

ΟΡΓΑΝΟΛΟΓΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Εμμ. Δρης, Καθηγητής, Σ. Μαλτέζος, Επίκουρος Καθηγητής
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Αθήνα 2006

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τον όρο «οργανολογία» εννοούμε τη σε βάθος γνώση της αρχής ή μεθόδου λειτουργίας, από τη σκοπιά της φυσικής, οργάνων, συσκευών ή συστημάτων που επιτελούν συγκεκριμένο σκοπό καθώς και των χαρακτηριστικών επιδόσεών τους (ευαισθησία, ακρίβεια, διακριτική ικανότητα κ.α.). Η οργανολογία μπορεί να αφορά σε πεδία επιστημονικής έρευνας και τεχνολογικών εφαρμογών και αποτελεί κλάδο της πειραματικής φυσικής που συμπεριλαμβάνει επίσης την ανάπτυξη πειραματικών μεθόδων και τεχνικών.

Είναι αυτονόητο, ότι για έναν πειραματικό φυσικό, είτε πρόκειται να ασχοληθεί με την έρευνα είτε με εφαρμογές, η οργανολογία με την ευρεία έννοια ή και ειδικότερα για συγκεκριμένο κλάδο της φυσικής, έχει να προσφέρει πολλές βασικές και απαραίτητες γνώσεις. Στο χώρο της φυσικής σωματιδίων υψηλών ενεργειών για παράδειγμα, η κατανόηση της λειτουργίας των επιταχυντών και των ανιχνευτών είναι σχεδόν αδύνατη αν δεν υπάρχει το απαραίτητο υπόβαθρο γνώσεων στις βασικές αρχές και μεθόδους αλλά και στα τεχνολογικά μέσα που εξελίσσονται ραγδαία, όπως η ηλεκτρονική οι τηλεπικοινωνίες και η πληροφορική. Επίσης, τα συστήματα ελέγχου είναι απολύτως απαραίτητα στα πειράματα αυτά λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας και απαιτούμενης αξιοπιστίας, γεγονός που οδηγεί στην ανάγκη απόκτησης βασικών γνώσεων και σ' αυτά.

Οι σημειώσεις αυτές καλύπτουν μερικά ουσιώδη θεωρητικά και τεχνικά στοιχεία από τη λειτουργία βασικών ανιχνευτών μαζί με ανάλυση των επιδόσεων και χαρακτηριστικών τους. Επίσης, περιγράφονται αναλυτικά και τεκμηριώνονται, γνωστές μέθοδοι περιορισμού θορύβου καθώς και χρήσιμα στοιχεία στατιστικής για ανάλυσης δεδομένων. Αποτελούν ένα μέρος της ύλης του μαθήματος οργανολογίας του 3^{ου} εξαμήνου του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, Κατεύθυνσης Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε. Μ. Πολυτεχνείου.

Αθήνα 14/1/2006

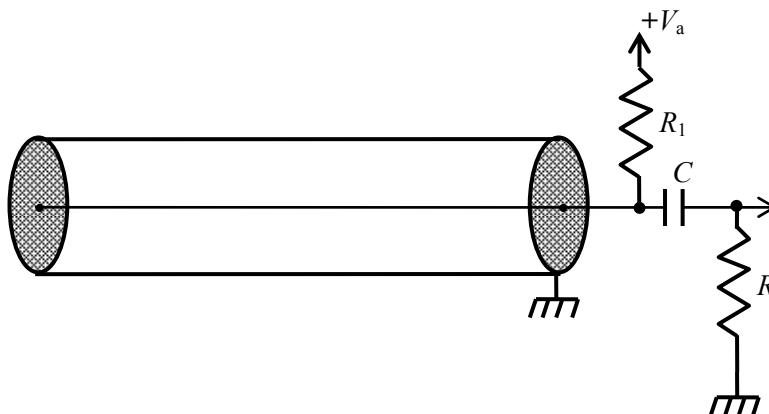
1. ΑΝΙΧΝΕΥΤΕΣ

1.1 Ανιχνευτές ιοντισμού αερίου

Γενικά, η ανίχνευση σωματιδίων και φωτονίων στηρίζεται στην αλληλεπίδρασή τους με το υλικό του ανιχνευτή. Στην περίπτωση ανιχνευτών ιοντισμού αερίου, το φορτισμένο σωματίδιο αλληλεπιδρά με το αέριο του ανιχνευτή. Τα φωτόνια απορροφώνται και δημιουργούν ή εκτινάσσουν φορτισμένα σωματίδια (ηλεκτρόνια) τα οποία στη συνέχεια ανιχνεύονται. Παρακάτω θα περιγράψουμε την αρχή λειτουργίας κυλινδρικών ανιχνευτών με αέριο βασιζόμενοι στη σχηματική παράσταση του Σχ. 1.1. Ο ανιχνευτής είναι κύλινδρος αγωγίμος και κατά μήκος του άξονά του υπάρχει σύρμα. Ο κύλινδρος είναι κλειστός και περιέχει κατάλληλο μίγμα αερίων. Μεταξύ του σύρματος (άνοδος) και του κυλίνδρου (κάθοδος) εφαρμόζεται υψηλή τάση, V_a . Στο χώρο του αερίου δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο με ένταση

$$E = -\frac{V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου, b είναι η εσωτερική ακτίνα του εξωτερικού κυλινδρικού αγωγού και a η ακτίνα του σύρματος.



Σχήμα 1.1 Σχηματική παράσταση κυλινδρικού ανιχνευτή.

Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο διέλθει από τον ανιχνευτή, δημιουργεί θετικά ιόντα και ηλεκτρόνια. Οι τρόποι που φορτισμένα σωματίδια χάνουν ενέργεια όταν διέρχονται διαμέσου της ύλης, οφείλονται σε δύο κατηγορίες αντιδράσεων

α) διέγερση και β) ιοντισμός, με δημιουργία ελεύθερου ηλεκτρονίου και ιόντος. Για να συμβεί η διέγερση πρέπει η ενέργεια που θα δοθεί στο μόριο να είναι η κατάλληλη, ώστε να γίνει το λεγόμενο «κβαντικό άλμα», δηλαδή μια αντίδραση συντονισμού. Για ευγενή αέρια η ενεργός διατομή, σ , έχει τιμές της τάξης του 10^7 barn! Με αυτόν τον τρόπο, δεν παράγονται ιόντα και ηλεκτρόνια, αλλά το διεγερμένο

μόριο (ή άτομο) μπορεί να συμμετάσχει σε επιπλέον αντιδράσεις που να οδηγούν σε ιοντισμό.

Στην περίπτωση του ιοντισμού δεν απαιτείται συγκεκριμένη ενέργεια, αλλά αρκεί η ενέργεια να υπερβαίνει κάποια τιμή κατωφλίου. Τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα που παράγονται συνιστούν τον πρωτογενή ιοντισμό. Σε μερικούς από αυτούς τους ιοντισμούς μπορεί το ηλεκτρόνιο να λάβει αρκετά μεγάλη τιμή ενέργειας (ακτίνες-δέλτα) ώστε με τη σειρά του να προκαλέσει ιοντισμό. Αυτοί λέγονται δευτερογενείς ιοντισμοί.

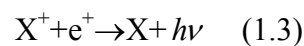
Ένας άλλος μηχανισμός ιοντισμού είναι αυτός που οφείλεται στο φαινόμενο Penning. Σε μερικά μόρια ή άτομα διεγείρονται μετασταθείς καταστάσεις οι οποίες δε μεταπίπτουν στη θεμελιώδη κατάσταση αμέσως εκπέμποντας φωτόνιο. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να γίνει αποδιέγερση με σύγκρουση με άλλο άτομο που οδηγεί σε ιοντισμό του δεύτερου αυτού ατόμου. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων διεγέρσεων είναι αυτές των μορίων διαφόρων αερίων με ευγενή αέρια και ευγενών αερίων με άλλα ευγενή αέρια, για παράδειγμα:



Για ευγενή αέρια, κατά μέσο όρο, παράγεται ένα ζεύγος ιόντος-ηλεκτρονίου ανά περίπου 30 eV ενέργειας που χάνει το διερχόμενο φορτισμένο σωματίδιο. Άρα, αν σωματίδιο με ενέργεια 3 keV δώσει όλη την ενέργειά του στο αέριο θα παραχθούν $3000 \text{ eV} / 30 \text{ eV} = 100$ ζεύγη ιόντων-ηλεκτρονίων.

1.1.1 Επανασύνδεση και σύλληψη ηλεκτρονίων

Όταν δεν υπάρχει στο αέριο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα, γενικά, επανασυνδέονται εξαιτίας της ηλεκτρικής έλξης τους, εκπέμποντας κατά την επανασύνδεση, ένα φωτόνιο:



Όταν έχουμε επανασύνδεση ιόντων X^-, Y^+ τότε



Γενικά, ο ρυθμός των επανασυνδέσεων, n , θα εξαρτάται από τις συγκεντρώσεις των θετικών και αρνητικών φορέων φορτίου, n^+, n^- αντίστοιχα, δηλαδή

$$dn = bn^+n^- dt. \quad (1.5)$$

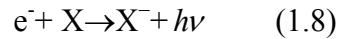
Θέτομε $n^+ = n^- = n$, οπότε προκύπτει

$$dn = bn^2 dt. \quad (1.6)$$

Τελικά, αν για $t=0$ $n=n_0$, έχουμε,

$$n = \frac{n_0}{1 + bn_0 t} \quad (1.7)$$

Η διαδικασία σύλληψης ηλεκτρονίων συνίσταται στη σύλληψη ελεύθερων ηλεκτρονίων από ηλεκτραρνητικά άτομα σχηματίζοντας με τον τρόπο αυτό αρνητικά ιόντα:



Αυτού του είδους τα άτομα έχουν ένα εξωτερικό φλοιό σχεδόν πλήρη, ώστε η προσθήκη ενός επιπλέον ηλεκτρονίου οδηγεί σε απελευθέρωση ενέργειας. Το αρνητικό ιόν που σχηματίζεται είναι προφανώς ασταθές. Προκύπτει λοιπόν ότι, η παρουσία ηλεκτραρνητικών αερίων στον ανιχνευτή θα μειώσει δραματικά την απόδοση του ανιχνευτή αφού τα ηλεκτρόνια θα συλλαμβάνονται προτού δράσουν μέσα στον ανιχνευτή, όπως θα φανεί αργότερα.

1.1.2 Μεταφορά ηλεκτρονίων και ιόντων σε αέρια

Όταν δεν υπάρχει στο χώρο του αερίου ηλεκτρικό πεδίο, τα ιόντα και ηλεκτρόνια που δημιουργούνται από τη διέλευση φορτισμένου σωματιδίου, διαχέονται ομοιόμορφα προς τα έξω από το σημείο παραγωγής τους. Αυτά χάνουν ενέργεια εξαιτίας πολλαπλών σκεδάσεων με τα μόρια του αερίου και καταλήγουν σε θερμική ισορροπία με το αέριο και τελικά, επανασυνδέονται με τα μόρια (ή άτομα) του αερίου.

Οι ταχύτητες των φορτισμένων σωματιδίων, σε θερμική ισορροπία με το αέριο, δίνονται κατά τα γνωστά από την κατανομή Maxwell. Η μέση ταχύτητα v είναι,

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (1.9)$$

όπου k η σταθερά του Boltzmann, T η απόλυτη (θερμοδυναμική) θερμοκρασία και m η μάζα του σωματιδίου. Προφανώς, για την ίδια θερμοκρασία η μέση ταχύτητα για ηλεκτρόνια είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής των ιόντων εξαιτίας της πολύ μικρότερης μάζας των ηλεκτρονίων. Σε θερμοκρασία δωματίου ($\approx 20^\circ\text{C}$) οι θερμικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων είναι της τάξης του 10^4 m/s και των θετικών ιόντων της τάξης του 10^2 m/s.

Από την κινητική θεωρία προκύπτει ότι η εξάρτηση του πλήθους των φορτισμένων σωματιδίων, N , από τη θέση, x , μετά από χρόνο t , είναι

$$\frac{dN}{dx} = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (1.10)$$

όπου N_0 είναι ο ολικός αριθμός φορτισμένων σωματιδίων, x η συντεταγμένη x (ή y ή z) της θέσης στο σύστημα αναφοράς με αρχή αξόνων το σημείο δημιουργίας των σωματιδίων και D ο συντελεστής διάχυσης. Η μέση τετραγωνική απόκλιση (διασπορά, rms), δίνεται από τη σχέση

$$\sigma(x) = \sqrt{2Dt} \quad (1.11)$$

Αν θεωρήσουμε τη διασπορά στις τρεις διαστάσεις, τότε αντί για x (ή y ή z) έχουμε κατανομή ως προς $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και ισχύει,

$$\sigma(r) = \sqrt{6Dt} \quad (1.12)$$

όπου $\sigma(r)$ η ακτινική διασπορά. Η ακτινική διασπορά ιόντων στον αέρα υπό κανονικές συνθήκες είναι περίπου 10^{-3} m μετά από 1 s.

Ο συντελεστής διάχυσης υπολογίζεται από την κινητική θεωρία και είναι,

$$D = \frac{1}{3} v \lambda \quad (1.13)$$

όπου λ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή του φορτισμένου σωματιδίου στο αέριο. Για κλασικό ιδανικό αέριο το λ δίνεται από τη σχέση,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{kT}{\sigma_o p} \quad (1.14)$$

όπου σ_o η ολική ενεργός διατομή συγκρούσεων με ένα μόριο του αερίου. Αποδεικνύεται ότι,

$$D = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma_o p} \sqrt{\frac{(kT)^3}{m}} \quad (1.15)$$

1.1.3 Ολίσθηση και κινητικότητα

Υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια κινούνται προς την κάθοδο και την άνοδο, αντίστοιχα. Εξαιτίας των συγκρούσεων με τα μόρια του αερίου, αποκτούν σχεδόν αμέσως μια μέση ταχύτητα ολίσθησης (δεν επιταχύνονται συνεχώς) η οποία υπερτίθεται στη θερμική ταχύτητα.

Ο συντελεστής κινητικότητας του φορτισμένου σωματιδίου, ή αλλιώς κινητικότητα, μ , ορίζεται ως,

$$\mu = \frac{u}{E} \quad (1.16)$$

όπου u είναι η ταχύτητα ολίσθησης και E το ηλεκτρικό πεδίο. Για θετικά ιόντα έχει βρεθεί ότι η u εξαρτάται γραμμικά από το πηλίκιο, E/p (που λέγεται ανηγμένο ηλεκτρικό πεδίο), ακόμη και για αρκετά ισχυρά πεδία. Για σταθερή πίεση έχουμε σταθερό μ (για ιόντα).

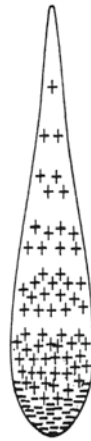
Για ιδανικά αέρια στα οποία τα κινούμενα φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με το αέριο (εκτός της συνιστώσας της ταχύτητας ολίσθησης) ισχύει η παρακάτω σχέση, που λέγεται σχέση του Einstein.

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{e} \quad (1.17)$$

Στην περίπτωση των ηλεκτρονίων, αφενός η κινητικότητα είναι πολύ μεγαλύτερη και αφετέρου εξαρτάται ισχυρά από το E , μάλιστα η ταχύτητα μπορεί να φτάσει σε κόρο και να είναι σταθερή ανεξάρτητη από το πεδίο. Μπορεί να επιτευχθούν ταχύτητες ολίσθησης της τάξης των 10^6 m/s πριν φθάσουμε σε κόρο. Σε αυτήν την περιοχή ταχυτήτων το E είναι της τάξης του 1 kV/cm. Ο συντελεστής (ή σταθερά) διάχυσης D αυξάνεται και οδηγεί σε μεγαλύτερη διασπορά των ηλεκτρονίων.

1.1.4 Πολλαπλασιασμός χιονοστιβάδας

Όταν τα αρχικά ηλεκτρόνια, από τον ιοντισμό που προκάλεσε το σωματίδιο που διέσχισε το χώρο του αερίου, αποκτήσουν κατά την ελεύθερη διαδρομή τους, αρκετή ενέργεια εξαιτίας της δράσης του εξωτερικού πεδίου, μπορεί να δημιουργήσουν ιοντισμούς στο αέριο. Τα παραγόμενα ηλεκτρόνια μπορεί να αποκτήσουν, επίσης, αρκετή ενέργεια και να προκαλέσουν νέους ιοντισμούς κ.ο.κ. Έτσι, έχουμε παραγωγή μεγάλου πλήθους ζευγών ιόντων-ηλεκτρονίων και σχηματισμό χιονοστιβάδας. Επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν μεγαλύτερη κινητικότητα, η χιονοστιβάδα έχει σχήμα σταγόνας υγρού με τα ηλεκτρόνια να προπορεύονται, αποτελώντας την «κεφαλή», ενώ τα πιο αργά ιόντα ακολουθούν πίσω, διαμορφώνοντας την «ουρά» της σταγόνας (βλέπε Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2 Κατανομή ηλεκτρονίων και ιόντων κατά το σχηματισμό χιονοστιβάδας.

Αν λ είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή του ηλεκτρονίου μεταξύ συγκρούσεων που οδηγούν σε ιοντισμό, τότε το $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ δίνει την πιθανότητα ιοντισμού ανά μονάδα μήκους. Αυτός ο συντελεστής, λέγεται πρώτος συντελεστής Townsend. Αν υπάρχουν n ηλεκτρόνια, τότε σε διαδρομή dx θα έχουμε δημιουργία επιπλέον dn και επομένως θα ισχύει ότι

$$dn = n\alpha dx \quad (1.18)$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε τον αριθμό των ηλεκτρονίων, n , που δημιουργούνται σε διαδρομή x

$$n = n_0 \exp(\alpha x) \quad (1.19)$$

όπου n_0 ο αριθμός των αρχικών ηλεκτρονίων που προέκυψαν από τον ιοντισμό που προκάλεσε το σωματίδιο. Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας (ή ενίσχυση αερίου) είναι επομένως,

$$M = \frac{n}{n_0} \exp(\alpha x) \quad (1.20)$$

Αν το α εξαρτάται από το x , δηλαδή $\alpha = \alpha(x)$, όπως συμβαίνει για μη ομογενή ηλεκτρικά πεδία, έχουμε,

$$M = \exp \left[\int_{r_1}^{r_2} \alpha(x) dx \right] \quad (1.21)$$

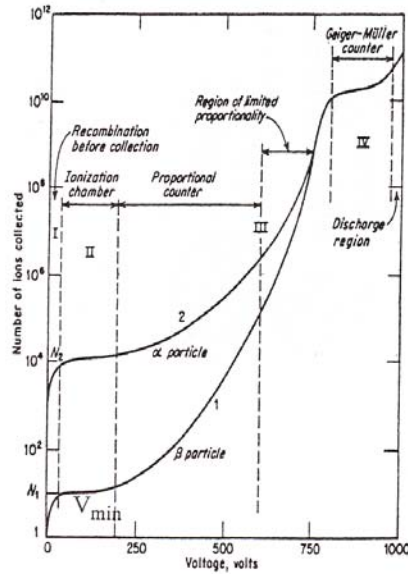
Το M μπορεί να φθάσει μέχρι την τιμή 10^8 (δηλαδή το $\alpha x \leq 20$), διότι πέρα από αυτήν την τιμή γίνεται διάσπαση του αερίου και δημιουργείται σπινθήρας. Αυτό λέγεται όριο του Raether. Μπορεί ναδειχθεί ότι για κυλινδρικό ανιχνευτή ισχύει η σχέση του Diethorn για την ενίσχυση,

$$\ln M = \frac{\ln 2}{\Delta I} \frac{C_l V}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_l V}{2\pi\epsilon_0 a E_{\min} \rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)} \quad (1.22)$$

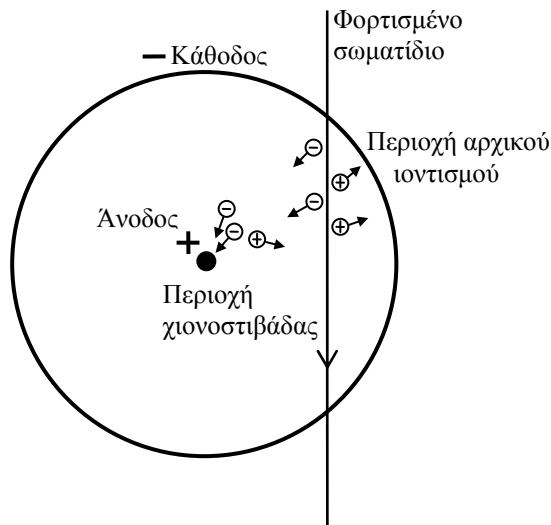
όπου C_l η χωρητικότητα του ανιχνευτή ανά μονάδα μήκους, V η υψηλή τάση ανόδου-καθόδου, ρ_0 η πυκνότητα του αερίου υπό κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, ΔI το μέσο δυναμικό ιονισμού του αερίου ανά παραγόμενο ηλεκτρόνιο, $E_{\min}(\rho_0)$ η ελάχιστη ένταση του πεδίου (για πυκνότητα ρ_0) που απαιτείται για δημιουργία χιονοστιβάδας. Τυπικές τιμές είναι: $\Delta I = 34$ V και $E_{\min}(\rho_0) = 2,4$ kV/cm.

1.1.5 Κυλινδρικός αναλογικός ανιχνευτής

Στο Σχήμα 1.3 φαίνονται διάφορες περιοχές λειτουργίας ενός κυλινδρικού ανιχνευτή. Θα αναφερθούμε αποκλειστικά στην περιοχή αναλογικής λειτουργίας, όπου το συλλεγόμενο φορτίο είναι ανάλογο του αρχικά παραγόμενου από το φορτισμένο σωματίδιο. Ας μελετήσουμε το μηχανισμό ανίχνευσης φορτισμένου σωματιδίου, αναφερόμενοι στο Σχήμα 1.4 το οποίο δείχνει μια τομή του κυλινδρικού ανιχνευτή.



