ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΜΑΔΩΝ LIE – ΟΙ ΟΜΑΔΕΣ O(3) ΚΑΙ SU(2)

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε κυρίως με τη θεωρία των ομάδων πεπερασμένης τάξης. Στην πράξη όμως και κύρια στην κβαντομηχανική έχει κανείς να αντιμετωπίσει ομάδες των οποίων η τάξη δεν είναι πεπερασμένη. Ας θεωρήσουμε έναν συνεχή μετασχηματισμό των αξόνων $\vec{r}' = A\vec{r}$ π.χ. στροφή κατά γωνία ϑ γύρω από ένα άξονα. Τότε καθώς είδαμε στο εδ. 2.2 αυτός ορίζει στο συναρτησιακό χώρο της κβαντομηχανικής τελεστές $\{T_A\}$ οι οποίοι θα εξαρτώνται από τις ίδιες, δηλαδή μη διακρίσιμες, παραμέτρους. Οι τελεστές $\{T_A\}$ αποτελούν ομάδα ομομορφική με εκείνη των τελεστών A δηλαδή μη πεπερασμένη. Καθώς είδαμε στο εδ. 3.1 οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Hamilton μετασχηματίζονται όπως οι μη αναλλοίωτες αναπαραστάσεις της ομάδας $\{T_A\}$ εφ' όσον $T_A H = H T_A$. Συνεπώς πολλά απ' όσα είπαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, όπως π.χ. το θεώρημα του Wigner εξακολουθούν να ισχύουν. 'Αλλα όμως θεωρήματα ενδέχεται να μην ισχύουν: Μία αναπαράσταση Γ(X) δεν είναι αναγκαστικά ισοδύναμη με μία μοναδιακή. Το θεώρημα της ορθογωνιότητας (εξ.2.50) δεν έχει καν έννοια. Θα δούμε όμως ότι με κατάλληλη γενίκευση σε ορισμένες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος (π.χ. ορθογώνιες ομάδες) ανάλογα συμπεράσματα εξακολουθούν να ισχύουν.

Τα τελευταία χρόνια οι λεγόμενες ομάδες Lie (ή αντίστοιχες άλγεβρες Lie) έχουν αποκτήσει μεγάλη σημασία για τη θεωρητική φυσική. Πρωτοποριακή συμβολή πάνω σ' αυτό έχουν κάνει οι Yamanuchi, Weyl, Wigner, Vander Waerden, Racah και άλλοι. Αρχικά οι εφαρμογές γίνανε στην Ατομική Φυσική, ύστερα στην πυρηνική φυσική και τελευταία στη θεωρία στοιχειωδών σωματίων και τις θεωρίες βαθμίδας.

6.1. Ομάδες Πινάκων

Στο παράδειγμα 5 του εδ. 2.9 είδαμε ότι ο τελεστής στροφής του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων κατά γωνία ϑ αναπαρίσταται από τον πίνακα

$$R(\vartheta) = T_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Διαπιστώνουμε τώρα ότι ο πίνακας R(ϑ) έχει αντίστροφο

$$R^{-1}(\vartheta) = \tilde{R}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R(-\vartheta)$$

Επίσης

$$R(\vartheta_1)\,R(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & \sin\vartheta_2 \\ -\sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}$$

ή

$$R(\vartheta_1)\,R(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & \sin(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ -\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) & \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{pmatrix} = R(\vartheta_1+\vartheta_2) \qquad (2)$$

Δηλαδή οι πίνακες R (ϑ) αποτελούν ομάδα. Κάθε στοιχείο της ομάδας ορίζεται όταν ορισθεί η γωνία ϑ στην οποία αντιστοιχεί. Η γωνία ϑ μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές. Συνεπώς το σύνολο των στοιχείων της ομάδας είναι *μη αριθμήσιμο*. Η ομάδα δεν είναι πεπερασμένη. Όμως τα στοιχεία πίνακα $(R)_{ij}$ είναι *φραγμένα*.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο των πινάκων

$$(\alpha) = (\alpha_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad . \quad \det(\alpha) \neq 0 \qquad (3)$$

δηλαδή το σύνολο των ομαλών πινάκων. Εκτός από τον περιορισμό det (α) ≠ 0 τα στοιχεία του πίνακα μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. (Μπορεί να μήν έχουν καν φράγμα). Το σύνολο αυτό των πινάκων συγκροτεί ομάδα η οποία προφανώς δεν είναι πεπερασμένη. Η ομάδα αυτή είναι πολύ γενική για να είναι χρήσιμη. Γι' αυτό έχουν ιδιαίτερα μελετηθεί οι υποομάδες της. Συνήθως γίνεται η εξής ταξινόμηση.

α) Η Γενική Γραμμική ομάδα.

Έχει δύο κατηγορίες ανάλογα αν τα στοιχεία του πίνακα είναι μιγαδικοί ή πραγματικοί αριθμοί.

i) Μιγαδική γενική γραμμική ομάδα: GL (n, c)

Αποτελείται από τους nxn ομαλούς πίνακες με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς:

$$d\,(GL\,(n, c)) = \text{αριθμός ανεξαρτήτων παραμέτρων} = 2n^2 \qquad (4)$$

(Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπακούουν στην ουσία σε κανένα περιορισμό εκτός det (α) ≠ 0).

ii) Πραγματική γενική γραμμική ομάδα GL (n, R)

Προφανώς

$$GL\,(n, R) \subset GL\,(n, c) \qquad (5a)$$

$$d\,(GL\,(n, R)) = \text{αριθμός ανεξαρτητων παραμέτρων} = n^2 \qquad (5b)$$

β) Ειδική Γραμμική ομάδα: det (α) = *1*

Όταν τα στοιχεία της είναι παρμένα από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται ως SL(n,c). Έχουμε

$$SL\,(n, c) \subset GL\,(n, c) \qquad (6a)$$

$$d\,(SL\,(n, c)) = \text{Αριθμός ανεξάρτητων παραμέτρων} = 2\,(n^2 - 1) \qquad (6b)$$

(Η συνθήκη det (α) = 1 στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών εισάγει δύο περιορισμούς). Όταν τα στοιχεία της είναι πραγματικοί αριθμοί έχουμε

$$SL\,(n, R) \subset GL\,(n, R) \qquad (7a)$$

$$d\,(SL(n,R)) \text{ αριθμός ανεξάρτητων παραμέτρων} = n^2 - 1 \qquad (7b)$$

Η ειδική γραμμική ομάδα λέγεται και μονομηκής (unimodular).

γ) Μοναδιακές ομάδες U(n)

Οι πίνακες των ομάδων αυτών είναι μοναδιακοί (ισομετρικοί) δηλαδή διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων κατά συνέπεια το μέτρο ενός διανύσματος στο μιγαδικό χώρο. Με άλλα λόγια

$$(U^{+})\,(U) = (\varepsilon) \qquad (8a)$$

Η πιο πάνω σχέση γράφεται

$$\sum_{ij} U^{*}_{ki}\, U_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{ή} \quad \sum_{i} U_{ik}\, U^{*}_{jk} = \delta_{ij} \qquad (8b)$$

Από τη συνθήκη (8) συνάγεται ότι

1) Οι παράμετροι της ομάδας U(n) είναι φραγμένες

$$|U_{ij}|^2 < 1 \qquad (9a)$$

2) Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων είναι

$$d\,(U\,(n)) = 2n^2 - n - 2\binom{n}{2} = n^2 \tag{9b}$$

δ) Ειδικές μοναδιακές ομάδες SU(n)

Προκύπτουν από το σύνολο των πινάκων της U(n) αν επιβάλλουμε τον περιορισμό

$$\det\,(U) = 1 \tag{10a}$$

Συνεπώς

$$d\,(SU\,(n)) = n^2 - 1 \tag{10b}$$

$$SU\,(n) = U\,(n) \cap SL\,(n, c) \tag{10c}$$

ε) Ορθογώνιες ομάδες.

Οι ομάδες αυτές αποτελούνται από το σύνολο των πινάκων O που υπακούουν τη σχέση

$$(O^T)\,(O) = (\varepsilon) \quad , \quad (O^T)_{ij} = O_{ji} \tag{11}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

1) Τα στοιχεία των πινάκων είναι παρμένα από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Τότε η ομάδα συμβολίζεται ως O(n,c) και ισχύει

$$d\,(O\,(n, c)) = 2n^2 - 2n - 2\binom{n}{2} = n\,(n-1) \tag{12}$$

2) Τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η ομάδα συμβολίζεται ως O(n,R) ή απλώς O(n). Έχουμε:

$$d\,(O\,(n, R)) = n^2 - n - \binom{n}{2} = \frac{1}{2}\,n\,(n-1) \tag{13}$$

Για τις ορθογώνιες ομάδες, επειδή $\det(O^T) = \det(O)$, η (11) συνεπάγεται

$$\det\,(O)\,\det\,(O^T) = 1 \quad \det\,(O) = \pm 1 \tag{14}$$

δηλαδή οι ομάδες αυτές σπάνε σε δύο ασύνδετα φύλλα (sheets) και δεν μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο με συνεχή τρόπο. Το σύνολο SO(n,c) των ορθογώνιων πινάκων με ορίζουσα +1 αποτελεί μια υποομάδα η οποία λέγεται *ειδική μιγαδική ορθογώνια υποομάδα* με αριθμό ανεξάρτητων παραμέτρων

$$d\,(SO\,(n, c)) = n\,(n-1) \tag{15}$$

Τα στοιχεία με det (O) = −1 δεν αποτελούν υποομάδα (δεν περιέχεται το ταυτοτικό στοιχείο).

Ανάλογα το σύνολο SO(n) των ορθογωνίων πραγματικών πινάκων με ορίζουσα det (O) = +1 ορίζει μια ομάδα η οποία λέγεται *ειδική ορθογώνια πραγματική ομάδα* και ισχύει

$$d\,(SO\,(n, R)) = \frac{1}{2}\,n\,(n-1) \tag{16}$$

(κοίταξε πάντως εδ. 6.3).

