02/06/2025

ΕΠΑΓΟΜΕΝΑ ΣΗΜΑΤΑ ΣΕ ΑΝΙΧΝΕΥΤΕΣ ΜΕ ΑΕΡΙΟ

Εμμ. Αντ. Δρης
ΕΜΠολυτεχνείο

2025

1. Επαγόμενο σήμα σε ανιχνευτή μικρών διαστάσεων με αέριο.

Εξετάζομε ανιχνευτή με αέριο ο οποίος έχει μικρές διαστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπεισέρχονται φαινόμενα διάδοσης μέσα στον ανιχνευτή. Αυτό σημαίνει ότι για τη μεγαλύτερη διάσταση του ανιχνευτή ισχύει $d_{\max} << \lambda_{\min} = c / f_{\max}$, $f_{\max}$ είναι η μέγιστη συχνότητα που χρειάζεται για την περιγραφή του παλμού του ανιχνευτή. Το αντίστοιχο μήκος κύματος αναφέρεται σε διάδοση στο κενό και είναι το ελάχιστο μήκος κύματος, $\lambda_{\min}$. Η κατάσταση είναι ημιστατική, δηλαδή παρόλο που γενικώς υπάρχει εξάρτηση από το χρόνο, οι ρυθμοί μεταβολής είναι μικροί έτσι ώστε κάθε χρονική στιγμή να ισχύουν οι σχέσεις της ηλεκτροστατικής. Θα αποδείξομε μια γενίκευση του θεωρήματος των Ramo και Shockley [1],[2],[3]. Η γενίκευση είναι παρόμοια με αυτή στην αναφορά [4]. Το θεώρημα των Ramo-Shockley αναφέρεται σε σήματα που επάγονται σε γειωμένους αγωγούς από κινούμενα φορτία στον μεταξύ των αγωγών χώρο. Στη γενίκευση, οι αγωγοί δεν είναι γειωμένοι αλλά έχουν διάφορα δυναμικά και είναι συνδεδεμένοι με εξωτερικό κύκλωμα (δικτύωμα). Ας θεωρήσομε το Σχήμα 1.1 όπου έχομε τη διάταξη N αγωγών που είναι εντοπισμένοι, δηλαδή καταλαμβάνουν πεπερασμένη έκταση (προφανώς δεν εκτείνονται στο άπειρο). Υπάρχει και ένας εξωτερικός αγωγός, 0, που τους περιβάλλει και βρίσκεται στο δυναμικό αναφοράς που θεωρούμε ότι είναι μηδέν. Ο εξωτερικός αγωγός μπορεί να είναι το άπειρο.

Στην περίπτωση των ανιχνευτών με αέριο, ο χώρος μεταξύ των αγωγών, προφανώς, περιέχει κάποιο αέριο. Κατά προσέγγιση η διηλεκτρική σταθερά του αερίου είναι δυνατόν να ληφθεί ίση με τη μονάδα. Γενικότερα, όσα αναφέρομε στην ανάλυσή μας, ισχύουν και όταν ο χώρος περιέχει ένα γραμμικό διηλεκτρικό, που έχει διηλεκτρική σταθερά μεγαλύτερη της μονάδας.

Στο Σχ. 1.1, φαίνονται οι διάφοροι αγωγοί. Ο χώρος (όγκος) Ω μεταξύ των αγωγών είναι ο χώρος που είναι εξωτερικός των αγωγών. Αυτός ο χώρος είναι πολλαπλά συνεκτικός, διότι η ολική επιφάνεια S, που περιβάλλει αυτόν τον χώρο είναι αυτή που αποτελείται από τις χωριστές επιφάνειες των αντίστοιχων αγωγών του ανιχνευτή, δηλαδή $S = (S_0, S_1, ..., S_N)$.

Η κατανομή του φορτίου στον μεταξύ των αγωγών χώρο χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα όγκου $\rho = \rho(\vec{x}, t)$. Η ταχύτητα ενός φορτίου στη θέση $\vec{x}$ τη στιγμή t είναι $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$. Αυτή είναι η ταχύτητα ολίσθησης των φορτίων.

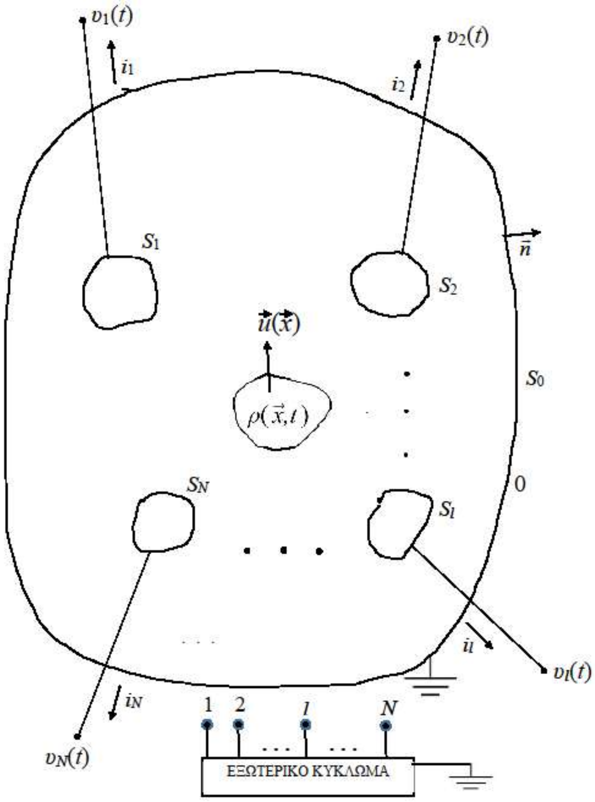
Αυτές τις δυο συναρτήσεις τις θεωρούμε δεδομένες, είναι κατά κάποιο τρόπο εξωτερικές συναρτήσεις του προβλήματος που εξετάζομε, δηλαδή δεν τις υπολογίζομε λύνοντας το πρόβλημα. Παρόλο που έχομε ροή φορτίου και επομένως ρεύμα που δημιουργεί μαγνητικό πεδίο (εσωτερικό μαγνητικό πεδίο), η επίδρασή του στα κινούμενα φορτία μπορεί να αγνοηθεί, διότι στην πράξη, δηλαδή στις συνήθεις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν, οι ταχύτητες των φορτίων είναι πολύ μικρές σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός οπότε αυτές οι μαγνητικές δυνάμεις είναι αμελητέες. Στον ανιχνευτή του Σχήματος 1.1 οι αγωγοί $1, 2, ..., N$ είναι οι αγωγοί από όπου μπορεί να λαμβάνονται σήματα. Τα φορτία δημιουργούνται στον ανιχνευτή από ιον(τ)ισμό του αερίου του ανιχνευτή. Η ταχύτητα ολίσθησης των φορτίων $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ εξαρτάται από το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $\vec{x}$ τη στιγμή t. Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο το δημιουργούν οι τάσεις πόλωσης του ανιχνευτή. Αν υπάρχει εξωτερικό μαγνητικό πεδίο τότε και αυτό μπορεί να επηρεάσει τη διανυσματική ταχύτητα ολίσθησης. Συνήθως τα δυναμικά πόλωσης είναι σταθερά με το χρόνο, και το πεδίο τους είναι κατά πολύ πιο ισχυρό από το πεδίο της παραπάνω κατανομής $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, η οποία δημιουργεί «εσωτερικό» ηλεκτρικό πεδίο. Ως αποτέλεσμα, η επίδραση στην ταχύτητα ολίσθησης του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου είναι αμελητέα. Παρόλα αυτά, σε μερικές περιπτώσεις, είναι δυνατόν να γίνεται πολύ μεγάλη συσσώρευση φορτίων χώρου, η οποία να οδηγεί σε ισχυρό εσωτερικό πεδίο συγκρίσιμο με το εξωτερικό πεδίο. Όμως, στην ανάλυσή μας θα δεχτούμε ότι έχομε λάβει υπόψη όλα τα σχετικά φαινόμενα και έτσι για τη συγκεκριμένη κατάσταση που μελετούμε η ταχύτητα ολίσθησης του φορτίου, όπως είπαμε και προηγουμένως, είναι δεδομένη συνάρτηση της θέσης και του χρόνου.

Θεωρούμε ότι όταν διέλθει ένα ιον(τ)ίζον σωματίδιο σε ανιχνευτή σωματιδίων, τότε στο αέριο του ανιχνευτή, δημιουργούνται θετικά φορτία (ιόντα) και ηλεκτρόνια. Σε κάθε σημείο, υπό την επίδραση του υπάρχοντος πεδίου, τα θετικά και τα αρνητικά φορτία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η απόλυτη τιμή της ταχύτητας των ηλεκτρονίων είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν των ιόντων. Τα ηλεκτρικά ρεύματα του θετικού και αρνητικού φορτίου έχουν την ίδια κατεύθυνση. Θα εξετάσομε τι γίνεται στον ανιχνευτή όταν υπάρχει μόνο ένα είδος φορτίων. Για να βρούμε το συνολικό αποτέλεσμα, πρέπει να εφαρμόσομε την αρχή της επαλληλίας λαμβάνοντας υπόψη όλα τα είδη θετικών και αρνητικών φορτίων που συμβάλουν.

Στο Σχ. 1.1 εικονίζεται ένας όγκος Ω ο οποίος περιβάλλεται από μεταλλική επιφάνεια η οποία έχει δυναμικό μηδέν. Στο χώρο υπάρχουν αγωγοί με διάφορα δυναμικά. Στο χώρο μεταξύ των αγωγών υπάρχει κατανομή φορτίου όγκου ενώ στις μεταλλικές επιφάνειες υπάρχουν επιφανειακές κατανομές φορτίου. Κατά προσέγγιση, κάθε στιγμή υπάρχει ηλεκτροστατική ισορροπία. Θα δείξομε αργότερα ότι η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης (divergence) [5] οδηγεί στο θεώρημα αμοιβαιότητας (reciprocity) του Green. Το θεώρημα της αμοιβαιότητας εκφράζεται με την παρακάτω Εξ. (1.1),

$$\int_{\Omega} \Phi' \rho \, \mathrm{d}^3 x + \int_{S} \Phi' \sigma \, \mathrm{d}a = \int_{\Omega} \Phi \rho' \, \mathrm{d}^3 x + \int_{S} \Phi \sigma' \, \mathrm{d}a \tag{1.1}$$

Γενικώς η θέση στην οποία το δυναμικό λαμβάνεται ίσο με μηδέν μπορεί να ληφθεί αυθαίρετα εφόσον στο δυναμικό μπορεί να προστεθεί μια αυθαίρετη σταθερά χωρίς αυτό να μεταβάλλει το ηλεκτρικό πεδίο. Παρόλα αυτά, για εντοπισμένες πηγές πεδίων, συνήθως θεωρούμε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν. Σημειώνομε ότι η Εξ.(1.1) ισχύει για δυναμικά που μηδενίζονται στο άπειρο. Η κατανομή όγκου με πυκνότητα φορτίου ρ στο χώρο Ω και η επιφανειακή κατανομή φορτίου, σ στην περικλείουσα τον χώρο συνολική μεταλλική επιφάνεια S, δημιουργούν στον χώρο Ω δυναμικό Φ. Αντίστοιχα η κατανομή όγκου με πυκνότητα φορτίου ρ' στο χώρο Ω και η επιφανειακή κατανομή φορτίου, σ' στην περικλείουσα τον χώρο συνολική μεταλλική επιφάνεια S, δημιουργούν στον χώρο Ω δυναμικό Φ'. Η Εξ.(1.1) συνδέει αυτές τις κατανομές και τα δυναμικά. Η συνολική επιφάνεια είναι το σύνολο των μεταλλικών επιφανειών που φαίνονται στο Σχ.1.1 .



Σχήμα 1.1 . Σύστημα N+1 αγωγών και εξωτερικό δικτύωμα με το οποίο είναι συνδεδεμένοι. Υπάρχει κατανομή φορτίου, $\rho(\vec{x},t)$, στο χώρο μεταξύ των αγωγών.

Το θεώρημα της αμοιβαιότητας του Green για σημειακά φορτία παίρνει τη μορφή της Εξ. (1.2).

$$\sum_{j=1}^{N} q_j \Phi'_j = \sum_{j=1}^{N} q'_j \Phi_j \tag{1.2}$$

Αυτή η σχέση γίνεται κατανοητή από τα ακόλουθα που εξηγούν τη σημασία των φυσικών μεγεθών της. Υποθέτομε ότι έχομε τα σημειακά φορτία q_j στις θέσεις $j = 1,2,...,N$. Αυτά δημιουργούν σε αυτές τις θέσεις δυναμικά Φ_j . Αν στις ίδιες θέσεις θέσομε άλλα φορτία, τα q'_j, θα δημιουργήσουν στις ίδιες θέσεις δυναμικά Φ'_j. Θα προχωρήσομε στη γενίκευση του θεωρήματος των Ramo-Shockley, δηλαδή θα θεωρήσομε συνεχή κατανομή φορτίου. Θεωρούμε ξανά το Σχ. (1.1) όπου η κατανομή φορτίου, γενικώς, μεταβάλλεται ως προς το χρόνο με αρκούντως μικρό ρυθμό και υπάρχει εξωτερικό δικτύωμα (κύκλωμα) συνδεδεμένο με τους αγωγούς του ανιχνευτή και με τον περιβάλλοντα αγωγό αναφοράς, 0.

Η πραγματική ημιστατική κατάσταση στο Σχ. (1.1) περιγράφεται τη χρονική στιγμή t από τα μεγέθη για τα φορτία και δυναμικά που φαίνονται στην Εξ.(1.3),

$$[\rho(\vec{x},t), q_0(t), q_1(t), q_2(t), ..., q_N(t)],\ [\varPhi(\vec{x},t), 0, \upsilon_1(t), \upsilon_2(t), ..., \upsilon_N(t)] \qquad (1.3)$$

Οι τρέχοντες δείκτες αναφέρονται σε μεγέθη που σχετίζονται με τους αντίστοιχους αγωγούς, δηλαδή $q_i(t)$ και $\upsilon_i(t)$ είναι το φορτίο και το δυναμικό του αγωγού i.
Το $\vec{x}$ είναι το διάνυσμα θέσης για τα σημεία του χώρου $\varOmega$ μεταξύ των αγωγών. Το $\varPhi(\vec{x},t)$ είναι το δυναμικό στο χώρο $\varOmega$ μεταξύ των αγωγών. Θυμίζομε ότι ο περιβάλλων αγωγός, υπ' αρ. 0, έχει (συνεχώς) δυναμικό μηδέν.
Στη συνέχεια φανταζόμαστε N διαφορετικές πιθανές ηλεκτροστατικές (βοηθητικές) καταστάσεις. Για τα φορτία χρησιμοποιούμε δυο δείκτες, ο πρώτος δείκτης $j = 1, 2, ..., N$ χαρακτηρίζει την κατάσταση ενώ ο δεύτερος δείκτης $l = 0, 1, 2, ..., N$ χαρακτηρίζει τον αγωγό. Προφανώς ο περιβάλλων αγωγός έχει δεύτερο δείκτη μηδέν. Θεωρούμε ότι τα δυναμικά και τα πεδία είναι σταθερά και ότι δεν υπάρχει φορτίο στο χώρο $\varOmega$, δηλαδή έχομε $\rho(\vec{x},t) = 0$. Αυτές οι βοηθητικές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από τις Εξ.(1.4),

$$[0, Q_{j0}, Q_{j1}, ..., Q_{jN}],\ [\varPhi_j(\vec{x}), 0, ..., V_j\left(=V_{\mathrm{w}}\right), ...]\ \ j = 1, 2, ..., N \qquad (1.4)$$

Q_{jl} είναι το φορτίο του αγωγού l στην κατάσταση j. Οι διαφορετικές καταστάσεις προσδιορίζονται από τα διαφορετικά φορτία και δυναμικά των αγωγών. Προφανώς το πρώτο μηδέν που σημειώνεται για τα δυναμικά είναι το δυναμικό του περιβάλλοντος αγωγού. Στην Εξ.(1.4) μόνο ένας αγωγός, ο αγωγός υπ' αρ. j έχει μη μηδενικό δυναμικό (δυναμικό βάρους ή βοηθητικό δυναμικό, weighting potential) $V_j = V_{\mathrm{w}}$, ενώ όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικό μηδέν. $\varPhi_j(\vec{x})$ είναι το δυναμικό στο χώρο $\varOmega$ που αντιστοιχεί στην κατάσταση j. Προφανώς και αυτό είναι βοηθητικό μέγεθος.
Εφαρμόζομε τη σχέση (1.1) για την πραγματική κατάσταση που περιγράφεται με τις σχέσεις (1.3) και τη βοηθητική κατάσταση j, που περιγράφεται με τις σχέσεις (1.4), οπότε καταλήγομε στις σχέσεις,

$$\int_{\varOmega} \varPhi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x + V_{\mathrm{w}} \int_{S_j} \sigma_j(\vec{x},t)\mathrm{d}a = \sum_{l=1}^{N} \upsilon_l(t) Q_{jl},\ j = 1, ..., N \qquad (1.5)$$

Είναι ευνόητο ότι το φορτίο του αγωγού j είναι $q_j(t) = \int_{S_j} \sigma_j(\vec{x},t)\mathrm{d}a$.

Ορίζομε τα c_{jl} ως

$$c_{jl} = \frac{Q_{jl}}{V_{\mathrm{w}}} \qquad (1.6)$$

δηλαδή c_{jl} είναι το πηλίκο του φορτίου που επάγεται στον αγωγό l όταν μόνο ο αγωγός j έχει δυναμικό V_{w} και όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικά μηδέν, ενώ δεν υπάρχει φορτίο στο μεταξύ των αγωγών χώρο, $\rho(\vec{x},t)=0$. Θα δούμε ότι αυτό το πηλίκο είναι μια σταθερά. Είναι σαφές ότι η σχέση (1.5) γίνεται,

$$\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x=-q_j(t)+\sum_{l=1}^{N}c_{jl}\upsilon_l(t),\ \ j=1,...,N \tag{1.7}$$

Οι αγωγοί θεωρείται ότι είναι εντοπισμένοι, δηλαδή δεν εκτείνονται στο άπειρο, οπότε το δυναμικό στο άπειρο (μπορεί και) λαμβάνεται ίσο με μηδέν. Για τους συντελεστές c_{jl} θα δείξομε ότι ισχύουν οι σχέσεις $c_{ii}>0$ και οι σχέσεις $c_{ij}\le 0,\ i\ne j$. Τα c_{ii} αναφέρονται ως χωρητικότητες (capacities, capacitances) ενώ τα $c_{ij}\le 0,\ i\ne j$ ως συντελεστές επαγωγής (coefficients of induction), όλα έχουν διαστάσεις χωρητικότητας.
Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσομε την περίπτωση που δεν υπάρχουν φορτία στο χώρο μεταξύ των αγωγών και έχομε ηλεκτροστατική κατάσταση. Εφόσον οι εξισώσεις των πεδίων στο κενό είναι γραμμικές και ομογενείς, οι σχέσεις φορτίων και δυναμικών των αγωγών είναι επίσης γραμμικές. Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές c_{ij} είναι σταθερές.
Οι πρώτες από τις σχέσεις (1.8) προκύπτουν από τις σχέσεις (1.7) όταν $\rho(\vec{x},t)=0$. Δίνομε και τη σχέση για την ηλεκτροστατική ενέργεια U του συστήματος. Επειδή έχομε στατικές καταστάσεις, τα φορτία και τα δυναμικά παριστάνονται με κεφαλαία Q και V αντιστοίχως.

$$\begin{aligned} Q_j&=\sum_{l=1}^{N}c_{jl}V_l,\ \ j=1,...,N \\ U&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}Q_iV_i=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}c_{ij}V_iV_j \end{aligned} \tag{1.8}$$

U είναι η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος. Q_j είναι το φορτίο που επάγουν στον αγωγό j όλοι οι αγωγοί όταν έχουν δυναμικά $V_l,\ \ l=1,2,...,N$.
Στη συνέχεια, ας υποθέσομε ότι όλοι οι αγωγοί είναι γειωμένοι (έχουν δυναμικά μηδέν) εκτός από έναν, τον $i-$οστό. Το φορτίο του μη γειωμένου αγωγού συνδέεται με το δυναμικό του με τη σχέση, $Q_i=c_{ii}V_i$. Είναι σαφές ότι αν το φορτίο του μη γειωμένου αγωγού είναι θετικό τότε το δυναμικό του θα είναι θετικό, αφού προφανώς ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο στο χώρο μεταξύ των αγωγών θα απωθείται από αυτόν τον αγωγό προς το άπειρο ή προς έναν γειωμένο αγωγό, αυτό σημαίνει ότι ισχύει $c_{ii}>0$. Το δοκιμαστικό φορτίο θεωρείται σημειακό, επίσης θεωρείται απειροστό φορτίο για να μην διαταράσσει την κατανομή των φορτίων των αγωγών. Σημειώνομε εδώ πως το κάθε δυναμικό ορίζεται έτσι που σε μεγάλες αποστάσεις τείνει στο μηδέν. Το επαγόμενο φορτίο Q_j από τον μη γειωμένο $i-$οστό αγωγό με δυναμικό V_i σε έναν άλλον γειωμένο αγωγό, έστω τον $j-$οστό, θα είναι $Q_j=c_{ji}V_i$.
Όπως είπαμε, αν ο $i-$οστός αγωγός έχει θετικό φορτίο θα έχει και θετικό δυναμικό.