Σχήμα 1.3 Περιοχές λειτουργίας κυλινδρικών ανιχνευτών με βάση των αριθμό ιόντων που συλλέγονται συναρτήσει της υψηλής τάσης ανόδου-καθόδου.



Σχήμα 1.4 Τομή του κυλινδρικού ανιχνευτή όπου φαίνεται μια τυχαία τροχιά φορτισμένου σωματιδίου που τον διασχίζει.

Ένα φορτισμένο σωματίδιο (έστω αρκετά μεγάλης ενέργειας) διέρχεται από τον ανιχνευτή, κατά μήκος της διαδρομής του παράγονται, συνήθως, μερικές δεκάδες ζεύγη ιόντων-ηλεκτρονίων. Τα θετικά ιόντα κινούνται προς την κάθοδο (-), ενώ τα ηλεκτρόνια προς την άνοδο (+). Η διαφορά δυναμικού είναι τέτοια, ώστε στην περιοχή της ανόδου και σε αποστάσεις της τάξης της διαμέτρου του ανοδικού σύρματος, το πεδίο (που εξαρτάται από την απόσταση ως $1/r$) γίνεται αρκετά ισχυρό ώστε να προκληθούν ιοντισμοί και χιονοστιβάδα. Δηλαδή, από ένα αρχικό ηλεκτρόνιο το οποίο ολίσθησε από την αρχική του θέση ως τη μικρή αυτή απόσταση από την επιφάνεια του σύρματος, παράγοντας τελικά πολλά άλλα ηλεκτρόνια

(συνήθως πολλές εκατοντάδες) και αντίστοιχα ιόντα. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η ενίσχυση του αερίου.

Τα ηλεκτρόνια συλλέγονται ταχύτατα από την άνοδο (σε χρόνο της τάξης του 1 ns), ενώ τα θετικά ιόντα ολισθαίνουν «αργά», κατευθυνόμενα προς την κάθοδο. Θα δούμε στη συνέχεια ότι τα ιόντα είναι αυτά που διαμορφώνουν τον παλμό που παρέχει ο ανιχνευτής, ενώ τα ηλεκτρόνια δε συμβάλλουν σχεδόν καθόλου. Η συλλογή των θετικών ιόντων για ανιχνευτή ακτίνας της τάξης του 1 cm, γίνεται σε χρόνους εκατοντάδων ns.

1.1.6 Επιλογή αερίου

Στους ανιχνευτές σωματιδίων χρησιμοποιείται μίγμα αερίων του οποίου το ένα συστατικό είναι ευγενές αέριο. Η επιλογή του ευγενούς αερίου οφείλεται στο γεγονός ότι τα ευγενή αέρια δε συλλαμβάνουν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια (δεν είναι ηλεκτραρνητικά). Τα αέρια Ar, Kr και Xe έχουν μικρό δυναμικό ιοντισμού και γι αυτό προτιμώνται. Επειδή το Ar είναι φθηνότερο, χρησιμοποιείται στις περισσότερες των περιπτώσεων, εκτός αν απαιτούνται και άλλα χαρακτηριστικά, όπως π.χ. μεγάλος ατομικός αριθμός, οπότε επιλέγεται το Xe.

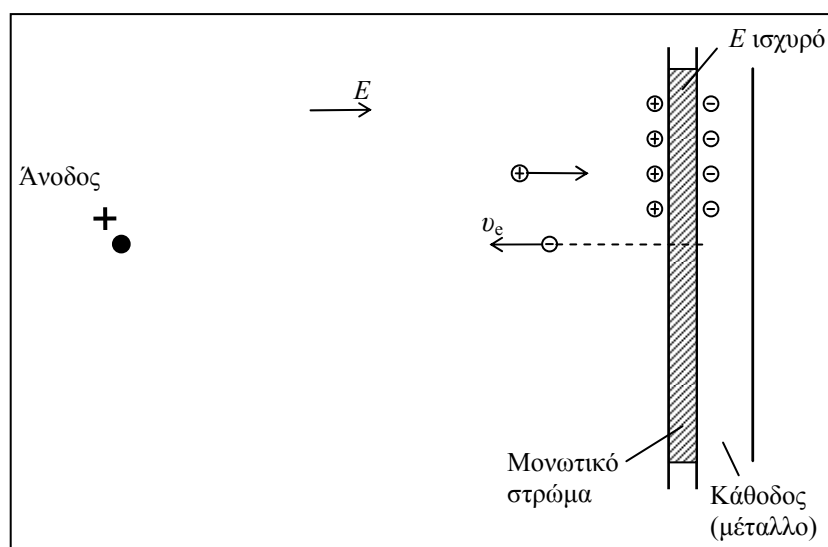
Ένας ανιχνευτής με μοναδικό αέριο το Ar δεν μπορεί να δώσει ενίσχυση αερίου μεγαλύτερη από 10^3 - 10^4 . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα διεγερμένα άτομα του Ar και των άλλων ευγενών αερίων που χρησιμοποιούνται, αποδιεγείρονται με εκπομπή φωτονίου ενέργειας μεγαλύτερης από το δυναμικό ιοντισμού του μετάλλου της ανόδου ή καθόδου. Για το Ar η ενέργεια φωτονίου είναι 11,6 eV, δεδομένου ότι το έργο εξαγωγής του μετάλλου, αν πρόκειται για χαλκό, είναι 7,7 eV, τα φωτόνια αποσπών από το μέταλλο ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) και αυτά δημιουργούν νέους ιοντισμούς, οπότε (ακόμη και για ασθενή ηλεκτρικά πεδία) δημιουργούνται συνεχώς χιονοστιβάδες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ο ανιχνευτής να διαρρέεται από ρεύμα συνεχώς χωρίς να μπορεί να αυξηθεί η ενίσχυση του.

Για την αποφυγή αυτού του φαινομένου, προστίθεται μικρή ποσότητα πολυατομικού αερίου στον ανιχνευτή (ως δεύτερο συστατικό). Τα μόρια αυτά έχουν πολλές καταστάσεις διέγερσης και έτσι μπορούν να απορροφήσουν φωτόνια σε μια ευρεία περιοχή ενεργειών, χωρίς μάλιστα να αποδιεγείρονται μέσω εκπομπής φωτονίων. Η ενέργεια διέγερσής τους μπορεί να απορροφάται με άλλους τρόπους: μέσω σκεδάσεων με άλλα μόρια ή μέσω διαφόρων χημικών διεργασιών. Για παράδειγμα, το CH₄ (μεθάνιο) απορροφά, πολύ ικανοποιητικά, φωτόνια ενέργειας από 7,9 eV ως 14,5 eV. Αυτή η διαδικασία λέγεται quenching (απόσβεση) και επιτρέπει στη χρήση ανιχνευτών με ευγενή αέρια με ενίσχυση αερίου που φθάνει τα 10^6 .

Η χρήση πολυατομικών αερίων οδηγεί σε χημικές διεργασίες που με τη σειρά τους οδηγούν στη μείωση της συγκέντρωσής τους, άρα στην αλλαγή της συμπεριφοράς του ανιχνευτή. Για το λόγο αυτό, φροντίζουμε να υπάρχει συνεχής ροή του μίγματος αερίων στους ανιχνευτές (ανανέωση όλου του όγκου με κατάλληλο ρυθμό). Επίσης, μερικά προϊόντα που επικάθονται στα ηλεκτρόδια του ανιχνευτή είναι υγρά ή στερεά και μεταβάλλουν τη συμπεριφορά του, φαινόμενο που δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα σε όλες τις περιπτώσεις. Σε τέτοιες περιπτώσεις παρατηρείται πολλές φορές το φαινόμενο Malter, κατά το οποίο δημιουργείται ένα πολύ λεπτό στρώμα μονωτικού υλικού στην κάθοδο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.5, με αποτέλεσμα τα θετικά ιόντα που δημιουργούνται επικάθονται στο στρώμα αυτό. Αν δεν υπήρχε το μονωτικό

στρώμα, αυτά θα εξουδετερώνονταν με απορρόφηση ηλεκτρονίων από την κάθοδο, που τώρα εμποδίζεται από αυτό το λεπτό διηλεκτρικό στρώμα.

Ειδικά στην περίπτωση πολύ υψηλού ρυθμού ανίχνευσης (ροής) σωματιδίων από τον ανιχνευτή, παραμένει μόνιμα ένα θετικό φορτίο ιόντων στην εσωτερική πλευρά του μονωτικού. Μεταξύ των θετικών φορτίων και του μετάλλου (όπου έχουμε αρνητικά κατοπτρικά φορτία) δημιουργείται ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο είναι ισχυρό λόγω της μικρής απόστασης μεταξύ των φορτίων, η οποία καθορίζεται από το (πολύ λεπτό) πάχος του μονωτικού, σε βαθμό που μπορεί να εξαγάγει ηλεκτρόνια από την επιφάνεια της καθόδου προς το εσωτερικό του ανιχνευτή (βλ. Σχήμα 1.5). Αυτά στη συνέχεια, δημιουργούν χιονοστιβάδα και κάνουν τον ανιχνευτή να διαρρέεται από ανεπιθύμητο ρεύμα, χωρίς να μπορεί να αυξηθεί η τάση του και η ενίσχυση του αερίου.



Σχήμα 1.5. Σχηματική παράσταση της δημιουργίας λεπτού στρώματος διηλεκτρικού στην επιφάνεια της καθόδου.

Πολλές φορές, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται επιτυχώς με επιβολή ανάστροφης τάσης στον ανιχνευτή, ώστε να οδηγηθούν ηλεκτρόνια προς το στρώμα θετικών ιόντων και να τα εξουδετερώσουν.

1.1.7 Σχηματισμός παλμού σε ανιχνευτή

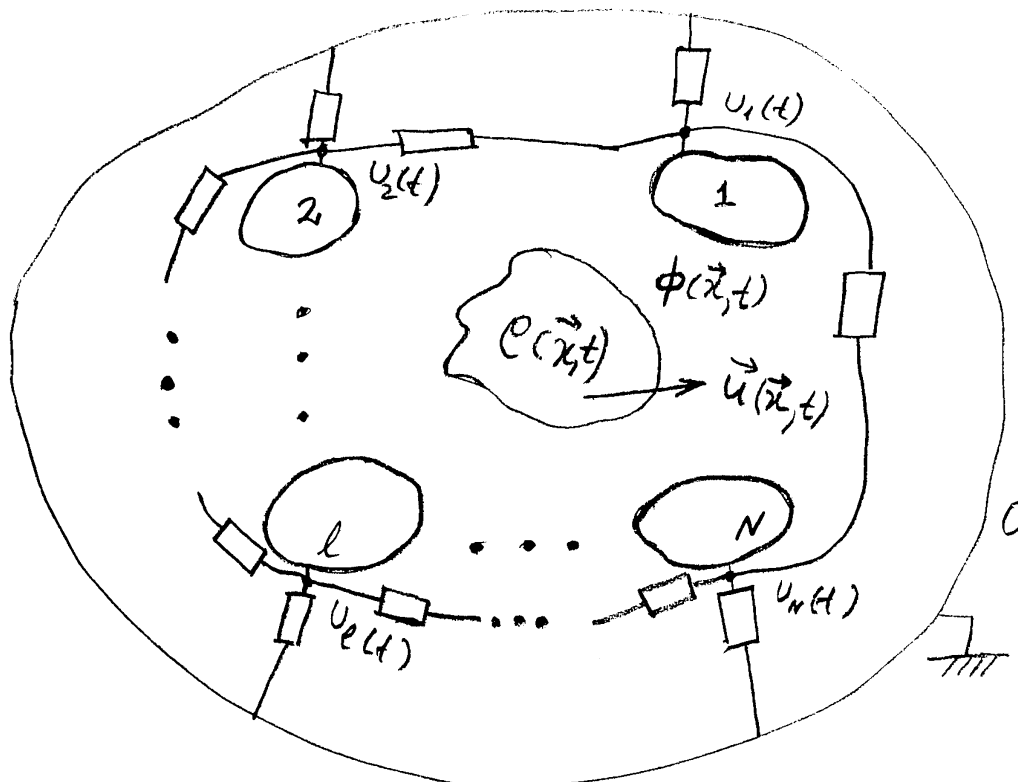
A) Ανιχνευτής μικρών διαστάσεων

Ο ανιχνευτής θεωρείται μικρών διαστάσεων έτσι ώστε να μην υπάρχουν φαινόμενα διάδοσης. Αυτό σημαίνει ότι για τη μεγαλύτερη διάσταση του ανιχνευτή ισχύει $d_{\max} \ll \lambda_{\min} = c / f_{\max}$ όπου η συχνότητα είναι η μέγιστη συχνότητα που χρειάζεται για την περιγραφή του παλμού του ανιχνευτή. Το μήκος κύματος ανήκει σε κύμα αυτής της συχνότητας που διαδίδεται στο κενό (ελάχιστο μήκος κύματος για την περιγραφή του παλμού). Η κατάσταση είναι ημιστατική οπότε παρόλο που γενικώς υπάρχει εξάρτηση από το χρόνο οι ρυθμοί μεταβολής είναι μικροί έτσι που κάθε χρονική στιγμή να ισχύουν οι σχέσεις της ηλεκτροστατικής.

Θα αποδείξουμε μια παραλλαγή του θεωρήματος του Ramo [1],[2] η οποία στηρίζεται σε γενίκευσή του [3] ώστε να περιλαμβάνει και εξωτερικό δικτύωμα.

Ας θεωρήσουμε το Σχήμα 1.6 όπου έχουμε τη διάταξη N αγωγών και κατανομή φορτίου στο μεταξύ τους χώρο. Υποθέτουμε ότι ο χώρος μεταξύ των αγωγών περιέχει διηλεκτρικό με σταθερή χωρικά και χρονικά επιτρεπτότητα (διηλεκτρική συνάρτηση, διηλεκτρική σταθερά), $\epsilon(\vec{x}(t), t) = \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

Στην αρχή θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει το δικτύωμα που είναι συνδεδεμένο με τους αγωγούς. Ημιστατική κατάσταση σημαίνει ότι η κατανομή φορτίου είναι στιγμιαία στατική οπότε οι ταχύτητες του φορτίου είναι αμελητέες ($\vec{u}(\vec{x}(t), t) = 0$). Ο περιβάλλον αγωγός, με δυναμικό μηδέν, μπορεί να είναι μερικώς ή πλήρως στο άπειρο.



Σχήμα 1.6 Σύστημα $N+1$ αγωγών συνδεδεμένων με δικτύωμα, υπάρχει κατανομή φορτίου στο χώρο μεταξύ των αγωγών.

Το θεώρημα του Green[7] αναφέρεται σε χώρο που περικλείεται από επιφάνεια S η οποία μπορεί να αποτελείται από πολλές κλειστές επιφάνειες όπως στο Σχήμα 1.6 , ο χώρος μπορεί να περιέχει σταθερή κατανομή ελεύθερου φορτίου.

Η ηλεκτρομαγνητική κατάσταση είναι ηλεκτροστατική. Το θεώρημα συνδέει τα δυναμικά για δυο ηλεκτροστατικές κατανομές ελεύθερου φορτίου και αντίστοιχων δυναμικών, Φ, Ψ .

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d^3x = \int_S (\Phi \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Phi) da = \int_S (\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}) da \quad (1.1)$$

\vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της καθέτου στην επιφάνεια προς το εξωτερικό του όγκου που περικλείει η επιφάνεια.

Θα δείξουμε πρώτα το θεώρημα αμοιβαιότητας του Green.

Θέτουμε $\Psi = \Phi'$ στην (1.1) και εύκολα καταλήγουμε στη σχέση,

$$\int_V \Phi' \nabla^2 \Phi d^3x - \int_S \Phi' \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n} da = \int_V \Phi \nabla^2 \Phi' d^3x - \int_S \Phi \vec{\nabla} \Phi' \cdot \vec{n} da = \int_S (\Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} - \Phi' \frac{\partial \Phi}{\partial n}) da \quad (1.2)$$

Για την επιφάνεια μεταλλικών αγωγών, προς τα έξω του μετάλλου που περικλείει η κάθε επιφάνεια, ισχύουν οι γνωστές σχέσεις,

$$-\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} = \vec{E} \cdot \vec{n}_0 = \sigma / \epsilon \quad (1.3)$$

$$-\vec{\nabla} \Phi' \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} = \vec{E}' \cdot \vec{n}_0 = \sigma' / \epsilon$$

σ, σ' είναι οι πυκνότητες των ελεύθερων φορτίων στις μεταλλικές επιφάνειες. Εδώ το \vec{n}_0 είναι προς το εξωτερικό του κάθε επιμέρους όγκου οπότε για τις επιφάνειες των μεταλλικών αγωγών του Σχήματος 1.6 έχουμε $\vec{n} = -\vec{n}_0$.

Επίσης έχουμε,

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon \quad (1.4)$$

$$\nabla^2 \Phi' = -\rho' / \epsilon$$

Αντικαθιστούμε στην (1.2) και καταλήγουμε στην

$$\int_V \Phi' \rho d^3x + \int_S \Phi' \sigma da = \int_V \Phi \rho' d^3x + \int_S \Phi \sigma' da \quad (1.5)$$

Αυτό είναι το θεώρημα της αμοιβαιότητας του Green που μπορεί να αποδειχτεί ευκολότερα για την περίπτωση συλλογής σημειακών φορτίων.

$$\sum_l q_l \Phi'_l = \sum_l q'_l \Phi_l \quad (1.6)$$

Τα ελεύθερα φορτία q δημιουργούν τα δυναμικά Φ στις θέσεις των q' και τα q' τα Φ' στις θέσεις των q .

Θα προχωρήσουμε στη γενίκευση του θεωρήματος του Ramo υποθέτοντας, φυσικά, ότι οι ρυθμοί μεταβολής των δυναμικών και των πεδίων είναι αρκούντως μικροί ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (1.5).

Ακολουθούμε ανάλογη μεθοδολογία με την αναφορά [3]. Θεωρούμε το Σχήμα (1.6) όπου η κατανομή φορτίου γενικώς κινείται και το δικτύωμα περιλαμβάνει διάφορα στοιχεία κυκλωμάτων συμπεριλαμβανομένων και πηγών. Σε όλες τις διαδικασίες που ακολουθούν θεωρούμε ότι η κίνηση του ελεύθερου φορτίου στο χώρο μεταξύ των αγωγών είναι δεδομένη. Η ακριβής λύση του πλήρους προβλήματος της αλληλεπίδρασης πεδίων και φορέων είναι, γενικώς, άλυτο.

Η πραγματική κατάσταση περιγράφεται από τα μεγέθη για τα φορτία ρ, q και δυναμικά Φ, ν που ακολουθούν,

$$\{\rho_t(\vec{x}(t), t), q_0(t), q_1(t), q_2(t) \dots q_N(t)\}, \{\Phi(\vec{x}, t), 0, \nu_1(t), \nu_2(t) \dots \nu_N(t)\} \quad (1.7)$$

Οι τρέχοντες δείκτες αναφέρονται στους αγωγούς και το \vec{x} στο χώρο μεταξύ των αγωγών.

Στη συνέχεια φανταζόμαστε N καταστάσεις που χαρακτηρίζονται από το δείκτη $j = 1, 2, \dots, N$. Ο δεύτερος δείκτης $l = 1, 2, \dots, N$ χαρακτηρίζει τον αγωγό. Εδώ τα δυναμικά και τα πεδία θεωρούνται στιγμιαία σταθερά και $\rho_t(\vec{x}(t), t) = 0$. Μπορεί κάποιος αντί για συνεχή κατανομή να χρησιμοποιήσει ένα σημειακό ελεύθερο φορτίο [2], [3] και αν έχει συνεχή κατανομή να αθροίσει κατάλληλα τα επιμέρους αποτελέσματα πολλών σημειακών φορτίων. Η μέθοδος με το συνεχές ελεύθερο φορτίο περιλαμβάνει με κομψότερο τρόπο τη συλλογή φορτίου από τις αγωγίμες επιφάνειες.

$$\text{Κατάσταση } j, \{0, Q_{j1}, \dots, Q_{jN}\}, \{\Phi_j(\vec{x}), \dots, V_{l(=j)}, \dots\} \quad (1.8)$$

Στη δεύτερη αγκύλη μόνο το δυναμικό του αγωγού με $l = j$ είναι μη μηδενικό.

Εφαρμόζουμε την (1.5) για την πραγματική κατάσταση που περιγράφεται με τις (1.7), και τη γενική κατάσταση j , των Εξ. (1.8), οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x + V_j \int_{S_j} \sigma_{tj}(\vec{x}(t), t) da = \sum_{l=1}^N \nu_l(t) Q_{jl}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

Προφανώς $q_j(t) = \int_{S_j} \sigma_{tj}(\vec{x}(t), t) da$. Αν θέσουμε $C_{jl} = \frac{Q_{jl}}{V_j}$ προκύπτει,

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x = -q_j(t) + \sum_{l=1}^N C_{jl} \nu_l(t), \quad j = 1, \dots, N \quad (1.10)$$

Το φυσικό νόημα των διαφόρων ποσοτήτων προκύπτει από τους ορισμούς των καταστάσεων των σχέσεων (1.7) και (1.8).

Συγκεκριμένα, $\Phi_j(\vec{x})$ είναι το δυναμικό στο χώρο μεταξύ των αγωγών όταν δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο στο χώρο και μόνο ο αγωγός j έχει σταθερό δυναμικό V_j ενώ όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικά μηδέν. Επίσης το C_{jl} είναι το πηλίκο του ελεύθερου φορτίου που επάγεται στον αγωγό l όταν μόνο ο αγωγός j έχει δυναμικό V_j και όλοι οι άλλοι έχουν δυναμικά μηδέν και δεν υπάρχει φορτίο στο μεταξύ τους χώρο. Τα $C_{ii} > 0$ λέγονται χωρητικότητες ή συντελεστές χωρητικότητας ή ολικές χωρητικότητες των αγωγών μιας διάταξης και τα $C_{ij} \leq 0, i \neq j$ λέγονται συντελεστές επαγωγής ή μερικές χωρητικότητες. Επειδή τα $C_{ij}, i \neq j$ είναι αρνητικά ή μηδέν, πολλές φορές ορίζονται με αντίθετο πρόσημο [3] από ότι ορίστηκαν εδώ.