Οι ορθογώνιοι πίνακες O(n) διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο $\langle Ox|Oy\rangle = \langle x|y\rangle$.

Συνεπώς αφήνουν αναλλοίωτη μια παράσταση της μορφής

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{17}$$

Σημειώνουμε ότι οι μιγαδικοί πίνακες O(n,c) δεν έχουν ανάλογη ιδιότητα στο μιγαδικό γραμμικό χώρο.

στ) Συμπλεκτικές ομάδες.

Είναι πίνακες που αφήνουν αναλλοίωτη την παράσταση

$$\langle x|(g)|y\rangle = \text{αναλλοίωτο}$$

$$(g) = \begin{pmatrix} (g_1) & & & \\ & (g_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (g_n) \end{pmatrix} \qquad (g_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Προφανώς ορίζονται μόνο σε χώρους άρτιων διαστάσεων και συμβολίζονται Sp (2n, c) ή Sp (2n, R) για μιγαδικούς και πραγματικούς χώρους αντίστοιχα. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι πίνακες αυτοί είναι

$$(\alpha)^+\,(g)\,(\alpha) = (\varepsilon) \tag{19}$$

Συνεπώς ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων είναι

$$d\,(Sp\,(2n, c)) = 2\,(2n)^2 - 2\binom{2n}{2} = 2n\,(2n+1) \tag{20}$$

$$d\,(Sp\,(2n, R)) = (2n)^2 - \binom{2n}{2} = n\,(2n+1) \tag{21}$$

Αν αριθμήσουμε τις προβολές των $|x\rangle$ και $|y\rangle$ ως εξής

$$|x\rangle = (x_1, x_2, \ldots x_n, x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}) \tag{22a}$$

$$|y\rangle = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-n}) \tag{22b}$$

Η (18) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_{-i} - x_{-i}\, y_i) = \text{αναλλοίωτο} \tag{23}$$

χωρίς τότε να χρειάζεται η μετρική (g) (κύτταξε εδ. 10.5).

Η συμπλεκτική ομάδα $Sp\,(2n) = U\,(2n) \cap Sp\,(2n, c)$ είναι γνωστή σαν *μοναδιακή συμπλεκτική ομάδα.* Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων είναι

$$d\,(Sp\,(2n)) = n\,(2n+1) \tag{24}$$

(δηλαδή έχει τον ίδιο αριθμό παραμέτρων με την Sp(2n,R)).

ζ) Η ομάδα U(p,q)

Η ομάδα αυτή αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση

$$\sum_{i=1}^{p} |z_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |z_i|^2 = \text{αναλλοίωτη} \tag{25}$$

Προφανώς

$$U\,(p, q) \subset GL\,(p+q, c) \tag{26a}$$

$$U\,(n, o) = U\,(o, n) = U\,(n) \tag{26b}$$

η) Η ομάδα SU(p,q)

Είναι πιο περιορισμένη από την προηγούμενη κατά το ότι η ορίζουσα των πινάκων είναι μονάδα.

θ) Η ομάδα SO(p,q)

Αυτή αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 \tag{27}$$

Σαν παράδειγμα ομάδας της τελευταίας κατηγορίας αναφέρουμε την ομάδα

$$SO\,(1, 3) = \text{ομαδα Lorentz}$$

η οποία αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

όπου

$$x_0 = ct\,, \quad x_1 = x\,, \quad x_2 = y\,, \quad x_3 = z$$

με $c =$ ταχύτητα φωτός στο κενό, $t =$ χρόνος. Η ομάδα αυτή είναι από τις πιο χρήσιμες στη φυσική.

6.1.2. Χρήσιμες ιδιότητες και Θεωρήματα πινάκων

Ο πίνακας exp ((α)) ορίζεται ως εξής:

$$e^{(\alpha)}_{op} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^k}{k!}\,, \qquad (\alpha)^0 = (\varepsilon) = \text{ταυτοτικός πίνακας} \tag{28}$$

Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.

Η σειρά (28) συγκλίνει όταν τα στοιχεία του πίνακα (α) είναι φραγμένα.

Θεώρημα 2.

Αν $[A, B] = AB - BA = 0$ τότε

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{29}$$

Η ισότητα δεν ισχύει όταν $AB \neq BA$

Θεώρημα 3.

Για κάθε ομαλό $n \times n$ πίνακα B ισχύει

$$B^{-1} e^A B = e^{BAB^{-1}} \tag{30}$$

Θεώρημα 4.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα η σειρά (28) γράφεται

$$e^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\,(\alpha)^k \tag{31}$$

δηλαδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις δεν δίνουν τίποτα το καινούργιο.

Θεώρημα 5.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του (α) τότε οι ιδιοτιμές του $e^{(\alpha)}$ είναι $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}$

Θεώρημα 6.

$$e^{(\alpha)^*} = (e^{(\alpha)})^* \tag{32}$$

$$e^{(\alpha^+)} = (e^{(\alpha)})^+ \tag{33}$$

$$e^{-(\alpha)} = (e^{(\alpha)})^{-1} \tag{34}$$

$$\det(e^{(\alpha)}) = e^{\mathrm{tr}\,(\alpha)} \tag{35}$$

Θεώρημα 7.

Αν $(\alpha^T) = -(\alpha)$ (αντισυμμετρικός) $\Rightarrow e^{(\alpha)}$ = ορθογώνιος
Αν $(\alpha^+) = -(\alpha)$ (αντιερμιτιανός) $\Rightarrow e^{(\alpha)}$ = μοναδιακός
Αν $(\alpha^+) = (\alpha)$ (ερμιτειανός) $\Rightarrow e^{i\,(\alpha)}$ = μοναδιακός

Θεώρημα 8: Τύπος των Campbell - Handorff.

$$e^{-(\alpha)}(\beta)\,e^{(\alpha)} = (\beta) + \frac{1}{1!}[(\beta), (\alpha)] + \frac{1}{2!}[[(\beta), (\alpha)], \alpha] + ... \tag{36}$$

6.2 Ομάδες Lie

Στα προηγούμενα εξετάσαμε την GL(n,c), γενική γραμμική ομάδα και τις διάφορες υποομάδες της. Είδαμε ότι οι ομάδες των πινάκων αυτών περιγράφονται πλήρως όταν δίνονται τα στοιχεία α_{ij} σαν συνάρτηση d(n) ανεξάρτητων παραμέτρων. Εδώ θα γενικεύσουμε κάπως αυτές τις έννοιες. Έστω ότι τα στοιχεία A μιας ομάδας G μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει r συνεχών παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_r$ δηλαδή

$$A \equiv \varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) \equiv \varphi(\alpha) \tag{37a}$$

διαλεγμένες ώστε το ταυτοτικό στοιχείο είναι

$$E = \varphi(0, 0, ..., 0) \tag{37b}$$

όπου φ είναι συνεχής συνάρτηση των $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$. Οι παράμετροι $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ δεχόμαστε ότι αποτελούν ένα ελάχιστο σύνολο δηλαδή δεν είναι δυνατό να βρεθούν r′ παράμετροι $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{r'}$ με $r' < r$ οι οποίες περιγράφουν πλήρως τα στοιχεία της ομάδας που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να έχουμε

$$A = \chi(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{r'})$$

Ο αριθμός r λέγεται τάξη (rank) της συνεχούς ομάδας G και είναι χαρακτηριστικός της ομάδας G. Η επιλογή όμως των r παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ δεν είναι μονοσήμαντη. Η τάξη (rank) της συνεχούς ομάδας G δεν έχει το νόημα της τάξης (order) των διακρίσιμων ομάδων που απαντήσαμε προηγουμένως. Η συνεχής ομάδα έχει άπειρο και μάλιστα μη αριθμήσιμο σύνολο στοιχείων. Η κλειστότητα των στοιχείων της ομάδας AB = C συνεπάγεται ότι

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)\,\varphi(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r) = \varphi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r) \tag{38}$$

όπου

$$\gamma_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r) \quad , \quad i = 1, 2, ..., r \tag{39a}$$

ή σύντομα

$$\gamma = f(\alpha, \beta) \tag{39b}$$

Συνεπώς η συνέχεια των παραμέτρων γ εξασφαλίζεται όταν οι συναρτήσεις f είναι διαφορίσιμες ως προς όλες τις παραμέτρους α και β. Οι συναρτήσεις (39b) πρέπει να ικανοποιούν και ορισμένες άλλες συνθήκες. Εφαρμογή της (38) για το ταυτοτικό στοιχείο συνεπάγεται

$$f(\alpha, 0) = \alpha \quad , \quad f(0, \beta) = \beta \tag{40}$$

Επίσης η ύπαρξη του αντίστροφου συνεπάγεται

$$(\varphi(\alpha))^{-1} = \varphi(\overline{\alpha}) \quad , \quad f(\alpha, \overline{\alpha}) = 0 \tag{41}$$

δηλαδή οι παράμετροι $\overline{\alpha}$ του αντιστρόφου πρέπει να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των παραμέτρων α. Τέλος η διαλυτική ιδιότητα

$$A(BC) = (AB)C \tag{42a}$$

δηλαδή η σχέση

$$\varphi(\alpha)(\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)) = (\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta))\,\varphi(\gamma) \tag{42b}$$

αξιώνει από τις συναρτήσεις f να ικανοποιούν τη σχέση

$$f(\alpha, f(\beta, \gamma)) = f(f(\alpha, \beta), \gamma) \tag{43}$$

Συνεχείς ομάδες που ικανοποιούν τις πιο πάνω απαιτήσεις λέγονται *ομάδες Lie*.