Όλοι οι άλλοι γειωμένοι αγωγοί θα έχουν αρνητικά φορτία, οπότε $c_{ji} < 0$. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί επειδή το ηλεκτροστατικό δυναμικό δεν έχει ελάχιστο ή μέγιστο στο χώρο μεταξύ των αγωγών. Πράγματι, έστω ότι το δυναμικό του μη γειωμένου αγωγού είναι θετικό, $V_i > 0$. Αυτό σημαίνει πως το δυναμικό είναι θετικό παντού στο χώρο μεταξύ των αγωγών. Η ελάχιστη τιμή του, δηλαδή μηδέν, υπάρχει στους γειωμένους αγωγούς. Μπορούμε να καταλάβομε γιατί το δυναμικό δε μπορεί να έχει (τοπικό) μέγιστο ή ελάχιστο πουθενά στον ελεύθερο φορτίων χώρο μεταξύ των αγωγών ως εξής: έστω ότι υπάρχει μέγιστο σε κάποιο σημείο, τότε είναι δυνατό αυτό το σημείο να κλειστεί μέσα σε μια μικρή κλειστή επιφάνεια παντού πάνω στην οποία ισχύει για την κάθετη παράγωγο $\partial V / \partial n < 0$. Από αυτό συμπεραίνομε ότι το ολοκλήρωμα αυτής της παραγώγου πάνω στην κλειστή επιφάνεια είναι αρνητικό. Αυτό όμως είναι αντιφατικό, διότι η κάθετη παράγωγος είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, οπότε το ολοκλήρωμά της πάνω στην κλειστή επιφάνεια πρέπει να είναι μηδέν σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss αφού στο εσωτερικό δεν υπάρχει φορτίο. Επομένως το δυναμικό δε μπορεί να έχει μέγιστο. Αυτό οδηγεί στο ότι η κάθετη παράγωγος στην επιφάνεια ενός γειωμένου αγωγού είναι θετική, $\partial V / \partial n > 0$, με κατεύθυνση προς τα έξω από το εσωτερικό του όγκου Ω ο οποίος περικλείεται από την επιφάνεια S του αγωγού, επομένως το επιφανειακό τους φορτίο είναι αρνητικό. Αυτό προκύπτει αφού ισχύει για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, $\sigma = \varepsilon_0 E,$ όπου $E = -\partial V / \partial n$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του αγωγού, επομένως $Q = \int_S \sigma \mathrm{d}a = \varepsilon_0 \int_S E \mathrm{d}a = -\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}a$. Ανάλογα ισχύουν αν υποθέσομε ότι υπάρχει ελάχιστο.

Θα δούμε τώρα ότι μπορούμε να εισαγάγομε τις χωρητικότητες C_{ij} οι οποίες είναι όλες θετικές ποσότητες. Αυτές συνδέονται με τις διαφορές δυναμικού μεταξύ των αγωγών. Οι σχέσεις μεταξύ των c_{ij} και C_{lm} φαίνονται παρακάτω.
Προσθέτομε και αφαιρούμε στα δεύτερα μέλη των Εξ.(1.8) τα αθροίσματα

$\left(\sum_{l=1}^{N} c_{jl} \right) V_j$ οπότε καταλήγομε στις σχέσεις

$$Q_j = C_{jj} V_j + \sum_{l=1}^{N} C_{jl} \left(V_j - V_l \right), \ j = 1, \ldots, N \tag{1.9}$$

όπου

$$C_{jl} = C_{lj} = -c_{lj} = -c_{jl} \quad \forall\, j \neq l, \quad C_{ll} = \sum_{j=1}^{N} c_{lj}$$

επίσης ισχύουν (1.10)

$$c_{ij} = -C_{ij} \quad \forall i \neq j \quad c_{ii} = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}.$$

Τα C_{jl} λέγονται συνήθως, συντελεστές χωρητικότητας και είναι όλοι μη αρνητικοί, $C_{jl} \geq 0$. Ο συντελεστής, C_{jl} $j \neq l$, είναι η χωρητικότητα μεταξύ των αγωγών j, l .

Ο συντελεστής C_{jj} είναι η χωρητικότητα μεταξύ του αγωγού j και του αγωγού αναφοράς, 0. Είναι χρήσιμο να σημειώσομε ότι για τον κάθε συντελεστή C_{jl} σύμφωνα με την Εξ.(1.9) ισχύει,

$$C_{jl} = -\frac{Q_j}{V_l}, \; j \neq l \tag{1.11}$$

Q_j είναι το επαγόμενο φορτίο στον αγωγό j όταν όλοι οι αγωγοί έχουν δυναμικό μηδέν και μόνον ένας αγωγός (κάθε φορά) ο αγωγός l έχει δυναμικό μη μηδενικό, $V_l \neq 0$.
Για τους υπόλοιπους συντελεστές έχομε

$$C_{jj} = \frac{Q_j}{V_j} \tag{1.12}$$

όπου Q_j το επαγόμενο φορτίο στον αγωγό j όταν όλοι οι αγωγοί έχουν το ίδιο δυναμικό με αυτόν, δηλαδή $V_l = V_j \quad \forall \; l = 1, 2, ..., N$.
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με μη στατικές καταστάσεις, δηλαδή με καταστάσεις που εξαρτώνται από το χρόνο. Θυμίζομε ότι στην πραγματικότητα πρόκειται για ημιστατικές καταστάσεις όπως τονίσαμε στην αρχή. Ακολουθούμε ξανά την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή προσθέτομε και αφαιρούμε το άθροισμα $\left(\sum_{l=1}^{N} c_{jl}\right)\upsilon_j$ στο δεύτερο μέλος της Εξ.(1.7) και λαβαίνομε υπόψη τις Εξ.(1.10), οπότε τελικώς βρίσκομε,

$$\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega} \Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x = -q_j(t) + C_{jj}\upsilon_j(t) + \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\left(\upsilon_j(t) - \upsilon_l(t)\right) \quad j = 1, ..., N \tag{1.13}$$

Θα δούμε ότι αυτό μας οδηγεί στο Σχ. (1.2) όπου φαίνεται το ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του ανιχνευτή μαζί με το εξωτερικό κύκλωμα και πηγές ρεύματος για τις οποίες θα αναφερθούμε παρακάτω.
Παραγωγίζομε τις σχέσεις (1.7) και (1.13) ως προς το χρόνο και καταλήγομε στις ;αντίστοιχες σχέσεις (1.14),

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega} \Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\} = -\frac{\mathrm{d}q_j(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{l=1}^{N} c_{jl}\frac{\mathrm{d}\upsilon_l(t)}{\mathrm{d}t} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega} \Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\} = -\frac{\mathrm{d}q_j(t)}{\mathrm{d}t} + C_{jj}\frac{d\upsilon_j(t)}{dt} + \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\frac{\mathrm{d}\left(\upsilon_j(t) - \upsilon_l(t)\right)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Για την παραγώγιση του ολοκληρώματος εφαρμόζομε το θεώρημα μεταφοράς της ρευστομηχανικής, οπότε βρίσκομε

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\} \\
&=\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}^3x+\frac{1}{V_j}\int_{S_j}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x}))\mathrm{d}a \qquad (1.15)\\
&j=1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}(\vec{x})$ στην κλειστή επιφάνεια S_j έχει θετική κατεύθυνση από το εσωτερικό της επιφάνειας προς το εξωτερικό.
Πολλές φορές, όπως στην περίπτωση ημιαγωγικών ανιχνευτών, μέρος της κατανομής φορτίου είναι σταθερό με το χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι στη διαμόρφωση του σήματος συμβάλλει μόνο το μέρος της κατανομής φορτίου που κινείται, το ακίνητο φορτίο μπορούμε να πούμε ότι συμβάλλει στη διαμόρφωση του στατικού πεδίου πόλωσης. Προφανώς η πυκνότητα ρεύματος οφείλεται μόνο στα κινούμενα φορτία.
Χρησιμοποιούμε τις Εξ.(1.15) και τις δυο γνωστές σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\vec{J}(\vec{x},t)=\rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x})\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)+\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}=0
\end{aligned}
$$

και καταλήγομε στις σχέσεις,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}^3x+\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{S_j}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)[\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})]\mathrm{d}a\\
&=-\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x+\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{S_j}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)[\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})]\mathrm{d}a
\end{aligned}
\qquad (1.16)
$$

Στη συνέχεια λαβαίνομε υπόψη την ταυτότητα

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{A})=\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\psi)+\psi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

και βρίσκομε,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\}\\
&=\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x-\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot[\vec{J}(\vec{x},t)\Phi_j(\vec{x})]\mathrm{d}^3x \qquad (1.17)\\
&+\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{S_n}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)[\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})]\mathrm{d}a
\end{aligned}
$$

Η χρήση του θεωρήματος της απόκλισης δίνει,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\} \\
&=\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x-\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{S_j}\Phi_j(\vec{x})\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}a \\
&+\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{S_j}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)[\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})]\mathrm{d}a
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Τελικώς,

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})/V_j=-\vec{E}_j(\vec{x})/V_{\mathrm{w}} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\Phi_j(\vec{x})\rho(\vec{x},t)\mathrm{d}^3x\right\}=\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x \\
&=-\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{E}_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Τα ρεύματα των αγωγών $i_j(t)$ είναι θετικά όταν απομακρύνονται από τον αγωγό. Είναι ευνόητο ότι αφού αυτά τα ρεύματα μειώνουν τα φορτία των αγωγών, θα ισχύει,

$$
i_j(t)=-\frac{\mathrm{d}q_j(t)}{\mathrm{d}t}
\tag{1.20}
$$

Το επαγόμενο (induced) ρεύμα στον αγωγό j, είναι το μέγεθος (ρεύμα),

$$
I_j(t)=\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x=-\frac{1}{V_{\mathrm{w}}}\int_{\Omega}\vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{E}_j(\vec{x})\mathrm{d}^3x
\tag{1.21}
$$

Αυτό το ονομάζομε και βοηθητικό ρεύμα για τον εν λόγω αγωγό. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι ο αγωγός με δείκτη j αποτελεί μια πηγή ρεύματος I_j που τροφοδοτεί το κύκλωμα.

Έστω ότι έχομε ένα μόνο κινούμενο σημειακό φορτίο που η θέση του καθορίζεται από τη σχέση $\vec{x}_q=\vec{x}_q(t)$ οπότε η ταχύτητά του είναι $\vec{u}_q=\dot{\vec{x}}_q$. Είναι προφανές ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\rho=q\delta(\vec{x}-\vec{x}_q) \\
&\vec{J}=\rho\vec{u}=q\vec{u}\delta(\vec{x}-\vec{x}_q)
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

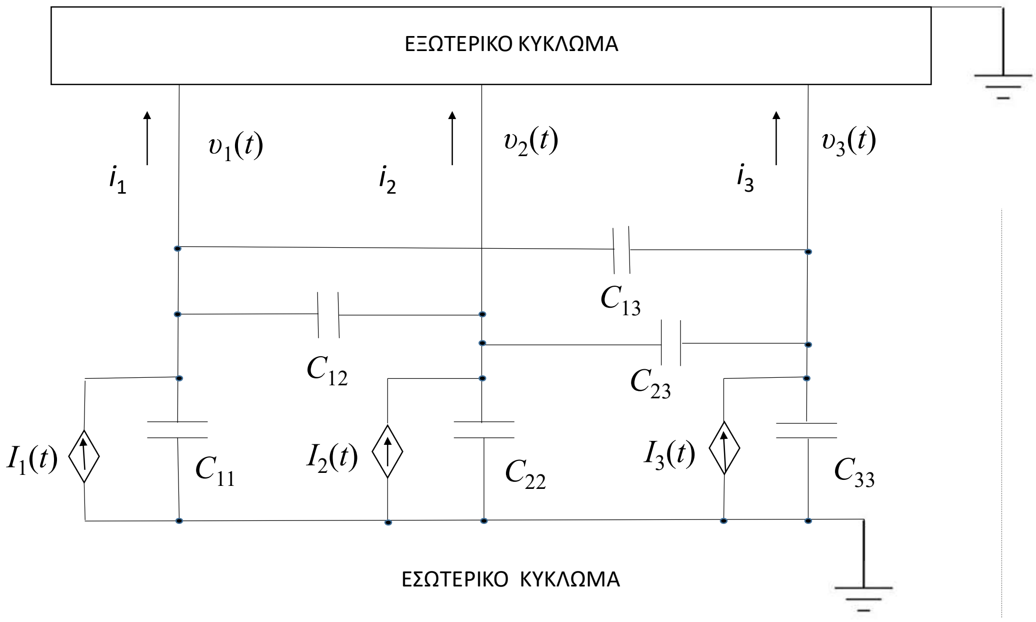
Η Εξ.(1.21) για το κινούμενο σημειακό φορτίο οδηγεί στο παρακάτω επαγόμενο ρεύμα στον αγωγού του ανιχνευτή υπ' αρ. j,

$$I_j(t) = -q\frac{\vec{E}_j(\vec{x}_q(t))\cdot\vec{u}(\vec{x}_q(t))}{V_{\mathrm{w}}} \tag{1.23}$$

Τα $\vec{E}_j$ και $\vec{u}$ υπολογίζονται τη στιγμή t στη θέση $\vec{x}_q$ όπου βρίσκεται το φορτισμένο σωμάτιο. Σημειώνομε ότι αυτό το ρεύμα είναι το ίδιο που επάγεται στην περίπτωση ισχύος του θεωρήματος των Ramo-Shockley, δηλαδή όταν οι αγωγοί είναι γειωμένοι. Οι σχέσεις (1.14) με χρήση των (1.21) γίνονται,

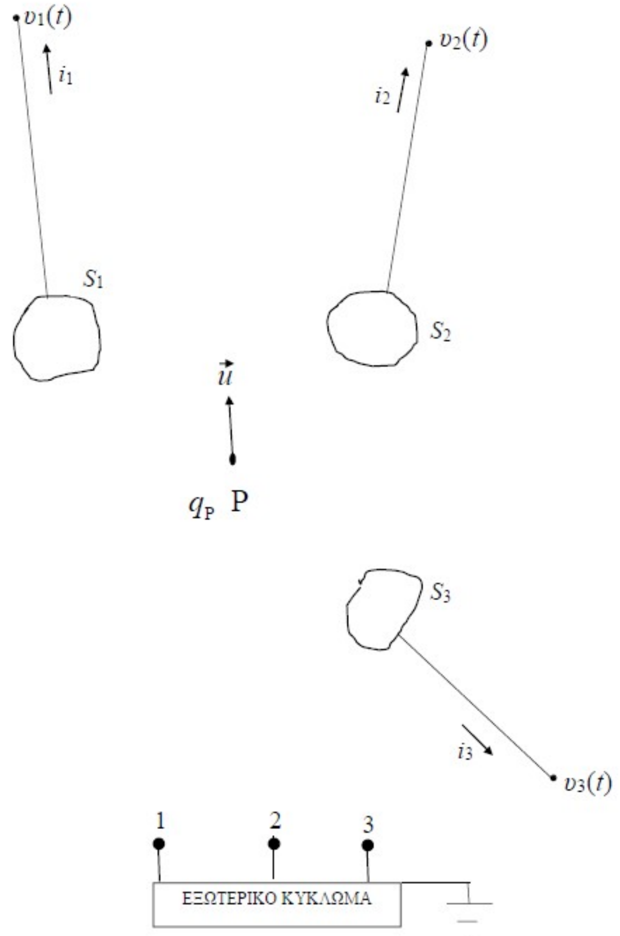
$$\begin{aligned}
&I_j(t) = i_j(t) + \sum_{l=1}^{N} c_{jl}\frac{\mathrm{d}\upsilon_l(t)}{\mathrm{d}t} \\
&I_j(t) = i_j(t) + C_{jj}\frac{d\upsilon_j(t)}{dt} + \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\frac{\mathrm{d}\left(\upsilon_j(t)-\upsilon_l(t)\right)}{\mathrm{d}t} \\
&j = 1,\ldots,N
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Προφανώς, όταν έχομε μόνο ένα κινούμενο σημειακό φορτίο, τότε τα βοηθητικά ρεύματα δίνονται από τις σχέσεις (1.23).
Περιοριζόμαστε στην περίπτωση με ένα κινούμενο σημειακό φορτίο διότι αυτή είναι απλή και χρήσιμη διότι από αυτή με επαλληλία μπορούμε να βρούμε τι γίνεται για οποιαδήποτε κατανομή φορτίων. Τότε η μέθοδος ανάλυσης λέγεται μέθοδος με πεδιακό βάρος (weighting field), το πεδιακό βάρος είναι το μέγεθος $-\vec{E}_j(\vec{x})/V_{\mathrm{w}} = \vec{\nabla}\Phi_j(\vec{x})/V_{\mathrm{w}}$.
Τονίζομε ότι το πεδιακό βάρος είναι ένα βοηθητικό μέγεθος που εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία των αγωγών και το μεταξύ τους διηλεκτρικό που είναι κάποιο αέριο. Για τον υπολογισμό του, θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν φορτία στο μεταξύ των αγωγών χώρο, όλοι οι αγωγοί έχουν δυναμικά μηδέν εκτός από τον αγωγό υπ' αρ. j που έχει δυναμικό V_{w}.
Προφανώς αυτά τα δυναμικά δεν έχουν σχέση με τις πολώσεις των αγωγών του ανιχνευτή κατά την κανονική λειτουργία του, όπως είπαμε είναι βοηθητικά δυναμικά για τον υπολογισμό του πεδιακού βάρους. Είναι σαφές, με άλλα λόγια, ότι το παραπάνω βοηθητικό πεδίο $\vec{E}_j$ δεν εξαρτάται από το τι συμβαίνει στην όλη διάταξη όταν η κατανομή φορτίου μεταβάλλεται και η διάταξη διαρρέεται από ρεύμα όταν ο ανιχνευτής ανιχνεύει διερχόμενα σωματίδια.
Η επίλυση του προβλήματος και ο προσδιορισμός των διαφόρων τάσεων και ρευμάτων, γίνεται λύνοντας το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων που φαίνονται στις σχέσεις (1.24) σε συνδυασμό με τις σχέσεις που ισχύουν για το εξωτερικό κύκλωμα και συνδέουν τα ρεύματα $i_k(t)$ και τις τάσεις $\upsilon_l(t)$. Συνοψίζομε λέγοντας ότι, οι σχέσεις (1.24) δείχνουν ότι όταν κινούνται φορτία στο χώρο του ανιχνευτή, στα ηλεκτρόδια του ανιχνευτή αντιστοιχούν πηγές ρευμάτων $I_j(t)$. Σύμφωνα με τις δεύτερες από τις σχέσεις (1.24) έχομε το ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του Σχ.(1.2) όπου αυτές οι πηγές ρεύματος είναι μέρος από το συνολικό δικτύωμα που αποτελείται από το «εσωτερικό» δικτύωμα, δηλαδή τις χωρητικότητες C_{ij} και τις πηγές I_j και από το «εξωτερικό» δικτύωμα. Μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι πράγματι για το ισοδύναμο κύκλωμα του ανιχνευτή, Σχ.(1.2), ισχύουν οι δεύτερες από τις σχέσεις (1.24).



Σχήμα 1.2 . Το ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα ανιχνευτή με τρεις αγωγούς και εξωτερικό κύκλωμα.

Στο εξωτερικό κύκλωμα συμπεριλαμβάνεται το κύκλωμα που παρέχει την πόλωση του ανιχνευτή. Συνήθως το κύκλωμα πόλωσης είναι έτσι σχεδιασμένο που να μην επηρεάζει αισθητά τη μορφή των σημάτων στην έξοδο του ανιχνευτή και γι αυτό πολλές φορές δεν λαμβάνεται υπόψη στους υπολογισμούς σημάτων. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι αντί να λύσομε τις διαφορικές Εξ.(1.24) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις του εξωτερικού κυκλώματος, μπορούμε να λύσομε το ηλεκτροτεχνικό πρόβλημα που παριστάνει το Σχ.(1.2) όπου υπάρχουν οι πηγές ρεύματος $I_j(t)$ και το συνολικό (εσωτερικό και εξωτερικό) κύκλωμα. Η επίλυση μπορεί να γίνει με τους διάφορους τρόπους επίλυσης κυκλωμάτων, όπως, για παράδειγμα, είναι η μέθοδος ανάλυσης στον μιγαδικό χώρο όπου γίνεται χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Τα φορτία κινούνται μεταξύ των ηλεκτροδίων για πεπερασμένους χρόνους αφού τα ηλεκτρόδια, στην πράξη, βρίσκονται σε πεπερασμένες αποστάσεις. Αφού συλλεχθούν όλα τα φορτία, τότε $\vec{J}(\vec{x},t)=0$, όμως και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να εξακολουθούν να υπάρχουν ρεύματα ή/και τάσεις στις εξόδους-ηλεκτρόδια του ανιχνευτή. Αυτό εξαρτάται από το εξωτερικό κύκλωμα. Αν περιοριστούμε από την αρχή στην περίπτωση ενός μόνο κινούμενου σημειακού φορτίου q_{P}, η ανάλυση είναι απλούστερη. Θα εξετάσομε, για ακόμη επιπλέον ευκολία, την περίπτωση με τρεις αγωγούς S_1, S_2, S_3 ενώ ο περιβάλλων αγωγός είναι στο άπειρο και έχει δυναμικό μηδέν. Τώρα το αντίστοιχο του Σχ. (1.1) είναι το Σχ.(1.3). Ακολουθούμε την ανάλυση που υπάρχει στην αναφορά [4].



Σχήμα 1.3 Σύστημα 3 αγωγών και εξωτερικό κύκλωμα. Μεταξύ των αγωγών στη θέση P κινείται σημειακό φορτίο q_{P} με ταχύτητα $\vec{u}$.

Θεωρούμε την πραγματική κατάσταση και τρεις βοηθητικές πιθανές ηλεκτροστατικές καταστάσεις, A, B, C . Τα αντίστοιχα φορτία και δυναμικά των τεσσάρων αυτών καταστάσεων φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 1.