Η σχέση (1.10) μπορεί να γραφτεί σε μορφή μήτρας

$$\|\varphi(t)\| = -\|q(t)\| + \|C_{jl}\| \|\nu(t)\|$$

$$\|\varphi(t)\| = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_N(t) \end{bmatrix}, \quad \|q(t)\| = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_N(t) \end{bmatrix}, \quad \|\nu(t)\| = \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_N(t) \end{bmatrix}, \quad \|C_{jl}\| = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ \cdot & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Για να προσδιορίσουμε τα στιγμιαία ρεύματα που απομακρύνονται από τους αγωγούς και τα στιγμιαία δυναμικά των αγωγών πρέπει να φανταστούμε τις (1.10) ή τις ισοδύναμες (1.11) για δυο γειτονικές στιγμές. Τα φορτία και τα δυναμικά, γενικώς, θα μεταβληθούν, οπότε ουσιαστικά χρειάζεται να παραγωγίσουμε τις σχέσεις αυτές ως προς το χρόνο. Από την (1.10) θα έχουμε την (1.12),

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} \Big|_S = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x \right\} \Big|_S = -\frac{dq_j(t)}{dt} + \sum_{l=1}^N C_{jl} \frac{d\nu_l(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x \right\} \Big|_S \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{V_j} \int_V \frac{\partial \{ \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) \}}{\partial t} d^3x + \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) (\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})) da$$

$j = 1, \dots, N$

Ο δείκτης S στην παραγωγή του ολοκληρώματος όγκου σημαίνει ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη το θεώρημα μεταφοράς[4] της ρευστομηχανικής όπου έχουμε μεταβολή με το χρόνο ένεκα μεταβολής της κατανομής της πυκνότητας με το χρόνο και συγχρόνως ένεκα ροής (ή συλλογής) φορτίου από την επιφάνεια του συστήματος. Πολλές φορές, όπως στην περίπτωση ημιαγωγικών ανιχνευτών ή γενικώς στην περίπτωση στατικών ή ημιστατικών φορτίων χώρου, μέρος της κατανομής φορτίου είναι σταθερό με το χρόνο. Για αυτό το λόγο είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι η ολική κατανομή φορτίου $\rho_t(\vec{x}(t), t)$ είναι άθροισμα μιας κατανομής που μεταβάλλεται με το χρόνο και μιας σταθερής με το χρόνο. Είναι προφανές ότι η πυκνότητα ρεύματος οφείλεται μόνο στα κινούμενα φορτία, στη χρονικά μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho_t(\vec{x}(t), t) &= \rho(\vec{x}(t), t) + \rho_0(\vec{x}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_t(\vec{x}(t), t) + \frac{\partial \rho_t(\vec{x}(t), t)}{\partial t} = 0 \\
\vec{J}(\vec{x}(t), t) &= \vec{J}_t(\vec{x}(t), t), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}(t), t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}(t), t)}{\partial t} = 0 \\
\frac{d\varphi_j(t)}{dt} \Big|_S &= \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \frac{\partial \rho(\vec{x}(t), t)}{\partial t} d^3x + \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da \\
&= - \int_V \Phi_j(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}(t), t) d^3x + \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Από την ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x \right\} \Big|_S \\
&= - \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}(t), t) d^3x + \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da \\
&= \frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}) d^3x - \frac{1}{V_j} \int_V \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}(\vec{x}(t), t) \Phi_j(\vec{x})] d^3x \\
&+ \frac{1}{V_j} \int_{S_n} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} da$

βρίσκομε

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_t(\vec{x}(t), t) d^3x \right\} \Big|_S \\
&= \frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}) d^3x - \frac{1}{V_j} \int_V \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}(\vec{x}(t), t) \Phi_j(\vec{x})] d^3x \\
&+ \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da \\
&= \frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}) d^3x - \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) da \\
&+ \frac{1}{V_j} \int_{S_j} \Phi_j(\vec{x}) \rho(\vec{x}(t), t) [\vec{u}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{n}(\vec{x})] da
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Ισχύει $\vec{J}(\vec{x}(t), t) = \rho(\vec{x}(t), t) \vec{u}(\vec{x}(t), t)$ επομένως τελικώς βρίσκομε

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x})/V_j &= -\vec{E}_j(\vec{x})/V_j \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_j} \int_V \Phi_j(\vec{x}) \rho_l(\vec{x}(t), t) d^3x \right\} \Big|_S &= \frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}) d^3x \quad (1.16) \\ &= -\frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{E}_j(\vec{x}) d^3x\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι τα ρεύματα είναι θετικά όταν απομακρύνονται από τον αγωγό οπότε

$$i_j(t) = -\frac{dq_j(t)}{dt}$$

Ονομάζουμε επαγόμενο βοηθητικό ρεύμα στον αγωγό, το ρεύμα

$$I_j(t) = \frac{1}{V_j} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x}) d^3x \quad (1.17)$$

Τότε οι σχέσεις (1.12) γίνονται

$$I_j(t) = i_j(t) + \sum_{l=1}^N C_{jl} \frac{d\nu_l(t)}{dt}, \quad j=1, \dots, N \quad (1.18)$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ύπαρξη σταθερών με το χρόνο φορτίων χώρου. Τα φορτία χώρου επηρεάζουν το (πραγματικό) πεδίο στο χώρο του ανιχνευτή (κατά τη λειτουργία του) και επομένως επηρεάζουν, γενικώς, την ταχύτητα των φορέων. Την ταχύτητα τη θεωρούμε δεδομένη συνάρτηση του χώρου και χρόνου.

Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος με πεδιακό βάρος $\vec{\nabla} \Phi_j(\vec{x})/V_j = -\vec{E}_j(\vec{x})/V_j$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι το $\vec{E}_j(\vec{x})$ αυτό είναι βοηθητικό, καθαρά ηλεκτροστατικό πεδίο που εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία των αγωγών. Υπολογίζεται χωρίς να υπάρχουν φορτία στο μεταξύ των αγωγών χώρο και για τα αντίστοιχα βοηθητικά δυναμικά ισχύουν $V_l \neq 0, V_j = 0 \quad \forall j \neq l$, (αυτά τα δυναμικά δεν έχουν σχέση με τις πολώσεις των αγωγών του ανιχνευτή, υψηλές τάσεις, κατά την κανονική λειτουργία του). Αυτό το πεδίο δεν εξαρτάται από το τι συμβαίνει στην όλη διάταξη όταν η κατανομή φορτίου μεταβάλλεται και η διάταξη όλη διαρρέεται από ρεύμα.

Αυτές οι σχέσεις ισχύουν για ανιχνευτή με πολλούς αγωγούς- ηλεκτρόδια. Το ηλεκτρόδιο j έχει δυναμικό $\nu_j(t)$. Τα ρεύματα και οι τάσεις $i_j(t), \nu_j(t)$ συνδέονται μεταξύ τους και με τις σχέσεις που προκύπτουν αν ληφθεί υπόψη και το εξωτερικό κύκλωμα. Η επίλυση του προβλήματος και ο προσδιορισμός αυτών των τάσεων (ή/και) των αντίστοιχων ρευμάτων, γίνεται λύνοντας το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων (1.18) και των σχέσεων από το εξωτερικό κύκλωμα. Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι τα ηλεκτρόδια του ανιχνευτή ισοδυναμούν με πηγές ρευμάτων $I_j(t)$ οι οποίες τροφοδοτούν το δικτύωμα που είναι συνδεδεμένο με τα ηλεκτρόδια του ανιχνευτή και φορτίζουν τους αλληλεπιδρώντες μεταξύ τους αγωγούς-ηλεκτρόδια.. Έτσι υπολογίζουμε το σήμα (ή τα σήματα) εξόδου του ανιχνευτή ως συνάρτηση του χρόνου. Η λύση μπορεί να γίνει με τους διάφορους τρόπους επίλυσης κυκλωμάτων, όπως με μετασχηματισμό laplace[3] (αν υπάρχει ο μετασχηματισμός laplace και έχει βολική μορφή), κτλ. Η περίπτωση κινούμενου σημειακού φορτίου οδηγεί σε

βοηθητικό ρεύμα $I_j(t) \propto \frac{1}{t+t_0}$ για το οποίο ο μετασχηματισμός laplace δίνεται με

ειδικές συναρτήσεις (εκθετικές συναρτήσεις) που ανάλογα με το τι θέλουμε να πετύχουμε μπορεί να μην είναι πολύ βολικές. Σε αυτή την περίπτωση, μερικές φορές, όπως κατά την επεξεργασία-μορφοποίηση σήματος, προσεγγίζουμε τη συνάρτηση με άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων που έχουν πιο βολικό, για την περίπτωση, μετασχηματισμό Laplace.

Αν υπάρχουν «εξωτερικές» πηγές στο συνδεδεμένο δίκτυωμα τότε μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της επαλληλίας. Μπορούμε, ως παράδειγμα μιας απλής περίπτωσης, τη μια φορά να κάνουμε τις εξωτερικές πηγές ανενεργές και να επιλύσουμε αυτό το απλούστερο κύκλωμα και την άλλη να κάνουμε τις πηγές του ανιχνευτή ανενεργές και να επιλύσουμε αυτό το δεύτερο απλοποιημένο κύκλωμα. Τέλος, προσθέτουμε τα δυο αποτελέσματα και βρίσκουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος. Συνήθως δε χρειάζεται η λύση του επιμέρους προβλήματος με μόνο τις εξωτερικές πηγές, διότι οι εξωτερικές πηγές είναι στην πράξη πηγές συνεχούς και το σήμα στην έξοδο (που ενδιαφέρει) λαμβάνεται κατά τρόπο που δεν έχει τη συνεχή συνιστώσα που προέρχεται από αυτές τις πηγές.

Τονίζουμε εδώ ότι γενικώς όταν βρίσκουμε τη λύση του ανωτέρω συστήματος οι τάσεις έχουν αρχικές τιμές $v_j(0)$, $t = 0$ ή $t = t_0$ και οι λύσεις πρέπει να βρεθούν για κάθε χρονική στιγμή $0, t_0 < t < \infty$. Αφού τα κινούμενα φορτία συλλεχτούν από τους αγωγούς, πρέπει να λυθούν οι εξισώσεις με κατάλληλες αρχικές συνθήκες αφού θέσουμε $\vec{J}(\vec{x}(t), t) = 0$.

Ως ένα διδακτικό απλό παράδειγμα, μπορεί κάποιος να εξετάσει την περίπτωση μεταλλικού σφαιρικού αγωγού που βρίσκεται μακριά από άλλους αγωγούς και φορτία ο οποίος είναι γειωμένος με αρχικό φορτίο μηδέν ή μονωμένος. Σημιακό φορτίο ξεκινά από το άπειρο και τον πλησιάζει ακτινικά και τέλος τον ακουμπά. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί απευθείας, χωρίς χρήση της όλης διαδικασίας που περιγράψαμε αλλά με χρήση μόνο του θεωρήματος της αμοιβαιότητας. Εύκολα προκύπτει ότι πράγματι ισχύουν όσα βγαίνουν από την ανωτέρω ανάλυσή μας για κάθε χρονική στιγμή, πριν και μετά την επαφή του φορτίου με τον αγωγό.

Μπορεί κάποιος εύκολα να δείξει τις παρακάτω σχέσεις (1.19) απευθείας ή ξεκινώντας από τις σχέσεις (1.18), για δυο αγωγούς οι οποίοι αποτελούν ιδανικό πυκνωτή [5],[6] οπότε ισχύει για τις διαφορές χωρητικότητες και συντελεστές χωρητικότητας $-C_{12} = -C_{21} = C_{11} = C_{22} = C_d$ (χωρητικότητα του ανιχνευτή). Για ιδανικό πυκνωτή με ίσα και αντίθετα φορτία στους δυο οπλισμούς του, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του είναι ανάλογη στο φορτίο (απόλυτη τιμή του φορτίου του ενός οπλισμού) του πυκνωτή. Προσοχή αυτό δεν ισχύει, γενικώς, αν εξετάζουμε δυο αγωγούς που δεν αποτελούν ιδανικό πυκνωτή!

Έχουμε τότε για τους δυο αυτούς αγωγούς,

$$I_1(t) = i_1(t) + C_d \frac{dv_1(t)}{dt} - C_d \frac{dv_2(t)}{dt}$$

$$I_1(t) = -\frac{1}{V_1} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{E}_1(\vec{x}) d^3x, \quad V_2 = 0$$

(1.19)

$$I_2(t) = i_2(t) - C_d \frac{dv_1(t)}{dt} + C_d \frac{dv_2(t)}{dt}$$

$$I_2(t) = -\frac{1}{V_2} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{E}_2(\vec{x}) d^3x, \quad V_1 = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη διάταξη του Σχήματος (1.7) για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για ιδανικό πυκνωτή.

Η έξοδος του ανιχνευτή είναι από το ηλεκτρόδιο σήματος που εδώ θεωρούμε ότι είναι το ηλεκτρόδιο 1. Το εξωτερικό κύκλωμα αποτελείται από την πηγή υψηλής συνεχούς τάσης V_a που είναι συνδεδεμένη με το ηλεκτρόδιο 2 και το εξωτερικό δικτύωμα A συνδεδεμένο με το ηλεκτρόδιο σήματος 1.

Προφανώς έχουμε

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{dV_a}{dt} = 0 \quad (1.20)$$

Επομένως από τις (1.19) μας χρειάζονται μόνο αυτές των δυο πρώτων σειρών, οι οποίες γίνονται

$$C_d \frac{dV_1(t)}{dt} + i_1(t) = I_1(t) \quad (1.21)$$

$$I_1(t) = -\frac{1}{V_1} \int_V \vec{J}(\vec{x}(t), t) \cdot \vec{E}_1(\vec{x}) d^3x, \quad V_2 = 0$$

Μπορούμε να καταλήξουμε σε ανάλογη σχέση αν υποθέσουμε ότι εκτός του ηλεκτροδίου σήματος, όλα τα άλλα βρίσκονται σε σταθερό δυναμικό. Τότε αντί της C_d έχουμε το C_{jj} (αν ο αγωγός σήματος είναι ο j). Το C_{jj} εξαρτάται, γενικώς, από τη γεωμετρία όλων των αγωγών της διάταξης.

Το φυσικό νόημα της πρώτης σχέσης από τις (1.21), είναι ότι η πηγή ρεύματος δίνει ρεύμα που μοιράζεται σε δυο παράλληλους κλάδους, στη χωρητικότητα (του ανιχνευτή) C_d και στο εξωτερικό κύκλωμα A . Αυτό οδηγεί στο ισοδύναμο (ηλεκτροτεχνικό) κύκλωμα για τον ανιχνευτή μαζί με το εξωτερικό του κύκλωμα, που φαίνεται στο Σχήμα (1.8).

Αν υποθέσουμε ότι το δικτύωμα A είναι αντιστάτης R , τότε $i_1(t) = \frac{V_1(t)}{R}$ και η

διαφορική εξίσωση των (1.21) γίνεται

$$C_d R \frac{dV_1(t)}{dt} + V_1(t) = I_1(t) R \quad (1.22)$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι,

$$V(t) = V(0) + e^{-t/RC_d} \frac{1}{C_d} \int_0^t e^{t'/RC_d} I_1(t') dt' \quad (1.23)$$

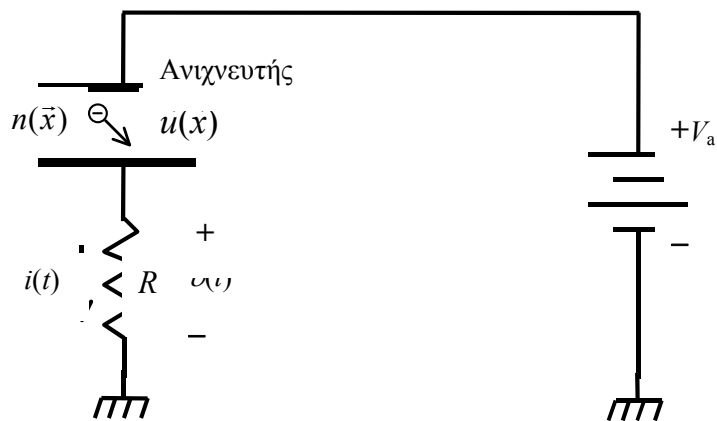
Συνήθως $V(0) = 0$.

Συνήθως, το εξωτερικό κύκλωμα περιλαμβάνει αντιστάτη παράλληλα με χωρητικότητα, τότε προφανώς αντί του C_d θα έχουμε την ολική χωρητικότητα που είναι ο συνδυασμός της χωρητικότητας του ανιχνευτή μαζί με την εξωτερική χωρητικότητα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση αυτού του είδους ανιχνευτή όπου έχουμε κίνηση σημειακού φορτίου q που κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $\vec{u}(\vec{x}(t), t)$. Τότε έχουμε τις παρακάτω σχέσεις για την κατανομή του φορτίου και της πυκνότητας ρεύματος στο χώρο του ανιχνευτή,

$$\rho(\vec{x}(t), t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \quad (1.24)$$

$$\vec{J}(\vec{x}(t), t) = \rho(\vec{x}(t), t)\vec{u}(\vec{x}(t), t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_q(t))\vec{u}(\vec{x}(t), t)$$



Σχήμα 1.7. Σχηματική διάταξη συνδεσμολογίας ανιχνευτή με αέριο και με μόνο δυο ηλεκτρόδια (πυκνωτής).

Έχομε, θέτοντας $I_q = I_1$, τις

$$\begin{aligned}
 I_q &= -\frac{q}{V_1} \int \vec{E}_1(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) d^3x \\
 &= -\frac{q}{V_1} \vec{E}_1(\vec{x}_q(t)) \cdot \vec{u}(\vec{x}(t), t) \\
 C_d R \frac{d\nu(t)}{dt} + \nu(t) &= I_q(t) R
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Θα εξετάσουμε δυο ακραίες περιπτώσεις.

Στη μια περίπτωση $C_d R \gg \tau$, όπου τ ο χρόνος ο οποίος χρειάζεται για να μεταβληθεί σημαντικά το v , δηλαδή $C_d R \left| \frac{dv}{dt} \right| \gg |v|$, τότε μπορεί να παραληφθεί ο όρος v και έχουμε κατά προσέγγιση,

$$I_q(t)R = C_d R \frac{dv(t)}{dt}, \quad I_q(t) = C_d \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.26)$$

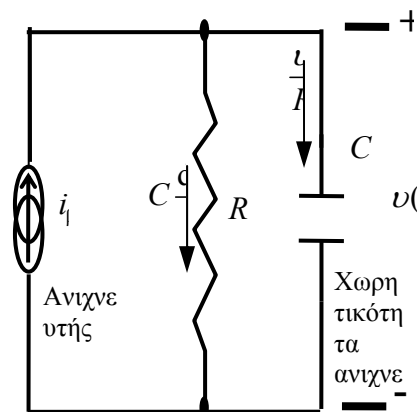
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{I_q(t)}{C_d}, \quad v(t) = v(0) + \frac{1}{C_d} \int_0^t I_q(t') dt'$$

Άρα αυτό σημαίνει ότι, στο ισοδύναμο κύκλωμα, είναι σαν να μην υπάρχει ο αντιστάτης ($R = \infty$) και το I_q , ουσιαστικά, φορτίζει τη χωρητικότητα C_d . Αυτός λέγεται τασικός τρόπος λειτουργίας.

Στην άλλη περίπτωση $C_d R \ll \tau$, τότε $C_d R \left| \frac{dv}{dt} \right| \ll |v|$, επομένως κατά προσέγγιση,

$$I_q R = v \quad (1.27).$$

Αυτό σημαίνει ότι, στο ισοδύναμο κύκλωμα, είναι σαν να μην υπάρχει ο πυκνωτής ($C_d = 0$) και το ρεύμα I_q διέρχεται από τον αντιστάτη. Αυτός λέγεται ρευματικός τρόπος λειτουργίας.



Σχήμα 1.8. Ισοδύναμο ηλεκτροτεχνικό κύκλωμα ανιχνευτή με δυο ηλεκτρόδια (πυκνωτής).

1.1.8 Εφαρμογή στην περίπτωση κυλινδρικού ανιχνευτή με κυκλική διατομή

Η διάταξη του ανιχνευτή φαίνεται στα Σχήματα (1.1) και (1.4).

Στη μελέτη που ακολουθεί υποθέτουμε ότι μέσα στον ανιχνευτή κινείται σημειακό φορτίο μέτρου q . Το βοηθητικό ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο του κυλινδρικού ανιχνευτή για βοηθητικό δυναμικό V στο ηλεκτρόδιο 1 που είναι το κεντρικό ηλεκτρόδιο του κυλινδρικού ανιχνευτή, δίνεται από τη σχέση,

$$E(\vec{x})\vec{e}_r = \frac{C_l V}{2\pi\epsilon r} \vec{e}_r = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \vec{e}_r \quad (1.28)$$

Θεωρούμε κυλινδρικές συντεταγμένες κατά τα γνωστά. Το C_l είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του ανιχνευτή. Δεχόμαστε, όπως συμβαίνει συνήθως στην πράξη, ότι $\vec{u}(\vec{x}(t), t) = \vec{u}(\vec{x}(t))$, δηλαδή δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο. Έχει ληφθεί υπόψη ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους δίνεται από τη σχέση,

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad (1.29)$$

Στους ανιχνευτές με αέριο ισχύει κατά προσέγγιση $\epsilon_r \approx 1$, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \approx \epsilon_0$.

Από τη σχέση (1.25) καταλήγουμε στη σχέση,

$$I_q(t) = -q \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r(t)} [\vec{u}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{e}_r] \quad (1.30)$$

Όταν δεν υπάρχει σημαντικό μαγνητικό πεδίο η κίνηση του σημειακού φορτίου είναι ακτινική, οπότε θα έχουμε,

$$I_q(t) = -q \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r(t)} u(r(t)) \quad (1.31)$$

Το $u(r(t))$ είναι θετικό αν η κίνηση είναι από το κέντρο προς τα έξω και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.