Σαν εφαρμογή ας θεωρήσουμε την ομάδα στροφών

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

του προηγούμενου εδαφίου. Προφανώς η ομάδα είναι μονοπαραμετρική δηλαδή τάξης 1 και περιγράφεται από την παράμετρο $\alpha_1 = \vartheta$. Έχουμε

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cos\vartheta \quad , \qquad \alpha_{21} = -\alpha_{12} = \sin\vartheta$$

δηλαδή

$$f_1(\vartheta_1, \vartheta_2) = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) = f_4(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

$$f_3(\vartheta_1, \vartheta_2) = -f_2(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

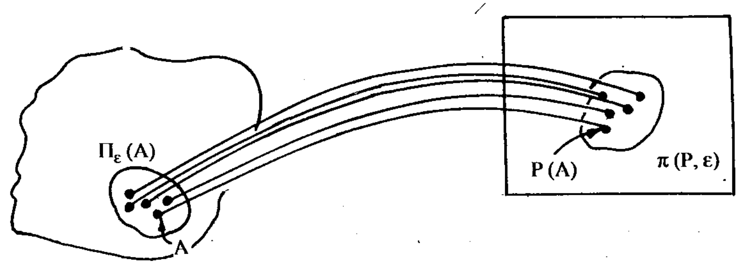
Οι συναρτήσεις αυτές προφανώς ικανοποιούν όλες τις πιο πάνω απαιτήσεις δηλαδή η ομάδα στροφών στο διδιάστατο χώρο είναι μια ομάδα Lie (μονοπαραμετρική ή τάξης 1).

Τα πιο πάνω μπορούν να γίνουν πιο σαφή αν στην ομάδα Lie εισαχθεί κατάλληλη τοπολογία. (Σε πρώτη ανάγνωση ο μη μαθηματικά σκεπτόμενος αναγνώστης μπορεί να περάσει στο τέλος του εδαφίου). Η τοπολογία ορίζεται στο χώρο S_r των παραμέτρων. Ο S_r πρέπει να είναι μετρικός χώρος. Συνήθως οι χώροι που μας ενδιαφέρουν είναι εφοδιασμένοι με εσωτερικό γινόμενο και συνεπώς είναι μετρικοί. Έτσι μ' αυτό τον τρόπο αν μας δοθεί ένα στοιχείο A της ομάδας G τότε σ' αυτή αντιστοιχούμε ένα σημείο $P(A) \in S_r$ του παραμετρικού χώρου το οποίο καλείται εικόνα του στοιχείου A. Στο πιο πάνω παράδειγμα ο χώρος S_r είναι μονοδιάστατος και αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Σε κάθε στοιχείο της ομάδας R αντιστοιχεί το σημείο της ευθείας $P(R) = \vartheta$.

Εφ' όσον ο χώρος S_r είναι μετρικός χώρος είναι δηλαδή εφοδιασμένος με την έννοια της απόστασης μεταξύ δύο σημείων, εύκολα ορίζεται η περιοχή του P με ακτίνα ε. Αυτή είναι το σύνολο των σημείων P': $\|P' - P(A)\| < \varepsilon$, ε πραγματικός μη αρνητικός. Η περιοχή αυτή θα καλείται εψιλοτική γειτονειά του σημείου P και θα συμβολίζεται με $\pi(P, \varepsilon)$. Ας θεωρήσουμε τώρα τα στοιχεία $X \in G$ με την ιδιότητα

$$X \in G \Rightarrow |P(X) - P(A)| < \varepsilon$$

Τότε θα λέμε ότι τα στοιχεία P' κείνται σε μία περιοχή $\pi_\varepsilon(A)$ της ομάδας G. Δηλαδή η περιοχή π_ε αποτελείται από όλα τα στοιχεία της ομάδας G που έχουν εικόνα P η οποία ανήκει στην περιοχή $\pi(P, \varepsilon)$ του παραμετρικού χώρου. Συμβολικά αυτό δίνεται στο σχήμα 1.



Σχ. 6.1: $\pi(P, \varepsilon)$ είναι το σύνολο των εικόνων P (x) των στοιχείων $x \in G$ τα οποία βρίσκονται στην γειτονια $\Pi_\varepsilon(A)$ του στοιχείου A.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σύνθεση (πολ/σμό) δύο στοιχείων A και B της ομάδας G και έστω ότι AB = C. Η σύνθεση αυτή είναι συνεχής ως προς το στοιχείο B αν

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) > 0 \; : (AX) \in \pi_\varepsilon(C) \Rightarrow X \in \Pi_\delta(B) \tag{44}$$

Με άλλα λόγια αν μας δοθεί $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$|P(AX) - P(C)| < \varepsilon$$

μπορούμε να βρούμε $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$|P(X) - P(B)| < \delta(\varepsilon)$$

Ανάλογα ορίζεται και η συνέχεια ως προς το στοιχείο A καθώς *και η συνέχεια* αντιστροφής στοιχείου

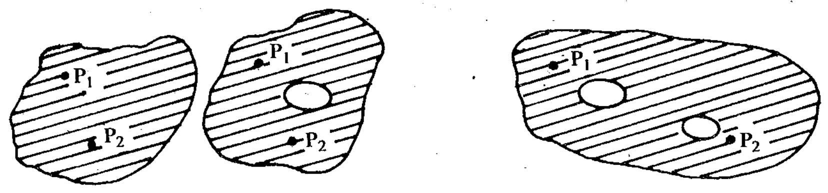
Σχ. 6.2: a) Συνέχεια πολλαπλασιασμού, δηλ. $X \in \Pi_\delta(B) \Rightarrow AX \in \Pi_\varepsilon(c)$ όπου AB = C.
b) Συνέχεια αντιστροφής στοιχείου β, δηλ. $X' \in \Pi_\delta(X) \Rightarrow x^{-1} \in \Pi_\varepsilon(X^{-1})$.

Ορισμός:

Μια ομάδα G είναι τοπολογική αν ο νόμος πολλαπλασιασμού και ο νόμος αντιστρόφου είναι συνεχείς για κάθε στοιχείο της ομάδας.

Τώρα είμαστε σε θέση να εισάγουμε την έννοια της συνεκτικότητας και της συμπαγότητας μιας συνεχούς ομάδας. Έστω ότι έχουμε δύο τυχόντα στοιχεία της ομάδας $A_1 \in G$ και $A_2 \in G$

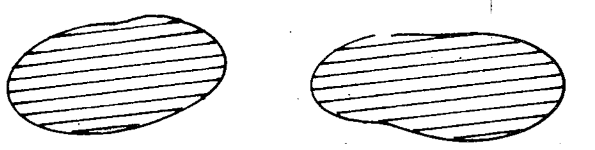
Σ' αυτά στον παραμετρικό χώρο αντιστοιχούν δύο σημεία $P_1 = P(A_1)$ και $P_2 = P(A_2)$. Αν *κάθε* γραμμή που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2 ανήκει εξ' ολοκλήρου στον παραμετρικό χώρο ο παραμετρικός χώρος λέγεται *απλά συνεκτικός ή συνεκτικός*. Αλλοιώς ο χώρος λέγεται μη συνεκτικός ή *πολλαπλά συνεκτικός*. Το σύνολο των στοιχείων της ομάδας τα οποία έχουν εικόνα στο δρόμο που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2 του παραμετρικού επιπέδου καλείται *δρόμος που ενώνει τα στοιχεία* A_1 *και* A_2. Μία ομάδα λέγεται συνεκτική αν ο παραμετρικός της χώρος είναι συνεκτικός.



(a) (b) (c)

Σχ. 6.3: Πιθανές δομές συνεκτικότητας μιας ομάδας. (a) Συνεκτική ομάδα (b) διπλά συνεκτική (μη συνεκτική) και (c) Τριπλά συνεκτική (μη συνεκτική) ομάδα.

Η έννοια της συνεκτικότητας δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια της συνέχειας. Μια τοπολογική ομάδα μπορεί να είναι συνεχής, αλλά ο παραμετρικός της χώρος μπορεί να διασπάται σε δύο ή περισσότερα τμήματα που δεν τέμνονται όπως στο σχ. 4.



Σχ. 6.4: Πιθανή δομή μιας συνεχούς αλλά μη συνεκτικής ομάδας.

Τέλος η ομάδα καλείται συμπαγής αν ο παραμετρικός της χώρος είναι συμπαγής δηλαδή αν είναι κλειστός και φραγμένος. Τούτο σημαίνει πως κάθε ακολουθία Gauchy αποτελούμενη από στοιχεία του παραμετρικού χώρου έχει σαν όριο στοιχείο το οποίο ανήκει στον παραμετρικό χώρο.

6.3 Απειροστοί Γεννήτορες Ομάδων

Όταν μία ομάδα είναι συνεκτική είναι δυνατό να γεννηθεί ένα οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας με μια συνεχή μεταβολή των παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ π.χ. η ομάδα SO(n) έχει αυτή την ιδιότητα ενώ η ομάδα O(n) δεν την έχει εφ' όσον δεν είναι δυνατόν να περάσουμε κατά συνεχή τρόπο από μετασχηματισμούς με ορίζουσα +1 σε μετασχηματισμούς με ορίζουσα −1. Δηλαδή η ομάδα O(n) στον παραμετρικό χώρο αποτελείται από δύο μη συνεκτικά τμήματα όπως δίνονται σχηματικά στο σχ. 4. Το ένα κομμάτι μόνο συνδέεται κατά τρόπο συνεχή με τις τιμές $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ (ταυτοτικό στοιχείο) και αυτό συνδέεται με την ομάδα SO(n). Μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα κομμάτια θεωρώντας το κομμάτι που περιέχει το E και παίρνοντας το γινόμενο των στοιχείων της ομάδας που αντιστοιχούν σ' αυτό με *ένα* στοιχείο από κάθε άλλο κομμάτι. Π.χ. στην περίπτωση της ομάδας O (2) μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα στοιχεία θεωρώντας τα στοιχεία

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

της ομάδας SO(2) και να τα πολλαπλασιάσουμε με το στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με ορίζουσα −1. (Το στοιχείο αυτό δεν γεννιέται από το ταυτοτικό στοιχείο με συνεχή μεταβολή της παραμέτρου ϑ).