Πίνακας 1

	Πραγματική κατάσταση	Κατάστ. A	Κατάστ. B	Κατάστ. C
Φορτίο στο P και στους αγωγούς	$q_{\mathrm{P}} q_0 q_1 q_2 q_3$	$0 q_{\mathrm{A}0} q_{\mathrm{A}1} q_{\mathrm{A}2} q_{\mathrm{A}3}$	$0 q_{\mathrm{B}0} q_{\mathrm{B}1} q_{\mathrm{B}2} q_{\mathrm{B}3}$	$0 q_{\mathrm{C}0} q_{\mathrm{C}1} q_{\mathrm{C}2} q_{\mathrm{C}3}$
Δυναμικό στο P και στους αγωγούς	$\upsilon_{\mathrm{P}} 0 \upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3$	$\upsilon_{\mathrm{AP}} 0 \upsilon_{\mathrm{A}1} 0 0$	$\upsilon_{\mathrm{BP}} 0 0 \upsilon_{\mathrm{B}2} 0$	$\upsilon_{\mathrm{CP}} 0 0 0 \upsilon_{\mathrm{C}3}$

Για αυτές τις καταστάσεις, το θεώρημα της αμοιβαιότητας δίνει:

$$\begin{aligned}
q_1 + q_{\mathrm{P}}\upsilon_{\mathrm{AP}} / \upsilon_{\mathrm{A1}} &= q_{\mathrm{A1}}\upsilon_1 / \upsilon_{\mathrm{A1}} + q_{\mathrm{A2}}\upsilon_2 / \upsilon_{\mathrm{A1}} + q_{\mathrm{A3}}\upsilon_3 / \upsilon_{\mathrm{A1}} \\
q_2 + q_{\mathrm{P}}\upsilon_{\mathrm{BP}} / \upsilon_{\mathrm{B2}} &= q_{\mathrm{B1}}\upsilon_1 / \upsilon_{\mathrm{B2}} + q_{\mathrm{B2}}\upsilon_2 / \upsilon_{\mathrm{B2}} + q_{\mathrm{B3}}\upsilon_3 / \upsilon_{\mathrm{B2}} \\
q_3 + q_{\mathrm{P}}\upsilon_{\mathrm{CP}} / \upsilon_{\mathrm{C3}} &= q_{\mathrm{C1}}\upsilon_1 / \upsilon_{\mathrm{C3}} + q_{\mathrm{C2}}\upsilon_2 / \upsilon_{\mathrm{C3}} + q_{\mathrm{C3}}\upsilon_3 / \upsilon_{\mathrm{C3}}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Οι λόγοι $f_1(\mathrm{P}) = \upsilon_{\mathrm{AP}} / \upsilon_{\mathrm{A1}}, f_2(\mathrm{P}) = \upsilon_{\mathrm{BP}} / \upsilon_{\mathrm{B2}}, f_3(\mathrm{P}) = \upsilon_{\mathrm{CP}} / \upsilon_{\mathrm{C3}}$ είναι συναρτήσεις βάρους, πρόκειται για γεωμετρικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το κάθε ένα ηλεκτρόδιο. Τα πηλίκα $c_1 = q_{\mathrm{A1}} / \upsilon_{\mathrm{A1}},\ c_2 = q_{\mathrm{B2}} / \upsilon_{\mathrm{B2}}, c_3 = q_{\mathrm{C3}} / \upsilon_{\mathrm{C3}}$ είναι οι χωρητικότητες του κάθε ενός ηλεκτροδίου 1, 2, 3 .
Τα πηλίκα $c_{12} = -q_{\mathrm{A2}} / \upsilon_{\mathrm{A1}},\ c_{13} = -q_{\mathrm{A3}} / \upsilon_{\mathrm{A1}},$ κλπ., είναι οι συντελεστές επαγωγής και αναφέρονται στα ζεύγη ηλεκτροδίων. Οι παραπάνω σχέσεις μπορεί να γραφτούν στη μορφή με πίνακες, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
&\|q\| + q_{\mathrm{P}}\|f\| = \|c\| \cdot \|\upsilon\| \\
&\|q\| = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Vmatrix},\ \|f\| = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Vmatrix},\ \|\upsilon\| = \begin{Vmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{Vmatrix} \\
&\|c\| = \begin{Vmatrix} c_1 & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & c_2 & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & c_3 \end{Vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Διαφορίζομε αυτές τις σχέσεις ως προς το χρόνο οπότε βρίσκομε τις σχέσεις με τα ρεύματα, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} f_k \cdot \vec{u}(t),\ k = 1,2,3 \\
&-\|i\| + q_{\mathrm{P}}\vec{\nabla}\|f\| \cdot \vec{u}(t) = \|c\| \cdot \begin{Vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \end{Vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Για τις τρεις καταστάσεις 1,2,3 ισχύουν σχέσεις όπως η παρακάτω που ισχύει για την κατάσταση υπ. αρ. 1, $\vec{\nabla} f_1(\mathrm{P}) = (\vec{\nabla}\upsilon_{\mathrm{AP}}) / \upsilon_{\mathrm{A1}}$. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση P είναι, $\vec{E}_1(\mathrm{P}) = -\vec{\nabla}\upsilon_{\mathrm{AP}}$. Η έκφραση $q_{\mathrm{P}}\vec{\nabla}\|f\| \cdot \vec{u}(t)$ δίνει τα βοηθητικά ρεύματα. Για τον αγωγό 1, έχομε, $I_1 = -q_{\mathrm{P}} \dfrac{\vec{E}_1 \cdot \vec{u}}{\upsilon_{\mathrm{A1}}}$. Γενικώς ισχύει, $I_j = -q \dfrac{\vec{E}_j \cdot \vec{u}}{V_{\mathrm{W}}}$, δηλαδή η σχέση που είδαμε στα προηγούμενα.

Προφανώς αυτές οι σχέσεις είναι ίδιες με τις πρώτες από τις σχέσεις (1.24) για τρεις αγωγούς.
Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην περίπτωση που οι αγωγοί (πηγές ρεύματος) είναι γειωμένοι. Θα υπολογίσομε το επαγόμενο φορτίο για έναν αγωγό προς τη γη [11]. Συγκεκριμένα, έστω ότι το σημειακό φορτίο q κινείται κατά μήκος της τροχιάς $\vec{x} = \vec{x}(t)$ από τη θέση $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ στη θέση $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$, αυτό έχει ως αποτέλεσμα επαγόμενο φορτίο Q_j^{ind} να διέρχεται μέσα από τη $j-$στή πηγή ρεύματος ($j-$στό αγωγό) προς τη γη. Αυτό το φορτίο δίνεται από την παρακάτω σχέση (1.28),

$$\begin{aligned} Q_j^{\text{ind}} &= \int_{t_0}^{t_1} I_j^{\text{ind}} \mathrm{d}t = -\frac{q}{V_{\text{w}}} \int_{t_0}^{t_1} \vec{E}_j(\vec{x}(t)) \cdot \vec{u}(\vec{x}(t)) \mathrm{d}t = -\frac{q}{V_{\text{w}}} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{E}_j(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\ &= \frac{q}{V_{\text{w}}} \left(\varPhi_j(\vec{x}_1) - \varPhi_j(\vec{x}_0) \right) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Τα $\vec{E}, \varPhi, V$ είναι όλα βοηθητικά μεγέθη όπως αναφέραμε προηγουμένως. I^{ind} είναι το επαγόμενο ρεύμα. Βλέπομε ότι το φορτίο Q_j^{ind} δεν εξαρτάται από την τροχιά αλλά μόνο από τα δυο άκρα της τροχιάς. Αν σε ένα σημείο $\vec{x}_0$ δημιουργηθούν δυο αντίθετα φορτία $q > 0, -q < 0$ και μετά από κάποιο χρόνο το q μεταβεί στη θέση $\vec{x}_1$ ενώ το $-q$ στη θέση $\vec{x}_2$, εφαρμόζομε τη σχέση (1.28) για τα δυο φορτία και με την αρχή της επαλληλίας βρίσκομε το ολικό φορτίο που διέρχεται από τον αγωγό j προς τη γη. Αυτό δίνεται από την παρακάτω σχέση (1.29),

$$Q_j^{\text{ind}} = \frac{q}{V_{\text{w}}} \left(\varPhi_j(\vec{x}_1) - \varPhi_j(\vec{x}_2) \right) \tag{1.29}$$

Αν το ένα από τα παραπάνω φορτία, το q, φτάνει στην επιφάνεια του αγωγού j, ενώ το φορτίο $-q$ φτάνει στην επιφάνεια ενός άλλου αγωγού, το ολικό φορτίο από τον αγωγό j προς τη γη είναι q, εφόσον $\varPhi_j = V_{\text{w}}$ για το ηλεκτρόδιο j και $\varPhi_j = 0$ για όλα τα άλλα. όταν τα δυο παραπάνω φορτία καταλήγουν σε άλλα ηλεκτρόδια τότε το ολικό επαγόμενο φορτίο στο j είναι μηδέν.
Το συμπέρασμα είναι ότι, όταν όλα τα φορτία έχουν φτάσει στα διάφορα ηλεκτρόδια, το ολικό φορτίο που επάγεται στο ηλεκτρόδιο (αγωγό) j ισούται με το φορτίο που έχει φτάσει στο ηλεκτρόδιο j.
Από αυτό συμπεραίνεται επίσης ότι τα επαγόμενα ρεύματα στους αγωγούς οι οποίοι δεν δέχονται φορτίο είναι διπολικά, δηλαδή αρνητικά και θετικά έτσι που το επαγόμενο σε κάθε ένα από αυτά ολικό φορτίο να είναι μηδέν.

Απόδειξη του θεωρήματος της αμοιβαιότητας του Green.

Το θεώρημα της απόκλισης είναι,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \mathrm{d}^3 x = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \tag{1.30}$$

Έστω $\vec{A} = \Phi \vec{\nabla} \Phi'$, όπου τα Φ, Φ' είναι τυχαίες βαθμωτές συναρτήσεις της θέσης. Ισχύουν οι σχέσεις,

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla} \Phi') = \Phi \nabla^2 \Phi' + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi' \\ &\Phi \vec{\nabla} \Phi' \cdot \vec{n} = \Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Αντικαθιστούμε τις (1.31) στην (1.30) και καταλήγομε στην πρώτη ταυτότητα του Green (Green's first identity),

$$\int_{\Omega} \left(\Phi \nabla^2 \Phi' - \Phi' \nabla^2 \Phi \right) \mathrm{d}^3 x = \oint_{S} \left[\Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} - \Phi' \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \mathrm{d}a \tag{1.32}$$

Στην ηλεκτροστατική οι συναρτήσεις είναι δυναμικά οπότε ισχύουν,

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \varepsilon_0, \; \nabla^2 \Phi' = -\rho' / \varepsilon_0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sigma / \varepsilon_0, \; \frac{\partial \Phi'}{\partial n} = \sigma' / \varepsilon_0 \tag{1.33}$$

Αντικαθιστούμε στην (1.32) και τελικά βρίσκομε πράγματι την (1.1), δηλαδή,

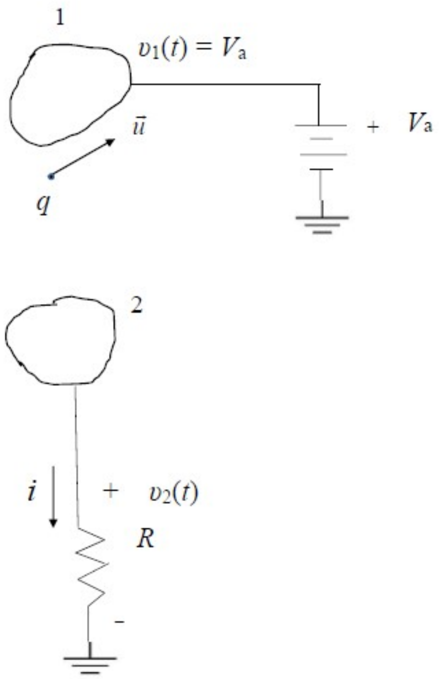
$$\int_{\Omega} \Phi' \rho \mathrm{d}^3 x + \int_{S} \Phi' \sigma \mathrm{d}a = \int_{\Omega} \Phi \rho' \mathrm{d}^3 x + \int_{S} \Phi \sigma' \mathrm{d}a$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η μεταλλική επιφάνεια S_0 του Σχήματος 1.1 είναι η εσωτερική επιφάνεια μεταλλικού φλοιού, το εσωτερικό της S_0 δεν επηρεάζεται από φορτία που είναι στο εξωτερικό του φλοιού. Το εσωτερικό είναι ηλεκτρικά θωρακισμένο.

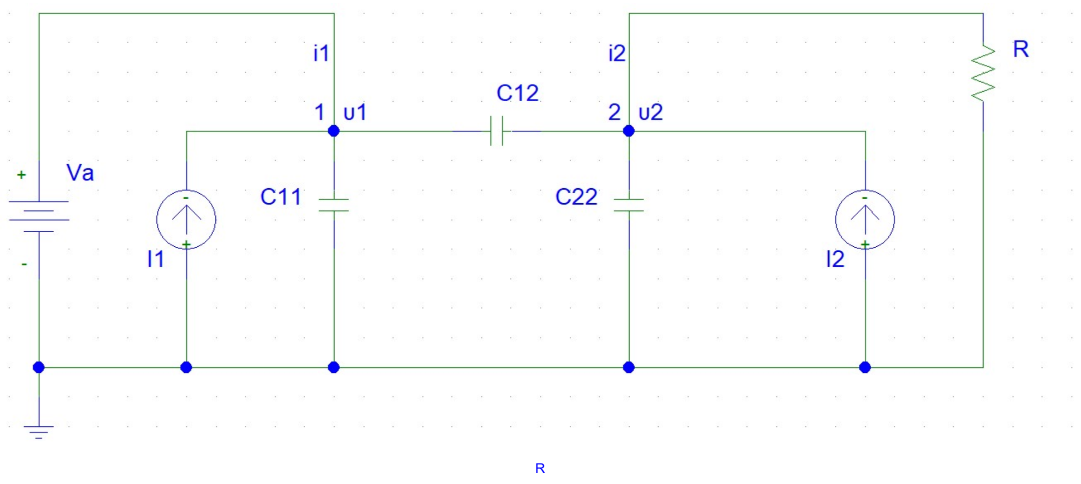
Παραδείγματα

Π1 Σημειακό φορτίο κινούμενο στο χώρο ανιχνευτή με δυο αγωγούς τυχαίου σχήματος.

Θα θεωρήσομε τον ανιχνευτή με δυο τυχαίους αγωγούς, ο περιβάλλων αγωγός είναι στο άπειρο με δυναμικό 0, Σχ.(Π1.1). Το σήμα λαμβάνεται από τον αγωγό 2 ως ρεύμα ή τάση ενώ ο αγωγός 1 συνδέεται με την πηγή πόλωσης. Το ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα φαίνεται στο Σχ.(Π1.2).



Σχήμα Π1.1 Διάταξη ανιχνευτή με δυο αγωγούς το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν.



Σχήμα Π1.2 Ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του ανιχνευτή του Σχ.(Π1.1), με χρήση PSPICE..

Θα χρησιμοποιήσομε τις πρώτες από τις σχέσεις (1.24). Βρίσκομε

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= i_1(t) + c_{11}\frac{\mathrm{d}\upsilon_1(t)}{\mathrm{d}t} + c_{12}\frac{\mathrm{d}\upsilon_2(t)}{\mathrm{d}t} \\
I_1(t) &= -\frac{1}{V_1}\int_{\Omega} \vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{E}_1(\vec{x})\mathrm{d}^3x \\
I_2(t) &= i_2(t) + c_{12}\frac{\mathrm{d}\upsilon_1(t)}{\mathrm{d}t} + c_{22}\frac{\mathrm{d}\upsilon_2(t)}{\mathrm{d}t} \\
I_2(t) &= -\frac{1}{V_2}\int_{\Omega} \vec{J}(\vec{x},t)\cdot\vec{E}_2(\vec{x})\mathrm{d}^3x.
\end{aligned}
\tag{Π1.1}
$$

Έχομε $\upsilon_1 = V_{\mathrm{a}} = \text{σταθ.}$ άρα $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon_1}{\mathrm{d}t} = 0$. Για σημειακό φορτίο που τη στιγμή t βρίσκεται στη θέση $\vec{x}_q(t)$ και έχει ταχύτητα $\vec{u}(\vec{x}_q(t))$ έχομε από τις (1.23), τις παρακάτω σχέσεις για τα I_1, I_2

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= -q\frac{\vec{E}_1(\vec{x}_q(t))\cdot\vec{u}(\vec{x}_q(t))}{V_1}, \quad V_2 = 0 \\
I_2(t) &= -q\frac{\vec{E}_2(\vec{x}_q(t))\cdot\vec{u}(\vec{x}_q(t))}{V_2}, \quad V_1 = 0
\end{aligned}
\tag{Π1.2}
$$

Δεν μας ενδιαφέρει το $i_1(t)$ οπότε από τις σχέσεις (Π1.1) κρατούμε μόνο την τρίτη η οποία εφόσον $\upsilon_1 = \text{σταθ.}$ οδηγεί στην Εξ.(Π1.3)

$$
I_2(t) = i_2(t) + c_{22}\frac{\mathrm{d}\upsilon_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{Π1.3}
$$

Τα $\upsilon_2(t)$, $i_2(t)$ αναφέρονται στο σήμα στην έξοδο του ανιχνευτή.
Έχομε για το ρεύμα στον αντιστάτη R που συνδέεται με τον αγωγό 2, $i_2 = \upsilon_2 / R$, επομένως η Εξ.(Π1.3) δίνει,

$$
I_2(t) = \frac{\upsilon_2(t)}{R} + c_{22}\frac{\mathrm{d}\upsilon_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{Π1.4}
$$

Η λύση αυτής της (διαφορικής) εξίσωσης είναι

$$
\upsilon_2(t) = \upsilon_2(0) + \mathrm{e}^{-t/(Rc_{22})}\frac{1}{c_{22}}\int_0^t e^{t'/(Rc_{22})} I_2(t')\mathrm{d}t' \tag{Π1.5}
$$

Στη συνέχεια θα υποθέσομε ότι οι δυο αγωγοί της συνδεσμολογίας του Σχ.(Π1.1) αποτελούν ιδανικό πυκνωτή, στην πράξη μπορεί να έχομε δυο πολύ μεγάλες επίπεδες μεταλλικές πλάκες (οπλισμοί του πυκνωτή) εμβαδού S, σε πολύ μικρή απόσταση a μεταξύ τους. Θυμίζομε ότι η συνήθης χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή είναι, $C_{\mathrm{E}} = \varepsilon \dfrac{S}{a}$. Σημειώνομε ότι οι δυο οπλισμοί 1, 2 φορτισμένου πυκνωτή φέρουν ίσου μέτρου αλλά αντίθετου προσήμου φορτία $Q_1, Q_2 = -Q_1$ αντιστοίχως. Με χρήση των (1.9) βρίσκομε τις σχέσεις,

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = C_{11}V_1 + C_{11}(V_1 - V_1) + C_{12}(V_1 - V_2) \\
&Q_2 = -Q_1 = C_{22}V_2 + C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}(V_2 - V_2) \\
&C_{12} = C_{21}
\end{aligned}
$$

Από αυτές προκύπτουν οι σχέσεις,

$$
\begin{aligned}
&C_{11}V_1 + C_{22}V_2 = 0 \\
&C_{11} = C_{22} = 0
\end{aligned}
$$

Υπάρχει δηλαδή μόνο ένας (ανεξάρτητος) συντελεστής που είναι η χωρητικότητα του αγωγού (ηλεκτροδίου) ανίχνευσης του ανιχνευτή ως προς το άλλο ηλεκτρόδιο. Με άλλα λόγια πρόκειται για τη χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή. Δηλαδή $C_{\mathrm{d}} = C_{12} = C_{21} = C_{\mathrm{E}}$. Από τις (1.10) και (Π1.4) βρίσκομε,

$$
\begin{aligned}
&c_{22} = C_{21} = C_{\mathrm{d}} \\
&I_2(t) = \frac{\upsilon_2(t)}{R} + C_{\mathrm{d}} \frac{\mathrm{d}\upsilon_2(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\qquad (\Pi1.6)
$$

Το χαρακτηριστικό αυτής της διάταξης είναι ότι, όταν οι αγωγοί αυτοί έχουν αντίθετα φορτία ίσου μέτρου, τότε όλες οι πεδιακές γραμμές που ξεκινούν από τον έναν αγωγό καταλήγουν στον άλλο. Προσοχή, αυτό δεν ισχύει, γενικώς, για κάθε ζευγάρι αγωγών.

Θα εξετάσομε δυο ακραίες περιπτώσεις που μπορεί να εμφανιστούν οριακά στην πράξη. Θα γράφομε $\upsilon = \upsilon_2$, $I = I_2$.

Στη μια ακραία περίπτωση ισχύει $C_{\mathrm{d}}R \gg \tau$, όπου τ είναι ο χρόνος ο οποίος χρειάζεται για να μεταβληθεί σημαντικά το υ, δηλαδή $C_{\mathrm{d}}R\left|\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\right| \gg |\upsilon|$. Τότε μπορεί να παραληφθεί ο όρος υ και έχομε κατά προσέγγιση,

$$
\begin{aligned}
&I(t)R = C_{\mathrm{d}}R\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t}, \quad I(t) = C_{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} \\
&\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{I(t)}{C_{\mathrm{d}}}, \quad \upsilon(t) = \upsilon(0) + \frac{1}{C_{\mathrm{d}}}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t'
\end{aligned}
\qquad (\Pi1.7)
$$

Αυτό σημαίνει ότι είναι σαν να μην υπάρχει ο αντιστάτης R $(R=\infty)$ και το I φορτίζει τη χωρητικότητα C_{d} . Αυτός λέγεται τασικός τρόπος λειτουργίας του ανιχνευτή.