Το σημειακό φορτίο, q , δεχόμαστε ότι ξεκίνησε τη στιγμή $t=0$ από τη θέση $r = r_0 > a$, όπου a η ακτίνα του σύρματος (βλ. Ενότητα 1.1) και κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $u(r(t))$. Αυτή η αρχική θέση, στην πράξη, βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια του σύρματος.

Στον ανιχνευτή κινούνται θετικά σωματίδια προς την κάθοδο, που είναι θετικά ιόντα και αρνητικά σωματίδια προς την άνοδο που είναι κυρίως ηλεκτρόνια.

Για ιόντα ισχύει για την ταχύτητα ολίσθησης, (για ευρεία περιοχή πεδίων)

$$u = \mu E \quad (1.32)$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το πεδίο E είναι το πραγματικό πεδίο στον ανιχνευτή που οφείλεται στην πόλωση του ανιχνευτή με υψηλή τάση, σε πιθανά φορτία χώρου και στις τάσεις που επάγονται στα ηλεκτρόδια ένεκα κίνησης των φορτίων μέσα στο χώρο του ανιχνευτή, βλέπε Σχήμα (1.1). Αν αγνοήσουμε την επίδραση των φορτίων χώρου και υποθέσουμε ότι η πτώση τάσης στον αντιστάτη που συνδέεται με την τροφοδοσία υψηλής τάσης (V_a) είναι αμελητέα σε σχέση με την υψηλή τάση, αφού χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1.27) καταλήγουμε στη σχέση

$$u = \mu \frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \quad (1.33)$$

όπου το μ λαμβάνεται πρακτικώς σταθερό για δεδομένη πίεση αερίου.

Ας υποθέσουμε ότι το μέγεθος $q > 0$. Είναι προφανές ότι θετικό σημειακό φορτίο $+q$ θα κινείται από την άνοδο (κεντρικό ηλεκτρόδιο, ηλεκτρόδιο σήματος) προς την κάθοδο (εξωτερικό ηλεκτρόδιο) και θα έχουμε,

$$I_{q+} = -\frac{q\mu_+ V_a}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{r^2} \quad (1.34)$$

Για ιόντα και μεγάλες τιμές πεδίων ισχύει $u = A\sqrt{E}$ A =σταθερά.

Για ηλεκτρόνια το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης u_- είναι πρακτικώς σταθερό, επίσης τα ηλεκτρόνια κινούνται προς το κεντρικό ηλεκτρόδιο άρα έχουν αρνητική ταχύτητα. Για σημειακό αρνητικό φορτίο από ηλεκτρόνια ($-q$) βρίσκουμε από τη σχέση (1.31),

$$I_{q-} = -\frac{qu_-}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \quad (1.35)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα του ανιχνευτή αποτελείται από πηγή ρεύματος (στην πραγματικότητα πολλές, μια για κάθε είδος φορέων οι οποίοι κινούνται με,σα στο χώρο του ανιχνευτή) η οποία είναι συνδεδεμένη με το εξωτερικό δίκτυωμα που φαίνεται στο Σχήμα (1.1) και περιλαμβάνει την τάση πόλωσης του ανιχνευτή V_a , τον αντιστάτη αποσύζευξης R_1 , τον πυκνωτή αποσύζευξης (για τη συνεχή υψηλή τάση πόλωσης) C (ή πυκνωτή σύζευξης για το σήμα) και τον αντιστάτη R όπου αναπτύσσεται το σήμα εξόδου του ανιχνευτή. Ο πυκνωτής επιλέγεται αρκούντως μεγάλος ώστε και για τη μικρότερη χρήσιμη συχνότητα σήματος, η αντίστασή (αντίδρασή) του να είναι πολύ μικρή, $\frac{1}{\omega C} \ll R$, και μπορεί να παραληφθεί σε σχέση με την R .

Το κύκλωμα μπορεί να επιλυθεί με επαλληλία. Πρώτα θεωρούμε την πηγή τάσης V_a ανενεργό (επομένως και βραχυκυκλωμένη) και βρίσκουμε τη λύση αυτού του απλούστερου κυκλώματος και την τάση στον αντιστάτη R . Είναι ευνόητο ότι δε χρειάζεται να προχωρήσουμε στο δεύτερο βήμα και να θεωρήσουμε την πηγή ρεύματος I_q ανενεργή (και επομένως ανοιχτή) διότι αυτό το δεύτερο αποτέλεσμα δεν επηρεάζει την τάση στα άκρα του αντιστάτη R .

Η διαδικασία μπορεί να γίνει χωριστά για τα θετικά και χωριστά για τα αρνητικά φορτία και στη συνέχεια να προστεθούν τα αποτελέσματα (πάλι επαλληλία). Χρειαζόμαστε τη θέση συναρτήσεως του χρόνου για τη σημειακή συλλογή των κινούμενων ιόντων. Από τα ανωτέρω έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu \frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r}, \quad r dr = \mu \frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} dt, \quad \int_{r_0}^r r' dr' = \int_0^t \mu \frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} dt' \\ r^2 &= r_0^2 + 2\mu \frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} t, \quad r^2 = r_0^2 (1 + t/t_0) \\ t_0 &= \frac{r_0^2}{2\mu V_a} \ln \frac{b}{a} \\ T_+ &= \frac{(b^2 - r_0^2) \ln \frac{b}{a}}{2\mu_+ V_a}, \quad T_- = \frac{(r_0^2 - a^2) \ln \frac{b}{a}}{2\mu_- V_a} \\ I_q(t) &= -\frac{q\mu V_a}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{(1 + t/t_0)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Για θετικά ιόντα έχουμε $\mu = \mu_+$, $t_0 = t_{0+}$ ($\mu_+, t_{0+} > 0$).

Για αρνητικά ιόντα έχουμε $\mu = -\mu_-$, $t_0 = -t_{0-}$ ($\mu_-, t_{0-} > 0$).

Η παράμετρος (χρόνος) t_0 είναι ένας χαρακτηριστικός χρόνος (μια κλίμακα χρόνου) για την κίνηση των φορέων φορτίου, δείχνει πόσο γρήγορα κινούνται τα φορτία στην περιοχή κοντά στο r_0 που έχει διαστάσεις της τάξης του r_0 . $T(T_+, T_-)$ είναι ο χρόνος άφιξης του σημειακού θετικού φορτίου στο αρνητικό ηλεκτρόδιο, του αρνητικού σημειακού φορτίου στο θετικό ηλεκτρόδιο αντιστοίχως.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε δύναμη m στη σχέση για την ταχύτητα ολίσθησης των φορέων, $u = AE^m$, η εξάρτηση του I_q από το χρόνο είναι ίδιας μορφής όπως στις σχέσεις (1.36), αλλά το t_0 είναι διαφορετικό. Όταν $m = -1$, $t_0 = \infty$. Δίνονται οι σχέσεις (1.37) για θετικά και αρνητικά ιόντα (και ηλεκτρόνια $m = 0$) για κάθε m .

Για θετικά ιόντα έχουμε $I_q = I_{q+}$, $A = A_+$, $t_0 = t_{0+}$ για αρνητικά ιόντα,

$I_q = I_{q-}$, $A = -A_-$, $t_0 = -t_{0-}$.

$$I_q = -q \frac{AV_a^m}{\left(r_0 \ln \frac{b}{a}\right)^{m+1}} \frac{1}{1 + t/t_0}, \quad t_0 = \left(\frac{\ln \frac{b}{a}}{V_a}\right)^m \frac{r_0^{m+1}}{A(m+1)} \quad (1.37)$$

Ειδικά για σημειακό αρνητικό φορτίο ηλεκτρονίων (όπου υποθέτουμε u_- σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου), έχουμε τις κατωτέρω σχέσεις,

$$\begin{aligned}
r &= r_0 - u_- t \\
T_- &= (r_0 - a) / u_- \\
t_{0-} &= r_0 / u_-
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$I_{q-}(t) = -\frac{qu_-}{r_0 \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{1-t/t_{0-}}$$

α) Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση που ισχύει η σχέση $RC_d \ll \tau$. Εδώ ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $\tau = t_0$. Ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι, γενικώς, διαφορετικός για τα διάφορα είδη φορέων.

Έχουμε κατά προσέγγιση $v(t) = I_q R$.

Πρέπει να πούμε ότι με αυτή την προσέγγιση, πρακτικώς, το σήμα διαρκεί όσο διαρκεί η κίνηση των φορτίων στο χώρο του ανιχνευτή διότι έχει αγνοηθεί ο πυκνωτής-ανιχνευτής, έστω αυτός ο χρόνος T . Είναι προφανές ότι μετά από χρόνο T , ο πυκνωτής-ανιχνευτής εκφορτίζεται πολύ γρήγορα δια του αντιστάτη R με πάρα πολύ μικρή σταθερά χρόνου RC_d .

Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό του σήματος (τάση συναρτήσει χρόνου) για τα θετικά ιόντα. Με χρήση των (1.36) και της προσέγγισης που αναφέραμε, βρίσκουμε, $RC_d \ll \tau_d = t_{0+}$

$$I_{q+}(t) = -\frac{q\mu_+ V_a}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{(1+t/t_{0+})} \tag{1.39}$$

$$v_+(t) = I_{q+}(t)R = -\frac{q\mu_+ V_a R}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{(1+t/t_{0+})} \quad 0 \leq t \leq T_+$$

$$v_+(t) = 0 \quad t > T_+ \quad \text{και} \quad t < 0$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι για $t > T_+$, έχουμε

$$v_+(t) \approx v_+(T_+) \exp\left(-\frac{t-T_+}{RC_d}\right), \quad t > T_+$$

Για ηλεκτρόνια χρησιμοποιούμε την (1.35) και τις (1.38) και έχουμε για τα αντίστοιχα μεγέθη με δείκτη -,

$$RC_d \gg \tau = t_{0-}$$

$$v_-(t) = RI_{q-}(t) = -\frac{Rqu_-}{r_0 \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{1-t/t_{0-}}, \quad 0 \leq t \leq T_- \tag{1.40}$$

$$v_-(t) = 0, \quad t < 0 \quad \text{και} \quad t > 0$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι για $t > T_+$, έχουμε

$$v_-(t) \approx v_-(T_-) \exp\left(-\frac{t-T_-}{RC_d}\right), \quad t > T_-$$

Γενικώς $u_- \gg u_+$, $u_- \approx 1000u_+$, επομένως το σήμα τάσης ένεκα κίνησης των ηλεκτρονίων αποκτά τιμές πολύ μεγαλύτερες από ότι το σήμα των θετικών ιόντων αλλά διαρκεί πολύ μικρό χρονικό διάστημα επειδή το $r_0 \approx a$, $T_- \approx 0$. Πολλές φορές το σήμα αυτό δεν λαμβάνεται υπόψη. Γενικώς, το συνολικό σήμα ισούται με το άθροισμα (επαλληλία) των δυο αυτών σημάτων κάθε χρονική στιγμή.

$$v(t) = v_-(t) + v_+(t) \approx v_+(t)$$

Θα υπολογίσουμε το φορτίο που επάγεται στον ανιχνευτή κατά τη διάρκεια της κίνησης του θετικού φορτίου q . Υπολογίζουμε το θετικό επαγόμενο φορτίο. Για να βρούμε το φορτίο που επάγεται ένεκα της κίνησης θετικού φορτίου, από τη στιγμή $t=0$ ως τη στιγμή $t \leq T_+$, όπου T_+ η διάρκεια κίνησης του φορτίου θετικών ιόντων στο χώρο του ανιχνευτή, ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο το αντίστοιχο ρεύμα. Για να βρούμε το συνολικό φορτίο θέτομε όπου $t = T_+$.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.31) και τη σχέση για την κίνηση του σημειακού φορτίου από τις (1.36) οπότε βρίσκουμε,

$$\begin{aligned} Q_+(t) &= \int_0^t I_{q^+}(t') dt' = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \int_0^t \frac{u_+}{r} dt' = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \int_{r_0}^r \frac{u_+}{r} \frac{dr}{u_+} = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r(t)}{r_0} \\ &= \frac{q}{2 \ln \frac{b}{a}} \ln(1 + t/t_{0+}) > 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$Q_{t^+} = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r_0} > 0$$

Με όμοιο τρόπο, χρησιμοποιούμε την τελευταία από τις σχέσεις (1.38) και βρίσκουμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του αρνητικού φορτίου ηλεκτρονίων το επαγόμενο φορτίο είναι,

$$Q_-(t) = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r_0}{r(t)} = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{1}{1 - t/t_{0-}} > 0 \quad (1.42)$$

$$Q_{t^-} = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r_0}{a} > 0$$

Οπότε το επαγόμενο κατά την κίνηση και των δυο ειδών φορέων μέχρι τα αντίστοιχα ηλεκτρόδια είναι,

$$Q_t = Q_{t^+} + Q_{t^-} = \frac{q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{-q}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{a}{r_0} = q \quad (1.43)$$

Παρατηρούμε ότι $Q_+ \gg Q_-$ αφού $b \gg r_0$ ενώ $a < r_0$ ($a \approx r_0$). Αυτό δείχνει με άλλο τρόπο γιατί το σήμα που οφείλεται στα ηλεκτρόνια πολλές φορές δε λαμβάνεται υπόψη.

Η επόμενη περίπτωση είναι όταν $RC_d \gg \tau = t_0$. Σε αυτή την περίπτωση στο ισοδύναμο κύκλωμα είναι σαν να μην υπάρχει ο αντιστάτης, $R = \infty$. Τώρα αντί της (1.27) ισχύει η (1.26), συγκεκριμένα για θετικό φορτίο έχουμε

$$RC_d \gg \tau = t_{0+}$$

$$v_+(t) = v_+(0) + \frac{1}{C_d} \int_0^t I_{q+}(t') dt' = -\frac{1}{C_d} \int_0^t I_{q+}(t') dt'$$

$$= -\frac{q}{2C_d \ln \frac{b}{a}} \ln(1+t/t_{0+}), \quad 0 \leq t \leq T_+ \quad (1.44)$$

$$v_+(t) = 0, \quad t < 0$$

$$v_+(t) = v_+(T_+), \quad t > T_+$$

Στην πραγματικότητα μετά από χρόνο T_+ ο πυκνωτής-ανιχνευτής εκφορτίζεται πάρα πολύ αργά, με σταθερά χρόνου RC_d , πολύ μεγάλη, μέσα από τον αντιστάτη R .

$$v_+(t) \approx v_+(T_+) \exp\left(-\frac{t-T_+}{RC_d}\right), \quad t > T_+$$

Για το αρνητικό φορτίο των ηλεκτρονίων βρίσκομε ανάλογα ότι,

$$v_-(t) = v_-(0) + \frac{1}{C_d} \int_0^t I_{q-}(t') dt' = -\frac{1}{C_d} \int_0^t I_{q-}(t') dt'$$

$$v_-(t) = -\frac{Q_-(t)}{C_d} = -\frac{q}{C_d \ln \frac{b}{a}} \ln \frac{1}{1-t/t_{0-}}, \quad 0 \leq t \leq T_- \quad (1.45)$$

$$v_-(t) = 0, \quad t < 0$$

$$v_-(t) = v_-(T_-) = -\frac{Q_{t-}}{C_d}, \quad t > T_-$$

Όπως και πριν για $t > T_-$, έχουμε εκφόρτιση του πυκνωτή και κατά προσέγγιση έχουμε,

$$v_-(t) \approx v_-(T_-) \exp\left(-\frac{t-T_-}{RC_d}\right), \quad t > T_-$$

Στη γενική περίπτωση, χωρίς προσεγγίσεις, έχουμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση των (1.25). Το αποτέλεσμα, για $v_+(0) = 0$, $v_-(0) = 0$, $RC_d = \tau_d$, είναι το εξής,

$$v_+(t) = -\frac{q\mu_+ V_a R}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2 \tau_d} \frac{t_{0+}}{\tau_d} \exp[-(t+t_{0+})/\tau_d] \left\{ E_1\left(-\frac{t_{0+}}{\tau_d}\right) - E_1\left(-\frac{t+t_{0+}}{\tau_d}\right) \right\}, \quad T_+ \geq t \geq 0$$

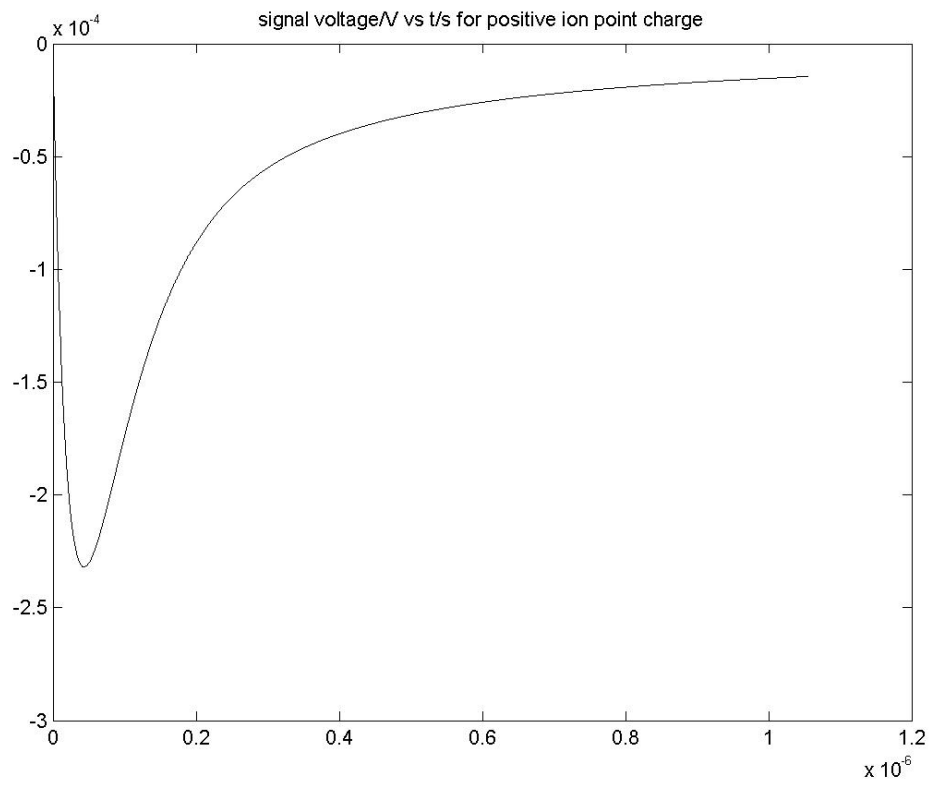
$$v_+(t) = v_+(T_+) \exp[-(t-T_+)/\tau_d], \quad t > T_+$$

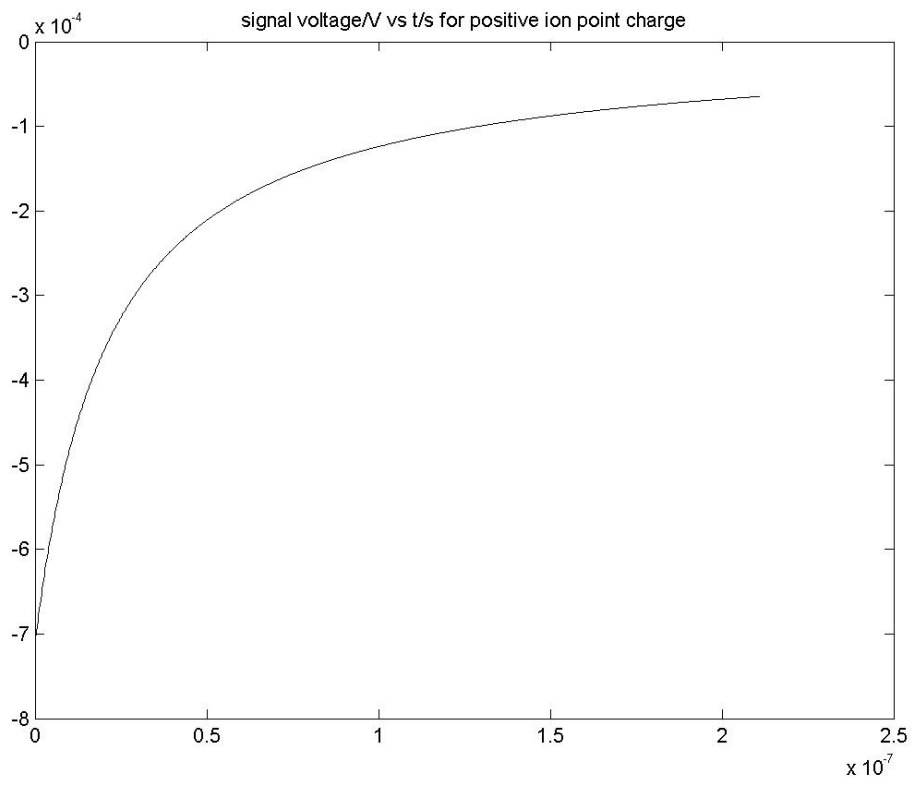
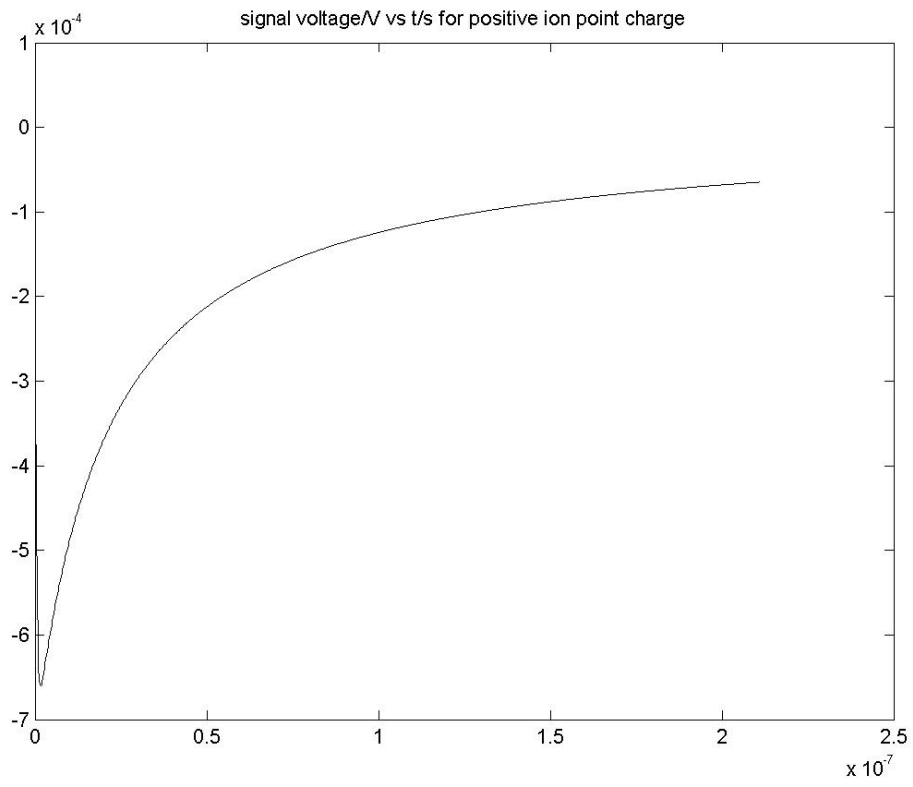
$$v_-(t) = -\frac{qu_- R}{r_0 \ln \frac{b}{a} \tau_d} \frac{t_{0-}}{\tau_d} \exp[-(t-t_{0-})/\tau_d] \left\{ E_1\left(\frac{t_{0-}-t}{\tau_d}\right) - E_1\left(\frac{t_{0-}}{\tau_d}\right) \right\}, \quad T_- \geq t \geq 0 \quad (1.46)$$