Η ομάδα O(n) είναι παράδειγμα *ανάμεικτης συνεχούς ομάδας* δηλαδή χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο συνεχών παραμέτρων και ένα σύνολο διακρίσιμων παραμέτρων που χαρακτηρίζουν τα διάφορα μη συνεκτικά κομμάτια. Από το πιο πάνω παράδειγμα φαίνεται πως η ομάδα O(n) χαρακτηρίζεται από $r = (1/2)\, n\, (n-1)$ συνεχείς παραμέτρους και το σημείο της ορίζουσας του στοιχείου.

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχείο $A \in G$ τέτοιο ώστε

$$A = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \varphi(\alpha), \quad E = \varphi(0)$$

και ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε μεταβολές των παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ γύρω από το μηδέν, δηλαδή αναπτύσσουμε το στοιχείο A γύρω από το ταυτοτικό στοιχείο. Έχουμε

$$A = \varphi(\alpha) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha_k=0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_k \alpha_\ell \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k}\right)_{\alpha_k=0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_\ell}\right)_{\alpha_\ell=0} + \ldots \qquad (45)$$

Θέτουμε

$$X_k = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha_k=0} \quad , \quad J_k = -i\,X_k \quad , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r \tag{46}$$

οπότε βρίσκουμε ότι

$$A = E + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_k \alpha_\ell X_k X_\ell + O(\alpha^3) \tag{47a}$$

'Ομοια

$$A^{-1} = E - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k X_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_k \alpha_\ell X_k X_\ell + O(\alpha^3) \tag{47b}$$

Οι τελεστές X_k ή J_k λέγονται απειροστοί γεννήτορες της ομάδας. Συνήθως στη Φυσική χρησιμοποιούνται οι γεννήτορες J_k.

'Εστω τώρα δύο στοιχεία A και B που ορίζονται ως

$$A = \varphi(\alpha), \quad B = \varphi(\beta) \quad \text{και} \quad A^{-1} = \varphi(\overline{\alpha})$$

Τότε

$$ABA^{-1} = A\,\{E + \sum_{\ell} \beta_\ell X_\ell\}\,A^{-1} + \ldots$$

$$= E + \sum_{\ell} \beta_\ell\, A X_\ell A^{-1} + \ldots$$

Προφανώς $AX_\ell A^{-1} = Y_\ell$ απειροστός τελεστής. Δηλαδή

$$ABA^{-1} = E + \sum_{\ell} \beta_\ell Y_\ell + O(\beta^2) \tag{48}$$

όμως για αρκετά μικρές τιμές των παραμέτρων

$$AX_\ell A^{-1} = (E + \sum_{k} \alpha_k X_k)\, X_\ell (E - \sum_{m} \alpha_m X_m) + O(\alpha^2$$

ή

$$Y_\ell - X_\ell = \sum_{k} \alpha_k (X_k X_\ell - X_\ell X_k) + O(\alpha^2) \tag{49}$$

Επειδή όμως τα στοιχεία Y_ℓ και X_ℓ είναι απειροστά η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι αν αγνοήσουμε $O(\alpha^2)$ και $O(\beta^2)$ η ποσότητα $X_kX_\ell - X_\ell X_k$ θα πρέπει να μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των απειροστών στοιχείων X_m δηλαδή

$$[X_k, X_\ell] = \sum_{m} \tilde{C}^m_{k\ell} X_m \tag{50}$$

Οι ποσότητες $\tilde{C}^m_{k\ell}$ λέγονται *σταθερές δομής της ομάδας Lie*

Οι σταθερές δομής υπακούουν στις εξής σχέσεις:

1. $\tilde{C}^m_{k\ell} = -\tilde{C}^m_{k\ell}$ (αντισυμμετρικότητα)

2. $\sum_{n} (\tilde{C}^n_{k\ell}\tilde{C}^p_{mn} + \tilde{C}^n_{\ell m}\tilde{C}^p_{kn} + \tilde{C}^n_{mk}\tilde{C}^p_{\ell n}) = 0$ (ταυτότητα Jacobi)

Οι πιο πάνω σχέσεις είναι συνέπεια του γεγονότος ότι οι γεννήτορες είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και ικανοποιούν τις εξής σχέσεις

$$[X_k, X_\ell] = -[X_\ell, X_k] \tag{51}$$

$$[[X_k, X_\ell], X_m] + [[X_\ell, X_m], X_k] + [[X_m, X_k], X_\ell] = 0 \tag{52}$$

Οι σχέσεις (50), (51) και (52) ορίζουν μια *άλγεβρα Lie* όταν ως πολλαπλασιασμός ληφθεί ο μεταθέτης δηλαδή αν

$$A \underset{op}{*} B \equiv [A, B]$$

Σαν ένα απλό παράδειγμα άλγεβρας Lie αναφέρουμε το γνωστό μας εξωτερικό γινόμενο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (50), (51) καθώς και η ταυτότητα του Jacobi. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τους γεννήτορες J_k δηλαδή

$$[J_k, J_\ell] = \sum_{m} C^m_{k\ell} J_m\,, \quad C^m_{k\ell} = \text{σταθερα δομής} \tag{53}$$

$$[J_k, J_\ell] = -[J_\ell, J_k] \tag{54}$$

$$[[J_k, J_\ell], J_m] + [[J_\ell, J_m], J_k] + [[J_m, J_k], J_\ell] = 0 \tag{55}$$

Τα στοιχεία της ομάδας τα οποία βρίσκονται στο ίδιο φύλλο με το ταυτοτικό στοιχείο μπορούν να προκύψουν όταν είναι γνωστά τα απειροστά στοιχεία J_ℓ, $\ell = 1, 2, ..., r$. Τα στοιχεία που βρίσκονται σε άλλα φύλλα προκύπτουν από το φύλλο της ταυτότητας με κατάλληλο πολλαπλασιασμό με κατάλληλα διακρίσιμα στοιχεία.

Έστω λοιπόν το στοιχείο A_k το οποίο γεννιέται από την επιλογή των παραμέτρων

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_k, & i = k \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

δηλαδή

$$A_k(\alpha_k) = \varphi(0, 0, ..., 0, \alpha_k, 0, 0, ... 0$$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω για απειροστές τιμές της α_k παίρνουμε

$$A_k(\varepsilon) \approx E + i\varepsilon J_k, \qquad \varepsilon = \text{απειροστό}$$

$$\varphi(0, 0, ..., N\varepsilon, 0, ... 0) \approx (E + i\varepsilon J_k)^N$$

Θεωρούμε τώρα το όριο όταν

$$\varepsilon \to 0, \qquad N \to \infty \qquad \varepsilon N = \alpha_k$$

και παίρνουμε

$$A_k = \varphi(0, 0, ... 0, \alpha_k, 0, ... 0) = \lim_{N\to\infty} (E + i\frac{\alpha_k}{N} J_k)^N \equiv e^{i\alpha_k J_k}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή διαδοχικά, για $k = 1, 2, ..., r$ παίρνουμε

$$A = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) = e^{i\alpha_r J_r} e^{i\alpha_{r-1} J_{r-1}} ... e^{i\alpha_k J_k} ... e^{i\alpha_1 J_1} \tag{56}$$

Με την υπόθεση ότι οι τελεστές δρουν με τη σειρά της εξ(56) γράφουμε

$$A = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{r} i\alpha_k J_k\right\} \tag{57}$$

Έτσι όλα τα στοιχεία της ομάδας Lie μπορούν να προκύψουν από τους απειροστούς τελεστές J_k δίνοντας κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Γι' αυτό το λόγο οι τελεστές J_k λέγονται *γεννήτορες της ομάδας.*

Τα απειροστά στοιχεία $A_k(\varepsilon_k)$ αποτελούν μια Αβελιανή υποομάδα. Πραγματικά

$$A_k(\varepsilon_k) A_\ell(\varepsilon_\ell) \approx (E + i\varepsilon_k J_k)(E + i\varepsilon_\ell J_\ell) \approx E + i(\varepsilon_k J_k + \varepsilon_\ell J_\ell)$$

δηλαδή

$$A_\ell(\varepsilon_\ell) A_k(\varepsilon_k) \approx E + i(\varepsilon_\ell J_\ell + \varepsilon_k J_k) \approx A_k(\varepsilon_k) A_\ell(\varepsilon_\ell) \tag{58}$$

(αγνοώντας απειροστά δεύτερης τάξης)

Θα πρέπει να υπογραμμισθεί ότι ούτε οι παράμετρες μιας ομάδας ούτε οι γεννήτορες αυτής καθορίζονται μονοσήμαντα. Υπάρχει πάντως μια τουλάχιστον τέτοια επιλογή η οποία είναι αρκετή για να περιγραφεί πλήρως η ομάδα. Παρ' όλο που συνήθως ξεκινάει κανείς από τους γεννήτορες και κατασκευάζει ύστερα τους πεπερασμένους μετασχηματισμούς, για να κατανοήσουμε τα πιο πάνω θα δώσουμε μερικά παραδείγματα που ακολουθούν αντίθετο δρόμο.

Παράδειγμα 1

Θα βρούμε τους γεννήτορες της ομάδας O(2) όταν είναι γνωστοί οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, \qquad R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta & \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{bmatrix}, \qquad J = -i\left|\frac{dR}{d\theta}\right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y \tag{60}$$

όπου σ_y ο γνωστός πίνακας του Pauli. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\exp\{i\vartheta J\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} J_n$$

αλλά

$$J^n = \begin{cases} (\varepsilon), & n = \text{αρτιος} \\ J, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

δηλαδή

$$\exp\{i\vartheta J\} = (\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!} + iJ\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= (\varepsilon)\cos\vartheta + i J \sin\vartheta = R(\vartheta)$$

δηλαδή

$$R(\vartheta) = \exp\{i\vartheta\sigma_y\} \tag{61}$$

δηλ. ο πίνακας σ_y του Pauli είναι γεννήτορας της ομάδας O(2).