Στην άλλη περίπτωση $C_{\mathrm{d}}R \ll \tau$, τότε $C_{\mathrm{d}}R\left|\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\right| \ll |\upsilon|$, επομένως κατά προσέγγιση,

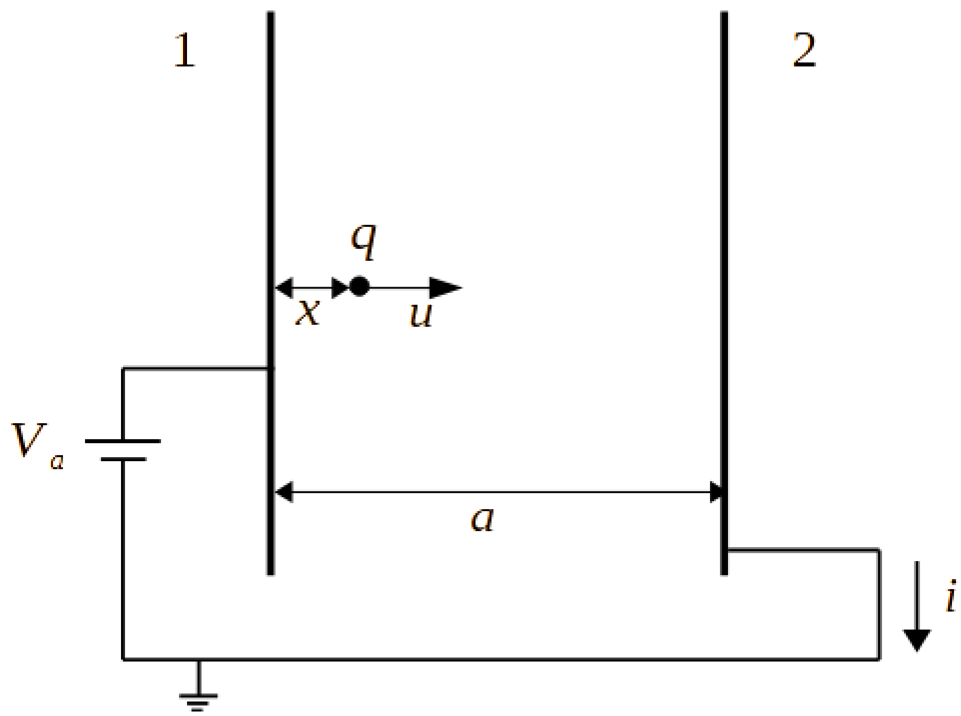
$$IR=\upsilon \tag{Π1.8}$$

Αυτό σημαίνει ότι στο ισοδύναμο κύκλωμα, είναι σαν να μην υπάρχει ο πυκνωτής, $C_{\mathrm{d}}=0$ και το ρεύμα I διέρχεται από τον αντιστάτη.

Αυτός λέγεται ρευματικός τρόπος λειτουργίας.

Μπορούμε να λύσομε το πρόβλημα θεωρώντας το ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του Σχ.(Π1.2). Εφαρμόζομε τους κανόνες του Kirchhoff και τελικώς καταλήγομε ξανά στη (διαφορική) εξίσωση (Π1.4). Θυμηθείτε ότι μπορεί να δείξετε ότι $c_{22}=C_{22}+C_{12}$.

Για διδακτικούς λόγους θα μελετήσομε την περίπτωση ανιχνευτή που αποτελείται από δύο αγωγούς όπως στο Σχήμα Π1.1α. Οι αγωγοί είναι δυο επίπεδες μεταλλικές πλάκες μεγάλων διαστάσεων, παράλληλες μεταξύ τους, κάτι σαν επίπεδος πυκνωτής.

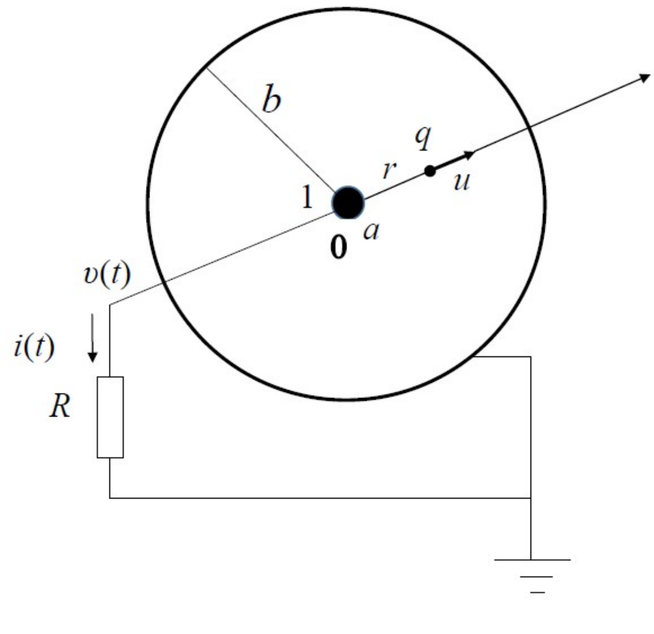


Σχήμα Π1.1α Ανιχνευτής που αποτελείται από δυο απέραντες μεταλλικές πλάκες.

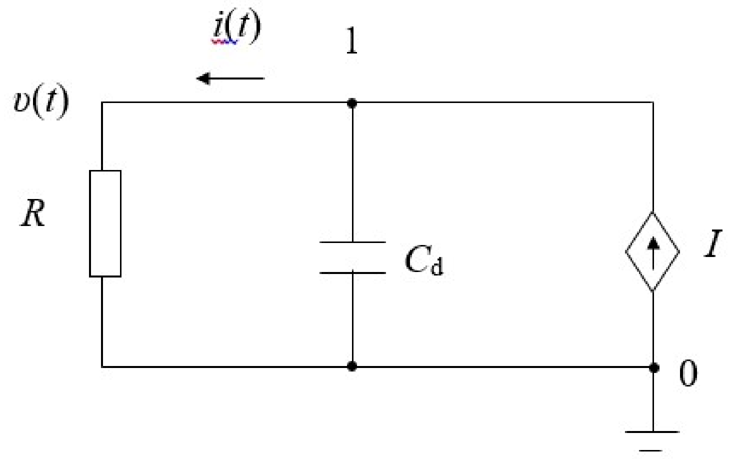
Η πηγή ρεύματος του αγωγού 2 που μας ενδιαφέρει υπολογίζεται από τη δεύτερη των σχέσεων (Π1.2). Υποθέτομε ότι θετικό φορτίο q ξεκινά από τη θέση x και κινείται προς τον αγωγό (ηλεκτρόδιο) 2. Έχομε για το ρεύμα που σημειώνεται στο Σχ. Π1.1α, $i = q\dfrac{Eu}{V_a}$, $E = \dfrac{V_a}{a}$, άρα $i = \dfrac{qu}{a}$. Θεωρούμε την κατεύθυνση κίνησης του φορτίου θετική. Ο χρόνος που κινείται το φορτίο μεταξύ των πλακών είναι ίσος με $T_2 = (a - x)/u$, οπότε το φορτίο δια του κυκλώματος θα είναι, $Q_2 = iT_2 = q\dfrac{u}{a}T_2 = q\left(1 - x/a\right)$. Παρατηρούμε ότι όταν $x = 0$ το φορτίο Q_2 είναι q, όταν $x = a$ είναι μηδέν. Αυτά είναι αναμενόμενα. Ας υποθέσομε στη συνέχεια ότι από το ίδιο σημείο ξεκινά ένα αρνητικό φορτίο (θεωρούμε ότι τα δυο φορτία προήρθαν από ιονισμό) που κινείται προς το ηλεκτρόδιο 1 με ταχύτητα διαφορετικού μέτρου $\upsilon > 0$, επομένως η ταχύτητα είναι $-\upsilon < 0$. Το φορτίο Q_1 δια του κυκλώματος βρίσκεται εύκολα ότι δίνεται από τη σχέση, $Q_1 = qx/a$. Αν τα φορτία ξεκινούν (παράγονται) σε σημείο πολύ κοντά στο ηλεκτρόδιο 1 τότε το x είναι πολύ μικρό και το Q_1 είναι πολύ μικρό. Όμως σε κάθε περίπτωση το άθροισμα των δυο φορτίων είναι, $Q_1 + Q_2 = q$, όπως αναμένεται.

Π2 Κυλινδρικός ανιχνευτής με κυκλική διατομή.

Η διάταξη του ανιχνευτή φαίνεται στο Σχ.(Π2.1), πρόκειται για την εγκάρσια διατομή του ανιχνευτή. Στο Σχ.(Π2.2) φαίνεται το ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του ανιχνευτή.



Σχήμα Π2.1 Εγκάρσια διατομή ανιχνευτή με κυκλική διατομή.



Σχήμα Π2.2 Ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα του ανιχνευτή του Σχ.(Π1.3).

Για ευκολία υποθέτουμε ότι ο ανιχνευτής είναι κύλινδρος με μεγάλο μήκος σχετικά με την ακτίνα της διατομής του. Με αυτό το χαρακτηριστικό μπορούν να αγνοηθούν τα φαινόμενα των άκρων (δηλαδή το πεδίο είναι παντού ακτινικό), όμως το μήκος δεν είναι τόσο μεγάλο ώστε να εμφανίζονται φαινόμενα διάδοσης. Μέσα στον ανιχνευτή κινείται ακτινικά από το κέντρο προς τα έξω σημειακό φορτίο q. Στα Σχήματα (Π2.1) και (Π2.2) δεν δείχνομε το δυναμικό πόλωσης, V_{a}, το οποίο εφαρμόζεται μεταξύ του κεντρικού ηλεκτροδίου (αγωγού) του ανιχνευτή, αγωγός 1 και του περιβλήματος, 0, το οποίο βρίσκεται σε δυναμικό 0. Θεωρούμε ότι το κύκλωμα είναι τέτοιο που δεν επηρεάζει το σήμα του ανιχνευτή.
Μπορούμε να καταλάβομε εύκολα ότι ο μόνος συντελεστής χωρητικότητας που υπεισέρχεται είναι η χωρητικότητα του ανιχνευτή, C_{d}, που είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή που σχηματίζουν οι δυο αγωγοί. Εύκολα προκύπτει ότι ισχύει η γνωστή σχέση

$$C_{\mathrm{d}} = C_l l = l \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \qquad (\Pi1.9)$$

Το l είναι το μήκος του ανιχνευτή και C_l είναι η χωρητικότητά του ανά μονάδα μήκους.
Το δυναμικό πόλωσης πολώνει τον αγωγό 1 θετικά ως προς το περίβλημα, 0. Η (εσωτερική) ακτίνα του περιβλήματος είναι b και η ακτίνα του κεντρικού αγωγού είναι $a < b$. Το βοηθητικό ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο του κυλινδρικού ανιχνευτή για δυναμικό V στο ηλεκτρόδιο 1 που είναι το κεντρικό ηλεκτρόδιο του κυλινδρικού ανιχνευτή, είναι ακτινικό με κατεύθυνση προς τα έξω και δίνεται από τη σχέση,

$$E(\vec{x})\vec{e}_r = \frac{C_l V}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\vec{e}_r = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\vec{e}_r \qquad (\Pi 1.10)$$

Θεωρούμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Έχει ληφθεί υπόψη ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, με χρήση της (Π1.9), δίνεται από τη σχέση,

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (\Pi 1.11)$$

Στους ανιχνευτές με αέριο ισχύει κατά προσέγγιση $\varepsilon_{\mathrm{r}} \approx 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 \approx \varepsilon_0$. Το βοηθητικό ρεύμα $I(t)$ του κεντρικού ηλεκτροδίου (αγωγού) του ανιχνευτή υπολογίζεται από τη σχέση (1.23). Τελικώς καταλήγομε στη σχέση,

$$I(t) = -q\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r(t)}[\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{e}_r] \qquad (\Pi 1.12)$$

Η κίνηση του σημειακού φορτίου είναι ακτινική, οπότε θα έχομε,

$$I(t) = -q\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r(t)}u(r(t)) \qquad (\Pi 1.13)$$

Το $u(r(t))$ είναι θετικό αν η κίνηση είναι από το κέντρο προς τα έξω και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.
Το σημειακό φορτίο, q, δεχόμαστε ότι ξεκίνησε τη στιγμή t=0 από τη θέση $r = r_0 > a$, όπου a η ακτίνα του σύρματος και κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $u(r(t))$. Αυτή η αρχική θέση, στην πράξη, βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια του σύρματος.
Στον ανιχνευτή κινούνται θετικά σωματίδια προς την κάθοδο, που είναι θετικά ιόντα και αρνητικά σωματίδια προς την άνοδο που πρακτικά είναι μόνο ηλεκτρόνια.
Θα εξετάσομε μόνο τα θετικά ιόντα υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα μόνο είδος.
Για ιόντα ισχύει για την ταχύτητα ολίσθησης, (για ευρεία περιοχή πεδίων)

$$u = \mu E_{\mathrm{a}} \qquad (\Pi 1.14)$$

όπου $\mu =$ σταθερό. Αυτή η σταθερά είναι η ευκινησία (mobility) των ιόντων. Εδώ πρέπει να τονίσομε ότι το πεδίο E_{a} είναι το πραγματικό πεδίο στον ανιχνευτή που οφείλεται μόνο στην πόλωση του ανιχνευτή με υψηλή τάση, αν αγνοήσομε την επίδραση των φορτίων χώρου και υποθέσομε ότι η πτώση τάσης στον αντιστάτη που συνδέεται με την τροφοδοσία υψηλής τάσης είναι αμελητέα σε σχέση με την υψηλή τάση, αφού χρησιμοποιήσομε τη σχέση (Π1.14) καταλήγομε στη σχέση

$$u = \mu\frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r} \qquad (\Pi 1.15)$$

Είναι προφανές ότι θετικό σημειακό φορτίο q θα κινείται με κατεύθυνση από την άνοδο (κεντρικό ηλεκτρόδιο, ηλεκτρόδιο σήματος) προς την κάθοδο (εξωτερικό ηλεκτρόδιο) και θα έχομε για το ρεύμα του κεντρικού ηλεκτροδίου,

$$I = -\frac{q\mu V_{\mathrm{a}}}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{r^2} \qquad (\Pi 1.16)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα του ανιχνευτή αποτελείται από πηγή ρεύματος η οποία είναι συνδεδεμένη με το εξωτερικό δικτύωμα που φαίνεται στο Σχ.(Π2.2).
Χρειαζόμαστε τη θέση συναρτήσει του χρόνου για το σημειακό σμήνος θετικών ιόντων. Από τις ανωτέρω σχέσεις βρίσκομε,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \mu\frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}, \quad r\mathrm{d}r = \mu\frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}}\mathrm{d}t, \quad \int_{r_0}^{r} r'\mathrm{d}r' = \int_0^t \mu\frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}}\mathrm{d}t'$$

$$r^2 = r_0^2 + 2\mu\frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}}t, \quad r^2 = r_0^2(1 + t/t_0)$$

$$t_0 = \frac{r_0^2}{2\mu V_{\mathrm{a}}}\ln\frac{b}{a} \qquad (\Pi 1.17)$$

$$T = \frac{(b^2 - r_0^2)\ln\frac{b}{a}}{2\mu V_{\mathrm{a}}}$$

$$I(t) = -\frac{q\mu V_{\mathrm{a}}}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{(1 + t/t_0)}$$

Η παράμετρος (χρόνος) t_0 καθορίζει την κλίμακα χρόνου της κίνησης των φορέων φορτίου και του επαγόμενου σήματος. T είναι ο χρόνος άφιξης του σημειακού φορτίου στο εξωτερικό περίβλημα.
Από το Σχ.(Π2.2) ή τις Εξ.(1.24) κτλ έχομε

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\upsilon(t)}{R} + C_{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} \\ I(t)R &= \upsilon(t) + RC_{\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \qquad (\Pi 1.18)$$

α) Πρώτα θα εξετάσομε την περίπτωση που ισχύει η σχέση $RC_{\mathrm{d}} \ll \tau$.
Εδώ ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $\tau = t_0$. Ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι, γενικώς, διαφορετικός για τα διάφορα είδη φορέων, δηλαδή διαφόρων ιόντων και των

ηλεκτρονίων. Παραλείπομε τον όρο που περιέχει το RC_{d} οπότε έχομε κατά προσέγγιση

$$\upsilon(t) = I(t)R \qquad (\Pi 1.19)$$

Πρέπει να πούμε ότι με αυτή την προσέγγιση, πρακτικώς, το σήμα διαρκεί όσο χρόνο διαρκεί η κίνηση των φορτίων στο χώρο του ανιχνευτή διότι έχει αγνοηθεί η χωρητικότητα του ανιχνευτή, $C_{\mathrm{d}} \approx 0$, έστω αυτός ο χρόνος T. Είναι προφανές ότι μετά από χρόνο T, αυτή η χωρητικότητα (πυκνωτής) του ανιχνευτή με αρχική τάση $\upsilon(T)$, εκφορτίζεται πολύ γρήγορα μέσα από τον αντιστάτη R (πολύ μικρή σταθερά χρόνου RC_{d}).

Με χρήση των σχέσεων (Π1.17), (Π1.19), βρίσκομε,

$$\begin{aligned} &\upsilon(t) = I(t)R = -\frac{q\mu V_{\mathrm{a}} R}{r_0^2\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{(1+t/t_0)} \qquad 0 \le t \le T \\ &\upsilon(t) = 0 \qquad t > T \qquad \text{και } t < 0 \end{aligned} \qquad (\Pi 1.20)$$

Με λίγο καλύτερη προσέγγιση μπορούμε να πούμε ότι για $t > T$ έχομε,

$$\upsilon(t) \approx \upsilon(T)\exp(-\frac{t-T}{RC_{\mathrm{d}}}), \quad t > T$$

Θα υπολογίσουμε το φορτίο που επάγεται και κινείται μέσα από τον ανιχνευτή, από το ένα του ηλεκτρόδιο προς το άλλο, κατά τη διάρκεια της κίνησης του θετικού φορτίο q. Το κινούμενο θετικό φορτίο ξεκινά από τη θέση r_0 και καταλήγει στο αρνητικό ηλεκτρόδιο δηλαδή στο περίβλημα του ανιχνευτή, θέση b. Για να βρούμε το φορτίο που επάγεται από τη στιγμή t=0 ως τη στιγμή $t \le T$, όπου T είναι η διάρκεια κίνησης του φορτίου των θετικών ιόντων στο χώρο του ανιχνευτή, ολοκληρώνομε ως προς το χρόνο το ρεύμα. Λαβαίνομε υπόψη την Εξ.(Π1.13) και τις (Π1.17) οπότε τελικά υπολογίζομε το ολικό φορτίο Q_{t} που πέρασε μέσα από τον ανιχνευτή,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t \left|I(t')\right| \mathrm{d}t' = \frac{q}{\ln\dfrac{b}{a}}\int_0^t \frac{u}{r}\mathrm{d}t' = \frac{q}{\ln\dfrac{b}{a}}\int_{r_0}^{r} \frac{u}{r}\frac{\mathrm{d}r}{u} = \frac{q}{\ln\dfrac{b}{a}}\ln\frac{r(t)}{r_0} \\ &= \frac{q}{2\ln\dfrac{b}{a}}\ln(1+t/t_0) > 0 \end{aligned} \qquad (\Pi 1.21)$$

$$Q_{\mathrm{t}} = \frac{q}{\ln\dfrac{b}{a}}\ln\frac{b}{r_0}$$

β) Η άλλη ακραία περίπτωση είναι όταν $RC_{\mathrm{d}} \gg \tau = t_0$. Σε αυτή την περίπτωση στο ισοδύναμο κύκλωμα είναι σαν να μην υπάρχει ο αντιστάτης, $R = \infty$. Τώρα στην πρώτη από τις σχέσεις (Π1.18) παραλείπομε τον όρο με το $\upsilon(t)$ και έχομε την εξίσωση

$$I(t) = C_{\mathrm{d}} \frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{Π1.22}$$

Η λύση της με χρήση τελικώς και της Εξ.(Π1.17) είναι

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) &= \upsilon(0) + \frac{1}{C_{\mathrm{d}}}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t' = -\frac{1}{C_{\mathrm{d}}}\int_0^t I(t')\mathrm{d}t' \\
&= -\frac{q}{2C_{\mathrm{d}}\ln\frac{b}{a}}\ln(1+t/t_0), \quad 0 \le t \le T \\
\upsilon(t) &= 0, \quad t < 0 \\
\upsilon(t) &= \upsilon(T), \quad t > T
\end{aligned} \tag{Π1.23}$$

Στην πραγματικότητα μετά από χρόνο T ο πυκνωτής του ανιχνευτή εκφορτίζεται πάρα πολύ αργά, με σταθερά χρόνου RC_{d}, πολύ μεγάλη, μέσα από τον αντιστάτη R . Ισχύει κατά προσέγγιση,

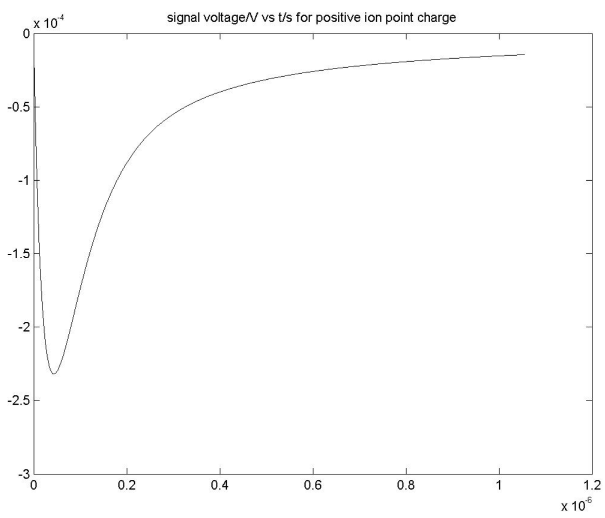
$$\upsilon(t) \approx \upsilon(T)\exp(-\frac{t-T}{RC_{\mathrm{d}}}), \quad t > T$$

Στη γενική περίπτωση, χωρίς προσεγγίσεις, θα δώσομε τη λύση της Εξ.(Π1.18) για την περίπτωση ανιχνευτή που θεωρείται ιδανικός πυκνωτής. Το αποτέλεσμα, με $\upsilon(0) = 0,\ RC_{\mathrm{d}} = \tau_{\mathrm{d}}$, είναι,

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) &= -\frac{q\mu V_{\mathrm{a}} R}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{t_0}{\tau_{\mathrm{d}}}\exp[-(t+t_0)/\tau_{\mathrm{d}}]\{E_1(-\frac{t_0}{\tau_{\mathrm{d}}}) - E_1(-\frac{t+t_0}{\tau_{\mathrm{d}}})\}, \quad T \ge t \ge 0 \\
\upsilon(t) &= \upsilon(T)\exp[-(t-T)/\tau_{\mathrm{d}}], \quad t > T.
\end{aligned} \tag{Π1.24}$$

$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ είναι το λεγόμενο εκθετικό ολοκλήρωμα.