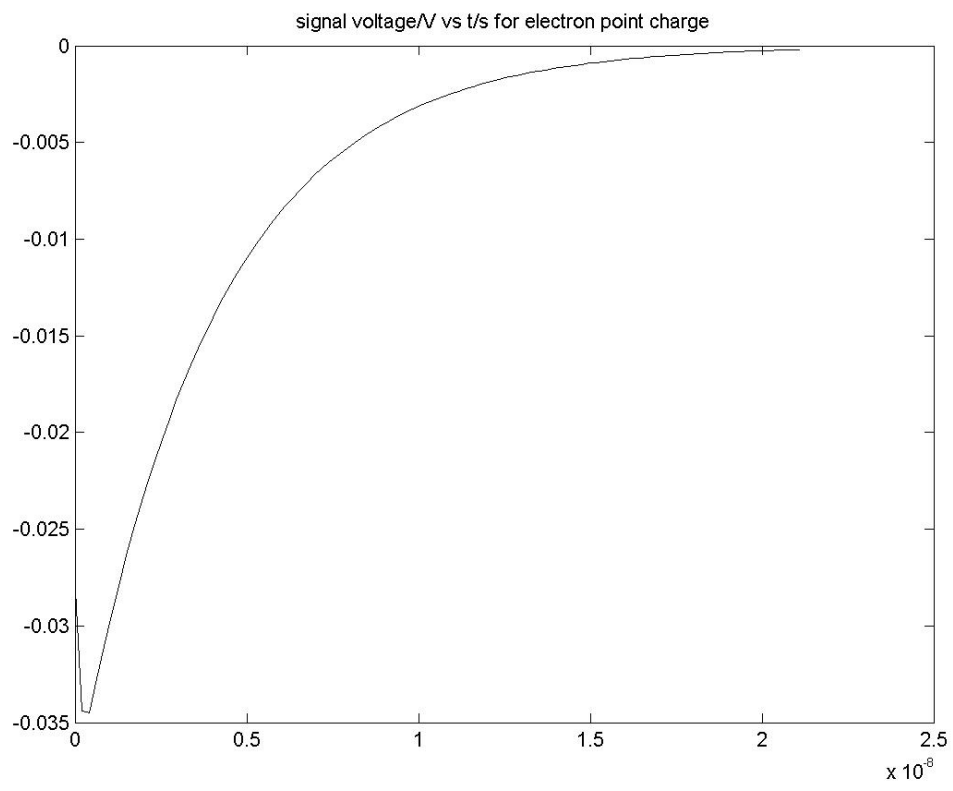
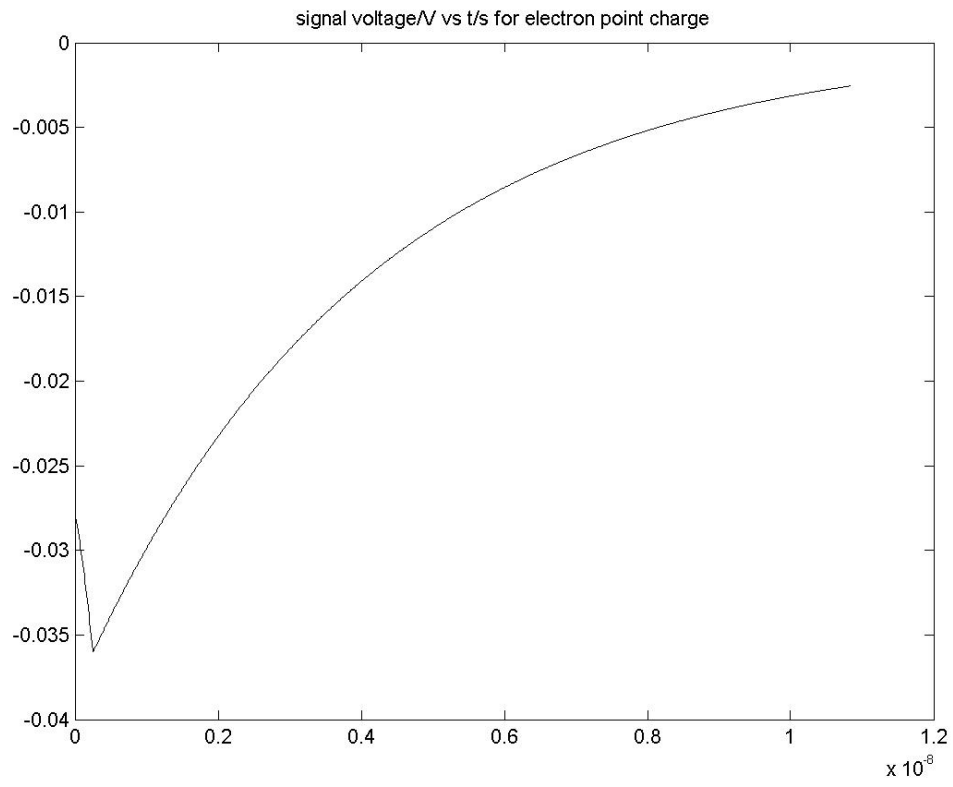
$$v_-(t) = v_-(T_-) \exp[-(t-T_-)/\tau_d], \quad t > T_-$$

$$v(t) = v_+(t) + v_-(t)$$

Στο Σχήμα 1.9 φαίνονται οι κυματομορφές σήματος τάσης εξόδου για τον κυλινδρικό ανιχνευτή.







Σχήμα 1.9

B) Ανιχνευτής κυλινδρικής γεωμετρίας μεγάλου μήκους.

Υποθέτουμε, όπως και στα προηγούμενα, ότι έχουμε ιδανικούς αγωγούς και διηλεκτρικά με χαρακτηριστικά ανεξάρτητα της συχνότητας.

Θεωρούμε ότι ο ανιχνευτής έχει κυλινδρική γεωμετρία με άξονα τον άξονα z . Η εγκάρσια διατομή του συστήματος, που γενικώς μπορεί να περιλαμβάνει πολλούς αγωγούς, είναι όπως στο Σχήμα 1.1. Θα θεωρήσουμε, όπως ισχύει στην πράξη, ότι η κίνηση των φορέων φορτίου που δημιουργούν το σήμα στον ανιχνευτή γίνεται σε εγκάρσιο επίπεδο. Θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι εγκάρσιες διαστάσεις είναι μικρές έτσι που να μην έχουμε φαινόμενα εγκάρσιας διάδοσης αλλά μόνο κατά μήκος του άξονα z . Θα υποθέσουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις όπου έχουμε πρακτικώς μόνο διάδοση τύπου TEM.

Αν θέλει κάποιος να εξετάσει ανιχνευτή με παράλληλα σύρματα μεγάλου μήκους που εκτείνονται και εγκάρσια σε μεγάλη απόσταση, η ανωτέρω ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει διάδοση και στις δυο διευθύνσεις.

Για την ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε γενικές ορθογώνιες συντεταγμένες θέσης $\vec{x} = (\vec{x}_T, z) = (v, w, z)$, τα $\vec{x}_T = (v, w)$ είναι οι συντεταγμένες στο εγκάρσιο επίπεδο το κάθετο στον άξονα z . Η μετρική του χώρου καθορίζεται από τους μετρικούς συντελεστές $[V(v, w, z), W(v, w, z), 1]$ οπότε τα στοιχεία μήκους για τις τρεις συντεταγμένες είναι αντιστοίχως $dl_v = Vdv$, $dl_w = Wdw$, $dl_z = dz$. Το στοιχείο του εμβαδού στο εγκάρσιο επίπεδο είναι $d^2x = VWdvdw$, το στοιχείο όγκου είναι $d^3x = VWdvdwdz$.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση που σημειακό φορτίο q κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}_{qT}) = \vec{u}(v_q, w_q) = (u_v, u_w)$. Η κίνηση γίνεται σε εγκάρσιο επίπεδο που βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση z , επομένως η ταχύτητα είναι εγκάρσια ως προς τον z .

Έχουμε για την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος τις σχέσεις,

$$\rho = \rho(\vec{x}_T) = \rho(v, w) = q \frac{1}{VW} \delta(v - v_q) \delta(w - w_q) \delta(z - z_q) \quad (1.47)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{x}_T) = (J_v, J_w) = \rho \vec{u} = q \frac{1}{VW} \delta(v - v_q) \delta(w - w_q) \delta(z - z_q) \vec{u}(v_q, w_q)$$

Ο δείκτης q δηλώνει ότι το αντίστοιχο μέγεθος αναφέρεται στο σημειακό φορτίο. Προφανώς, το διάνυσμα της πυκνότητα ρεύματος είναι εγκάρσιο στον άξονα z .

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια συχνότητα και για να υπολογίσουμε τα πεδία \vec{E} , \vec{B} στο χώρο μεταξύ των αγωγών, θα ακολουθήσουμε τις αναφορές [7],[8],[9]. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και θα βρούμε τα πεδία ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Στο τέλος, από τα πεδία θα υπολογίσουμε τα σήματα τάσης ή/και ρεύματος.

Για να εργαστούμε με μια συχνότητα, μετασχηματίζουμε κατά Fourier την πυκνότητα ρεύματος που φαίνεται στις (1.47). Έχουμε

$$\begin{aligned}
v_q &= v_q(t), w_q = w_q(t), V = V(v_q, w_q), W = W(v_q, w_q) = W(t), \\
&= W(t), \vec{u} = \vec{u}(v_q, w_q) = \vec{u}(t)
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\vec{J}(v, w, \omega) = q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{VW} dt e^{i\omega t} \delta(v - v_q) \delta(w - w_q) \delta(z - z_q) \vec{u}(t)$$

Υποθέτουμε ότι τουλάχιστο η μια συνιστώσα των συντεταγμένων θέσης του κινούμενου φορτίου είναι γνήσια συνάρτηση του χρόνου, έστω η w_q .

Ισχύει

$$\delta(w - w_q(t)) = \frac{\delta(t - t_a)}{\left| \frac{dw_q}{dt} \right|_{t=t_a}} = \frac{\delta(t - t_a)}{|\dot{w}_q(t_a)|} \tag{1.49}$$

$$w - w_q(t) = 0, t = t_a = t_a(w), \frac{dw_q}{dt} = \dot{w}_q(t)$$

Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει μια ρίζα t_a για κάθε ένα w .

Από τις (1.48), (1.49) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\vec{J}(v, w, \omega) &= q \delta(z - z_q) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\delta(v - v_q(t)) \delta(t - t_a) \vec{u}(t)}{V(t)W(t) |\dot{w}_q(t_a)|} \\
&= q \delta(z - z_q) e^{i\omega t_a} \vec{u}(t_a) \frac{\delta(v - v_q(t_a))}{V(t_a)W(t_a) |\dot{w}_q(w)|}
\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$t_a = t_a(w)$$

Από τις αναφορές [7],[8],[9] έχουμε για τη διάδοση προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z το άνω πρόσημο (σύμβολο +) και προς την αρνητική κατεύθυνση το κάτω πρόσημο (σύμβολο -),

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \\
\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, \omega) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega) E_{\lambda}^{(\pm)}(\vec{x}, \omega)
\end{aligned} \tag{1.51}$$

$$E_{\lambda}^{(\pm)}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}_{\lambda}(v, w) e^{\pm i \frac{\omega}{c} z}, k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega) \vec{E}_{\lambda}(v, w) e^{\pm i \frac{\omega}{c} z} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t \mp \frac{z}{c})} A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega) \vec{E}_{\lambda}(v, w) \\
A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega) &= -\frac{1}{P_{\lambda}} \int_V d^3x (\vec{J}(v, w, \omega) \cdot \vec{E}_{\lambda}^{(\mp)}(v, w, \omega)) \quad (1.52) \\
&= -\frac{1}{P_{\lambda}} \int_V V W dv dw dz e^{\mp i \frac{\omega}{c} z} (\vec{J}(v, w, \omega) \cdot \vec{E}_{\lambda}(v, w)) \\
P_{\lambda} &= 2 \int_{S_0} (\vec{E}_{\lambda} \times \vec{H}_{\lambda}) \cdot \vec{e}_z da
\end{aligned}$$

Παριστάνομε με u_E την προβολή της ταχύτητας \vec{u} του σημειακού φορτίου στην κατεύθυνση του πεδίου \vec{E}_{λ} οπότε έχουμε από τα προηγούμενα

$$\begin{aligned}
A_{\lambda}^{(\pm)}(\omega) &= -\frac{1}{P_{\lambda}} q e^{\mp i \frac{\omega}{c} z_q} \int_S u_E(v, w) E_{\lambda}(v, w) \frac{dv dw \delta(v - v_q(t_a))}{|\dot{w}_q(t_a)|} \\
\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, t) &= -q \sum_{\lambda} \frac{1}{P_{\lambda}} \vec{E}_{\lambda}(v, w) \int dw' \frac{u_E(v', w') E_{\lambda}(v'_q, w')}{|\dot{w}'(t'_a)|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t - t_q(w') \mp \frac{z - z_q}{c})} \quad (1.53) \\
t_a &= t_a(w), \quad t'_a = t_a(w'), \quad v_q = v_q(t_a) = v_q(w), \quad v'_q = v_q(t'_a) = v_q(w')
\end{aligned}$$

Ξεχωρίζομε τον παράγοντα που είναι η συνάρτηση δέλτα και μετασχηματίζοντας καταλήγομε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t - t_q(w') \mp \frac{z - z_q}{c})} &= \delta(t - t_a(w') \mp \frac{z - z_q}{c}) = \frac{\delta(w' - w'_b)}{\left| \frac{dt_a}{dw'} \right|_{w'=w'_b}} \\
t - t_a(w') - \frac{z - z_q}{c} &= 0, \quad z \geq z_q \quad (1.54) \\
t - t_a(w') + \frac{z - z_q}{c} &= 0, \quad z \leq z_q \\
w'_b &= w'_b(z, t)
\end{aligned}$$

Επομένως εύκολα καταλήγομε στη σχέση

$$\vec{E}^{(\pm)}(\vec{x}, t) = \vec{E}^{(\pm)}(v, w, z) = -qu_E(v_b, w_b) \sum_{\lambda} \frac{1}{P_{\lambda}} E_{\lambda}(v_b, w_b) \vec{E}_{\lambda}(v, w) \quad (1.55)$$

$$\vec{x}_T = (v, w)$$

Ο δείκτης b δηλώνει ότι λαμβάνεται υπόψη η δεσμευτική σχέση στις (1.54) που ουσιαστικά οδηγεί στο φαινόμενο της διάδοσης κατά μήκος του άξονα z .

Αν έχουμε N αγωγούς που περικλείονται από επιφάνεια S_0 με δυναμικό μηδέν, τότε υπάρχουν, γενικώς, N ανεξάρτητες λύσεις για το δισδιάστατο ηλεκτροστατικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στη διάδοση TEM [8], άρα $\lambda = 1, \dots, N$, γι αυτό η λύση του προβλήματος με αυθαίρετα δυναμικά στους N αγωγούς, βρίσκεται θεωρώντας N διαδοχικές φορές ότι όλα τα δυναμικά των αγωγών είναι μηδέν εκτός από ένα. Στη συνέχεια κάνουμε επαλληλία των επιμέρους ανεξάρτητων λύσεων. Υποθέτομε επίσης ότι δεν έχουμε εκφυλισμό. Αν υπάρχει εκφυλισμός πρέπει να ακολουθηθεί η σχετική μαθηματική διαδικασία για την περίπτωση.

Τα πεδία \vec{E}_{λ} είναι αυτά που σχετίζονται με αντίστοιχα δυναμικά V_{λ} των N αγωγών.

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\lambda} &= \pm \frac{1}{Z} \vec{e}_z \times \vec{E}_{\lambda} = \pm \frac{1}{Z} \vec{e}_z \times \vec{e}_{\lambda} E_{\lambda} = \pm \frac{1}{Z} E_{\lambda} \vec{e}_t \\ P_{\lambda} &= \pm \frac{2}{Z} \int_{S_0} da E_{\lambda} (\vec{E}_{\lambda} \times \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_z = \pm \frac{2}{Z} \int_{S_0} da E_{\lambda}^2 \\ Z &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \end{aligned} \quad (1.56)$$

\vec{e}_t είναι εγκάρσιο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $\vec{e}_z, \vec{e}_{\lambda}$ ($\vec{E}_{\lambda} = \vec{e}_{\lambda} E_{\lambda}$).

Z είναι η πεδιακή αντίσταση για διάδοση στο διηλεκτρικό που υπάρχει στο χώρο μεταξύ των αγωγών.

Αν W_{λ}^l είναι η ηλεκτροστατική ενέργεια ανά μονάδα μήκους (κατά μήκος του άξονα z) και $C_{\lambda\lambda}^l$ η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του αγωγού λ , όταν μόνο ο αγωγός λ βρίσκεται σε μη μηδενικό δυναμικό V_{λ} , έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\lambda}^l &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_0} da E_{\lambda}^2 = \frac{1}{2} C_{\lambda\lambda}^l V_{\lambda}^2 \\ P_{\lambda} &= \pm \frac{4}{\sqrt{\mu\varepsilon}} W_{\lambda}^l = \pm \frac{2}{\sqrt{\mu\varepsilon}} C_{\lambda\lambda}^l V_{\lambda}^2 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Το ρεύμα δια του αγωγού j δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
i_j(z,t) &= \oint_{C_j} \vec{H}^{(\pm)} \cdot d\vec{l} = \pm \frac{1}{Z} \oint_{C_j} (\vec{e}_z \times \vec{E}^{(\pm)}) \cdot d\vec{l} = \pm \frac{1}{Z} \oint_{C_j} E^{(\pm)} dl \\
&= \mp \frac{q}{Z} u_E(v_b, w_b) \sum_{\lambda} \frac{1}{P_{\lambda}} E_{\lambda}(v_b, w_b) \oint_{C_j} E_{\lambda} dl \\
&= -\frac{q\varepsilon}{2} u_E(v_b, w_b) \sum_{\lambda} \frac{1}{C_{\lambda\lambda}^l V_{\lambda}^2} E_{\lambda}(v_b, w_b) \frac{Q_{j\lambda}^l}{\varepsilon} \\
Q_{j\lambda}^l &= C_{j\lambda}^l V_{\lambda} \\
i_j(z,t) &= -\frac{q}{2} u_E(v_b, w_b) \sum_{\lambda} \frac{C_{j\lambda}^l}{C_{\lambda\lambda}^l} \frac{E_{\lambda}(v_b, w_b)}{V_{\lambda}}
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Το $Q_{j\lambda}^l$ είναι φορτίο ανά μονάδα μήκους.

Η τάση στον αγωγό j είναι

$$\begin{aligned}
v_j(z,t) &= \int_j^0 \vec{E}^{(\pm)}(v, w, z, t) \cdot d\vec{l} \\
&= -\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2} q u_E(v_b, w_b) \sum_{\lambda} \frac{1}{C_{\lambda\lambda}^l V_{\lambda}^2} E_{\lambda}(v_b, w_b) \int_j^0 \vec{E}_{\lambda}(v, w) \cdot d\vec{l} \\
&= -\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2 C_{jj}^l V_j^2} q u_E(v_b, w_b) E_j(v_b, w_b) \int_j^0 \vec{E}_j(v, w) \cdot d\vec{l} \\
&= -\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2 C_{jj}^l V_j^2} q u_E(v_b, w_b) E_j(v_b, w_b) V_j \\
v_j(z,t) &= -\frac{q}{2} Z_j \frac{u_E(v_b, w_b) E_j(v_b, w_b)}{V_j} \\
Z_j &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{C_{jj}^l}
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Είναι ευνόητο ότι μόνο το μέρος που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα \int_j^0 είναι μη

μηδενικό.

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο τάσης προς ρεύμα σε κάθε σημείο z δεν είναι ίσο με κάποια σταθερά. Η τάση δίνεται από ανάλογη σχέση με αυτή της στατικής περίπτωσης αλλά δεν ισχύει το ίδιο για το ρεύμα. Το αποτέλεσμα σχετίζεται με το γεγονός ότι υπάρχει σύζευξη (αλληλεπίδραση, διαφωνία) μεταξύ των σημάτων κατά μήκος των αγωγών. Για να βρούμε τι σήμα θα αναπτυχθεί στο τέρμα (στο φόρτο) συγκεκριμένου σύρματος τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Πρέπει να ανατρέξουμε στο νόμο του Ohm στο τέρμα των αγωγών αφού ληφθούν υπόψη οι φόρτοι στο τέλος τους και τα τυχόν ανακλώμενα σήματα ρεύματος και τάσης. Δεν μπορούμε εύκολα να

πετύχομε προσαρμογή μιας γραμμής μεταφοράς με πολλούς αγωγούς με τον τερματικό φόρτο της, ενώ αυτό γίνεται εύκολα στην περίπτωση γραμμής με έναν εσωτερικό αγωγό.