Επίσης βρίσκουμε ότι

$$X = \left|\frac{dR}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\{\vartheta X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vartheta^n}{n!} X^n$$

Αλλά

$$X^2 = -(\varepsilon), \quad X^3 = -X, \quad X^4 = (\varepsilon), \quad X^5 = X \quad \text{κ.ο.κ.}$$

δηλαδή

$$X^{2n} = (-1)^n (\varepsilon) \quad \text{και} \quad X^{2n+1} = (-1)^n X$$

οπότε

$$\exp\{\vartheta X\} = (\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!} + X \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!} = R(\vartheta)$$

δηλαδή

$$R(\vartheta) = \exp\{\vartheta X\} \tag{62}$$

Η αναπαράσταση (61) πλεονεκτεί κατά το ότι ο γεννήτορας είναι ερμιτειανός πίνακας.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε το μετασχηματισμό των αξόνων

$$L: \quad x \to x - a \tag{63}$$

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός T_a τον οποίο αυτός γεννάει πάνω στον συναρτησιακό χώρο f(x). Σύμφωνα με το εδ. 2.2 έχουμε

$$T_a f(x) = f(L^{-1} x) = f(x+a) \tag{64}$$

Ο απειροστός μετασχηματισμός είναι

$$T_\varepsilon f \approx f + i\,\varepsilon \left|\frac{df}{da}\right|_{a=0} = f + \varepsilon \frac{df}{dx} = (f + i\,\varepsilon\, J)\, f$$

δηλαδή ο γεννήτορας είναι

$$J = -i \frac{d}{dx} = \frac{1}{\hbar} p_x \quad , \quad p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \tag{65}$$

όπου p_x είναι ο τελεστής της ορμής. Επίσης:

$$\exp\{i\,a\,J\}\, f(x) = \exp\left\{a \frac{d}{dx}\right\} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f(x+a)$$

δηλαδή

$$T_a = \exp\{i\,a\,J\} = \exp\left\{i\,a \frac{p_x}{\hbar}\right\} \tag{66}$$

Ανάλογα

$$T_a = \exp\{a\,X\} \quad , \quad X = \frac{d}{dx} \tag{67}$$

Οποιοιδήποτε από τους τελεστές J, X και p_x μπορούν να θεωρηθούν ως γεννήτορες των τελεστών μεταφοράς (με αντισταθμιστικούς παράγοντες στο εκθετικό). Συνήθως στην κβαντομηχανική θεωρούνται σαν γεννήτορες οι τελεστές ορμής. Στον τρισδιάστατο χώρο οι μετασχηματισμοί μεταφοράς είναι·

$$\vec{r} \to \vec{r} - \vec{a} \tag{68}$$

(ισοδυναμεί με μεταφορά συστήματος κατά $\vec{a}$)

Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί $T_{\vec{a}}$ είναι

$$T_{\vec{a}} = \exp\left\{i \frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{\hbar}\right\} \quad \text{ή} \quad T_{\vec{a}} = \exp\{i\,\vec{J}\cdot\vec{a}\} \tag{69}$$

όπου

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \qquad \vec{J} = \frac{1}{i} \vec{\nabla} \tag{70}$$

Παράδειγμα 3

Θα θεωρήσουμε την ομάδα O(2) του πιο πάνω παραδείγματος δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(-\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{71}$$

Θα επιχειρήσουμε να βρούμε το μετασχηματισμό T_θ που γεννάει πάνω στο συναρτησιακό χώρο. Έχουμε

$$T_\theta f(x,y) = f(\tilde{x},\tilde{y}) \qquad \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = R(\vartheta)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{72}$$

ή

$$T_\vartheta f(x,y) = f((\cos\vartheta x + \sin\vartheta y), (-\sin\vartheta x + \cos\vartheta y))$$

Ο απειροστός μετασχηματισμός είναι

$$T_\varepsilon f(x,y) \approx f(x,y) + \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{d\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial\tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0}$$

$$\approx f(x,y) + \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}(-x)\right)$$

$$T_\varepsilon f(x,y) = \left(I + \varepsilon\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) f(x,y)$$

$$T_\varepsilon f(x,y) = (I - \varepsilon X) f(x,y) = (I - i\varepsilon J) f(x,y) \tag{73}$$

όπου

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad J = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{74}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας σ_y δεν είναι παρά μία αναπαράσταση του πιο πάνω τελεστή J αν διαλέξουμε σαν βάση $|1\rangle \to x$ και $|2\rangle \to y$ καθ' όσον

$$J|1\rangle = i|2\rangle \quad \text{και} \quad J|2\rangle = -i|1\rangle$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$T_\varepsilon \approx I - i\varepsilon\frac{L_{xy}}{\hbar} \quad , \quad L_{xy} = \frac{\hbar}{i}\left\{x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right\} \tag{75}$$

Συνεπώς ο πεπερασμένος τελεστής στροφής κατά γωνία ϑ είναι

$$T_\vartheta = \exp\left\{-i\vartheta\frac{L_{xy}}{\hbar}\right\} \tag{76}$$

(στροφή συστήματος κατά γωνία ϑ στο επίπεδο xy)

Ο τελεστής L_{xy} καλείται τελεστής στροφορμής στο επίπεδο xy. Στον τρισδιάστατο χώρο στροφή πάνω στο επίπεδο xy είναι το ίδιο με στροφή γύρω από τον άξονα των z.

Στην παραγωγή της εξ(76) υποθέσαμε στροφή των συντεταγμένων κατά γωνία $-\vartheta$ δηλαδή *στροφή του συστήματος* κατά γωνία ϑ. Συνεπώς

$$T_\vartheta = \exp\left\{i\vartheta\frac{L_{xy}}{\hbar}\right\} \qquad \begin{pmatrix}\text{Στροφή των αξόνων}\\ \text{xy κατα γωνία } \vartheta\end{pmatrix} \tag{76'}$$

Τα παραδείγματα 1 και 3 εύκολα μπορούν να γενικευθούν στην περίπτωση των 3 διαστάσεων. Πρώτα πρώτα θα πρέπει να καθορισθεί ένα βολικό σύστημα παραμέτρων (π.χ. οι γωνίες Euler) και ύστερα να κατασκευαστεί από τις απειροστές στροφές η πεπερασμένη στροφή R (α, β, γ) όπου α, β, γ οι γωνίες του Euler. Αυτό θα γίνει λεπτομερώς στα επόμενα. Προς το παρόν περιοριζόμαστε να παρατηρήσουμε ότι οι γεννήτορες είναι

$$L_{ij} = \frac{\hbar}{i}\left\{x_i\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \quad , \quad x_i, x_j = x, y, z \tag{77a}$$

Προφανώς

$$L_{ij}^{+} = L_{ij} \quad \text{και} \quad L_{ij} = -L_{ji} \tag{77b}$$

Οι εξισώσεις (77α) και (77b) γενικεύονται και στις n διαστάσεις με συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6.4 Η Ομάδα O (3) ή O_I (3)

Η ομάδα αυτή αποτελεί μερική περίπτωση των μετασχηματισμών O(n) του εδ. 6.1. Καθώς είδαμε στο εδ. 6.1 η ομάδα αυτή χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους καθ' όσον η σχέση ορθογωνιότητας

$$(O^T)(O) = (\varepsilon) \tag{78a}$$

γράφεται αναλυτικά ως εξής

$$\sum_k (O)_{ik}(O)_{jk} = \delta_{ij} \qquad i \le j \tag{78b}$$

Έτσι έχουμε 9 εν συνόλων στοιχεία τα οποία ικανοποιούν 6 συνθήκες της μορφής (78a) δηλαδή

$$d(O(3)) = 3 \qquad \det(O) = \pm 1$$

Καθώς ήδη αναφέραμε έχουμε δύο είδη μετασχηματισμών τους γνήσιους ή τέλειους (proper) με det (O) = + 1 και τους μη γνήσιους ή ατελείς (improper) με det (O) = −1. Οι γνήσιοι μετασχηματισμοί που συμβολίζονται με R(3) ή SO(3) αντιστοιχούν σε στροφές στον τρισδιάστατο χώρο. Οι μη γνήσιοι προκύπτουν από τους γνήσιους με πολλαπλασιασμό με τη διακρίσιμη συμμετρία της αναστροφής στον τρισδιάστατο χώρο I(3)

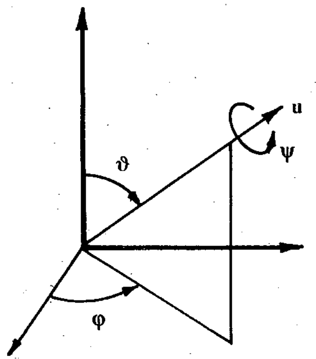
$$I(3):\ \vec{r} \to -r$$

δηλαδή

$$O_I(3) = R(3) \otimes I(3) \quad ή \quad O_I(3) = SO(3) \otimes I(3)$$

Με άλλα λόγια η δομή της ομάδας $O_I(3)$ ή O(3) προκύπτει από εκείνη των ομάδων SO(3) και I(3).

Σύμφωνα με τα πιο πάνω ο αριθμός των παραμέτρων των ομάδων O(3) και SO(3) είναι ο ίδιος. Ο αριθμός των παραμέτρων της ομάδας SO(3) βρίσκεται αν υπολογιστούν πλήρως οι παράμετροι που χρειάζονται για να προσδιορισθεί τυχούσα στροφή γύρω από ένα τυχόντα άξονα $\vec{u}$. Ο άξονας αυτός καθορίζεται από δύο γωνίες θ και φ. Η δε στροφή γύρω από τον άξονα αυτόν καθορίζεται με μία γωνία ψ όπως στο σχ. 5.



Σχ. 6.5: Οι παράμετροι ϑ, φ, ψ που καθορίζουν στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα u. Ο 'Αξονας περιγράφεται από τις γωνίες ϑ και φ.