Στο Σχ.(Π2.3) φαίνεται μια ενδεικτική κυματομορφή σήματος (τάσης) για κυλινδρικό ανιχνευτή, στον οποίο κινούνται ακτινικά θετικά ιόντα ενός είδους.



Σχήμα Π2.3 Ενδεικτική μορφή σήματος κατά τη διάρκεια της κίνησης θετικού σημειακού φορτίου μέσα σε κυλινδρικό ανιχνευτή.

Επανερχόμαστε για να σχολιάσομε τη δημιουργία του σήματος που οφείλεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων από την κάθοδο προς την άνοδο, δηλαδή προς το κεντρικό ηλεκτρόδιο. Υποθέτομε ότι για την ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων ισχύει παρόμοια σχέση με αυτή που ισχύει για ιόντα, δηλαδή $u = \mu_{\mathrm{e}} E$ όπου $\mu_{\mathrm{e}} =$ σταθ. Η ευκινησία μ_{e} των ηλεκτρονίων είναι εκατοντάδες φορές η ευκινησία των ιόντων μ. Για τα ηλεκτρόνια ισχύουν ανάλογες σχέσεις με αυτές που ισχύουν για τα ιόντα με τις προσεγγίσεις που δεχόμαστε. Για πηγή ρεύματος που αντιστοιχεί σε κινούμενα ηλεκτρόνια, δηλαδή σημειακό σμήνος ηλεκτρονίων, φορτίου $-q_{\mathrm{e}} < 0$ έχομε σχέση όμοια με την (Π1.16),

$$I_{\mathrm{e}} = -\frac{q_{\mathrm{e}} \mu_{\mathrm{e}} V_{\mathrm{a}}}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{r^2} \qquad \text{(Π1.25}$$

Όπως είπαμε, τα ηλεκτρόνια κινούνται με κατεύθυνση από την αρνητική κάθοδο (εξωτερικό ηλεκτρόδιο), προς τη θετική άνοδο (κεντρικό ηλεκτρόδιο, σύρμα ανιχνευτή). Αυτό αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό ρεύμα από την άνοδο προς την κάθοδο. Θα υποθέσομε ότι το εξωτερικό κύκλωμα είναι αγωγός χωρίς αντίσταση (γείωση) και θα υπολογίσομε το φορτίο που κινείται μέσα από αυτόν τον αγωγό.
Ισχύουν οι ανάλογες με τις σχέσεις (Π1.17). Τα ηλεκτρόνια ξεκινούν από τη θέση r_0 και καταλήγουν στο κεντρικό ηλεκτρόδιο (σύρμα) στη θέση a, $r_0 > a$. Αυτό σημαίνει ότι στις εν λόγω σχέσεις τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητική ταχύτητα. Έχομε τις σχέσεις (Π1.26),

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\mu_\mathrm{e}\frac{V_\mathrm{a}}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}, \quad r\mathrm{d}r = -\mu_\mathrm{e}\frac{V_\mathrm{a}}{\ln\frac{b}{a}}\mathrm{d}t, \quad \int_{r_0}^{r} r'\mathrm{d}r' = -\int_0^t \mu_\mathrm{e}\frac{V_\mathrm{a}}{\ln\frac{b}{a}}\mathrm{d}t'$$

$$r^2 = r_0^2 - 2\mu_\mathrm{e}\frac{V_\mathrm{a}}{\ln\frac{b}{a}}t, \quad r^2 = r_0^2(1 - t/t_{\mathrm{e}0})$$

$$t_{\mathrm{e}0} = \frac{r_0^2}{2\mu_\mathrm{e}V_\mathrm{a}}\ln\frac{b}{a} \qquad (\Pi 1.26)$$

$$T_\mathrm{e} = \frac{(r_0^2 - a^2)\ln\frac{b}{a}}{2\mu_\mathrm{e}V_\mathrm{a}}$$

$$I_\mathrm{e}(t) = -\frac{q_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}V_\mathrm{a}}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{(1 - t/t_{\mathrm{e}0})}$$

Προφανώς το διερχόμενο φορτίο ένεκα της κίνησης των ηλεκτρονίων βρίσκεται ως εξής:

$$Q_\mathrm{e}(t) = \int_0^t \left|I_\mathrm{e}(t')\right|\mathrm{d}t' = \frac{q_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}V_a}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\int_0^t \frac{1}{1 - t'/t_{\mathrm{e}0}}\mathrm{d}t'$$

$$= -t_{\mathrm{e}0}\frac{q_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}V_a}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\ln(1 - t/t_{\mathrm{e}0}) \qquad (\Pi 1.27)$$

$$Q_\mathrm{et} = Q_{\mathrm{e}T} = -t_{\mathrm{e}0}\frac{q_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}V_a}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\ln(1 - T_\mathrm{e}/t_{\mathrm{e}0})$$

$$Q_\mathrm{et} = Q_{\mathrm{e}T} = \frac{q_\mathrm{e}}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{r_0}{a}$$

Είναι σαφές ότι εφόσον ο ιονισμός γίνεται κοντά στο κεντρικό ηλεκτρόδιο, ισχύουν οι σχέσεις,

$r_0 > a,\ r_0 \approx a$, οπότε , αυτό σημαίνει ότι αφού η διαδρομή των ηλεκτρονίων μέχρι το κεντρικό (θετικό) ηλεκτρόδιο είναι μικρή το φορτίο που επάγεται και διέρχεται από τον ανιχνευτή είναι μικρό.

Ποιο συγκεκριμένα, έχομε για το λόγο του φορτίου ένεκα των ηλεκτρονίων δια του φορτίου ένεκα των ιόντων,

$$\frac{Q_{\text{et}}}{Q}=\frac{\ln\frac{r_0}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{Π1.28}$$

Θέτομε χαρακτηριστικές τιμές για τα διάφορα μεγέθη και προσδιορίζομε το λόγο των φορτίων. Έστω, $a=25\,\mu\text{m}$, $r_0=28$ μm, $b=1{,}5\,\text{cm}$ τότε,

$$\frac{Q_{\text{et}}}{Q}=\frac{\ln\frac{28\times10^{-6}\text{ m}}{25\times10^{-6}\text{ m}}}{\ln\frac{1{,}5\times10^{-2}\text{ m}}{25\times10^{-6}\text{ m}}}\approx 0{,}018=1{,}8\%$$

Δηλαδή το φορτίο ένεκα των ηλεκτρονίων είναι 1,8 τοις εκατό του φορτίου ένεκα κίνησης των ιόντων. Μερικές φορές το φορτίο που οφείλεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων θεωρείται αμελητέο.

Π3 Πυκνωτές

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στη διάταξη που ονομάζεται πυκνωτής. Πρόκειται για δυο αγωγούς που μπορούν να αποθηκεύσουν ίσα κατά μέτρο και αντίθετα φορτία, με μια διαφορά δυναμικού μεταξύ τους η οποία είναι ανεξάρτητη από το αν υπάρχουν και άλλοι αγωγοί στην περιοχή τους οι οποίοι μπορεί να είναι φορτισμένοι. Οι δυο αγωγοί είναι οι οπλισμοί του πυκνωτή. Θυμίζομε ότι ο χώρος μέσα στον οποίο βρίσκονται οι αγωγοί μπορεί να είναι το κενό, κάποιο αέριο ή γενικώς ένα γραμμικό διηλεκτρικό που δεν έχει πουθενά περίσσεια εντοπισμένου φορτίου. Αυτός είναι ο ιδανικός πυκνωτής. Στην πράξη μπορεί η διαφορά δυναμικού να επηρεάζεται λίγο από γειτονικούς αγωγούς, τότε ο πυκνωτής δεν είναι ιδανικός πυκνωτής.
Θα ξεκινήσομε από πιο γενικές καταστάσεις με πολλούς αγωγούς. Τονίζομε ότι τα δυναμικά θεωρούνται μηδέν στο άπειρο και ισχύουν οι σχέσεις (1.8) τις οποίες μεταφέρομε εδώ ως (Π3.1),

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{l=1}^{N} c_{jl}V_l,\ \ j=1,\ldots,N \\ U &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}V_iV_j \end{aligned} \tag{Π3.1}$$

Αντιστρέφοντας τις πρώτες βρίσκομε,

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$$
$$\text{οπότε } U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} p_{ij} Q_i Q_j \qquad (\Pi 3.2)$$

Οι συντελεστές p_{ij} είναι τα στοιχεία της αντίστροφης μήτρας των c_{ij} και αναφέρονται ως συντελεστές δυναμικού (coefficients of potential).
Θα δείξομε ότι ισχύουν, $p_{ij} = p_{ji}$.
Ξεκινούμε λαβαίνοντας υπόψη ότι η δεύτερη από τις (Π3.2) σημαίνει $U = U(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$. Με διαφόριση της τελευταίας βρίσκομε ότι η απειροστή μεταβολή της ηλεκτροστατικής ενέργειας $\mathrm{d}U$ όταν μεταβάλλονται τα φορτία κατά απειροστές ποσότητες είναι,

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial Q_2}\right)\mathrm{d}Q_2 + ..., \left(\frac{\partial U}{\partial Q_N}\right)\mathrm{d}Q_N \qquad (\Pi 3.3)$$

Αν μεταβάλλομε μόνο ένα από τα Q, έστω το Q_i και λάβομε υπόψη τη δεύτερη από τις (Π3.2) έχομε,

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_i}\right)\mathrm{d}Q_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(p_{ij} + p_{ji})\mathrm{d}Q_j \mathrm{d}Q_i \qquad (\Pi 3.4)$$

Αυτή η ίδια μεταβολή υπολογίζεται και με άλλο τρόπο, συγκεκριμένα, υπολογίζοντας το έργο $\mathrm{d}W$ που παράγεται αν μεταφέρομε το $\mathrm{d}Q_i$ από τη θέση που το δυναμικό είναι μηδέν στη θέση με δυναμικό V_i. Προφανώς $\mathrm{d}U = \mathrm{d}W$ και αφού λάβομε υπόψη την πρώτη από τις (Π3.2) θα έχομε,

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W = V_i \mathrm{d}Q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \mathrm{d}Q_i \qquad (\Pi 3.5)$$

Οι (Π3.4) και (Π3.5) είναι ισοδύναμες για όλα τα Q_j οπότε πρέπει να ισχύουν,

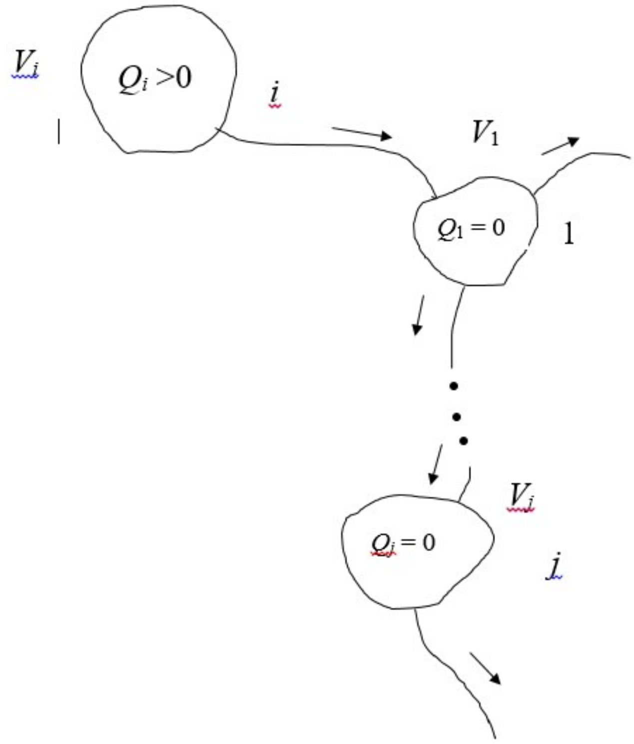
$$\frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) = p_{ij} \qquad (\Pi 3.6)$$

Επομένως πράγματι ισχύουν,

α) $p_{ij} = p_{ji}$

Στη συνέχεια θα δείξομε ότι όλοι οι συντελεστές p_{ij} είναι θετικοί, $p_{ij} > 0$ και ότι $p_{ii} \geq p_{ij}$.
Θεωρούμε το Σχ. (Π3.1) με πολλούς ξεχωριστούς αγωγούς, όπου όλοι είναι ο ένας εκτός του άλλου. Επίσης, μόνο ένας αγωγός, έστω ο i, φέρει θετικό φορτίο Q_i ενώ

όλοι οι άλλοι έχουν φορτία μηδέν, είναι αφόρτιστοι. Εφαρμόζομε για αυτή την περίπτωση τις πρώτες από τις (Π3.2) οπότε έχομε $V_i = p_{ii}Q_i$. Είναι προφανές ότι αφού ο αγωγός φέρει θετικό φορτίο $Q_i > 0$ θα έχει και θετικό δυναμικό $V_i > 0$ (θεωρούμε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν). Από αυτό προφανώς προκύπτει ότι οι συντελεστές p_{ii} της σχέσης $V_i = p_{ii}Q_i$ είναι θετικοί, $p_{ii} > 0$.



Σχήμα Π3.1 Ο αγωγός υπ’ αρ. i έχει θετικό φορτίο όλοι οι άλλοι είναι αφόρτιστοι, δηλαδή έχουν φορτία μηδέν.

Στο Σχήμα Π3.1 οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν από τον θετικά φορτισμένο αγωγό υπ’ αρ. i και καταλήγουν είτε στο άπειρο όπου το δυναμικό είναι το ελάχιστο, δηλαδή μηδέν ή σε κάποιον από τους αφόρτιστους αγωγούς. Από τους αφόρτιστους μπορεί να ξεκινούν δυναμικές γραμμές που καταλήγουν στο άπειρο ή σε άλλον αφόρτιστο αγωγό. Στους αφόρτιστους αγωγούς, έχει γίνει διαχωρισμός θετικών και αρνητικών φορτίων, δηλαδή κάποιο μέρος της επιφάνειάς τους έχει θετικό φορτίο και κάποιο άλλο αρνητικό. Αυτό δε δηλώνεται άμεσα στο σχήμα αλλά γίνεται κατανοητό από τη φορά των δυναμικών γραμμών στις επιφάνειές τους. Είναι ευνόητο πως οι αφόρτιστοι αγωγοί έχουν δυναμικά μικρότερα του φορτισμένου, εφόσον οι δυναμικές γραμμές που δηλώνουν την κατεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να καταλήγουν σε αυτούς ξεκινώντας από τον μοναδικό φορτισμένο αγωγό. Οι αφόρτιστοι αγωγοί έχουν δυναμικά μεγαλύτερα του δυναμικού του απείρου που είναι μηδέν. Επομένως, όλοι οι αγωγοί έχουν θετικά δυναμικά, $V_j > 0$. Είναι σαφές ότι για την κατάσταση του Σχ. Π3.1 οι σχέσεις Π3.1 οδηγούν στις παρακάτω σχέσεις Π3.2,

$$V_i = p_{ii}Q_i \dots V_j = p_{ji}Q_i \dots \qquad (\Pi3.2)$$

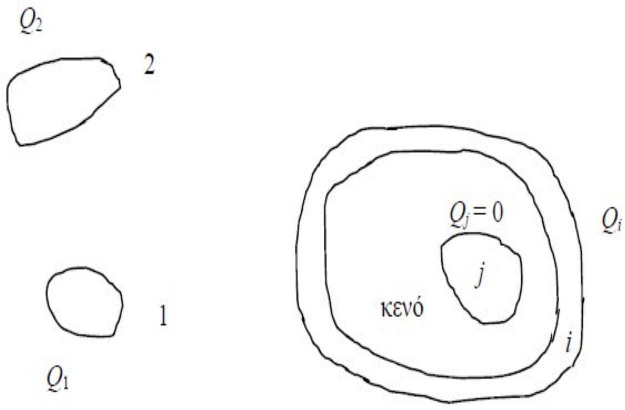
Αφού τα δυναμικά όλων των αγωγών είναι θετικά προφανώς ισχύει,

β) $p_{ij} = p_{ji} > 0$.

Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως $V_i > V_j$ οπότε
$p_{ii}Q_i > p_{ji}Q_i$ άρα πράγματι ισχύει ότι,

γ) $p_{ii} > p_{ji} (= p_{ij}) > 0$

Τονίζομε ότι η ανισότητα γ) ισχύει όταν οι δυο αγωγοί είναι ο ένας εκτός του άλλου. Στη συνέχεια θα δούμε τι γίνεται στην περίπτωση που δύο αγωγοί από τους πολλούς που χαρακτηρίζομε ως, υπ' αρ. i και j έχουν τη διάταξη που φαίνεται στο Σχ. Π3.2.



Σχήμα Π3.2 Σύστημα τεσσάρων αγωγών. Ο αγωγός j βρίσκεται μέσα στην κοιλότητα του αγωγού i .

Συγκεκριμένα, ο αγωγός i έχει μια κοιλότητα μέσα στην οποία βρίσκεται ο αγωγός j . Γύρω υπάρχουν και άλλοι επιπλέον αγωγοί με διάφορα φορτία, στο Σχ. Π3.2 σημειώνομε μόνο δύο, τους υπ. αρ. 1 και 2. Οι δυο αγωγοί i, j δεν έχουν ηλεκτρική επαφή μεταξύ τους. Θα δείξομε ότι αυτοί οι αγωγοί έχουν το ίδιο δυναμικό ανεξάρτητα από τα φορτία των επιπλέον αγωγών 1 και 2. Για την απόδειξη εργαζόμαστε ως εξής: Φανταζόμαστε ότι στο Σχήμα Π3.2 δεν υπάρχει το κενό (που έχομε σημειώσει) αλλά υπάρχει μια συμπαγής μεταλλική μάζα, ένας αγωγός. Έστω ότι η συμπαγής μάζα δεν έχει φορτίο, είναι αφόρτιστη. Όμως υπό την επίδραση των Q_1, Q_2 στην επιφάνειά της θα επαχθούν θετικά και αρνητικά φορτία που το αλγεβρικό της άθροισμα θα είναι μηδέν. Η κατανομή θα είναι τέτοια ώστε το πεδίο στο

εσωτερικό της το οποίο οφείλεται σε αυτά τα επιφανειακά φορτία και στα φορτία Q_1, Q_2, να είναι μηδέν. Προφανώς στην εσωτερική μάζα του μετάλλου δεν υπάρχουν φορτία διότι τότε θα υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο ($\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$) που θα κινούσε τα ηλεκτρόνια και δεν θα υπήρχε ηλεκτροστατική ισορροπία. Είναι ευνόητο ότι σε όλη τη συμπαγή μεταλλική μάζα το δυναμικό είναι το ίδιο, αφού το πεδίο είναι μηδέν, είναι ισοδυναμικός χώρος. Στη συνέχεια φανταζόμαστε ότι ενώ αφήνομε τη διάταξη όπως είναι, αφαιρούμε αγώγιμο υλικό έτσι που να δημιουργηθεί το κενό που σημειώνεται στο Σχήμα Π3.2 και να προκύψουν οι δυο αγωγοί i και j. Είναι σαφές ότι η ηλεκτροστατική κατάσταση δεν θα αλλάξει, η επιφανειακή κατανομή φορτίου στον αγωγό i θα είναι η ίδια και ο αγωγός j θα μείνει αφόρτιστος. Επίσης η κατανομή δυναμικού θα είναι ίδια, οπότε οι δυο αγωγοί i και j θα έχουν το ίδιο δυναμικό, αυτό που υπήρχε σε όλο το χώρο του προηγούμενου μοναδικού αγωγού. Το τελευταίο θα ισχύει ανεξάρτητα από τις τιμές των φορτίων Q_1, Q_2. Σημειώνομε ότι αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το αν το φορτίο Q_i είναι μηδέν, όπως υποθέσαμε στην αρχή, ή διάφορο του μηδενός. Το ότι ισχύει και όταν $Q_i \neq 0$, είναι κατανοητό διότι και σε αυτή την περίπτωση η κατανομή του Q_i στην επιφάνεια πρέπει στην ηλεκτροστατική ισορροπία να είναι τέτοια που στο εσωτερικό να δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο μηδέν, επομένως και πάλι όλος ο χώρος θα είναι ισοδυναμικός.
Τα παραπάνω οδηγούν στις σχέσεις,

$$\begin{aligned} V_i &= p_{ii}Q_i + p_{i1}Q_1 + p_{i2}Q_2 + p_{ij}Q_j \\ V_j &= p_{jj}Q_j + p_{ji}Q_i + p_{j1}Q_1 + p_{j2}Q_2 \end{aligned} \qquad (\text{Π}3.3)$$