Όταν έχουμε μόνον έναν εσωτερικό αγωγό τότε $N = 1$ και οι σχέσεις για το ρεύμα και την τάση απλοποιούνται και γίνονται παρόμοιες με τις σχέσεις για τη στατική περίπτωση όπου δεν υπήρχε διάδοση.

Πράγματι, για έναν εσωτερικό αγωγό έχουμε

$$i_j(z, t) = -\frac{q}{2} u_E(v_b, w_b) \frac{E_j(v_b, w_b)}{V_j}$$

$$v_j(z, t) = -\frac{q}{2} Z_C \frac{u_E(v_b, w_b) E_j(v_b, w_b)}{V_j}$$

$$Z_C = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{C^l} = \sqrt{\frac{L^l}{C^l}}$$

Z_C είναι η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής διότι ισχύει $C^l L^l = \mu\varepsilon$, μάλιστα σε πολυσυρματικές γραμμές μεταφοράς η τελευταία σχέση ισχύει για τις αντίστοιχες μήτρες.

Η διαφορά είναι ότι εδώ έχουμε τη διάδοση προς δυο κατευθύνσεις και εμφανίζεται ο παράγοντας $\frac{1}{2}$. Τα ανωτέρω δικαιολογούν τη συνήθη πρακτική που ακολουθείται

για την περίπτωση ανιχνευτών μεγάλου μήκους [10] όπου χρησιμοποιείται η λογική της ημιστατικής περίπτωσης, υπολογίζεται το επαγόμενο βοηθητικό ρεύμα-σήμα, διαιρείται δια δύο και αφήνεται να διαδοθεί προς τις δυο κατευθύνσεις του ανιχνευτή. Το σήμα τάσης υπολογίζεται ως γινόμενο του ανωτέρω ρεύματος επί την χαρακτηριστική αντίσταση του ανιχνευτή-ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς.

1.1.9 Εφαρμογή στην περίπτωση κυλινδρικού ανιχνευτή κυκλικής διατομής και μεγάλου μήκους.

Θα εξετάσουμε την ανάλογη περίπτωση με αυτήν του εδαφίου 1.1.8 με τη διαφορά ότι ο ανιχνευτής τώρα έχει μεγάλο μήκος.

Σε αυτή την περίπτωση οι μεταβλητές θέσης είναι οι γνωστές μεταβλητές των κυλινδρικών συντεταγμένων $\varphi = v$, $r = w$. Ο εξωτερικός αγωγός θα θεωρηθεί σε δυναμικό μηδέν (S_0) και επομένως έχουμε την περίπτωση $N = 1$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση σημειακών ιόντων των οποίων η ταχύτητα ολίσθησης δίνεται από τη σχέση $u = \mu E$ και η κίνηση των ιόντων είναι ακτινική από την αρχική θέση r_0 , προφανώς $\varphi = \text{σταθερό ανεξάρτητο του χρόνου}$. Η δεσμευτική σχέση που φαίνεται στις σχέσεις (1.50) και περιγράφει την κίνηση του σημειακού φορτίου, είναι ίδια με αυτήν που φαίνεται στις σχέσεις (1.36). Επομένως η δεσμευτική σχέση που φαίνεται στις σχέσεις (1.54) παίρνει τη μορφή

$$r_b (= w_b(z, t)) = r_0 \sqrt{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \mp \frac{z - z_q}{ct_0}} \quad (1.60)$$

Υποθέτουμε ότι η (ψηλή) τάση που κινεί τα φορτία είναι σταθερή V_a οπότε από τις σχέσεις (1.58), (1.59) για τον «παλμό» ρεύματος και τάσης βρίσκουμε:

$$i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon} q\mu V_a}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \mp \frac{z-z_q}{ct_0}\right]}$$

$$v(\bar{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{q\mu V_a}{r_0^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \mp \frac{z-z_q}{ct_0}\right]} \quad (1.61)$$

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Οι σχέσεις για το ρεύμα και την τάση είναι ίδιες με τις αντίστοιχες σχέσεις της στατικής περίπτωσης (1.36), (1.39) με τη διαφορά ότι εδώ έχουμε τον παράγοντα $\frac{1}{2}$ επειδή το σήμα διαδίδεται προς τις δυο κατευθύνσεις και έχουμε το φαινόμενο της διάδοσης μέσω της εξάρτησης από το z . Το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί σε διάδοση προς τη θετική κατεύθυνση του z και το κάτω προς την αρνητική. Υπενθυμίζουμε ότι όταν έχουμε αρνητικό φορτίο τότε $t_0 = -t_{0-}$, $t_{0-} > 0$ και για θετικό $t_0 = +t_{0+}$, $t_{0+} > 0$.

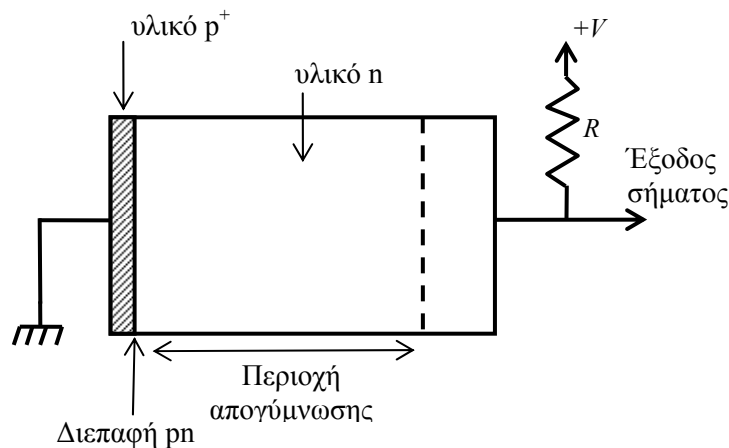
1.2 Ημιαγωγικοί ανιχνευτές (ανιχνευτές στερεάς κατάστασης)

Στο Σχήμα 1.8 φαίνεται η βασική διάταξη που χρησιμοποιείται για τη λειτουργία διόδου διεπαφής ως ανιχνευτή ακτινοβολίας ή σωματιδίων. Για τη δημιουργία σήματος σε εξωτερικό κύκλωμα, χρειάζεται να τοποθετήσουμε μεταλλικά ηλεκτρόδια στις δύο πλευρές της διεπαφής pn. Στην περίπτωση όμως ημιαγωγού δεν μπορεί να γίνει ωμική επαφή με άμεση επίστρωση μετάλλου στον ημιαγωγό. Αυτό θα οδηγούσε στη δημιουργία ανορθωτικής διάταξης διόδου διεπαφής. Για την αποφυγή μιας τέτοιας κατάστασης, δημιουργούν ένα στρώμα υλικού, μεταξύ του ημιαγωγού και του μετάλλου, με υψηλή πρόσμιξη, n^+ ή p^+ , για υλικό n και p αντίστοιχα.

Εξαιτίας των μεγάλων συγκεντρώσεων προσμίξεων, η περιοχή απογύμνωσης έχει, πρακτικά, μηδενικό εύρος (βλέπε τη σχετική βιβλιογραφία περί ημιαγωγών). Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται όντως μια ωμική επαφή. Στο Σχ. 1.9 φαίνεται ένας τυπικός ανιχνευτής διεπαφής pn. Το αρχικό υλικό είναι ημιαγωγός τύπου n από πυρίτιο (Si) πάχους περίπου 300 μm . Η ειδική αντίστασή του είναι μεγάλη, της τάξης των 2000 Ωcm . Για τη δημιουργία διεπαφής pn γίνεται εισαγωγή ικανής πρόσμιξης στην επιφάνεια, του υλικού, έτσι ώστε, να προκύψει υλικό τύπου p^+ . Η περιοχή απογύμνωσης βρίσκεται, πρακτικώς, εξολοκλήρου στην περιοχή τύπου n, εφόσον η συγκέντρωση φορέων οπών είναι πολύ μεγαλύτερη στην περιοχή p^+ . Για να είναι όλη η περιοχή των 300 μm απογυμνωμένη, χρειάζονται 160 V ανάστροφης τάσης. Σε

θερμοκρασία δωματίου (300 K) χρειάζεται μέση ενέργεια 3,62 eV για παραγωγή ενός ζεύγους ηλεκτρονίου-οπής.

Μέσα στο Si (πυρίτιο), ένα φορτισμένο σωματίδιο, ενέργειας τέτοιας που να προκαλεί ελάχιστο ιοντισμό (m.i.p., minimum ionizing particle), εναποθέτει περίπου 39 keV/100 μm. Αυτό οδηγεί σε περίπου 100 ζεύγη ηλεκτρονίων-οπών ανά μικρόμετρο. Για πάχος 300 μm θα έχουμε περίπου 30 000 ζεύγη, δηλαδή συνολικό φορτίο $30\ 000 \times e = 4,8 \times 10^{-15}$ pC.



Σχήμα 1.9. Σχηματική παράσταση ημιαγωγού ανιχνευτή.

Είναι προφανές ότι μόνο τα φορτία που εισάγονται στην περιοχή απογύμνωσης συμβάλλουν στη δημιουργία του σήματος του ανιχνευτή, διότι μόνον αυτά δεν υφίστανται σημαντικές ανασυζεύξεις. Για τη δημιουργία του σήματος στην έξοδο του ανιχνευτή (που είναι και η είσοδος του προενισχυτή), ισχύουν αυτά που αναφέρθηκαν τους ανιχνευτές ιοντισμού με αέριο. Στην περίπτωση των ημιαγωγών, η κινητικότητα των ηλεκτρονίων είναι μόνο 2 ή 3 φορές αυτής των οπών και τα ζεύγη δημιουργούνται οπουδήποτε μέσα στο υλικό και όχι κοντά σε κάποιο ηλεκτρόδιο. Αυτό σημαίνει, ότι στη δημιουργία του σήματος συμβάλλουν τόσο οι οπές όσο και τα ηλεκτρόνια. Για τη λήψη του σήματος χρησιμοποιείται προενισχυτής ρεύματος ή φορτίου, χαμηλού θορύβου, που εξασφαλίζει επαρκή ευαισθησία (χαμηλό κατώφλι ανίχνευσης και συνάμα υψηλό λόγο σήματος-προς-θόρυβο) για την ενίσχυση των εξαιρετικά ασθενών ($\approx 30\ 000$ e) σημάτων. Η μεγάλη αντίσταση σύνδεσης της τάσης που φαίνεται στο Σχ. 1.8, είναι απαραίτητη διότι α) περιορίζει το ρεύμα σήματος σε περίπτωση βλάβης (π.χ. βραχυκύκλωμα) του ανιχνευτή και β) αποτελεί φόρτο μεγάλης αντίστασης για το σήμα χωρίς να το επηρεάζει, αφού κατά κανόνα είναι πολύ μεγαλύτερης τιμής από αυτήν της εισόδου του προενισχυτή που ακολουθεί (οι δύο είναι συνδεδεμένες παράλληλα).

1.3 Απαριθμητές-Σπινθηριστές

Οι απαριθμητές-σπινθηριστές ή απαριθμητές σπινθηρισμού (Scintillation Counters), στηρίζονται στο φαινόμενο του φθορισμού (εκπομπή φωτονίων) που προκαλείται από τη διέγερση ατόμων και μορίων από φορτισμένα σωματίδια. Ο «φθορισμός» (δηλαδή τα φωτόνια που εκπέμπονται) μπορούν να ανιχνευτούν μέσω φωτοπολλαπλασιαστών (PM, Photomultiplier) ή άλλους ανιχνευτές, όπως ανιχνευτές στερεάς κατάστασης.

Οι σπινθηριστές που συνήθως χρησιμοποιούνται, είναι ανόργανοι μονοκρυσταλλοί, οργανικά υγρά και οργανικά πλαστικά. Οι χρόνοι καθόδου (decay time) του παλμών που δημιουργούνται από τους «γρηγορότερους» σπινθηριστές, που είναι οι οργανικοί, είναι της τάξης των νανοδευτερολέπτων.

Σε οργανικά στερεά ή υγρά υλικά η διέγερση γίνεται στο μοριακό επίπεδο και εκπέμπεται φως με φάσμα στην υπεριώδη περιοχή (ultraviolet, UV). Για την ανίχνευση του φωτός αυτού εφαρμόζεται η τεχνική της μετατόπισης του φάσματος στην ορατή περιοχή (μπλέ-πράσινο) και αυτό γίνεται με χρήση του φαινομένου διέγερσης φθορισμού χρωστικών μορίων (dye molecules). Αυτά, επανεκπέμπουν φως σε μεγαλύτερο μήκος κύματος, είναι δηλαδή μετατροπείς μήκους κύματος (wavelength shifters). Αυτές οι ουσίες εισάγονται μέσα στο κύριο υλικό του σπινθηριστή. Ο πίνακας 1.1 δείχνει χαρακτηριστικά διαφόρων σπινθηριστών.

Πίνακας 1.1

Υλικό μετατροπέα μήκους κύματος	Σχετικό ύψος παλμού	Χρόνος Καθόδου (ns)	Μήκος κύματος (nm)	Ποσοστό (%)
Polystyrene+p-terphenyl	0,28	3	355	0,9
» +tetraphenyl-butadiene	0,38	4,6	480	0,9
NaI+thallium	2,1	250	410	3,7
Anthracene	1	32	410	3,7
Toluene	0,7	<3	430	0,9

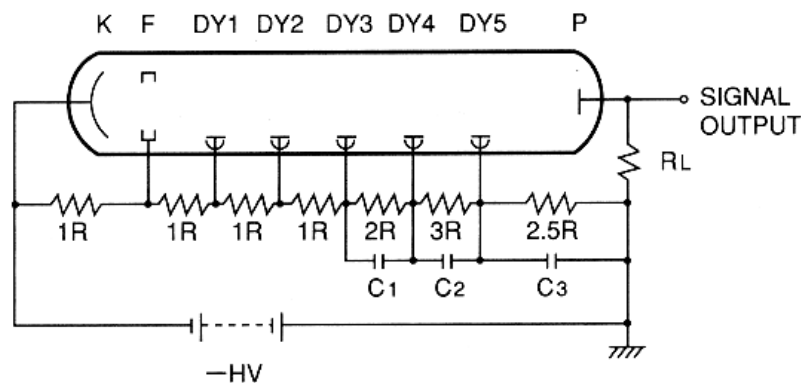
Υπενθυμίζουμε ότι το ορατό φως έχει μήκη κύματος στην (ορατή) περιοχή, περίπου 400 nm -800 nm.

Οι φωτοπολλαπλασιαστές, είναι διατάξεις όπως αυτή του Σχ. 1.10 αποτελούμενες από ένα σύνολο ηλεκτροδίων μέσα σε σωλήνα κενού. Η κάθοδος (φωτοκάθοδος) αποτελείται από υλικό που περιέχει αλκαλικά μέταλλα με μικρό έργο εξόδου (στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο). Οι δευτερεύουσες άνοδοι (δύνοδοι) είναι από υλικό που μπορεί να εκπέμπει, για κάθε (πρωτογενές) ηλεκτρόνιο που προσπίπτει πάνω τους, περίπου 4 (κατά μέσο όρο) δευτερογενή ηλεκτρόνια.

Για τη λειτουργία του PM εφαρμόζονται μεταξύ καθόδου-ανόδου υψηλή τάση της τάξης μερικών kV. Όταν στη φωτοκάθοδο προσπέσει ένα φωτόνιο, εξάγεται, μερικές φορές, ένα φωτοηλεκτρόνιο και αυτό εκφράζεται μέσω της λεγόμενης κβαντικής απόδοσης της φωτοκάθόδου. Αυτή ορίζεται ως η πιθανότητα εξαγωγής φωτοηλεκτρονίου για κάθε προσπίπτον φωτόνιο. Η κβαντική απόδοση εξαρτάται από το υλικό της φωτοκάθόδου και το μήκος κύματος του φωτονίου και είναι συνήθως της τάξης του 0,25 (25%) με μέγιστο στην περιοχή των 400 nm, κοντά στο ιώδες. Έχουμε δηλαδή για κάθε 100 προσπίπτοντα φωτόνια στη φωτοκάθοδο, εξαγωγή φωτοηλεκτρονίου σε 25 περιπτώσεις.

Το ηλεκτρόνιο αυτό επιταχύνεται προς την πρώτη δύνοδο στην οποία και προσπίπτει. Από την πρόσπτωση αυτή εξάγονται κατά μέσο όρο δ ηλεκτρόνια, όπου $\delta = kV$, όπου k σταθερά του υλικού και V η διαφορά δυναμικού μεταξύ διαδοχικών δυνόδων, με τυπική τιμή $\delta = 4$ ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά επιταχύνονται προς τη δεύτερη δύνοδο και εξάγονται κατά μέσο όρο $\delta^2 = 4^2 = 16$ ηλεκτρόνια κ.ο.κ., δηλαδή δ^n για τη n -οστή δύνοδο. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου τα εξαγχθέντα ηλεκτρόνια να συλλεγούν από την άνοδο και να συμβάλλουν στη διαμόρφωση του τελικού σήματος (παλμού) εξόδου. Το λαμβανόμενο σήμα είναι αρνητικό αφού η ροή των φορτίων είναι ροή αρνητικών φορέων προς το εξωτερικό κύκλωμα.

Η ενίσχυση του PM ορίζεται ως το πηλίκο του τελικού φορτίου στην έξοδο δια του αρχικού φορτίου του ενός φωτοηλεκτρονίου. Για φωτοπολλαπλασιαστές αποτελούμενους από 10 δυνόδους έχουμε, σύμφωνα με τα παραπάνω, ενίσχυση $4^{10} \approx 10^6$. Για 12 δυνόδους $4^{12} \approx 10^7$ και για 14 δυνόδους $4^{14} \approx 10^8$. Η ασάφεια στο χρόνο (στη στιγμή) εμφάνισης του παλμού μετρούμενου από τη στιγμή πρόσπτωσης του φωτονίου είναι στην πράξη της τάξης του 1 ns και λέγεται «παίζιμο» (jitter). Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές διαδρομές των ηλεκτρονίων κατά τη μετάβασή τους από τη μια δύνοδο στην επόμενη. Υπάρχει επίσης εξάρτηση από το σημείο εξαγωγής του αρχικών φωτοηλεκτρονίων στη φωτοκάθοδο το οποίο προφανώς διαφοροποιεί τη διαδρομή.



Σχήμα 1.10. Διάταξη ηλεκτροδίων του φωτοπολλαπλασιαστή με την αλυσίδα αντιστάσεων για την υποδιαίρεση της τάσης στις δυνόδους.

Ο χρόνος μεταξύ διέγερσης της καθόδου και εμφάνισης του σήματος στην έξοδο, είναι της τάξης των 30-40 ns. Γενικώς, για n δυνόδους η ενίσχυση είναι: $G = \delta^n = (kV_d)^n$. Αν υποθέσουμε ότι η ολική τάση μεταξύ καθόδου-άνοδου είναι V_b

και υποδιαιρείται ομοιόμορφα μεταξύ των δυνόδων, θα έχουμε $V_d = \frac{V_b}{n}$. Άρα

$V_b = \frac{n}{k} G^{\frac{1}{n}}$. Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των

δυνόδων (n) που απαιτούνται για την επίτευξη δεδομένου G με την ελάχιστη τάση V_b . Δηλαδή, θα έχουμε ελάχιστο V_b αν

$$\frac{dV_b}{dn} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} G^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{k} \frac{G^{\frac{1}{n}}}{n^2} \ln G \Rightarrow n \approx \ln G$$

Η επίδραση της τάσης V_b στην ενίσχυση G μπορεί να μελετηθεί μέσω της σχέσης,
 $G = \left(\frac{kV_b}{n}\right)^n$, με διαφορίσή της ως προς V_b , καταλήγοντας στη σχέση που συνδέει τις
 σχετικές μεταβολές των παραπάνω μεγεθών,

$$\frac{\delta G}{G} = n \frac{\delta V_b}{V_b}$$

Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι διαθέτουμε έναν PM με 10 δυνόδους ($n=10$), τότε μεταβολή 1% της τάσης τροφοδοσίας (V_b), οδηγεί σε 10% μεταβολή της ενίσχυσης G .

Στο Σχ. 1.10 φαίνεται η τροφοδοσία του PM με αλυσίδα αντιστατών. Οι αντιστάτες έχουν τέτοιες τιμές, ώστε, όταν το σύστημα διαρρέεται από το σχετικά στιγμιαίο ρεύμα του παλμού που δημιουργείται, να μην έχουμε μεταβολή στις τάσεις μεταξύ των δυνόδων, που με τη σειρά της θα οδηγούσε σε ελάττωση της ενίσχυσης. Το χαρακτηριστικό που επιδιώκουμε από τη διάταξη των αντιστατών είναι η «ακαμψία» (stiffness), δηλαδή το να διαρρέονται από πολύ μεγάλο ρεύμα σε σχέση με το μέσο ρεύμα της ανόδου, π.χ. 100 φορές το ρεύμα ανόδου. Το μέσο ρεύμα της ανόδου εξαρτάται από το ρυθμό πρόσπτωσης φωτονίων (ροή φωτονίων) στη φωτοκάθοδο. Στις περιπτώσεις μεγάλων σημάτων δε βοηθά η παραπάνω διαδικασία και τότε συνδέονται στις τελευταίες βαθμίδες πυκνωτές παράλληλα με τους αντιστάτες (βλ. Σχ. 1.3.2). Το σχήμα δείχνει την περίπτωση που εφαρμόζεται αρνητική υψηλή τάση και η άνοδος είναι, πρακτικώς, σε δυναμικό γης (0 V). Αυτό είναι χρήσιμο διότι αποφεύγονται πυκνωτές αποσύζευξης για τη λήψη του σήματος από την άνοδο. Μπορεί φυσικά, να χρησιμοποιηθεί διάταξη με θετική υψηλή τάση, οπότε η κάθοδος θα βρίσκεται σε δυναμικό μηδέν. Μια τέτοια διάταξη έχει το πλεονέκτημα ότι, επειδή η κάθοδος είναι πάνω στο γυαλί (περίβλημα του PM), δεν υπάρχει πρόβλημα ρευμάτων διαρροής από την κάθοδο προς τα αγωγικά υλικά που περιβάλλουν το γυαλί και είναι γειωμένα, φαινόμενο που εμφανίζεται στην προηγούμενη περίπτωση.