Οι τρεις παράμετροι που χαρακτηρίζουν τυχούσα στροφή της ομάδας SO(3) μπορούν να καθοριστούν κατά πολλούς τρόπους (ένας από αυτούς δίνεται στο σχήμα 5). Ο καλύτερος τρόπος είναι οι λεγόμενες γωνίες του Euler. Οι γωνίες αυτές ορίζονται ως εξής.

1. Στροφή γύρω από τον άξονα των z κατά γωνία α. Στο τέλος οι άξονες είναι οι

$$x', y' \quad και \quad z' = z$$

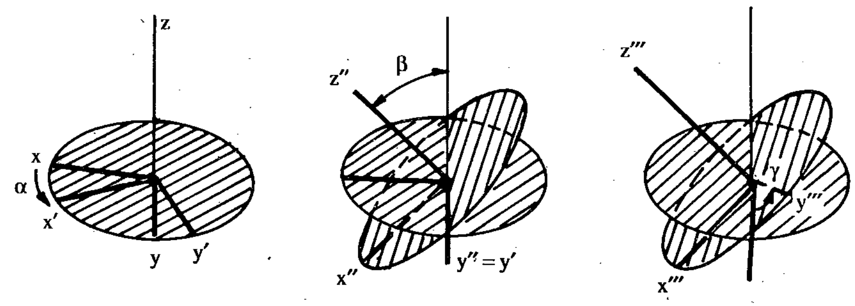
2. Στροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα των y'. Στο τέλος οι άξονες είναι

$$x'', \quad y'' = y' \quad και \quad z''$$

3. Στροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα των z''. Στο τέλος οι άξονες είναι

$$x''', y''' \quad και \quad z''' = z''$$

Οι διαδοχικές αυτές στροφές παρουσιάζονται στο σχ. 6.



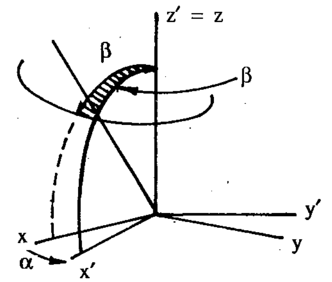
Σχ. 6.6: Διαδοχικές στροφές των αξόνων κατά τις γωνίες Euler.

Ο 3 × 3 πίνακας στροφής γύρω από τους άξονες z, y', z'' είναι αντιστοίχως $R_z(\alpha)$, $R_{y'}(\beta)$ και $R_{z''}(\gamma)$ και η ολική στροφή Euler κατά γωνία α, β, γ είναι

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z''}(\gamma)\, R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha) \qquad (78)$$

Η στροφή R(α,β,γ) μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση στροφών γύρω από τους αρχικούς άξονες. Παρατηρούμε (σχ.7) ότι

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(-\alpha)$$



Σχ. 6.7: Η στροφή $R_{y'}(\beta)$ είναι ισοδύναμη με τις 3 στροφές $R_z(\alpha)$, $R_y(\beta)$, $R_z(-\alpha)$.

Όμοια

$$R_{z''}(\gamma) = R_{y'}(\beta)\, R_{z'}(\gamma)\, R_{y'}(-\beta) \quad , \quad R_{z'}(\gamma) = R_z(\gamma)$$

$$R_{z''}(\gamma) = \underbrace{R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(-\alpha)}_{R_{y'}(\beta)}\, R_z(\gamma)\, \underbrace{R_z(\alpha)\, R_y(-\beta)\, R_z(-\alpha)}_{R_{y'}(-\beta)}$$

Συνεπώς η ολική στροφή είναι

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma) \tag{79}$$

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $R_n(\vartheta)\, R_n(-\vartheta) = I$ και το ότι δύο διαδοχικές στροφές γύρω από τον ίδιο άξονα αλληλομετατίθενται, δηλαδή

$$R_u(\vartheta)\, R_u(\varphi) = R_u(\varphi)\, R_u(\vartheta) \qquad (u = \text{τυχών αξονας})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το παράδειγμα 1 βρίσκουμε

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{80}$$

όπου $\varphi = \alpha$ και γ αντίστοιχα

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες της εξ.(79) βρίσκουμε

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & -\sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{81}$$

Οι γεννήτορες 3×3 πίνακες βρίσκονται θεωρώντας απειροστές στροφές γύρω από τους άξονες x,y,z. Εφ' όσον

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$\left|\frac{d\, R_z(\varphi)}{d\,\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Άρα

$$J_z = \left| -i\,\frac{d\, R_z}{d\,\varphi} \right|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εργαζόμενοι όμοια για τους άλλους άξονες βρίσκουμε

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Πράγμα που άλλωστε μπορεί να προκύψει και απ' ευθείας από τους αντίστοιχους απειροστούς τελεστές (εξ. 77). Έχουμε

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\, J_z \\ [J_y, J_z] &= i\, J_x \quad \Leftrightarrow \quad [J_i, J_j] = i\, \varepsilon_{ijk}\, J_k\} \\ [J_z, J_x] &= i\, J_y \end{aligned} \tag{83a}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \;, & \text{αν} \quad (ijk) \quad \text{αρτια μεταθεση της } (123) \\ -1 \;, & \text{αν} \quad (ijk) \quad \text{περιττή μεταθεση της } (123) \\ 0 \;, & \text{αλλοιώτικα} \end{cases} \tag{83b}$$

Σύμφωνα εξ' άλλου με την εξ (76') οι αντίστοιχες μη απειροστές στροφές των αξόνων παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} R_z(\alpha) &= \exp\left(i\, \alpha\, \frac{L_z}{\hbar} \right) \\ R_y(\beta) &= \exp\left(i\, \beta\, \frac{L_y}{\hbar} \right) \\ R_z(\gamma) &= \exp\left(i\, \gamma\, \frac{L_z}{\hbar} \right) \end{aligned} \tag{84}$$

όπου L_x, L_y, L_z είναι οι τελεστές στροφορμής γύρω από τους άξονες x, y και z αντίστοιχα. Συνεπώς η εξίσωση (16) γράφεται

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha L_z/\hbar}\, e^{i\beta L_y/\hbar}\, e^{i\gamma L_z/\hbar} \tag{85}$$

Η εξίσωση (85) παριστάνει μια αυθαίρετη στροφή $R(\alpha,\beta,\gamma)$ του συστήματος αξόνων κατά τις γωνίες Euler α,β,γ και εκφράζει αυτή σαν συνάρτηση των τελεστών της στροφορμής L_x, L_y, L_z (είναι μερική περίπτωση της εξ.(56)).

Παρατηρούμε ότι τόσο οι πίνακες J_x, J_y, J_z όσο και οι τελεστές L_x, L_y, L_z υπακούουν όμοιους νόμους αντιμετάθεσης. Πράγματι εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \qquad (86)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες J_x, J_y, J_z είναι ερμιτιανοί. Αλλά και οι τελεστές L_x, L_y, L_z είναι επίσης ερμιτιανοί εφ' όσον οι συναρτήσεις πάνω στις οποίες δρουν ικανοποιούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (πράγμα απαραίτητο για διαφορικούς τελεστές).

Θα πρέπει να τονισθεί ότι η εξίσωση (85) προέκυψε από μια σειρά απειροστών καθαυτό στροφών. Κατά συνέπεια ο τελεστής R(α,β,γ) με κατάλληλες τιμές των παραμέτρων α, β και γ γεννάει οποιαδήποτε καθ' αυτό στροφή. Δεν μπορεί να γεννήσει ατελείς ορθογώνιους μετασχηματισμούς καθ' όσον αυτοί βρίσκονται σε άλλο φύλλο από το ταυτοτικό στοιχείο και δεν προσεγγίζονται από αυτό με απειροστούς μετασχηματισμούς. Συνεπώς η ομάδα O(3) δεν είναι ομάδα Lie καθ' όσον περιγράφεται από τις παραμέτρους

$$\alpha, \beta, \gamma, d = \det(O) \qquad (87)$$

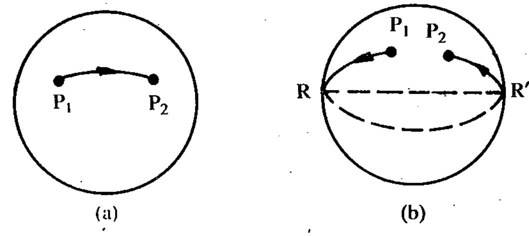
Η παράμετρος όμως d, παίρνει τιμές +1 ή −1 που καθορίζονται από την ομάδα I (3) ≡ {(e), − (e)}. Με άλλα λόγια ο τελεστής R(α,β,γ) γεννάει μόνο την ομάδα R(3) ή SO(3), που είναι ομάδα Lie.

Παρατηρούμε επίσης ότι η ομάδα R(3) δεν είναι απλά συνεκτική. Τούτο φαίνεται από την εξής αναπαράσταση του παραμετρικού τρισδιάστατου χώρου S_3. Κάθε στροφή προσδιορίζεται πλήρως από τον άξονα στροφής $\vec{u}$ και τη γωνία στροφής ψ. Συμφωνούμε λοιπόν να την παριστάνουμε με ένα διάνυσμα $\vec{\omega}$ το οποίο έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του $\vec{u}$ και μέτρο τη γωνία ψ. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία στροφής ψ μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ −π και π, το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{\omega}$ που αντιστοιχεί σ' όλες τις στροφές κείται μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας π. Κάθε στοιχείο της ομάδας R(3) εκτός από εκείνα που αντιστοιχούν σε γωνία στροφής ψ = π ευρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία της σφαίρας $|\vec{\omega}| < \pi$. Επειδή όμως οι στροφές γύρω από τον άξονα $\vec{u}$ κατά γωνίες ψ = π και ψ = −π δεν είναι από φυσικής πλευράς διακρίσιμες μεταξύ τους (δηλαδή αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της ομάδας R(3)) θα πρέπει κάπως να ταυτίσουμε τα αντιδιαμετρικά στοιχείατης σφαίρας $|\vec{\omega}| = \pi$. Συνεπώς θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι δύο αντιδιαμετρικά σημεία της

σφαίρας αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της ομάδας R(3). Αυτό έχει μεγάλες συνέπειες όσον αφορά τη συνεκτικότητα της ομάδας R(3). Πράγματι έστω δύο στοιχεία g_1 και g_2 της ομάδας R(3) στα οποία αντιστοιχούν οι εικόνες P_1 και P_2 του παραμετρικού χώρου. Τα σημεία P_1 και P_2 συνδέονται με δύο διαφορετικούς δρόμους.