Θέτομε $Q_j = 0$ οπότε τότε, όπως είδαμε, $V_i = V_j$, άρα, για κάθε Q_1, Q_2 :

$$p_{ii}Q_i + p_{i1}Q_1 + p_{i2}Q_2 = p_{ji}Q_i + p_{j1}Q_1 + p_{j2}Q_2 \qquad (\text{Π}3.4)$$

Θέτοντας $Q_1 = Q_2 = 0$, βρίσκομε:

$$p_{ii} = p_{ji} (= p_{ij}) \qquad (\text{Π}3.5)$$

Είναι σαφές ότι ισχύουν επίσης οι σχέσεις, $p_{i1} = p_{j1}$, $p_{i2} = p_{j2}$. Αυτό δηλώνει ότι τα επιπλέον φορτία 1 και 2 επάγουν ίδια δυναμικά στους αγωγούς i και j. Αν δηλώσομε τα επιπλέον φορτία με το δείκτη k μπορούμε να γράψομε την πιο γενική σχέση $p_{ik} = p_{jk}$.
Με χρήση της ισότητας (Π3.5) η σχέση γ) παίρνει τη πιο γενική μορφή,

$$p_{ii} \geq p_{ij} > 0 \qquad (\text{Π}3.6)$$

Τώρα θα περιοριστούμε στο σύστημα του πυκνωτή. Έστω ότι έχομε δυο αγωγούς 1 και 2, ο υπ' αρ. 1 έχει φορτίο $Q > 0$ και ο υπ' αρ. 2 έχει φορτίο $-Q < 0$. Στο γύρω χώρο υπάρχουν και επιπλέον αγωγοί, έστω για ευκολία δύο, οι 3 και 4, με αντίστοιχα φορτία Q_3, Q_4.
Για το σύστημα αυτών των τεσσάρων αγωγών μπορούμε να γράψομε τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q + p_{12}\left(-Q\right) + p_{13}Q_3 + p_{14}Q_4 = p_{11}Q - p_{12}Q + V_{\mathrm{a}} \\ V_2 &= p_{12}Q + p_{22}\left(-Q\right) + p_{23}Q_3 + p_{24}Q_4 = p_{12}Q - p_{22}Q + V_{\mathrm{b}} \end{aligned} \qquad (\Pi 3.3)$$

Έχει ληφθεί υπόψη ότι, $p_{12} = p_{21}$.
Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις, $p_{13} = p_{23}$, $p_{14} = p_{24}$, τότε, $V_{\mathrm{a}} = V_{\mathrm{b}}$ οπότε βρίσκομε ότι,

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \left(p_{11} + p_{22} - 2p_{12}\right)Q \qquad (\Pi 3.4)$$

Αυτή είναι η περίπτωση ιδανικού πυκνωτή με χωρητικότητα C,

$$C = Q / \Delta V = 1/(p_{11} + p_{22} - 2p_{12}) \qquad (\Pi 3.5)$$

Αυτά σημαίνουν ότι τα φορτία των επιπλέον αγωγών που βρίσκονται στη γειτονιά του ζεύγους των αγωγών που αποτελούν τον πυκνωτή, δημιουργούν το ίδιο δυναμικό και στους δυο αγωγούς του πυκνωτή οπότε η διαφορά δυναμικού τους δεν επηρεάζεται από αυτά τα εξωτερικά φορτία. Αυτό μπορεί να συμβεί αν οι δυο αγωγοί του πυκνωτή είναι ίδια λεπτά μεταλλικά φύλλα πολύ κοντά το ένα στο άλλο ή αν ο ένας αγωγός του πυκνωτή είναι μέσα στην κοιλότητα του άλλου αγωγού. Η πρώτη περίπτωση είναι προφανής, τη δεύτερη περίπτωση τη μελετήσαμε στα προηγούμενα, βλ. Σχήμα Π3.2.
Είναι διδακτικό να δούμε μια εφαρμογή της χρήσης των συντελεστών δυναμικού. Συγκεκριμένα θέλομε να βρούμε το δυναμικό αφόρτιστου σφαιρικού αγωγού ακτίνας R που βρίσκεται μέσα στο πεδίο σημειακού φορτίου q που βρίσκεται σε απόσταση $r > R$ από το κέντρο του αγωγού. Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα αν προσπαθήσομε να το λύσομε με τη συνήθη μεθοδολογία της ηλεκτροστατικής. Η χρήση των συντελεστών δυναμικού απλοποιεί εξαιρετικά το πρόβλημα.
Αυτό είναι σύστημα δυο αγωγών, έστω ότι ο αγωγός 1 είναι μια πάρα πολύ μικρή μεταλλική σφαίρα η οποία φέρει το (σημειακό) φορτίο q. Ο αγωγός 2 είναι ο σφαιρικός αγωγός με ακτίνα R και φορτίο, γενικώς, Q. Θυμίζομε ότι στην περίπτωση σημειακού φορτίου (εδώ αγωγός 1) ο όρος του δυναμικού που δημιουργεί το φορτίο στη θέση που βρίσκεται το ίδιο ($p_{11}q$) δεν λαμβάνεται υπόψη διότι απειρίζεται. Επίσης αν η πολύ μικρή μεταλλική σφαίρα είναι αφόρτιστη, δεν επηρεάζει το πεδίο που δημιουργεί στο χώρο η μεγάλη σφαίρα όταν είναι φορτισμένη.
Για τους δυο παραπάνω αγωγούς 1 και 2 με φορτία, γενικώς, q, Q αντιστοίχως, έχομε για το δυναμικό της μεγάλης σφαίρας, αγωγός 2:

$$V_2 = p_{21}q + p_{22}Q,\ p_{12} = p_{21}$$

Αν η μεγάλη σφαίρα είναι αφόρτιστη έχομε,

$$V_2 = p_{21}q(= p_{12}q)$$

Αν η μεγάλη σφαίρα είναι φορτισμένη με φορτίο Q και ο αγωγός 1 αφόρτιστος, δηλαδή $q = 0$, τότε το δυναμικό στη θέση του αγωγού 1 είναι, $V_1 = p_{12}Q = Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Αυτό σημαίνει ότι $p_{12}(= p_{21}) = 1/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Προφανώς αν υπάρχει το σημειακό φορτίο q ενώ η (μεγάλη) σφαίρα είναι αφόρτιστη, τότε το δυναμικό της είναι $V_2 = p_{21}q(= p_{12}q) = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$.

2. Σχηματισμός σήματος σε ανιχνευτή κυλινδρικής γεωμετρίας και μεγάλου μήκους, με διάδοση TEM.

Υποθέτομε ότι έχομε πολλούς ιδανικούς αγωγούς και στο χώρο μεταξύ των αγωγών του ανιχνευτή έχομε ιδανικούς αγωγούς και ομογενές γραμμικό διηλεκτρικό του οποίου η επιτρεπτότητα δεν εξαρτάται από τη συχνότητα $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 =$ σταθερό. Ο σχηματισμός του σήματος οφείλεται στην κίνηση φορτίων στο χώρο μεταξύ των αγωγών, τα οποία διεγείρουν το σύστημα και δημιουργούν τα σήματα του ανιχνευτή. Θα εξετάσομε την περίπτωση που οι εγκάρσιες διαστάσεις είναι μικρές έτσι που να μην έχομε φαινόμενα εγκάρσιας διάδοσης διαταραχών (ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων), αλλά να έχομε διάδοση μόνο κατά μήκος του άξονα z. Αν θέλει κάποιος να εξετάσει λεπτού πάχους (επίπεδο) ανιχνευτή με παράλληλους αγωγούς μεγάλου μήκους που εκτείνονται και εγκάρσια σε μεγάλη απόσταση, η ανάλυση που ακολουθούμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει διάδοση και στις δυο διευθύνσεις του επίπεδου ανιχνευτή.
Θα υποθέσομε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις όπου έχομε μόνο διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τύπου TEM (Transverse Electromagnetic waves). Σε αυτή την περίπτωση τα πεδία $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ είναι εγκάρσια, τα κύματα TEM λέγονται και τύπου T (Transverse) ή EM. Με τον όρο κυματοδηγός εννοούμε διάταξη κυλινδρικής γεωμετρίας όπως φαίνεται στα σχήματα (2.1), (2.2) όπου δεν υπάρχουν εσωτερικοί αγωγοί αλλά μόνο ο περιβάλλων αγωγός. Ανάλογα ισχύουν για ηλεκτρομαγνητικές κοιλότητες (ή αντηχεία), δηλαδή και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο ο περιβάλλον αγωγός αλλά το σχήμα δεν έχει κατ ανάγκη κυλινδρική γεωμετρία. Οι γραμμές μεταφοράς έχουν τουλάχιστον δυο αγωγούς. Όταν εξετάζομε τη διέγερση κυματαγωγού (συμπεριλαμβανομένων των ηλεκτρομαγνητικών κοιλοτήτων) ή γραμμής μεταφοράς, πρέπει να λάβομε υπόψη όλους τους τρόπους διάδοσης, συμπεριλαμβανομένων των μη διαδιδόμενων τρόπων (evanescent modes). Αυτό είναι χρήσιμο και απαραίτητο όταν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσομε την εμπέδηση της διέγερσης γιατί τότε έχει σημασία και η αποθηκευόμενη ενέργεια και αυτή που επιστρέφει στη διέγερση. Οι ανιχνευτές σωματιδίων που θα αναλύσομε είναι γραμμές μεταφοράς που μπορεί να έχουν πολλούς αγωγούς.
Όταν ενδιαφερόμαστε τι διαδίδεται σε αποστάσεις μακριά από την περιοχή διέγερσης (δηλαδή σε αποστάσεις που, χονδρικά, είναι μεγαλύτερες από τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση του συστήματος) μπορούμε να αγνοήσομε τους μη διαδιδόμενους τρόπους, διότι αυτοί οδηγούν σε πεδία τα οποία φθίνουν πολύ γρήγορα με την απόσταση. Στην πράξη, αυτή η διάσταση έχει μήκος που είναι από δέκατα του χιλιοστού μέχρι εκατοστά. Επίσης, οι άλλοι τρόποι διάδοσης, TE (ή M) και TM (ή E), για τους ανιχνευτές με τέτοιες διαστάσεις, έχουν κατώφλια αποκοπής συχνότητας σε πολύ

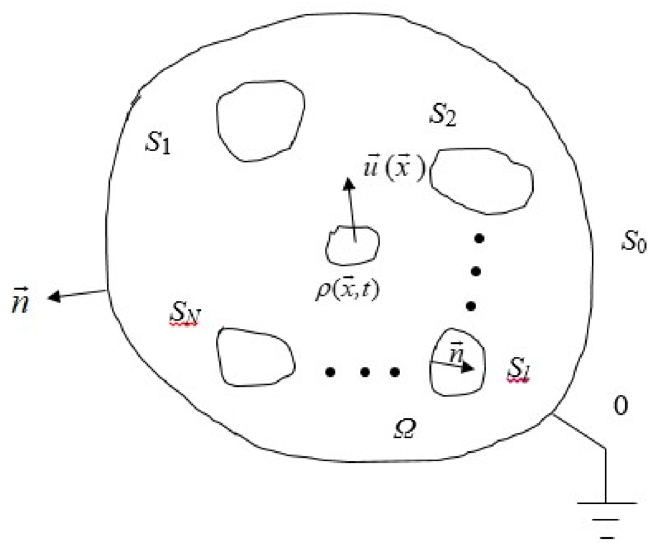
υψηλές συχνότητες, μεγαλύτερες από δεκάδες GHz. Αυτές οι συχνότητες δεν συμβάλλουν σημαντικά στο σχηματισμό των σημάτων των ανιχνευτών που εξετάζομε, αφού αυτά περιγράφονται ικανοποιητικά από αρκετά χαμηλότερες συχνότητες. Επίσης τα ηλεκτρονικά που χρησιμοποιούμε για την καταγραφή (ανάγνωση) των σημάτων εργάζονται σε χαμηλότερες συχνότητες από τις συχνότητες αποκοπής των κυμάτων TE και TM. Τα κύματα τύπου TEM δεν έχουν κατώφλι αποκοπής συχνότητας. Γι αυτό το λόγο είναι ικανοποιητική η ανάλυση με χρήση κυμάτων μόνο τύπου TEM.

Αν υπάρχουν πολλά διαφορετικά (ομογενή) διηλεκτρικά, ακόμη και για ιδανικούς αγωγούς, η παρακάτω ανάλυση δεν ισχύει. Τα πεδία δεν είναι εντελώς εγκάρσια, έχουν και συνιστώσες κατά μήκος του άξονα z. Σε αυτή την περίπτωση, στην πράξη, φαίνεται να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος ημι-TEM, όπου τα πεδία είναι σχεδόν TEM με μικρές διαμήκεις συνιστώσες. Η μέθοδος ημι-TEM οδηγεί σε παρόμοιες σχέσεις με αυτές της περίπτωσης TEM, αλλά εμφανίζονται πολλές ταχύτητες διάδοσης, τόσες όσο το πλήθος των διαφορετικών διηλεκτρικών.

Αν θέλει κάποιος να συμπεριλάβει μικρές απώλειες ένεκα ροής μικρών ρευμάτων στο διηλεκτρικό ή ύπαρξη μεγάλης αλλά πεπερασμένης αγωγιμότητας στους αγωγούς, μπορεί να ακολουθήσει κατάλληλες προσεγγιστικές μεθόδους. Αναφέρομε επίσης ότι, δεν έχει φυσικό νόημα η διαφορά δυναμικού μεταξύ αγωγών για τους τρόπους διάδοσης TE και TM. Αυτό γίνεται μόνο για την περίπτωση διάδοσης TEM.

Αναφορά σε μεγάλου μήκους ανιχνευτές γίνεται από τον Rossi et al [3]. Ανιχνευτές μεγάλου μήκους χρησιμοποιούνται σε πειράματα Φυσικής Υψηλών Ενεργειών, όπως στο πείραμα ATLAS στο CERN, [6],[7].

Θεωρούμε ότι ο ανιχνευτής έχει κυλινδρική γεωμετρία με άξονα τον z. Η εγκάρσια διατομή του συστήματος είναι όπως στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1. Εγκάρσια διατομή συστήματος N εσωτερικών αγωγών και ενός εξωτερικού, που αποτελούν ανιχνευτή μεγάλου μήκους. Υπάρχει κυλινδρική γεωμετρία.

Οι αγωγοί, N εσωτερικοί και ο περιβάλλων αγωγός, εκτείνονται από το $z=-\infty$ έως $z=+\infty$, κάθετα στο επίπεδο του σχήματος. Αυτός ο αγωγός μπορεί να είναι συμπεριλαμβάνει το άπειρο και δεχόμαστε ότι έχει δυναμικό μηδέν.
Αν θέλει κάποιος να εξετάσει λεπτού πάχους (επίπεδο) ανιχνευτή με παράλληλους αγωγούς μεγάλου μήκους που εκτείνονται και εγκάρσια σε μεγάλη απόσταση, η ανάλυση που ακολουθούμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει διάδοση και στις δυο διευθύνσεις του επίπεδου ανιχνευτή.
Θα χρησιμοποιήσομε καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης $\vec{x}=(\vec{x}_{\mathrm{T}},z)=(x,y,z)$. Τα $\vec{x}_{\mathrm{T}}=(x,y)$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες στο εγκάρσιο επίπεδο, το κάθετο στον άξονα z. Το στοιχείο του εμβαδού στο εγκάρσιο επίπεδο είναι $\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}a=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Το στοιχείο όγκου είναι $\mathrm{d}^3x=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
Αν στο χώρο μεταξύ των αγωγών υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου, αυτή διεγείρει το σύστημα.
Έχομε τις σχέσεις

$$\rho=\rho(\vec{x},t),\ \ \vec{J}=\rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x}) \tag{2.1}$$

Υποθέτομε ότι για κάθε σημείο του χώρου είναι γνωστή η ταχύτητα του κατανεμημένου φορτίου. Η διέγερση οδηγεί σε σήματα που διαδίδονται προς τις δυο κατευθύνσεις του z.
Οι εξισώσεις του Maxwell για ελεύθερο από πηγές χώρο ($\vec{J}=0,\rho=0$) μπορεί να γραφτούν στη μορφή

$$\begin{gathered}\vec{\nabla}\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Υπάρχουν και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.
Στην περίπτωση των κυμάτων TEM τα πεδία είναι εγκάρσια στο χώρο μεταξύ των αγωγών και διαδίδονται προς τις δυο κατευθύνσεις του άξονα z.
Μετασχηματίζομε κατά Fourier τα διάφορα φυσικά μεγέθη και καταλήγομε στα μεγέθη που λέγονται πλάτη, όπως το $\vec{E}(\vec{x},\omega)$. Ουσιαστικά με αυτό τον τρόπο εξετάζομε τι γίνεται όταν έχομε μόνο μια συχνότητα. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\vec{E}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t},\ \ \vec{E}(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\vec{E}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ \vec{H}(\vec{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\vec{H}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t},\ \ \vec{H}(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\vec{H}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ \rho(\vec{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\rho(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t},\ \ \rho(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\rho(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ \vec{J}(\vec{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\vec{J}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t},\ \ \vec{J}(\vec{x},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\vec{J}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Από τη σχέση της συνέχειας έχομε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)+\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}=0,\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},\omega)=\mathrm{j}\omega\rho(\vec{x},\omega) \tag{2.4}$$

Οι εξισώσεις (2.2) του Maxwell γίνονται

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{x},\omega)+\mathrm{j}\varepsilon\omega\vec{E}(\vec{x},\omega)=0\\&\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x},\omega)-\mathrm{j}\mu\omega\vec{H}(\vec{x},\omega)=0\\&\vec{\nabla}\cdot\vec{H}(\vec{x},\omega)=0,\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},\omega)=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Αυτές οδηγούν στις κυματικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}(\vec{x},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\vec{E}(\vec{x},\omega)=0\\&\nabla^2\vec{H}(\vec{x},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\vec{H}(\vec{x},\omega)=0\end{aligned} \tag{2.6}$$

Έχομε κυλινδρική γεωμετρία με διάδοση μόνο κατά μήκος του άξονα z, οπότε υποθέτομε λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned}&\vec{E}(\vec{x},\omega)=\vec{E}_0(\vec{x}_\mathrm{T},\omega)\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\\&\vec{H}(\vec{x},\omega)=\vec{H}_0(\vec{x}_\mathrm{T},\omega)\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\\&\vec{x}_\mathrm{T}=(x,y)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Το + στην παρένθεση, στον εκθέτη, αντιστοιχεί σε διάδοση κατά τη θετική φορά του z και το – κατά την αρνητική. Αν περιοριστούμε σε διάδοση TEM τότε τα πεδία έχουν μόνο εγκάρσιες συνιστώσες ως προς τον άξονα z. Πρέπει να σημειωθεί ότι έχομε ηλεκτροστατική και μαγνητοστατική. Καταλήγομε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}&E_z=0,\ H_z=0\\&\vec{\nabla}_\mathrm{T}\times\vec{E}_0=0,\ \ \vec{\nabla}_\mathrm{T}\cdot\vec{E}_0=0,\ \ \vec{\nabla}_\mathrm{T}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\\&\vec{H}_0=(\pm)\frac{1}{Z_\mathrm{T}}\vec{e}_z\times\vec{E}_0,\ \ Z_\mathrm{T}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\text{η εμπέδηση κύματος}\\&k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{c}\approx\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}},\ c=1/\sqrt{\mu\varepsilon}=\text{ταχύτητα του φωτός στο μέσο}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ο κυματαριθμός k συμπίπτει με αυτόν του απεριόριστου μέσου. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c_0=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, οπότε $c=c_0/\sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}\approx c_0/\sqrt{\mu_0\varepsilon_\mathrm{r}}$.