Εκτός των αναφερθέντων ηλεκτροδίων υπάρχει και ένα, το λεγόμενο πλέγμα, που μαζί με άλλα, χρησιμοποιείται για την εστίαση της δέσμης των φωτοηλεκτρονίων. Οι αντιστάτες της αλυσίδας (λέγονται αντιστάτες αφαίμαξης, bleeder resistors ή bleeder chain) έχουν τιμές της τάξης των 100 kΩ και η αντίσταση φόρτου, R_L , στην οποία αναπτύσσεται η τάση εξόδου (σήμα), είναι της τάξης μερικών kΩ.

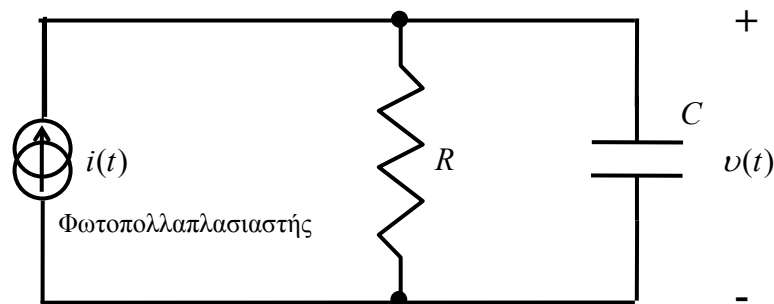
Θα αναλύσουμε τώρα τον τρόπο σχηματισμού και το σχήμα του παλμού τάσης (σήματος) εξόδου. Ας υποθέσουμε ότι το φως που προσπίπτει στον PM προέρχεται από σπινθηριστή. Τότε, αυτό περιγράφεται από εκθετική μείωση με το χρόνο. Άρα το επαγόμενο ρεύμα εξαιτίας των κινούμενων φωτοηλεκτρονίων από την τελευταία δύνοδο προς την άνοδο θα δίνεται από τη σχέση,

$$i_q = \frac{GNe}{\tau_s} \exp(-t/\tau_s)$$

όπου N ο αριθμός των φωτοηλεκτρονίων ανά παλμό φωτός, e το θεμελιώδες φορτίο, τ_s η σταθερά χρόνου ή σταθερά μείωσης (decay constant) του σπινθηριστή. Όπως στην περίπτωση κινούμενων φορτίων μεταξύ των ηλεκτροδίων ανιχνευτών αερίου, ισχύει και τώρα,

$$i_q = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$$

όπου $v = v(t)$ το σήμα στην έξοδο. Το R είναι ο συνολικός φόρτος, δηλαδή ο παράλληλος συνδυασμός της αντίστασης εισόδου της διάταξης που συνδέεται στην έξοδο και του φόρτου R_L . Το C είναι η συνολική χωρητικότητα μεταξύ των ηλεκτροδίων που κινούνται τα φορτία στο τελευταίο στάδιο και αυτής που εισάγει οτιδήποτε είναι συνδεδεμένο εξωτερικά. Το ισοδύναμο κύκλωμα του κυκλώματος του PM φαίνεται στο Σχήμα 1.1.1.



Σχήμα 1.1.1. Ισοδύναμο κύκλωμα φωτοπολλαπλασιαστή.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης, θεωρώντας $\tau = RC \neq \tau_s$, είναι,

$$v(t) = -\frac{GNeR}{\tau - \tau_s} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

ενώ αν $\tau = RC = \tau_s$,

$$v(t) = -\frac{GNeR}{\tau_s^2} t \exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right)$$

Αν $\tau = RC \ll \tau_s$, έχουμε μικρό σήμα το οποίο είναι σχεδόν ίδιας μορφής με το $i_q(t)$. Ο χρόνος ανόδου ισούται πρακτικώς με τη σταθερά χρόνου τ του συστήματος στην έξοδο. Αυτός λέγεται τρόπος λειτουργίας ρεύματος (ρευματικός τρόπος λειτουργίας), $v(t) \approx i(t)_q R$.

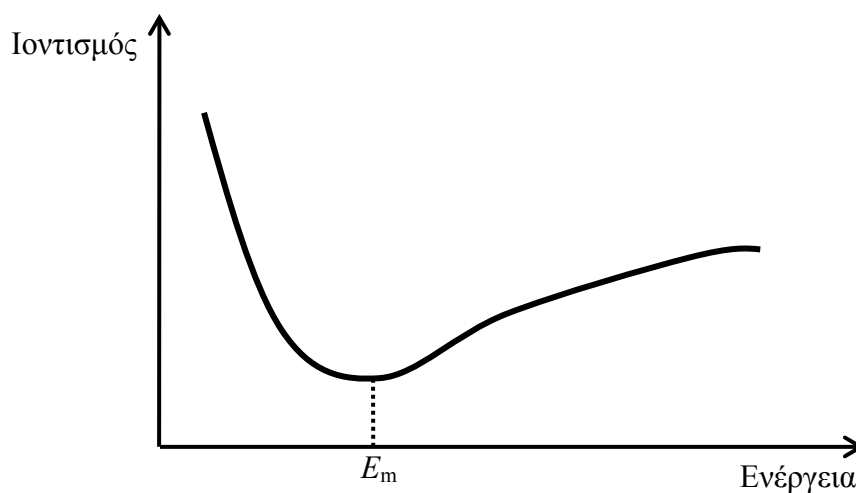
Αν $\tau \gg \tau_s$ έχουμε μεγαλύτερο ύψος παλμού αλλά και ο χρόνος πτώσης γίνεται μεγαλύτερος και καθορίζεται από το τ της εξόδου. Ο χρόνος ανύψωσης είναι πρακτικώς ίσος με το τ_s . Σε αυτήν την περίπτωση, όπως και σε ανάλογη περίπτωση των ανιχνευτών, έχουμε τρόπο λειτουργίας τάσης και το $v(t)$ είναι η τάση που δημιουργείται εξαιτίας του ότι το ρεύμα φορτίζει τη χωρητικότητα C . Το ρεύμα ουσιαστικά ολοκληρώνεται λόγω αυτής της χωρητικότητας, δηλαδή,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\lambda) d\lambda$$

1.3.1 Παραγωγή φωτός και οδήγησή του

Μεταξύ των υλικών σπινθηρισμού συγκαταλέγονται τα πλαστικά από τα οποία κατασκευάζονται οι πλαστικοί σπινθηριστές σε μορφή ορθογώνιων πλακών. Η μετάδοση του φωτός από τους σπινθηριστές προς την είσοδο (παράθυρο) του φωτοπολλαπλασιαστή, γίνεται με τη βοήθεια «φωτοδηγών» (lightguides) που είναι συνήθως από πλαστικό, plexiglass ή ακρυλικό με υλικό μετατροπέα μήκους κύματος, που αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα. Στο ακρυλικό υλικό γίνεται μικρή πρόσμιξη κατάλληλου υλικού που απορροφά φωτόνια μεγάλης συχνότητας και εκπέμπει σε χαμηλότερη συχνότητα. Ένα τέτοιο υλικό είναι γνωστό με το βιομηχανικό όνομα BBQ. Η εκπομπή του φωτός γίνεται ισοτροπικά περί το σημείο απορρόφησης. Κατά τη μετάδοση του φωτός μέσα στους φωτοδηγούς συμβαίνει τόσο ανάκλαση στις επιφάνειες, όσο και διέλευση προς τα έξω (στον αέρα). Για κατάλληλες γωνίες πρόσπτωσης, συμβαίνει ολική ανάκλαση, ενώ μέρος του φωτός απορροφάται στο εσωτερικό του φωτοδηγού από το υλικό. Τελικά, μόνο ένα ποσοστό των αρχικών φωτονίων φθάνει στη φωτοκάθοδο.

Όταν περνά ένα σωματίδιο ελάχιστου ιοντισμού (M.I.P.) από πλαστικό σπινθηριστή εναποθέτει ενέργεια $E_p=1,5 \text{ MeV/cm}$ κατά τη διαδρομή του. Στο Σχ. 1.1.2 φαίνεται το διάγραμμα της εξάρτησης του ιοντισμού από την ενέργεια. Για κατάλληλη ενέργεια (E_m) ο ιοντισμός είναι ελάχιστος. Στο γεγονός αυτό αποδίδεται και η παραπάνω ονομασία. Μόνο το 2% περίπου της ενέργειας που χάνεται, κατά τη διέλευση του σωματιδίου διαμέσου του σπινθηριστή, μετατρέπεται σε φωτόνια (φως), δηλαδή έχουμε συνολική ενέργεια φωτονίων $E_f=3000 \text{ eV/cm}$.



Σχήμα 1.1.2 Διάγραμμα εξάρτησης του ιοντισμού από την ενέργεια του σωματιδίου.

Επειδή τα φωτόνια που παράγονται από την απορρόφηση ενέργειας έχουν μέση ενέργεια $E_\mu=3 \text{ eV}$, θα έχουμε $N_\varphi=E_\varphi/E_\mu=3000/3=10^4$ φωτόνια ανά cm. Επομένως, για

κάθε (πρωτογενές) φωτόνιο που παράγεται (ενέργειας 3 eV) απαιτούνται κατά μέσο όρο $E_p/N=150$ eV ενέργειας.

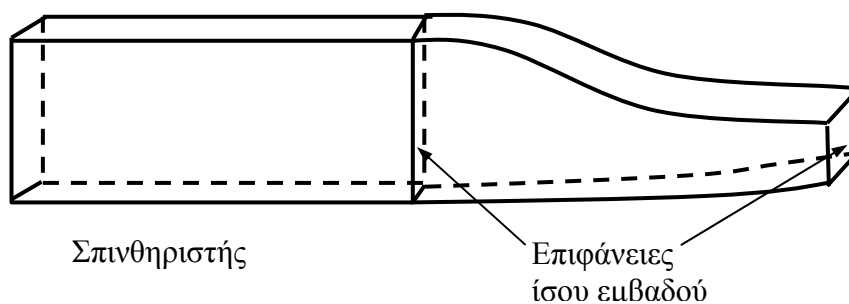
Έστω επίσης, ότι το 10 % του φωτός οδηγείται μέσω ενός φωτοδηγού προς τη φωτοκάθοδο του PM και ότι αυτή έχει κβαντική απόδοση 25 %. Στην περίπτωση αυτή, τα 10^4 αρχικά φωτόνια εξάγουν από τη φωτοκάθοδο

$0,1 \times 0,25 \times 10^4 = 250$ φωτοηλεκτρόνια. Η στατιστική διακύμανση αυτών των παραγόμενων φωτοηλεκτρονίων εκφράζεται μέσω της τυπικής απόκλισης της κατανομής τους, $\sigma = \sqrt{250} \approx 16$ (λόγω κατανομής Poisson), άρα 250 ± 16 φωτοηλεκτρόνια. Αυτός ο (μέσος) αριθμός των φωτοηλεκτρονίων, για σπινθηριστή 1 cm που διαπερνάται από M.I.P., παρά την παραπάνω διακύμανση, εξασφαλίζει (επίπεδο σημαντικότητας 16σ, δηλαδή με πιθανότητα σχεδόν 1) την εξαγωγή τουλάχιστο ενός φωτοηλεκτρονίου και κατά συνέπεια την εμφάνιση παλμού εξόδου πρακτικώς πάντοτε στην άνοδο του PM.

Κατά τη μετάδοση του φωτός έχουμε κάτι σαν το θεώρημα Liouville. Εδώ η ροή φωτονίων, δηλαδή το μέγεθος $\frac{\Delta N}{\Delta t \Delta A \Delta \Omega}$, είναι παντού η ίδια κατά τη διαδρομή. Μια

στένωση στη διατομή του φωτοδηγού συνεπάγεται απώλεια διότι η ελάχιστη διατομή καθορίζει τη ροή φωτονίων προς τη φωτοκάθοδο. Οπότε, για τη αποφυγή των απωλειών, το σχήμα της διατομής του φωτοδηγού αλλάζει με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε, το εμβαδόν της να παραμένει σταθερό (βλ. Σχ. 1.1.3).

Ο σπινθηριστής και οι φωτοδηγοί τυλίγονται εξωτερικά με ανακλαστικό αλουμινόχαρτο το οποίο δεν πρέπει να βρίσκεται σε οπτική επαφή (χωρίς στρώμα αέρα), αλλά να περιβάλλει χαλαρά το σύστημα. Η μέριμνα αυτή λαμβάνεται για να αποφευχθεί ανάκλαση από το αλουμίνιο για το οποίο ο συντελεστής είναι μικρότερος από αυτόν της ολικής ανάκλασης στην εσωτερική επιφάνεια του φωτοδηγού και του σπινθηριστή (που είναι 100%). Ο ρόλος του αλουμινόχαρτου είναι να επαναφέρει το φωτός που δεν έχει υποστεί ολική ανάκλαση λόγω μικρών γωνιών πρόσπτωσης.



Σχήμα 1.1.3 Μορφή ενός φωτοδηγού συζευγμένου με σπινθηριστή.

2. Θόρυβος

2.1 Είδη και χαρακτηριστικά θορύβων

Σήμα είναι το ηλεκτρικό μέγεθος το οποίο ενδιαφερόμαστε να καταγράψουμε και να αναλύσουμε, υπό την έννοια της περιεχόμενης σε αυτό πληροφορίας. Κατά κανόνα, το σήμα συνυπάρχει με αυτό που ονομάζουμε «θόρυβο». Με τον όρο «θόρυβος» εννοούμε οτιδήποτε συσκοτίζει (καλύπτει) το σήμα. Ο θόρυβος μπορεί να είναι και αυτός κάποιο σήμα, που όμως δεν μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, θόρυβος από ένα σταθμό FM, λέμε ότι έχουμε «παρεμβολή» (interference) αυτός λέγεται εξωταρικός θόρυβος. Συνήθως όμως, θόρυβο εννοούμε τον στοχαστικού χαρακτήρα θόρυβο (random noise) που είναι φυσικής-θερμικής προέλευσης.

Ο θόρυβος χαρακτηρίζεται από: τη φασματική του κατανομή (ισχύς ανά μονάδα συχνότητας), από την κατανομή ανά πλάτος και το φυσικό αίτιο που τον προκαλεί. Παρακάτω αναφέρονται μερικοί τύποι θορύβου:

α) Θόρυβος Johnson (πρώτο μελετήθηκε από τους Johnson και Nyquist το 1928)

Αυτός σχετίζεται με την τυχαία διακύμανση της ηλεκτρικής τάσης στα άκρα ενός αντιστάτη R λόγω θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων, κάτι δηλαδή σαν στιγμιαία έλλειψη «ισορροπίας» στην κίνηση Brown. Το φάσμα αυτού του θορύβου είναι ομοιόμορφο σε ευρεία περιοχή συχνοτήτων, πρόκειται δηλαδή για «λευκό θόρυβο» κατ' αντιστοιχία με το λευκό φως. Η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης (rms, ενεργός τιμή) στο τετράγωνο, στα άκρα του αντιστάτη είναι,

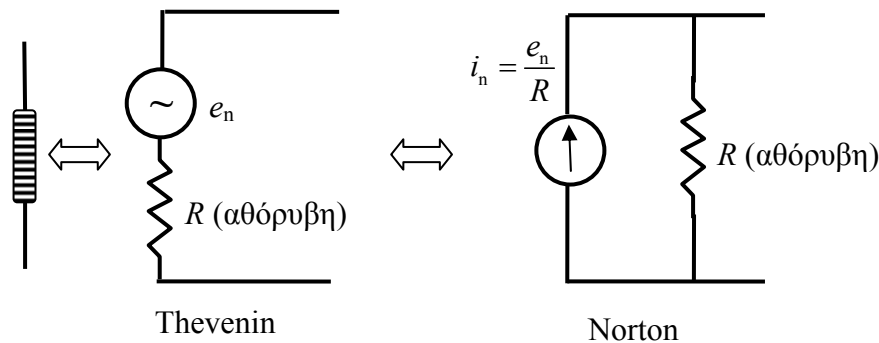
$$V_n^2 = \langle V^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad \text{ή} \quad V_n = \sqrt{4kTR\Delta f}$$

όπου $k=1,4 \times 10^{-3}$ J/K η σταθερά του Boltzmann, T η θερμοδυναμική θερμοκρασία και Δf η ζώνη συχνοτήτων (Bandwidth). Ένας εμπειρικός τύπος για τους 20 °C ($T=293,15$ K \approx 293 K) είναι,

$$\frac{V_n}{\sqrt{\Delta f}} = 1,27 \times 10^{-10} \sqrt{R}, \text{ σε } V/\text{Hz}^{1/2} \text{ με το } R \text{ σε } \Omega$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, για αντιστάτη $R=10$ k Ω , η προκύπτουσα τάση θορύβου σε εύρος συχνοτήτων $\Delta f=10$ kHz, είναι $V_n=1,3$ μ V (τιμή rms).

Η στατιστική κατανομή της τάσης σε θόρυβο Johnson είναι γκαουσιανή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση V_n . Ο θόρυβος αυτός εμφανίζεται πάντοτε σε κάθε πηγή σήματος, που περιλαμβάνει ωμική αντίσταση (π.χ. ενισχυτές, ανιχνευτές, γενικά πηγές τάσης), θέτοντας ένα κάτω όριο (ελάχιστο) θορύβου τάσης ίσης με V_n . Στην ανάλυση ενός κυκλώματος κάθε ωμική αντίσταση μπορεί να αντικατασταθεί με το ισοδύναμό της, που είναι μια πηγή τάσης $V_n=e_n$, σε σειρά με έναν αντιστάτη χωρίς θόρυβο (Βλέπε Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1. Ισοδύναμο κύκλωμα θορύβου Johnson.

β) Θόρυβος Βολής (Shot noise ή θόρυβος Schottky)

Ο θόρυβος αυτός εμφανίζεται όταν υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα. Οφείλεται στην τυχαία άφιξη φορτισμένων σωματιδίων που οδηγεί σε διακυμάνσεις του ρεύματος και σχετίζεται με την κβαντική υφή των φορέων ρεύματος. Για το ρεύμα-θόρυβο βολής ισχύει,

$$i_{sh} = I_n = \sqrt{\langle I_n^2 \rangle} = \sqrt{2eI_{dc}\Delta f}$$

όπου $e=1,6 \times 10^{-19}$ C. Αυτός ο θόρυβος δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Σε μορφή «εμπειρικού» τύπου είναι,

$$I_n = 5,64 \times 10^{-10} \sqrt{I_{dc}\Delta f}, \text{ το } I_n \text{ σε A και το } \Delta f \text{ σε Hz}$$

Το φάσμα του είναι ομοιόμορφο και επομένως χαρακτηρίζεται και αυτός ως «λευκός» θόρυβος. Στην ανάλυση κυκλωμάτων παριστάνεται με το ισοδύναμό του, δηλαδή μιας πηγής ρεύματος I_n . Η σχετική διακύμανση ορίζεται ως,

$$\frac{I_n}{I_{dc}} = \sqrt{\frac{2e\Delta f}{I_{dc}}}$$

Το ρεύμα που δίνει θόρυβο βολής ίσο με θόρυβο Johnson για αντιστάτη $R=10 \text{ k}\Omega$ σε εύρος συχνοτήτων $\Delta f=10 \text{ kHz}$ υπολογίζεται εύκολα και είναι $I_{dc}=2 \text{ mA}$.

Η κατανομή του θορύβου βολής είναι και αυτή γκαουσιανή, θεωρώντας ότι τα φορτία κινούνται τυχαία χωρίς μεταξύ τους συσχετίσεις. Αυτό είναι αλήθεια για διεπαφή pn αλλά όχι σε μεταλλικούς αγωγούς όπου η κίνηση έχει να κάνει με φορτία που έχουν συσχετίσεις μεγάλων αποστάσεων. Έτσι το ρεύμα σε ωμικές αντιστάσεις έχει πολύ λιγότερο θόρυβο από ότι προβλέπεται από την παραπάνω σχέση. Επίσης, στη διάταξη transistor που λειτουργεί ως πηγή ρεύματος, η αρνητική ανασύζευξη μικραίνει το θόρυβο βολής.

γ) Θόρυβος 1/f (Flicker noise)

Εμφανίζεται κυρίως σε χαμηλές συχνότητες, μικρότερες των 100 Hz. Η ισχύς του μεταβάλλεται περίπου ως 1/f (ροζ θόρυβος – pink noise). Σε αντιστάτες έχει να κάνει με την ειδική κατασκευή τους, όπως το υλικό και τις συνδέσεις των ακροδεκτών. Ενδεικτικές τιμές αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα.

Είδος αντιστάτη	Θόρυβος (μV/V στα άκρα του)
άνθρακα	0,10-3,0
φίλμ-άνθρακα	0,05-0,3
Φίλμ-μετάλλου	0,02-0,2
τυλιγμένο σύρμα	0,01-0,2

Τέτοιου τύπου θόρυβος απαντάται στην ταχύτητα των κυμάτων των ωκεανών, στη ροή της άμμου στην κλεψύδρα. Σε ροή του Νείλου, όπως μετρήθηκε επί 2000 χρόνια, το συμπέρασμα είναι ότι δε φαίνεται να υπάρχει ενιαία αρχή για όλα αυτά. Σωστότερα, η ισχύς του θορύβου είναι της μορφής,

$$\frac{1}{f^n} \text{ με } 0,9 \leq n \leq 1,35$$

Η ολίσθηση (dc offset) είναι παράδειγμα τέτοιου θορύβου, χαμηλής συχνότητας. Συναντάται και κυριαρχεί στους ενισχυτές στην περιοχή του συνεχούς και γι' αυτό προσπαθούμε να μεταθέσουμε, με την τεχνική της διαμόρφωσης, τα σήματα χαμηλών συχνοτήτων σε υψηλές συχνότητες.