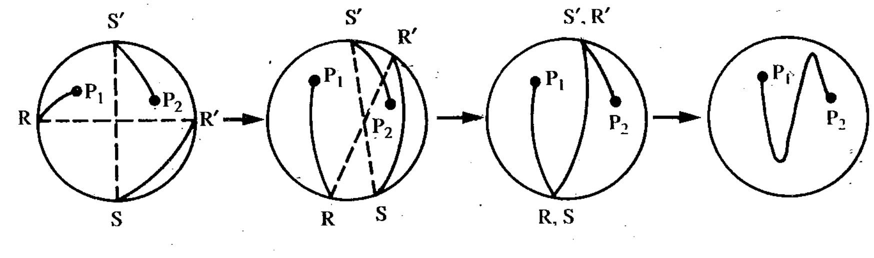
α) Κατ' ευθείαν από το P_1 στο P_2

β) Με ένα δρόμο που πάει από το P_1 στο σημείο R της επιφάνειας της σφαίρας κάνει ένα πήδημα στο αντιδιαμετρικό σημείο R' και τότε πάει στο P_2 όπως στο σχήμα 8.



Σχ. 6.8: Πιθανοί δρόμοι που συνδέουν τα σημεία P_1 και P_2.

Ο δρόμος (b) δεν μπορεί να συμπέσει με το δρόμο (a) όπως και αν αυτός παραμορφωθεί κατά τρόπο συνεχή καθ' όσον μετακινώντας το σημείο R μετακινείται αντίστοιχα και στο σημείο R'. Όμως κάθε άλλος δρόμος μπορεί να παραμορφωθεί κατάλληλα ώστε να συμπέσει με έναν από τους πιο πάνω δρόμους. Για το δρόμο $P_1RR'SS'P_2$ φαίνεται παραστατικά στο σχήμα (9).



Σχ. 6.9: Συνεχής παραμόρφωση ενός δρόμου με δυο πηδήματα που καταλήγει στο δρόμο τύπου (a) (άρτιος αριθμός πηδημάτων).

Όμοια τυχών δρόμος με τρία αντιδιαμετρικά πηδήματα καταλήγει στο δρόμο (b) (περιττός αριθμός πηδημάτων).

Σύμφωνα με όσα είπαμε στο εδ. 6.2 η ομάδα R(3) δεν είναι απλά συνεκτική. Ανάλογα ισχύουν σε χώρους με περισσότερες από τρεις διαστάσεις.

6.5 Ειδική Μοναδιακή Ομάδα SU(2)

Στο εδάφιο 6.1 §δ αναφέραμε και ορίσαμε τις ειδικές μοναδιακές ομάδες SU(n). Εδώ θα ασχοληθούμε κάπως λεπτομερέστερα με την ειδική περίπτωση της ομάδας SU(2). 'Εχουμε

$$\begin{aligned} (U)^{+}(U) &= \varepsilon \\ \det(U) &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \sum_k U^*_{ki} U_{kj} = \delta_{ij} \quad , \quad i \le j \tag{88}$$

Από τη σχέση (88) εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα του εδ. 6.1 δηλαδή ο αριθμός των παραμέτρων της ομάδας U(n) είναι n^2. Συνεπώς ο αριθμός των παραμέτρων που προσδιορίζει πλήρως την ομάδα SU(n) είναι $d(n) = n^2 - 1$. Για $n = 2$ $d(2) = 3$ και για $n = 3$ $d(3) = 8$. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των παραμέτρων της ομάδας SU(2) είναι ο ίδιος με τον αριθμό των παραμέτρων της ομάδας O(3). Για $n = 2$ ο πίνακας U γράφεται

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \text{ μιγαδικοί αριθμοί}$$

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$|a|^2 + |c|^2 = 1$$

$$|b|^2 + |d|^2 = 1$$

$$a^*b + c^*d = 0$$

Επίσης η σχέση $\det(U) = 1$ συνεπάγεται $ad - bc = 1$.
Οι σχέσεις αυτές συνεπάγονται

$$d = a^*, \quad c = -b^*, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

'Αρα

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Συνεπώς μπορούμε να γράφουμε

$$a = \cos\vartheta\, e^{i\alpha}, \quad b = \sin\vartheta\, e^{i\beta}, \quad \alpha, \beta = \text{πραγματικοί}$$

οπότε

$$U(\alpha, \beta, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\, e^{i\alpha} & \sin\vartheta\, e^{i\beta} \\ -\sin\vartheta\, e^{-i\beta} & \cos\vartheta\, e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \tag{89}$$

δηλαδή α,β και ϑ είναι μια δυνατή επιλογή των τριών παραμέτρων της SU(2) η οποία ικανοποιεί την (37b), δηλαδή

$$U(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon)$$

Είδαμε πιο πάνω ότι οι ομάδες SO(3) και SU(2) χαρακτηρίζονται από τον ίδιο αριθμό παραμέτρων (γεννητόρων). Υπάρχει καμμία σχέση μεταξύ τους; Υπενθυμίζεται ότι η ομάδα SO(3) αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$ ενώ η ομάδα SU(2) αφήνει την ποσότητα $|u|^2 + |\upsilon|^2$ αναλλοίωτη. Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$(M) = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \tag{90}$$

και το μετασχηματισμό ομοιότητας

$$M \to M' = UMU^{+} \quad \text{όπου} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{μέ} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

ή

$$\begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \tag{91}$$

Επειδή ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί την ορίζουσα έχουμε

$$\det(M') = \det(M) \Rightarrow -(x^2 + y^2 + z^2) = -((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) \tag{92}$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός (U) διατηρεί επίσης την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$ αναλλοίωτη όπως και ο Θ(3).

Με την εξίσωση (91) μπορούμε να εκφράσουμε τα x′, y′, z′ σαν συνάρτηση των x, y, z και των παραμέτρων a και b της ομάδας SU(2). 'Εχουμε

$$x' = \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})\, x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})\, y - (ab + a^*b^*)\, z$$

$$y' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})\, x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})\, y - i\,(ab - a^*b^*)\, z \tag{93}$$

$$z' = (a^*b + ab^*)\, x + i\,(a^*b - ab^*)\, y + (aa^* - bb^*)\, z$$

Όλοι οι πιο πάνω συντελεστές των x, y, z είναι πραγματικοί. Η εξίσωση (92) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός (93) είναι ορθογώνιος. Σ' αυτόν αντιστοιχεί ο ορθογώνιος πίνακας

$$(O) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & -\frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & -i(ab - a^*b^*) \\ (a^*b + ab^*) & i(a^*b - ab^*) & (aa^* - bb^*) \end{pmatrix} \quad (94)$$

Συνεπώς αν μας δοθεί ένας πίνακας ειδικός μοναδιακός, SU(2), κατασκευάζεται από αυτόν ένας ορθογώνιος πίνακας 3×3 τέτοιος ώστε $\det(O) = 1$ δηλαδή

$$U(a, b) \to SO(3)$$

Ειδικότερα

i) αν

$$a = \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad b = 0$$

$$(a^2 + a^{*2} = 2\cos\alpha \quad , \quad a^2 - a^{*2} = 2i\sin\alpha)$$

παίρνουμε

$$U(e^{i\alpha/2}, 0) = \begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

ii) αν

$$a = \cos\frac{\beta}{2} \quad , \quad b = \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\left(a^2 + b^2 = 1 = a^{*2} + b^{*2} = 1 \quad , \quad ab = a^*b = \frac{\sin\beta}{2}\right)$$

παίρνουμε

$$U\left(\cos\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\beta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (96)$$

Συνεπώς

$$U\left(i\frac{\alpha}{2}, 0\right) U\left(\cos\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\beta}{2}\right) U\left(i\frac{\gamma}{2}, 0\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin\frac{\beta}{2} e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos\frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{bmatrix} \to R(\alpha, \beta, \gamma) \quad (97)$$

όπου R(α,β,γ) ο πίνακας στροφής της εξίσωσης (81) που αντιστοιχεί σε γωνίες Euler α,β,γ.

Ποια είναι η έννοια της αντιστοιχίας αυτής; Πρώτα πρώτα παρατηρούμε ότι ο πίνακας 2×2 της αντιστοιχίας (97) έχει τη γενική μορφή του πίνακα SU(2) όπως δίνεται από την εξίσωση (89). Δεύτερον βλέπουμε ότι αν δοθεί ο πίνακας SU(2) μπορούμε σ' αυτόν να αντικαταστήσουμε ένα πίνακα R(3). Βλέπουμε τέλος ότι ο ταυτοτικός πίνακας του R(3) ικανοποιεί τη σχέση

$$R(0, 0, 0) = R(0, 2\pi, 0)$$

Όμως με την αντιστοιχία (97) στον πίνακα R(0,0,0) αντιστοιχεί ο πίνακας $(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ της SU(2) ενώ στον πίνακα R(0,2π,0) αντιστοιχεί ο πίνακας $I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -(\varepsilon)$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$U(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma) \to R(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma)$$

$$U(\alpha, \beta, \gamma) \to R(\alpha, \beta, \gamma)$$

Όμως ενώ ισχύει

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma) \quad (98a)$$

οι πίνακες U ικανοποιούν τη σχέση

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = -U(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma) \quad (98b)$$

δηλαδή στον πίνακα R(α,β,γ) αντιστοιχούν δύο πίνακες οι U(α,β,γ) και $U(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma)$ δηλαδή οι ομάδες SO(3) και SU(2) δεν είναι ισομορφικές, αλλά απλώς ομομορφικές.