Όπου υπάρχου σε διάφορες εκφράσεις, περισσότερες από μια φορές, τα άνω πρόσημα πάνε μαζί και τα κάτω μαζί. Από τις σχέσεις της Εξ.(2.8) συμπεραίνομε ότι έχομε για το ηλεκτρικό πεδίο σχέσεις ηλεκτροστατικής σε δυο διαστάσεις, τις εγκάρσιες

$(x, y) = \vec{x}_{\mathrm{T}}$. Αυτό σημαίνει πως το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0(\vec{x}_{\mathrm{T}})$, που είναι εγκάρσιο, μπορεί να υπολογιστεί από διδιάστατο βαθμωτό ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi_0(\vec{x}_{\mathrm{T}})$, όπως φαίνεται στις Εξ.(2.9), με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}_0(x, y) = -\vec{\nabla}_{\mathrm{T}}\Phi_0(x, y) \\
&\nabla_{\mathrm{T}}^2\Phi_0(x, y) = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Εφόσον οι αγωγοί είναι ιδανικοί, το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στις επιφάνειες των αγωγών και το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στην επιφάνειά τους.
Σημειώνομε ότι, στην πράξη, τα υλικά που χρησιμοποιούμε είναι μη μαγνητικά οπότε $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$.
Γενικώς οι εξισώσεις του Maxwell με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, στην περίπτωση των κυματοδηγών, ηλεκτρομαγνητικών κοιλοτήτων και γραμμών μεταφοράς, ορίζουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, του οποίου οι (ιδιο)λύσεις, οι οποίες είναι οι κανονικοί τρόποι διάδοσης, οδηγούν σε ένα πλήρες σύστημα ορθογώνιων λύσεων. Στην περίπτωση των κυματοδηγών και ηλεκτρομαγνητικών κοιλοτήτων, όπου υπάρχει μόνο ο περιβάλλων αγωγός, δεν υπάρχουν κύματα TEM. Όλα τα είδη των κυμάτων υπάρχουν στις γραμμές μεταφοράς. Κάθε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μιας συχνότητας μέσα στον ανωτέρω χώρο, με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των ανωτέρω κανονικών λύσεων με κατάλληλους συντελεστές. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται στην περίπτωση της διέγερσης κυματοδηγών και ηλεκτρομαγνητικών αντοιχείων.
Θα κάνομε χρήση της μεθόδου, κατάλληλα διαμορφωμένης, για την περίπτωση γραμμών μεταφοράς με πολλά ηλεκτρόδια όπου η διέγερση οφείλεται σε κινούμενο φορτίο. Όπως είπαμε στην αρχή θα χρησιμοποιήσομε μόνο τις ιδιολύσεις TEM (T ή EM), δεν θα χρησιμοποιήσομε το πλήρες σύστημα ιδιολύσεων.
Η εύρεση των σημάτων στα άκρα των ηλεκτροδίων του ανιχνευτή ανάγεται στη λύση του ηλεκτροστατικού προβλήματος δυο διαστάσεων που αναφέραμε.
Η λύση της δισδιάστατης εξίσωσης Laplace για το δυναμικό, που είναι η δεύτερη από τις σχέσεις (2.9), θα είναι η $\Phi_0(x, y)$ και θα πρέπει στην επιφάνεια του κάθε ενός αγωγού λ να έχει την αντίστοιχη τιμή V_λ. Τα V_λ σχετίζονται με τα αντίστοιχα ηλεκτροστατικά φορτία που χρειάζεται να έχουν οι αγωγοί.
Ας θεωρήσομε κυλινδρικό χώρο με διατομή όπως στο Σχ.(2.1), ο οποίος είναι μέρος του άπειρης έκτασης συστήματος και έχει «ύψος» Δz, κατά τη διεύθυνση z. Μπορούμε να φανταστούμε ότι σε αυτόν τον χώρο αναφέρονται τα σύμβολα $\Omega, S_0, S_1, ..., S_N$ του Σχ.(2.1). Ο χώρος Ω περικλείεται από όλες τις κυλινδρικές μεταλλικές επιφάνειες των αγωγών και από δυο (νοητές) επίπεδες επιφάνειες κάθετες στον άξονα z, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δz. Εφόσον για διάδοση TEM έχομε στις εγκάρσιες διαστάσεις περίπτωση ηλεκτροστατική, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που κάνομε για την περίπτωση του ηλεκτροστατικού προβλήματος, δηλαδή εφαρμόζομε το θεώρημα του Gauss κτλ, οπότε προκύπτει ότι μεταξύ των

(στατικών) δυναμικών V_λ των αγωγών $\lambda = 1,2,...,N$ και των φορτίων, Q_λ, που φέρουν οι επιφάνειές τους, ισχύουν οι γνωστές σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&Q_j = \sum_{\lambda=1}^{N} c_{j\lambda} V_\lambda,\ j = 1,...,N \\
&c_{j\lambda} = c_{\lambda j} \le 0\ \ \forall\, j \ne \lambda,\ \ c_{jj} \ge 0 \\
&U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} V_i V_j .
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Από αυτές τις σχέσεις, διαιρώντας δια του «ύψους» Δz, μπορούμε να ορίσομε ποσότητες ανά μονάδα μήκους, π.χ. $c_{ij}^l, Q_j^l, Q_{ij}^l, U_l$. Δεν θα χρησιμοποιούμε το δείκτη l, αλλά για μεγέθη όπως τα προηγούμενα, που αναφέρονται σε γραμμές μεταφοράς, θα τα θεωρούμε ανά μονάδα μήκους. Δηλαδή οι ίδιες σχέσεις (2.10) ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση όπου όμως τα μεγέθη Q, c, U είναι ανά μονάδα μήκους. Σημειώνομε ότι δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο στο χώρο μεταξύ των αγωγών. Τα c_{jl} είναι οι συντελεστές ηλεκτροστατικής επαγωγής (ανά μονάδα μήκους). Τα V_λ είναι στατικά δυναμικά με δυναμικό αναφοράς αυτό του αγωγού S_0 που θεωρούμε 0.
Οι συντελεστές c_{jl} συνδέονται με τους συντελεστές C_{jl}, που λέγονται χωρητικότητες με δυο ακροδέκτες (ανά μονάδα μήκους) ή απλώς χωρητικότητες (ανά μονάδα μήκους), με τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&Q_j = C_{jj} V_j + \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\left(V_j - V_l\right),\ j = 1,...,N \\
&C_{jl} = C_{lj} = -c_{lj} = -c_{jl} > 0\ \ \forall\, j \ne l,\ \ C_{ll} = \sum_{j=1}^{N} c_{lj} > 0 \\
&c_{ii} = \sum_{k=1}^{N} C_{ik},\ \ c_{ij} = -C_{ij}\ \ \forall\ \mathrm{i} \ne j.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Μπορούμε να αντιστρέψομε τις πρώτες από τις Εξ.(2.10) και να καταλήξομε στις Εξ.(2.12)

$$
\begin{aligned}
&V_j = \sum_{l=1}^{N} p_{jl} Q_l,\ j = 1,...,N \\
&p_{jl} = p_{lj} \ge 0\ ,\ \ p_{jj} \ge p_{il} \\
&U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} p_{ij} Q_i Q_j
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

U είναι η ηλεκτροστατική ενέργεια ανά μονάδα μήκους του συστήματος.
Οι συντελεστές p_{ij} λέγονται συντελεστές δυναμικού (Maxwell), προφανώς ανά μονάδα μήκους. Έστω $[c]$ η μήτρα των συντελεστών c_{ij} και $[P]$ η μήτρα των p_{ij}, έχομε

$$[C]=[p]^{-1},\ \ [p]=[c]^{-1},\ \ [c][p]=[E_{\mathrm{u}}] \tag{2.13}$$

$[E_{\mathrm{u}}]$ είναι η μοναδιαία μήτρα ($N\times N$).

Αν έχομε N αγωγούς όπως στο Σχ.(2.1), για τη λύση του προβλήματος που μας ενδιαφέρει, μπορούμε να σκεφτούμε όπως φαίνεται παρακάτω.
Φανταζόμαστε ότι μόνο ένας αγωγός, ο λ, έχει δυναμικό $V_\lambda \neq 0$, ενώ όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικό μηδέν. Λύνομε τα N ηλεκτροστατικά προβλήματα και προσδιορίζομε τα αντίστοιχα δυναμικά $\Phi_{0\lambda}(x,y)$. Είναι ευνόητο ότι για την περίπτωση που όλοι οι αγωγοί, συγχρόνως, έχουν δυναμικά V_λ $\lambda=1,2,...,N$ θα ισχύει $\Phi_0(x,y)=\sum_{\lambda=1}^{N}\Phi_{0\lambda}(x,y)$.
Για το ηλεκτρικό ιδιοπεδίο $\vec{E}_{0\lambda}(x,y)$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}&\vec{E}_{0\lambda}(x,y)=-\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda}(x,\mathrm{y})\\&\text{και } \vec{E}_0(x,y)=-\vec{\nabla}\Phi_0(x,\mathrm{y})=\sum_{\lambda=1}^{N}\vec{E}_{0\lambda}(x,y)\end{aligned} \tag{2.14}$$

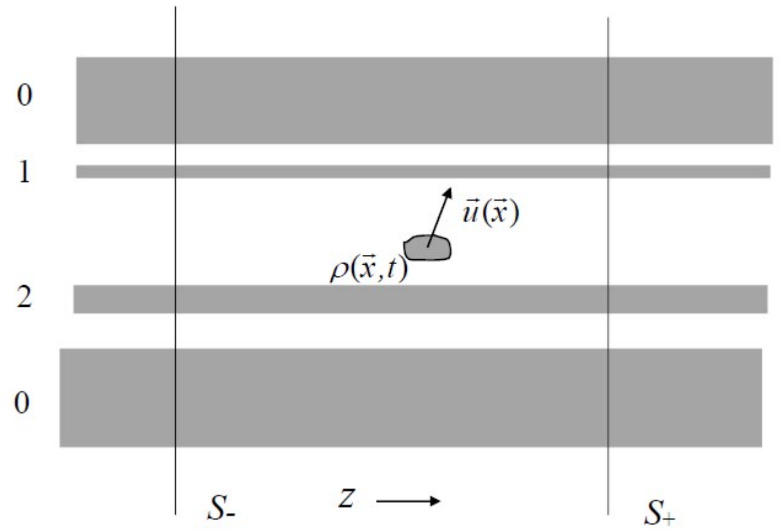
Τα ιδιοπεδία $\vec{E}_{0\lambda}(x,y)$ θεωρούνται πραγματικά.
Εισάγομε την έννοια των ιδιοπεδίων σε κάθε σημείο του χώρου μεταξύ των αγωγών και για μια συχνότητα, σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}&\vec{E}^{(\pm)}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})=\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\\&\vec{H}^{(\pm)}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})=\mp\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\vec{H}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})=\mp\frac{1}{Z_{\mathrm{T}}}\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\vec{e}_z\times\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\\&\vec{H}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})=\mp\frac{1}{Z_{\mathrm{T}}}\vec{e}_z\times\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}}),\ k=\frac{\omega}{c}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Η ένταση οποιουδήποτε ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου, ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στον χώρο μεταξύ των αγωγών θα εξαρτάται από τα ανωτέρω ιδιοπεδία. Έχομε τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x},\omega)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega)\vec{E}_{0\lambda}^{(\pm)}(\vec{x}_{\mathrm{T}},z)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega)\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\\
&\vec{H}^{(\pm)}(\vec{x},\omega)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega)\vec{H}_{0\lambda}^{(\pm)}(\vec{x}_{\mathrm{T}},z)=\mp\sum_{\lambda=1}^{N}A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega)\vec{H}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\\
&=\mp\frac{1}{Z_{\mathrm{T}}}\vec{e}_{z}\times\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x},\omega),\quad k=\frac{\omega}{c} \qquad (2.16)\\
&\text{γενικώς } \vec{E}(\vec{x},\omega)=\vec{E}^{(+)}(\vec{x},\omega)+\vec{E}^{(-)}(\vec{x},\omega)\\
&\text{και } \vec{H}(\vec{x},\omega)=\vec{H}^{(+)}(\vec{x},\omega)+\vec{H}^{(-)}(\vec{x},\omega)
\end{aligned}
$$

Ο προσδιορισμός των συντελεστών $A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega)$ καθορίζει τα πεδία σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου που μας ενδιαφέρει. Η τιμή τους εξαρτάται από τις συνθήκες συνόρου ή από τις συνθήκες διέγερσης όπως θα δούμε παρακάτω.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν τα πεδία είναι γνωστά σε οποιοδήποτε εγκάρσιο προς τον άξονα z επίπεδο, αυτό προσδιορίζει τους δυο συντελεστές οπότε τα πεδία υπολογίζονται σε οποιοδήποτε σημείο. Μπορούμε και παίρνομε ως εγκάρσιο επίπεδο, αυτό με $z=0$. Ας υποθέσομε ότι ο κυματοδηγός διεγείρεται από εντοπισμένη πηγή όπως στα Σχ. (2.1), (2.2).



Σχήμα 2.2 Διαμήκης όψη γραμμής μεταφοράς με πολλούς αγωγούς. Δείχνονται μόνο 2 αγωγοί και ο εξωτερικός αγωγός που έχει δυναμικό 0. Τα σκούρα μέρη δηλώνουν το εσωτερικό των αγωγών, τα λευκά είναι ο χώρος όπου γίνεται η διάδοση των κυμάτων. Υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενο, κινούμενο, φορτίο μεταξύ των αγωγών.

Για τους αγωγούς του Σχ.(2.1), χρησιμοποιούμε το θεώρημα της απόκλισης και. έχομε τις παρακάτω σχέσεις για τα δυναμικά και τα ιδιοπεδία,

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\left(\Phi_{0\lambda}\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}\right)=\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}+\Phi_{0\lambda}\cdot\nabla^2\Phi_{0\lambda'},\quad \nabla^2\Phi_{0\lambda'}=0\\
&\int_{\Omega}\vec{E}_{0\lambda}\cdot\vec{E}_{0\lambda'}\mathrm{d}^3x=\int_{\Omega}\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda}\cdot\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}\mathrm{d}^3x=\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\left(\Phi_{0\lambda}\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}\right)\mathrm{d}^3x\\
&\Delta z\int_{S}\vec{E}_{0\lambda}\cdot\vec{E}_{0\lambda'}\mathrm{d}a=\sum_{m=1}^{N}\int_{S_m}\Phi_{0\lambda}\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}\cdot\vec{e}_z\mathrm{d}a=V_\lambda\int_{S_\lambda}\vec{\nabla}\Phi_{0\lambda'}\cdot\vec{e}_z\mathrm{d}a\\
&=-V_\lambda\int_{S_\lambda}\frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon}\mathrm{d}a=-\frac{1}{\varepsilon}V_\lambda Q_{\lambda\lambda'}=-\frac{1}{\varepsilon}V_\lambda c_{\lambda\lambda'}V_{\lambda'}\\
&\int_{S}\vec{E}_{0\lambda}\cdot\vec{E}_{0\lambda'}\mathrm{d}a=\frac{1}{\varepsilon}(c_{\lambda\lambda'}/\Delta z)V_\lambda V_{\lambda'}\qquad \lambda,\lambda'=1,2,...,N\\
&\text{οπότε}\\
&\int_{S}\vec{H}_{0\lambda}\cdot\vec{H}_{0\lambda'}\mathrm{d}a=\frac{1}{Z^2{}_{\mathrm{T}}\varepsilon}(c_{\lambda\lambda'}/\Delta z)V_\lambda V_{\lambda'}\\
&\int_{S}\left(\vec{E}_{0\lambda}\times\vec{H}_{0\lambda'}\right)\cdot\vec{e}_z\mathrm{d}a=\frac{1}{Z_{\mathrm{T}}\varepsilon}(c_{\lambda\lambda'}/\Delta z)V_\lambda V_{\lambda'}.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Για ευκολία, παριστάνομε τους συντελεστές χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους με το σύμβολο c_{ij}, δηλαδή $c_{ij}/\Delta z\to c_{ij}$.

Στο Σχ.(2.2), έξω από την πηγή, στα δεξιά της επίπεδης επιφάνειας S_+ που είναι κάθετη στον άξονα z στη θέση $z=z_+$, τα πεδία $\vec{E},\vec{H}$ θα δίνονται σύμφωνα με τις Εξ.(2.16), από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\vec{E}&=\vec{E}^{(+)}(\vec{x},\omega)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_\lambda^{(+)}(\omega)\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(+)\mathrm{j}kz}\\
\vec{H}&=\vec{H}^{(+)}(\vec{x},\omega)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_\lambda^{(+)}(\omega)\vec{H}_{0\lambda}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(+)\mathrm{j}kz}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Προς τα αριστερά της αντίστοιχης επιφάνειας S_- ($z=z_-$), τα πεδία $\vec{E}$ (μια συχνότητα) θα δίνονται, πάλι σύμφωνα με τις Εξ.(2.16), από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\vec{E}&=\vec{E}^{(-)}(\vec{x},\omega)=\sum_{\lambda=1}^{N}A_\lambda^{(-)}(\omega)\vec{E}_0(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(-)\mathrm{j}kz}\\
\vec{H}&=\vec{H}^{(-)}(\vec{x},\omega)=-\sum_{\lambda=1}^{N}A_\lambda^{(-)}(\vec{\omega})\vec{H}_0(\vec{x}_{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{(-)\mathrm{j}kz}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία των αναφορών [4],[7]. Κάνομε τις αναγκαίες προσαρμογές της μεθόδου, διότι εδώ έχομε διάδοση ΤΕΜ και οι ιδιοσυναρτήσεις δεν είναι ορθογώνιες, βλ Εξ.(2.17). Χρησιμοποιούμε το θεώρημα αμοιβαιότητας του Lorentz [7], το οποίο γράφομε για την, «πραγματική», κατάσταση $\vec{E}(\vec{x},\omega), \vec{H}(\vec{x},\omega), \vec{J}(\vec{x},\omega)$ και την κάθε μια από τις ιδιοκαταστάσεις $\vec{E}_\lambda^{(\pm)}(\vec{x},\omega), \vec{H}_\lambda^{(\pm)}(\vec{x},\omega), \vec{J}(\vec{x},\omega)=0$, $\lambda = 1,2,...,N$. Θα έχομε

$$\int_S \left(\vec{E} \times \vec{H}_\lambda^{(\pm)} - \vec{E}_\lambda^{(\pm)} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}a = \int_\Omega \left(\vec{J} \cdot \vec{E}_\lambda^{(\pm)} \right) \mathrm{d}^3 x, \quad \lambda = 1,2,...,N \tag{2.20}$$

Τα πεδία $\vec{E}(\vec{x},\omega), \vec{H}(\vec{x},\omega)$ προέρχονται από τη διέγερση του ρεύματος $\vec{J}(\vec{x},\omega)$.

Τα πεδία $\vec{E}_\lambda^{(\pm)}(\vec{x},\omega), \vec{H}_\lambda^{(\pm)}(\vec{x},\omega)$ είναι τα ιδιοπεδία τύπου ΤΕΜ που διαδίδονται προς τη θετική και την αρνητική κατεύθυνση του z, ενώ ο δείκτης λ χαρακτηρίζει το πεδίο που διαδίδεται όταν μόνο ό αγωγός λ έχει μη μηδενικό δυναμικό, όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικό μηδέν όπως έχει και το περίβλημα. Ο χώρος Ω είναι ο χώρος μεταξύ των αγωγών (πολλαπλά συνεκτικός), που περικλείεται από τον εξωτερικό αγωγό S_0 και τις δυο επίπεδες επιφάνειες S_+, S_- , Σχ.(2.2), αυτός είναι ο χώρος όπου είναι εντοπισμένες οι πηγές των πεδίων..

Εφόσον έχομε ιδανικούς αγωγούς, το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στις επιφάνειές τους οπότε προκύπτει ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο κυλινδρικό μέρος της επιφάνειας S είναι μηδέν. Απομένουν τα ολοκληρώματα στις δυο επίπεδες επιφάνειες. Θα έχομε

$$\int_\Omega \left(\vec{J} \cdot \vec{E}_\lambda^{(\pm)} \right) \mathrm{d}^3 x = \int_{S_+} \left(\vec{E} \times \vec{H}_\lambda^{(\pm)} - \vec{E}_\lambda^{(\pm)} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}a + \int_{S_-} \left(\vec{E} \times \vec{H}_\lambda^{(\pm)} - \vec{E}_\lambda^{(\pm)} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \tag{2.21}$$

Σημειώστε ότι το πεδίο $\vec{E}$ προέρχεται από τη διέγερση στο χώρο της γραμμής μεταφοράς που βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών S_-, S_+. Αυτό σημαίνει ότι προς τη μεριά της επιφάνειας S_+ το $\vec{E}$ θα διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του z ενώ προς τη μεριά της S_- προς την αρνητική.

Διαλέγομε τα κάτω πρόσημα στην Εξ.(2.21). Με χρήση και των Εξ.(2.19) βρίσκομε ότι το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι μηδέν, δηλαδή

$\int_{S_-} ... = 0$. Έτσι, αφού σύμφωνα με τις Εξ.(2.15)

$\vec{H}_{0\lambda} = \mp \dfrac{1}{Z_\mathrm{T}} \vec{e}_z \times \vec{E}_{0\lambda}$ και ισχύει η ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, βρίσκομε

$$\int_\Omega \left(\vec{J} \cdot \vec{E}_\lambda^{(-)} \right) \mathrm{d}^3 x = -\frac{2}{Z_\mathrm{T}} \sum_{\lambda'=1}^{N} A_{\lambda'} \int_{S_+} \left(\vec{E}_{0\lambda} \cdot \vec{E}_{0\lambda'} \right) \mathrm{d}a, \quad \lambda = 1,2,...,N \tag{2.22}$$

Με χρήση της Εξ.(2.15) καταλήγομε

$$\int_{\Omega}\left(\vec{J}\cdot\vec{E}_{\lambda}^{(-)}/V_{\lambda}\right)\mathrm{d}^3x=-\frac{2}{Z_{\mathrm{T}}\varepsilon}\sum_{\lambda'=1}^{N}A_{\lambda'}^{(+)}V_{\lambda'}c_{\lambda'\lambda},\ \lambda=1,2,...,N \tag{2.23}$$

Ανάλογα ισχύουν για το άνω πρόσημο στην Εξ.(2.17).

Τελικώς καταλήγομε στις σχέσεις

$$\int_{\Omega}\left(\vec{J}\cdot\vec{E}_{\lambda}^{(\mp)}/V_{\lambda}\right)\mathrm{d}^3x=-\frac{2}{Z_{\mathrm{T}}\varepsilon}\sum_{\lambda'=1}^{N}A_{\lambda'}^{(\pm)}V_{\lambda'}c_{\lambda'\lambda},\ \lambda=1,2,...,N \tag{2.24}$$

Από τις Εξ.(2.19) μπορούμε να βρούμε το δυναμικό του αγωγού λ ως προς τον αγωγό αναφοράς 0. Ολοκληρώνομε την ένταση του πεδίου κατά μήκος τυχαίας διαδρομής που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο με σταθερό z, από τυχαίο σημείο της επιφάνειας του αγωγού λ μέχρι τυχαίο σημείο του αγωγού αναφοράς. Καταλήγομε για το πλάτος της τάσης του αγωγού λ, στη σχέση

$$\upsilon_{\lambda}^{(\pm)}(z,\omega)=\int_{\lambda}^{0}\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x},\omega)\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\sum_{\lambda'=1}^{N}A_{\lambda'}^{(\pm)}\int_{\lambda}^{0}\vec{E}_{0\lambda'}(\vec{x}_{\mathrm{T}})\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}A_{\lambda}^{(\pm)}V_{\lambda} \tag{2.25}$$

Πολλαπλασιάζομε την Εξ.(2.24) επί $\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}=\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}$ και με τη χρήση της Εξ.(2.25) βρίσκομε

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\int_{\Omega}\left(\vec{J}\cdot\vec{E}_{\lambda}^{(\mp)}/V_{\lambda}\right)\mathrm{d}^3x&=-\frac{2}{Z_{\mathrm{T}}\varepsilon}\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}kz}\sum_{\lambda'=1}^{N}A_{\lambda'}^{(\pm)}V_{\lambda'}c_{\lambda'\lambda}\\&=-\frac{2}{Z_{\mathrm{T}}\varepsilon}\sum_{\lambda'=1}^{N}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,\omega)c_{\lambda'\lambda}\ ,\ \lambda=1,2,...,N\\Z_{\mathrm{T}}\varepsilon&=\frac{1}{c}\end{aligned} \tag{2.26}$$

Θα προχωρήσομε στην τελική λύση του προβλήματος. Θα κάμομε χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στα δυο μέλη των Εξ.(2.26). Έτσι θα καταλήξομε σε σχέσεις για τα δυναμικά των αγωγών, τα οποία (δυναμικά) θα είναι συναρτήσεις των z,t . Χρησιμοποιούμε την Εξ.(2.3).

