x^2+y^2+z^2.}$$

$SU(2)$ και $SO(3)$ ομοιομορφικές ομάδες.