Για να βρούμε τους γεννήτορες της ομάδας SU(2) θα σκεφτούμε κάπως διαφορετικά από τα προηγούμενα παραδείγματα. Έστω ότι γράφουμε ένα τυχόντα μοναδιακό πίνακα ως εξής

$$(U) = \exp(i\,(H)) \tag{99}$$

$$U^{+} = U^{-1} \rightarrow \exp(-i\,H^{+}) = \exp(-i\,H)$$

δηλαδή(*)

$$H^{+} = H \qquad \text{ερμιτιανός} \tag{100}$$

Επιπλέον αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα H σύμφωνα με το θεώρημα 6 του εδ. 6.1 έχουμε

$$\det(U) = e^{i(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} = 1 \Rightarrow \sum \lambda_i = 0$$

Εφ' όσον οι μετασχηματισμοί ομοιότητας διατηρούν το ίχνος ισχύει

$$\mathrm{tr}\,(H) = 0 \tag{101}$$

Από τις συνθήκες (100) και (101) συνάγεται ότι ο άιχνος 2×2 πίνακας H μπορεί να γραφεί

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ πραγματικοί} \tag{102a}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$H = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{102b}$$

Συνεπώς κάθε ερμιτιανός και άιχνος πίνακας H εκφράζεται ως συνάρτηση των τριών βασικών πινάκων του Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{103}$$

Παρατηρούμε ότι

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad , \quad i, j, k = x, y, z \tag{104}$$

(*) Κύτταξε θεώρημα 7 εδ. 6.1.

ασκήσεις

6.1.1 Να δειχθεί ότι η πιο γενική μορφή ειδικού μοναδιακού 2×2 πίνακα είναι

$$\upsilon = \begin{bmatrix} \cos\beta\, e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin\beta e^{i(\alpha-\gamma)/2} \\ -\sin\beta\, e^{i(\gamma-\alpha)/2} & \cos\beta\, e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{bmatrix}$$

α,β,γ πραγματικοί. (Η επιλογή των παραμέτρων δεν έχει προς το παρόν ιδιαίτερη σημασία).

6.1.2 Να δειχθεί ότι ο προηγούμενος πίνακας αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση $|u|^2+|\upsilon|^2$

6.1.3 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$R = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση $x^2+y^2+z^2$. Είναι ο πίνακας ορθογώνιος; Είναι κατάλληλος (proper);

6.1.4 Να εξεταστεί κατά πόσο οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\beta}{2} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\beta}{2} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιοι. Συγκροτούν ομάδα; Αν ναι, είναι η ομάδα Αβελιανή; Είναι η ειδική ορθογώνια ομάδα;

6.1.5 Να εξεταστεί κατά πόσο ο 4×4 πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αφήνει αναλλοίωτο το γινόμενο $y_1x_3 - y_3x_1 + y_2x_4 - y_4x_2$. Μπορεί ο πίνακας αυτός να διαγωνιοποιηθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών; Να δειχθεί ότι ο πίνακας αυτός είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.1.6 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix}$$

αφήνει αναλλοίωτη την παράσταση $x_1^2 - x_2^2$. Ισχύει το ίδιο για τον πίνακα $T(-\alpha)$;

6.1.7 Αποτελούν οι προηγούμενοι πίνακες ομάδα;

6.1.8 Να δειχθεί ότι ο πίνακας του προβλήματος 1.6.3 μπορεί να προκύψει από τον πίνακα

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

μέσω της σχέσης

$$R = A\exp\{\vartheta T\} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6.1.9 Να δειχθούν τα θεωρήματα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8.

6.1.10 Να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο της SU(1,1) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$$

όπου a και b μιγαδικοί αριθμοί.

6.2.1 Να εξεταστεί κατά πόσο οι πίνακες

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \qquad -\infty < \alpha < +\infty$$

συγκροτούν μία ομάδα Lie.

6.2.2 Να γίνει το ίδιο για την ομάδα του προβλήματος 6.1.4. Ορίζονται οι παράμετρες μονοσήμαντα;

6.2.3 Να εξεταστεί κατά πόσο οι πίνακες της μορφής

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

συγκροτούν ομάδα. Αν όχι να διευρυνθεί η κατηγορία τους ώστε να αποτελούν ομάδα.

6.2.4 Να βρεθεί ο παραμετρικός χώρος του προβλήματος 6.2.1. Είναι συμπαγής;

6.2.5 Να γίνει το ίδιο για την ομάδα του 6.1.4.

6.2.6 Να γίνει το ίδιο για την ομάδα του 6.2.3. Είναι η ομάδα συνεκτική;

6.3.1 Να βρεθούν οι απειροστοί γεννήτορες J_k που αντιστοιχούν στην ομάδα των πινάκων

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix}$$

Είναι οι γεννήτορες ερμιτιανοί;

6.3.2 Να γίνει το ίδιο για τον πίνακα

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.3.3 Να γίνει το ίδιο για τον πίνακα του προβλήματος 6.1.4.

6.3.4 Δίνεται ότι

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι απειροστοί τελεστές X_{12} και J_{12} που δρούνε πάνω στο χώρο των συναρτήσεων $f(x_1\, x_2)$.
Είναι οι J_{12} αντισυμμετρικοί; Τι συμπεράσματα βγαίνουν;

6.3.5 Να δειχθεί ότι οι απειροστοί γεννήτορες της ομάδας SU(n) χαρακτηρίζονται από πίνακες (x_{ij}) $i, j = 1, 2 \dots n$ οι οποίοι είναι αντερμιτιανοί πίνακες τάξης n με ίχνος μηδέν. Να δειχθεί ότι οι αντίστοιχοι πίνακες J_{ij} είναι ερμιτιανοί.

6.3.6 Να δειχθεί ότι οι απειροστοί γεννήτορες της ομάδας SO (n) αποτελούν γενίκευση των γεννητόρων των εξ. (74) και (75).

6.3.7 Δίνεται ότι

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp\{i\alpha_1 \sigma_1\} \exp\{i\alpha_2 \sigma_2\} \exp\{i\alpha_3 \sigma_3\}$$

όπου

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Πίνακες} \\ \text{Pauli} \end{pmatrix}$$

i) Να δειχθεί ότι οι πίνακες U ορίζουν την ομάδα SU(2).
ii) Να υπολογιστούν τα στοιχεία των πινάκων U.
iii) Ξεκινώντας από τον πίνακα U που βρήκατε να υπολογιστούν οι απειροστοί γεννήτορες αυτού.

6.3.8 Να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο της ομάδας του προβλήματος 6.1.10 μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\mu/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\xi/2 & \sinh\xi/2 \\ \sinh\xi/2 & \cosh\xi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\mu'/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu'/2} \end{pmatrix}$$

όπου

$$0 \le \mu \;, \quad \mu' < 2\pi \;, \quad 0 \le \xi < \infty$$

Να δειχθεί ότι για $\xi \neq 0$ κάθε στοιχείο της SU(1,1) παίρνεται δύο φορές.

6.3.9 i) Να δειχθεί ότι οι γεννήτορες της ομάδας E_2 του επιπέδου (κοίταξε πρόβλημα 6.4.4) έχει τους εξής γεννήτορες.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Να βρεθούν οι σταθερές δομές της E_2.

6.3.10 Να δειχθεί ότι η ομάδα του προβλήματος 6.4.4 έχει σαν γεννήτορες τους τελεστές ορμής $\vec{p}$ και στροφορμής $\vec{L}$.

6.4.1 Να βρεθεί ο πίνακας στροφής που περιγράφει τη στροφή του διανύσματος με συνιστώσες

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \;, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \;, \quad x_3 = z$$

κατά γωνία β γύρω από τον άξονα των y.

6.4.2 Να γίνει το ίδιο για στροφή γύρω από τον άξονα των z κατά γωνία α.

6.4.3 Να υπολογιστεί ο πίνακας στροφής D(αβγ) στη βάση του προβλήματος 6.4.1 όπου α,β,γ οι γωνίες Euler.

6.4.4 Οι τελεστές μεταφοράς στον ευκλείδιο χώρο ορίζονται ως εξής

$$\vec{r}' = T(\vec{a})\,\vec{r} = \vec{r} - \vec{a}$$

όπου $T(\vec{a})$ αντιστοιχεί σε μεταφορά των αξόνων κατά $\vec{a}$.

i) Να δειχθεί ότι τα στοιχεία $T(\vec{a})\,R$, όπου R στοιχεία της SO(3) συγκροτούν ομάδα. Η ομάδα αυτή λέγεται ευκλείδια ομάδα E_3.

ii) Να δειχθεί ότι

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\alpha\,\beta\,\gamma)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ οι τρεις προβολές του διανυσματος $\vec{a}$ και R(αβγ) ο πίνακας της εξ. 6.81.

iii) Να δειχθεί ότι ο πιο πάνω μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & R & & -\alpha_1 \\ & & & -\alpha_2 \\ & & & -\alpha_3 \\ & 000 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.5.1 Να δειχθεί ότι ο πίνακας που δίνεται από την εξ. 6.106 είναι ο ίδιος με τον πίνακα της εξ. 6.97.

6.5.2 Να δειχθεί ότι

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\, f_{ijk}\, \sigma_k \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

όπου σ_i, i = 1, 2, 3, είναι οι πίνακες της εξ. 6.107.

6.5.3 Να κατασκευαστούν οι πίνακες

$$A(\alpha_k) = \exp(i\, \alpha_k\, \sigma_k)$$

όπου σ_k οι πίνακες της εξ. 6.107. Να βεβαιωθείτε πως οι $A(\alpha_k)$ είναι μοναδιακοί.

6.5.4 Να δειχθεί ότι η ομάδα SO(3) είναι ισομορφική με την ομάδα SU(2)/C όπου $C_i = \{E, I\}$. (Κύτταξε εδ. 1.8).