Έχομε

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}\int_{\Omega}\left(\vec{J}(\vec{x}',\omega)\cdot\vec{E}_{\lambda}^{(\mp)}(\vec{x}',\omega)/V_{\lambda}\right)\mathrm{d}^3x'\right)\right]\\
&= -2c\sum_{\lambda'=1}^{N}c_{\lambda'\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,\omega)\\
&= -2c\sum_{\lambda'=1}^{N}c_{\lambda'\lambda}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,t)\ ,\ \lambda=1,2,...,N
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Το πρώτο μέλος γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{(\pm)\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{(\mp)\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z'}\left(\vec{J}(\vec{x}',\omega)\cdot\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_{\lambda}\right)\mathrm{d}^3x'\right)\right]\\
&=\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x'\left[\left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_{\lambda}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\vec{J}(\vec{x}',\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\left(t\mp\frac{z-z'}{c}\right)}\right)\right]\\
&=\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x'\left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_{\lambda}\right)\cdot\vec{J}\left(\vec{x}',t\mp\frac{z-z'}{c}\right)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Επομένως τελικώς

$$
\frac{-1}{2}\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x'\left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_{\lambda}\right)\cdot\vec{J}\left(\vec{x}',t\mp\frac{z-z'}{c}\right)=c\sum_{\lambda'=1}^{N}c_{\lambda'\lambda}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,t)\ ,\ \lambda=1,2,...,N \tag{2.29}
$$

Αφού το $\vec{E}_{\lambda}$ είναι εγκάρσιο, προφανώς μόνο η εγκάρσια πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}_{\mathrm{T}}$, συμβάλει στην δημιουργία σήματος. Ποιο συγκεκριμένα, συμβάλει η προβολή του $\vec{J}_{\mathrm{T}}$ πάνω στην κατεύθυνση του $\vec{E}_{\lambda}$. Δηλαδή έχομε τις σχέσεις (2.30)

$$
\frac{-1}{2}\int_{\Omega}\mathrm{d}^3x'\left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_{\lambda}\right)\cdot\vec{J}_{\mathrm{T}}\left(\vec{x}',t\mp\frac{z-z'}{c}\right)=c\sum_{\lambda'=1}^{N}c_{\lambda'\lambda}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,t)\ ,\ \lambda=1,2,...,N \tag{2.30}
$$

Μπορούμε να μετατοπίσομε την αρχή του χρόνου έτσι ώστε
$t\rightarrow t-t_0$.
Τα $\vec{E}_{\lambda},\vec{J}_{\mathrm{T}}$ έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις αν υπάρχει μαγνητικό πεδίο, άρα το «ύψος» του σήματος θα επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο.

Αν θέσομε $z = z'$, τότε το ολοκλήρωμα, με το πρόσημο - , στο αριστερό μέλος είναι ίδιο με αυτό που ξέρομε για το βοηθητικό ρεύμα στην περίπτωση που έχομε αγωγούς μικρού μήκους όπου δεν υπάρχει διάδοση. Πράγματι έχομε

$$I_\lambda(t) = \frac{-1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x' \left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_\mathrm{T})/V_\lambda\right)\cdot \vec{J}_\mathrm{T}\left(\vec{x}',t\right),\ \lambda = 1,2,...,N \tag{2.31}$$

Το ρεύμα είναι το ρεύμα του αγωγού, δεν έχομε εδώ φόρτιση των πυκνωτών που αντιστοιχούν στους αγωγούς του ανιχνευτή.

Το ολοκλήρωμα, της σχέσης (2.30) πολλαπλασιασμένο επί $-\frac{1}{2}$, ταυτίζεται με το ρεύμα του αγωγού λ, στη θέση z τη στιγμή t,

$$i_\lambda^{(\pm)}(z,t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x' \left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_\mathrm{T})/V_\lambda\right)\cdot \vec{J}_\mathrm{T}\left(\vec{x}',t \mp \frac{z-z'}{c}\right)$$

άρα

$$\begin{aligned} i_\lambda^{(\pm)}(z,t) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^3x' \left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_\mathrm{T})/V_\lambda\right)\cdot \vec{J}_\mathrm{T}\left(\vec{x}',t \mp \frac{z-z'}{c}\right) \\ &= c\sum_{\lambda'=1}^{N} c_{\lambda'\lambda}\upsilon_{\lambda'}^{(\pm)}(z,t)\ ,\ \lambda = 1,2,...,N \end{aligned} \tag{2.32}$$

Το $\frac{1}{2}$ δικαιολογείται αφού έχομε διαχωρισμό του σήματος σε δυο που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Από τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να προσδιορίσομε τα σήματα στα άκρα των αγωγών (που είναι οι αγωγοί του ανιχνευτή).
Μπορούμε να γράψομε τις σχέσεις (2.30) σε μορφή με πίνακες,

$$[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_N \end{bmatrix} \qquad [\upsilon] = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \upsilon_N \end{bmatrix}$$

$$[i] = c[c][\upsilon] = [Y][\upsilon] \tag{2.33}$$

Η $[c]$ είναι η γνωστή μήτρα των συντελεστών χωρητικότητας. Όπως έχομε δει τα c_{ij} μπορούν να εκφραστούν ως προς τις «συνήθεις» χωρητικότητες, C_{lm}, με δυο ακροδέκτες.
Παρατηρούμε ότι το ρεύμα «βλέπει» χαρακτηριστική χαρακτηριστική αγωγιμότητα που εκφράζεται με τη μήτρα $[Y] = c[c]$.

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις (2.33) βρίσκομε

$$[\upsilon]=\frac{1}{c}[c]^{-1}[i],\ \ [\upsilon]=[Z][i],\ \ [Z]=[Y]^{-1}=\frac{1}{c}[c]^{-1} \qquad (2.34)$$

Οι σχέσεις (2.29), (2.30),(2.32) ισχύουν για $z > z_+$ και $z < z_-$ και τα πεδία διαδίδονται προς τη θετική αντιστοίχως αρνητική κατεύθυνση του άξονα z. Φαίνεται αυτό που περιμένομε, δηλαδή η καθυστέρηση στη διάδοση. Η τιμή του δυναμικού στη θέση z τη στιγμή t, εξαρτάται από την τιμή της πυκνότητας ρεύματος την προηγούμενη στιγμή $t' = t \mp \dfrac{z-z'}{c}$. Υπενθυμίζομε ότι δεν υπάρχει εγκάρσια διάδοση.
Στην πράξη, η περιοχή εντοπισμού της διέγερσης η οποία είναι μεταξύ z_+, z_-, είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την απόσταση $|z-z_+|$ ή $|z-z_-|$ από αυτή την περιοχή όπου ενδιαφερόμαστε για τις τιμές των σημάτων. Γι αυτό μπορούμε να δεχτούμε ότι $z' \approx z_- \approx z_+ \approx z_0 =$ δεδομένο σταθερό, επίσης το $\vec{x}'$ το οποίο είναι $(\vec{x}'_{\mathrm{T}}, z')$ μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται συνέχεια στο δεδομένο εγκάρσιο επίπεδο στη θέση $z' = z'_0$, δηλαδή κατά προσέγγιση έχομε $\vec{x}' = (\vec{x}'_{\mathrm{T}}, z'_0)$. Αυτό γίνεται επειδή στην πράξη το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το $|z_+ - z_-|$, οπότε για δεδομένο χρόνο, τα πεδία δεν αλλάζουν σημαντικά με τη θέση z' στην περιοχή εντοπισμού της πηγής. Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις (2.30) γράφονται ως

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathrm{d}^3x' \left(\vec{E}^{(\mp)}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}})/V_\lambda\right)\cdot \vec{J}\left(\vec{x}'_{\mathrm{T}}, z'_0; t\mp\frac{z-z'_0}{c}\right) = -c\sum_{\lambda'=1}^{N} c_{\lambda'\lambda}\upsilon^{(\pm)}_{\lambda'}(z,t)\ ,\ \lambda = 1,2,\ldots,N \qquad (2.34)$$

Μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι πράγματι το ρεύμα του κάθε ενός αγωγού δίνεται από τις σχέσεις (2.32) εφαρμόζοντας τις γνωστές σχέσεις (2.35).

$$i_k(z,t) = \oint_k \vec{H}^{(\pm)}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (2.35)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διαγράφεται πάνω σε επίπεδο όπου $z =$ σταθερό, και η διαδρομή είναι κατά μήκος καμπύλης η οποία είναι έξω από τον αγωγό αλλά πολύ κοντά του, με κατάλληλα φορά.

Ένας άλλος τρόπος να βεβαιωθούμε γι αυτό είναι να προσδιορίσομε τις εξισώσεις για τη διάδοση σε γραμμές μεταφοράς. Από την Εξ.(2.32) βρίσκομε κάνοντας τις κατάλληλες παραγωγίσεις.

Σημειώνομε ότι από τη θεωρία των γραμμών μεταφοράς είναι γνωστή η σχέση

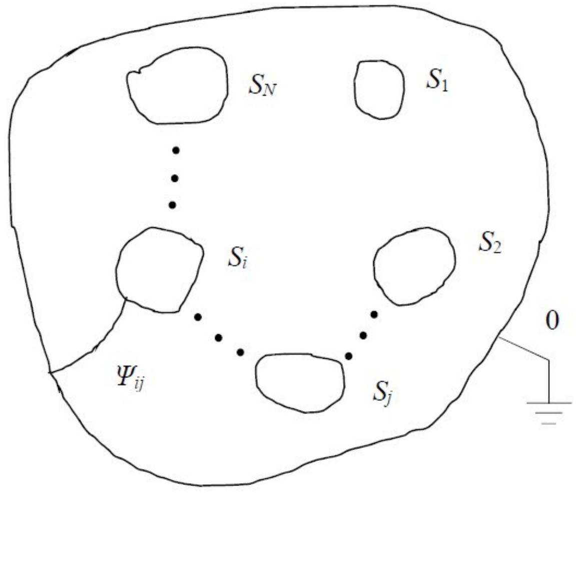
$$[c][L] = \varepsilon\mu[E_u], \quad [L] = \varepsilon\mu[c]^{-1} \tag{2.36}$$

όπου $[L]$ είναι η μήτρα επαγωγής (inductance matrix) και $[E_u]$ είναι η $N \times N$ μοναδιαία μήτρα. Ισχύουν $L_{ij} = L_{ji}$, αυτά τα στοιχεία αναφέρονται ανά μονάδα μήκος, όπως και τα c_{ij}.

Η Εξ.(2.36) ισχύει κατά προσέγγιση για ιδανικούς αγωγούς, όπου τα ρεύματα ρέουν μόνο στην επιφάνεια των αγωγών, για συχνότητες αρκετά μεγάλες οπότε το επιδερμικό φαινόμενο είναι έντονο, δηλαδή το επιδερμικό βάθος είναι πολύ μικρό. Έτσι μπορούμε να γράψομε για τις τάσεις

$$\begin{aligned} [\upsilon] &= \frac{1}{c}[c]^{-1}[i] = c[L][i] \\ \upsilon_{\lambda}^{(\pm)}(z,t) &= c\sum_{\lambda'=1}^{N} L_{\lambda\lambda'} i_{\lambda'}^{(\pm)}(z,t) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Το φυσικό νόημα αυτών των συντελεστών επαγωγής φαίνεται από το σχήμα (2.3). Το ρεύμα του αγωγού j δημιουργεί μαγνητική ροή $\Psi_{ij} = L_{ij} i_j$ στην επιφάνεια που ενώνει τον αγωγό i με τον περιβάλλοντα αγωγό 0. Η συνολική μαγνητική ροή δια αυτής της επιφάνειας θα είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους ροών που οφείλονται στα ρεύματα όλων των αγωγών, δηλαδή $\Psi_i = \sum_{j=1}^{N} \Psi_{ij} = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} i_j$.



Σχήμα 2.3. Η μαγνητική ροή Ψ_{ij} που οφείλεται στο ρεύμα του αγωγού j .

Οπότε από τις Εξ.(2.32) και (2.37) βρίσκομε τις παρακάτω γνωστές εξισώσεις των γραμμών μεταφοράς όπου, όπως βλέπομε, πράγματι εισέρχονται τα ρεύματα $i_\lambda^{(\pm)}$.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial i_\lambda}{\partial z}=\sum_{\lambda'=1}^{N} c_{\lambda'\lambda}\frac{\partial \upsilon_{\lambda'}}{\partial t},\quad -\frac{\partial \upsilon_\lambda}{\partial z}=\sum_{\lambda'=1}^{N} L_{\lambda'\lambda}\frac{\partial i_{\lambda'}}{\partial t}\\
&\text{ή } -\frac{\partial}{\partial z}[i]=[c]\frac{\partial}{\partial t}[\upsilon],\quad -\frac{\partial}{\partial z}[\upsilon]=[L]\frac{\partial}{\partial t}[i]
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Μπορούμε να δείξομε ότι ισχύουν και οι γνωστές κυματικές εξισώσεις των γραμμών μεταφοράς

$$
\frac{\partial^2 i_\lambda}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i_\lambda}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 \upsilon_\lambda}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \upsilon_\lambda}{\partial t^2}
\tag{2.39}
$$

Οι διαφορικές εξισώσεις με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες για το ρεύμα (για $t=0, z=z'\approx z_0$), μας λύνουν το πρόβλημα της διάδοσης των σημάτων στους ανιχνευτές με πολλά ηλεκτρόδια.

Θα μελετήσομε την περίπτωση που αντί για κατανομή φορτίου έχομε ένα κινούμενο σημειακό φορτίο. Έστω η ταχύτητά του $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x}_q(t))=(u_x(t),u_y(t),u_z(t))$.
Υποθέτομε ότι ξέρομε τη διαδρομή συναρτήσει του χρόνου και την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου. Επίσης υποθέτομε ότι μπορούμε να εκφράσομε τις δυο συντεταγμένες θέσης του σημειακού φορτίου συναρτήσει της μιας από τις δυο εγκάρσιες, έστω ότι αυτή είναι η x_q η οποία θεωρείται δεδομένη, γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Ο δείκτης q δηλώνει ότι το αντίστοιχο μέγεθος αναφέρεται στο σημειακό φορτίο.
Η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος δίνονται από τις σχέσεις,

$$
\begin{aligned}
&\rho=\rho(\vec{x}',t)=q\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t))\\
&\vec{J}=\vec{J}(\vec{x}',t)=(J_x,J_y,J_z)=\rho\vec{u}=q\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t))\vec{u}(\vec{x}_q(t))\\
&\vec{J}_\mathrm{T}=(J_x,J_y)=q\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t))\vec{u}_\mathrm{T}(t)\\
&\vec{u}_\mathrm{T}=(u_x(t),u_y(t))=(\dot{x}_q(t),\dot{y}_q(t))
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Θα υπολογίσομε το ρεύμα από την Εξ.(2.32). Η θέση του σημειακού φορτίου είναι συνάρτηση του χρόνου, $x_q=x_q(t'), y_q=y_q(t'), z_q=z_q(t')$. Αυτές οι σχέσεις παριστάνουν την τροχιά του σημειακού φορτίου στις τρεις διαστάσεις μέσα στο χώρο Ω . Η τιμή του ρεύματος στη θέση z τη στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της πυκνότητας ρεύματος τη στιγμή $t' = t \mp \frac{z - z'(t')}{c}$, ή $t_q = t \mp \frac{z - z_q(t_q)}{c}$. Από αυτή τη σχέση μπορούμε να υπολογίσομε το $t_q = t_q(z,t)$.

$$
\begin{aligned}
i^{(\pm)}(z,t) &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathrm{d}^3x' \left(\vec{E}_{0\lambda}(\vec{x}'_{\mathrm{T}}) / V_\lambda \right) \cdot \vec{J}_{\mathrm{T}} \left(\vec{x}', t \mp \frac{z - z'}{c} \right) \\
&= -\frac{1}{2} q \int_{\Omega} \mathrm{d}^3x' \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q) \left(\vec{E}_{0\lambda}(x', y') / V_\lambda \right) \cdot \vec{u}_{\mathrm{T}}(t_q) \\
&= -\frac{1}{2} q \left(\vec{E}_{0\lambda}(x_q(t_q), y_q(t_q)) / V_\lambda \right) \cdot \vec{u}_{\mathrm{T}}(t_q) \\
t_q &= t \mp \frac{z - z_q(t_q)}{c}
\end{aligned}
\qquad (2.41)
$$

Παράδειγμα

Περίπτωση κυλινδρικού ανιχνευτή μεγάλου μήκους, κυκλικής διατομής, με έναν αγωγό στον άξονά του.

Σε αυτή την περίπτωση οι μεταβλητές θέσης είναι οι γνωστές μεταβλητές των κυλινδρικών συντεταγμένων φ, r. Ο εξωτερικός αγωγός θα θεωρηθεί σε δυναμικό μηδέν (S_0) και επομένως έχομε την περίπτωση $N = 1$. Θα εξετάσομε την περίπτωση σημειακού φορτίου ιόντων του οποίου η ταχύτητα ολίσθησης δίνεται από τη σχέση $u = \mu E$ και η κίνηση του φορτίου είναι ακτινική πάνω στο εγκάρσιο (προς τον άξονα z) επίπεδο στη θέση $z_q =$ σταθερό. Το φορτίο ξεκινά από την αρχική θέση r_0 και προφανώς $\varphi =$ σταθερό ανεξάρτητο του χρόνου. Θ χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα από το παράδειγμα Π1.2, συγκεκριμένα έχομε βρει τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&u_{\mathrm{T}} = \mu \frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}} \frac{1}{r}, \; r^2 = r_0^2 + 2\mu \frac{V_{\mathrm{a}}}{\ln\frac{b}{a}} t, \; r^2 = r_0^2 (1 + t / t_0) \\
&t_0 = \frac{r_0^2}{2\mu V_{\mathrm{a}}} \ln\frac{b}{a}
\end{aligned}
\qquad (\Pi 2.1)
$$

Υποθέτομε ότι η (ψηλή) τάση, δηλαδή πόλωση ανιχνευτή, που κινεί τα φορτία είναι σταθερή V_{a} οπότε από τις σχέσεις (2.32), (2.41) για τον «παλμό» ρεύματος και τάσης βρίσκομε:

$$i(\vec{x},t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}q\mu V_{\mathrm{a}}}{r_0^2(\ln\frac{b}{a})}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\mp\frac{z-z_q}{ct_0}\right]}$$

$$\upsilon(\vec{x},t) = -\frac{1}{2}\frac{q\mu V_{\mathrm{a}}}{r_0^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\mp\frac{z-z_q}{ct_0}\right]} \qquad (\Pi 2.2)$$

$$Z_0 = \frac{\upsilon(z,t)}{i(z,t)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \text{χαρακτηριστική αντίσταση}$$

της γραμμής μεταφοράς

Δηλαδή βρίσκομε παρόμοιες με αυτές της περίπτωσης που εξετάζομε ανιχνευτή μικρών διαστάσεων αλλά τώρα έχομε διάδοση και διαχωρισμό του σήματος σε δυο ίσα μέρη. Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί σε διάδοση προς τη θετική κατεύθυνση του z και το κάτω προς την αρνητική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) S. Ramo, Proc. IRE 27(1939)584
2) W. Shockley, Journal of Applied Physics, Vol. 9, October, 1938, p. 635
3) B. B. Rossi, H. H. Staub, Ionization Chambers and Counters, chapter 3, McGraw-Hill (1949)
4) E. Gatti, G. Padovini, V. Radeka, Nucl. Instr. and Meth. 193(1982)651
5) CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, Third Edition, by John David Jackson, JOHN WILEY & SONS, INC (1998)
6) ATLAS, Muon Spectrometer Technical Design Report, CERN/LHCC 97-22, June 1997
7) Σχεδιάζονται ανιχνευτές MICROMEGAS για τον ανιχνευτή ATLAS που μπορεί να έχουν διαστάσεις από 1 m μέχρι 2 m, (2013).
8) FOUNDATIONS OF MICROWAVE ENGINEERING by Robert E. Collin, McGraw-Hill Company (1966)
9) HANDBUCH DER PHYSIK, BAND XVI, HERAUSGEGEBEN VON S. FLUGGE, Electromagnetic Waveguides and Resonators, by F. E. Borgnis and C. H. Papas, page 285, Springer-Verlag (1958)
10) L. A. PIPES, Journal of Applied Physics 12(1941)782
11) W. T. Weeks, IBM J. Res. Develop. Nov. 1972, p. 604
12) W. Blum, W. Riegler, L. Rolandi, Particle Detection with Drift Chambers, Springer-Verlag (2008)
13) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIA, Pergamon Press (1960)