Σύμφωνα με την βασική ιδιότητα που αναφέρθηκε, η διασπορά του ρεύματος (Δi_{fl}^2) και της τάσης (Δv_{fl}^2) του θορύβου αυτού, θα εξαρτώνται από τη συχνότητα όπως το 1/f, διότι η ισχύς είναι ανάλογη των μεγεθών αυτών, δηλαδή,

$$\frac{\Delta i_{fl}^2}{\Delta f} = k_i \frac{1}{f} \text{ και } \frac{\Delta v_{fl}^2}{\Delta f} = k_v \frac{1}{f}$$

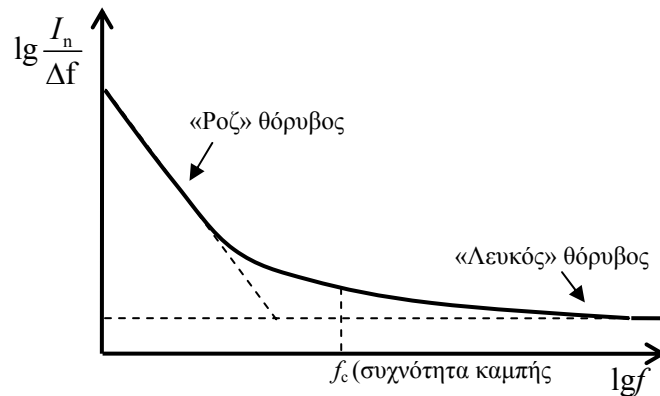
όπου k_i και k_v σταθερές για το ρεύμα και την τάση αντίστοιχα. Ολοκληρώνοντας σε μια περιοχή συχνοτήτων από f_1 ως f_2 , βρίσκουμε τη συνολική ισχύ του θορύβου ανά μονάδα αντίστασης φόρτου ως εξής,

$$i_{fl}^2 = k_i \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{f} = k_i \ln \frac{f_2}{f_1}$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνολική ισχύς εξαρτάται μόνο από το πηλίκο των ακραίων συχνοτήτων και όχι από τις ίδιες τις συχνότητες. Ο λογάριθμος του ρεύματος rms υπολογίζεται από τη σχέση,

$$\lg \frac{I_n}{\sqrt{\Delta f}} = k_i \lg \frac{1}{f} = -k_i \lg f$$

και επομένως σε λογαριθμικές κλίμακες η γραφική του παράσταση είναι ευθεία με κλίση $-k_i$ (βλέπε Σχ. 2.2).



Σχήμα 2.2 Το φάσμα του ρεύματος rms του θορύβου Flicker για χαμηλές συχνότητες. Στις υψηλές επικρατεί πάντοτε ο «λευκός» θόρυβος.

Στις περιπτώσεις που το σήμα είναι γνωστό, ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο, (Signal-to-noise ratio, SNR) σε dB ορίζεται ως,

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \lg\left(\frac{V_s^2}{V_n^2}\right)$$

Όπου V_s η τάση rms του σήματος και V_n η τάση rms του συνολικού θορύβου του ενισχυτή. Η σχέση αυτή ισχύει για δεδομένο εύρος ζώνης και κεντρική συχνότητα της ζώνης αυτής.

Επίσης, ορίζεται ο λεγόμενος «Δείκτης Θορύβου» (Noise Figure, NF) ως το πηλίκο της τάσης εξόδου του πραγματικού ενισχυτή προς την τάση εξόδου ιδανικού ενισχυτή ίδιας ενίσχυσης, με την προϋπόθεση ότι ο αντιστάτης στην είσοδο, R_s , είναι ίδιος και για τις δύο περιπτώσεις. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το θόρυβο Johnson ως σήμα εισόδου, τότε προκύπτει,

$$\text{NF}_{\text{dB}} = 10 \lg \frac{4kTR_s \Delta f + V_n^2}{4kTR_s \Delta f} = 10 \lg \left(1 + \frac{V_n^2 / \Delta f}{4kTR_s} \right)$$

Η ποσότητα $V_n^2 / \Delta f$ είναι ο όρος της συμβολής του ενισχυτή σε θόρυβο ανά μονάδα συχνότητας. Αν ο θόρυβος του ενισχυτή υπερέρχει κατά πολύ του θορύβου Johnson, τότε το NF_{dB} προσεγγίζεται από τη σχέση,

$$\text{NF}_{\text{dB}} = 10 \lg \left(\frac{V_n^2 / \Delta f}{4kTR_s} \right)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο μπορεί επίσης να γραφτεί ως,

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \lg\left(\frac{V_s^2}{4kTR_s}\right) - \text{NF}_{\text{dB}}$$

Για τον περιορισμό (ή και αποφυγή) των εξωτερικών θορύβων (noise interference) στα ηλεκτρονικά κυκλώματα εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές, όπως η θωράκιση, η αποφυγή των βρόχων γείωσης κ.α. Επιπλέον, όταν το σύνολο των θορύβων είναι δεδομένο και αναπόφευκτη η παρουσία τους, εφαρμόζονται μέθοδοι περιορισμού τους, όπως π.χ. η συρρίκνωση του εύρους ζώνης (bandwidth) στο ελάχιστο απαιτούμενο χωρίς να αλλοιωθεί η μορφή (ή πληροφορία) του σήματος, όπως θα δούμε στα επόμενα.

Στις περιπτώσεις που διεξάγονται μετρήσεις από κάποιο ανιχνευτή σε περιβάλλον που υπάρχει υπόβαθρο, μέσης τιμής B , (εξωτερικοί θόρυβοι ή ανεπιθύμητα σήματα), το (επιθυμητό) σήμα, μέσης τιμής S , συνυπάρχει με το θόρυβο με αποτέλεσμα η μέτρησή μας να είναι $S_m = S + B$. Η μέση τιμή του σήματος εκτιμάται από τη διαφορά $S_m - B$, ενώ ο θόρυβος θα είναι η συνολική διακύμανση τόσο του υποβάθρου, όσο και άλλων θορύβων που επιδρούν κατά τη μέτρηση. Λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα, η διακύμανση του συνολικού θορύβου, αμελώντας το θόρυβο του ενισχυτή, προκύπτει από τη σχέση,

$$\sigma_{tb}^2 = \sigma_b^2 + \sigma_d^2$$

όπου οι σ_b , σ_d οι τυπικές αποκλίσεις των διακυμάνσεων του υποβάθρου, εσωτερικού θορύβου (σκοτεινού ρεύματος) αντίστοιχα.

Όμως, εκτός της διακύμανσης αυτής, έχουμε και τη διακύμανση του σήματος, που λόγω του έμμεσου προσδιορισμού του (μέσω της διαφοράς $S_m - B$) προκύπτει από τη σχέση,

$$\sigma_s^2 = \sigma_m^2 + \sigma_{tb}^2$$

Συνεπώς, ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο (SNR) υπολογίζεται από το πηλίκο,

$$\text{SNR} = \frac{S_m - B}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_{tb}^2}} = \frac{S_m - B}{\sqrt{\sigma_m^2 + 2(\sigma_b^2 + \sigma_d^2)}}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνεισφορά της ολικής διακύμανσης του θορύβου εμφανίζεται με ένα συντελεστή 2, έναντι της αντίστοιχης συνεισφοράς του σήματος. Στην ειδική περίπτωση που το σήμα είναι πολύ ασθενικό σε σχέση με το υπόβαθρο και τους υπόλοιπους θορύβους, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση, $\sigma_s^2 \ll \sigma_{tb}^2$ και $S_m \approx B$, οπότε η έκφραση για το SNR γίνεται,

$$\text{SNR} = \frac{S_m}{\sqrt{\sigma_{tb}^2}} = \frac{S_m}{\sigma_{tb}}$$

Αν ο ανιχνευτής είναι PM, τότε οι διακυμάνσεις αφορούν θόρυβο βολής και υπολογίζονται μέσω της ιδιότητας της κατανομής Poisson, $\sigma \equiv n = \sqrt{N}$, οπότε και $\sigma^2 = n^2 = N$, όπου N ο μέσος αριθμός των παλμών που μετρώνται στην άνοδο του (έξοδο) σε χρόνο T . Έστω N_m και N_b οι μέσοι αριθμοί παλμών του μετρούμενου σήματος και του υποβάθρου (χωρίς σήμα) αντίστοιχα. Επίσης, n_b , n_e οι

διακυμάνσεις του υποβάθρου και σκοτεινού ρεύματος αντίστοιχα. Τότε, ο SNR με βάση την προηγούμενη γενική σχέση προκύπτει,

$$\text{SNR} = \frac{N_s}{n_t} = \frac{N_m - N_b}{\sqrt{N_m + 2(N_b + N_d)}}$$

όπου n_t η διακύμανση του συνολικού θορύβου.

Αν γίνει αναγωγή των παραπάνω μετρήσεων ανά μονάδα χρόνου, τότε εύκολα προκύπτει η σχέση,

$$\text{SNR} = \frac{(N'_m - N'_b)\sqrt{T}}{\sqrt{N' + 2(N'_b + N'_d)}}$$

όπου τα τονούμενα μεγέθη προκύπτουν μετά την αναγωγή, δηλαδή γενικά $N' = N/T$. Επομένως, ο SNR μπορεί να βελτιωθεί με την επιλογή μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος καταμέτρησης. Η βελτίωση αυτή επιτυγχάνεται με τον παράγοντα $\sqrt{T_2/T_1}$, όπου T_1 και T_2 είναι ο αρχικός και ο νέος (μεγαλύτερος) χρόνος μέτρησης.

Για την περίπτωση του πολύ ασθενικού σήματος σε σχέση με το υπόβαθρο (το σκοτεινό ρεύμα είναι αμελητέο σε μια τέτοια κατάσταση) η τελευταία γενική σχέση γίνεται,

$$\text{SNR} = \frac{N'_m\sqrt{T}}{\sqrt{N'_b}}$$

2.2 Τεχνικές βελτίωσης του SNR

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές βελτίωσης του λόγου σήματος-προς-θόρυβο στις μετρήσεις. Παρακάτω θα περιγράψουμε δύο από αυτές, τη μέθοδο μέτρησης με πολυκαναλικό απαριθμητή (Multi Channel Scaler, MCS) και τη μέθοδο «κλειδώματος φάσης» (Lock-in). Γενικά, οι μέθοδοι αυτές στηρίζονται στη μείωση του εύρους ζώνης συχνοτήτων, στις οποίες αναφέρονται οι μετρήσεις, περιορίζοντας το θόρυβο. Επειδή το φάσμα του θορύβου κατά κανόνα εκτείνεται σε πολύ ευρεία περιοχή, όπως είδαμε στα προηγούμενα, η συρρίκνωση του εύρους ζώνης συνεπάγεται αποκοπή μεγάλου μέρους της ισχύος του θορύβου, ενώ δε συμβαίνει το ίδιο με το σήμα το οποίο συνήθως εκτείνεται σε πολύ μικρότερο εύρος. Ειδικότερα στην περίπτωση που το σήμα μπορεί να γίνει περιοδικό, ο θόρυβος περιορίζεται δραστικά, διότι τότε, η φασματική περιοχή του σήματος εστιάζεται στις στενές (γνωστές εν γένει) περιοχές της θεμελιώδους συχνότητας και μερικών αρμονικών.

α) Πολυκαναλικοί απαριθμητές (MCS)

Συνήθως, όταν χρησιμοποιούμε τεχνικές απαρίθμησης παλμών, όπως φωτοπολλαπλασιαστές (για φως χαμηλής έντασης), μετράμε παλμούς που ο ρυθμός τους να είναι ανάλογος του ύψους του σήματος που γενικώς μεταβάλλεται με το χρόνο. Αυτή η δυνατότητα, σήμερα, μπορεί να επιτευχθεί τεχνητά και σε πολλές άλλες περιπτώσεις αναλογικών σημάτων με χρήση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων του τύπου «Μετατροπέα Πλάτους σε Συχνότητα» (Amplitude to Frequency Converter). Ακόμη, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι επιθυμητό το σήμα να έχει περιοδικότητα και αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλο σχεδιασμό του πειράματος ή εκμεταλλευόμενοι τη φύση του ίδιου του φαινομένου που εξετάζουμε.

Ο πολυκαναλικός απαριθμητής, είναι συσκευή που περιλαμβάνει ένα σύνολο από καταχωρητές (συνήθως 1024 ή περισσότερους) που ο καθένας μπορεί να αποθηκεύσει (συνήθως) τους αριθμούς από μηδέν μέχρι περίπου 1 000 000 (δυναδικός 20 bit ή BCD 24 bit). Στην είσοδο του δέχεται παλμούς σήματος ή συνεχώς μεταβαλλόμενες με το χρόνο τάσεις. Συγχρόνως, έχει είσοδο για παλμό μετάβασης στο επόμενο κανάλι. Κάθε φορά που εμφανίζεται ο παλμός αυτός η συσκευή MCS αυξάνει κατά ένα τον αριθμό διεύθυνσης στο κανάλι μνήμης που την τρέχουσα στιγμή δείχνει η διεύθυνση. Υπάρχουν επίσης και άλλες εισοδοί, όπως αυτή για να γίνει η διεύθυνση μηδέν (reset), μηδενισμού των καταχωρητών κ.α. Αν στην είσοδο του προς μέτρηση σήματος παρέχονται αναλογικά σήματα και όχι ριπές παλμών, το MCS μετατρέπει τα σήματα αυτά σε ριπές παλμών μέσω της βαθμίδας μετατροπής Analogue to Frequency Converter, AFC.

Ας υποθέσουμε ότι το σήμα είναι περιοδικά μεταβαλλόμενο με περίοδο T και ότι, μετά τη μετατροπή, καταφθάνουν στην είσοδο παλμοί με ρυθμό ανάλογο του ύψους του σήματος. Με τους παλμούς αυτούς συνυπάρχουν και εκείνοι του θορύβου που κατανέμονται τυχαία στο χρόνο. Στο Σχ. 2.3 φαίνεται μια αναπαράσταση της συσκευής MCS καθώς και τα χρονικά διαγράμματα του σήματος, των παλμών από τη μετατροπή AFC και των παλμών θορύβου.

Αρχικά στέλνονται παλμοί χρονισμού στην είσοδο για μετάβαση στο συγκεκριμένο κανάλι και στην είσοδο για μηδενισμό, έτσι ώστε όλα τα κανάλια των καταχωρητών (1024) να «σαρωθούν» περιοδικά με περίοδο T . Με τον τρόπο αυτό συσσωρεύονται καταχωρήσεις καταμετρούμενων παλμών στα αντίστοιχα κανάλια, από αυτούς που οφείλονται τόσο στο σήμα όσο και στο θόρυβο (ή γενικότερα υπόβαθρο). Με την πάροδο του χρόνου προστίθενται παλμοί σήματος ενώ παλμοί θορύβου συνεισφέρουν πρακτικώς σε όλα τα κανάλια, αφού η σάρωση γίνεται με την

περιοδικότητα του σήματος και αυτοί έχουν στοχαστικό χαρακτήρα από περίοδο σε περίοδο. Έστω ότι το υπόστρωμα είναι τέτοιο που δίνει κατά μέσον όρο, n_b παλμούς ανά κανάλι και ανά σάρωση. Το δε σήμα, έστω ότι δίνει n_s παλμούς σε κάθε κανάλι ομάδων καναλιών. Έστω ότι ο λόγος σήματος-προς-υπόστρωμα (S/B) είναι πολύ μικρότερος της μονάδας (πολύ δυσμενής περίπτωση), που σημαίνει ότι $n_s \ll n_b$. Αρχικά, χωρίς βαθύτερη ανάλυση, μπορεί να νομίσει κανείς ότι όσες σαρώσεις και να γίνουν, ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο (SNR) δε θα αυξηθεί και θα παραμένει ενδεχομένως μικρότερος της μονάδας. Όμως, συμβαίνει κάτι διαφορετικό που οδηγεί σε βελτίωση: Αυτό που χαρακτηρίζει το θόρυβο δεν είναι ο απόλυτος μέσος αριθμός «γεγονότων» ανά κανάλι αλλά η αντίστοιχη διακύμανση του πλήθους «γεγονότων». Η διακύμανση αυτή ανά κανάλι είναι $\sqrt{n_s + n_b}$ λόγω της κατανομής Poisson. Αλλά δεχθήκαμε ότι $n_s \ll n_b$, οπότε $\sqrt{n_s + n_b} \approx \sqrt{n_b}$. Μετά από ένα αριθμό σαρώσεων, N_σ , η διακύμανση ανά κανάλι θα είναι $\sqrt{N_\sigma n_b}$, ενώ το σήμα $N_\sigma n_s$. Αν επιθυμούμε να επιτύχουμε το σήμα να δίνει N φορές η διακύμανση, τότε,

$$N\sqrt{N_\sigma n_b} \approx N_\sigma n_s$$

άρα χρειάζονται,

$$N_\sigma \approx \frac{N^2 n_b}{n_s}$$

Στην τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι, μπορεί να επιτευχθεί οποιαδήποτε τιμή του N , αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλο αριθμό σαρώσεων. Δηλαδή, έχουμε ανάδειξη του σήματος πάνω από τη διακύμανση παρά το υπερβολικό υπόστρωμα που υποθέσαμε. Στο Σχ. 2.3. παρουσιάζεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα φάσματος που έχει ληφθεί με διαφορετικό αριθμό σαρώσεων.

Παρακάτω δίνουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

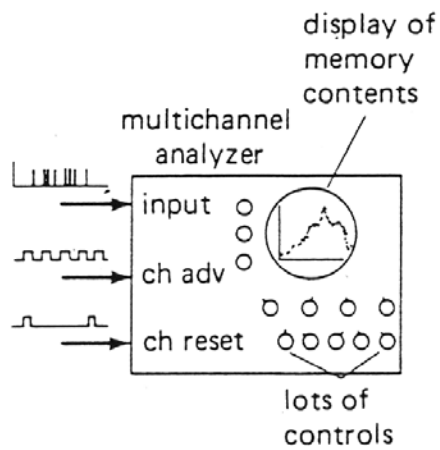
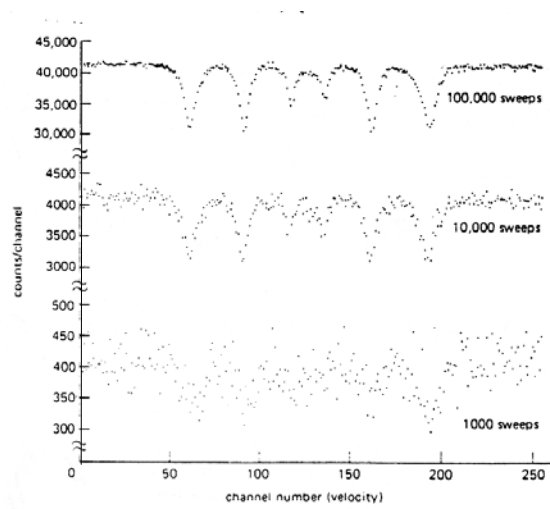
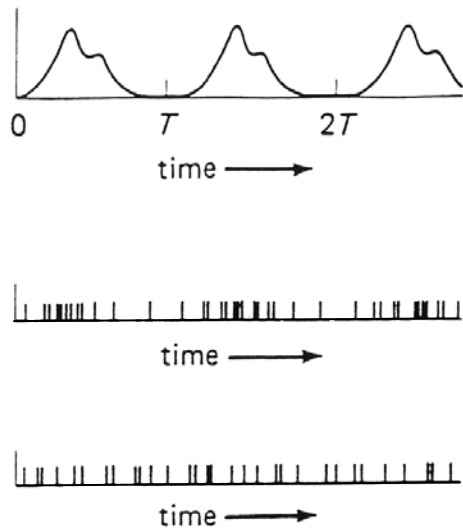
Έστω, $n_s=10$ σε ένα μόνο κανάλι, $n_b=1000$ σε όλα τα κανάλια, οπότε έχουμε λόγο σήματος προς υπόστρωμα, $n_s / n_b = 0,01$. Στην πρώτη σάρωση, κάθε κανάλι θα έχει

καταγράψει $1000 \pm \sqrt{1000}$ παλμούς υποστρώματος, ενώ το κανάλι του σήματος $1010 \pm \sqrt{1010}$. Συνεπώς το σήμα είναι «πνιγμένο» στο υπόβαθρο. Το κρίσιμο μέγεθος που σχετίζεται με τη δυνατότητα ανάδειξης του σήματος είναι ο λόγος παλμών σήματος στο κανάλι δια της διακύμανσης ανά κανάλι, που στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$\frac{10}{\sqrt{1010}} \approx \frac{10}{\sqrt{1000}} \approx 0,3$$

Μετά από 1000 σαρώσεις θα προκύψει $\frac{1000 \times 10}{\sqrt{1000 \times 1010}} \approx 10$, δηλαδή το σήμα θα γίνει

10 φορές μεγαλύτερο από τη διακύμανση.



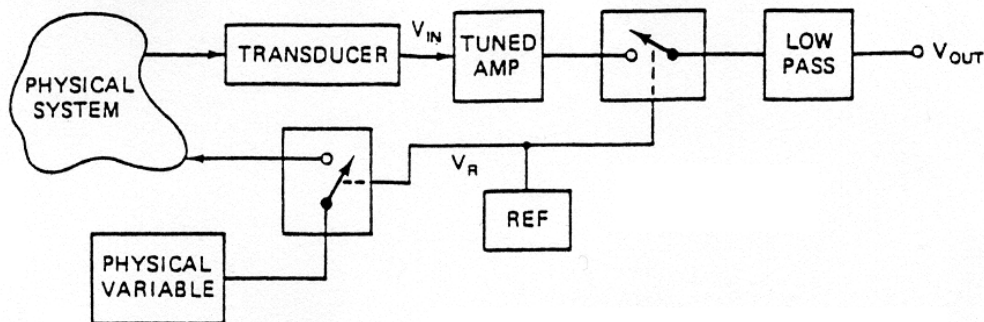
Σχήμα 2.3. Χρονικά διαγράμματα του αναλογικού σήματος, των παλμών από το AFC και των παλμών θορύβου και όψη συσκευής MCS (αριστερά). Φάσμα απορρόφησης Mössbauer, όπου φαίνεται η βελτίωση του SNR με τον αριθμό των σαρώσεων (πάνω).

β) Μέθοδος «κλειδώματος» (Lock-in)

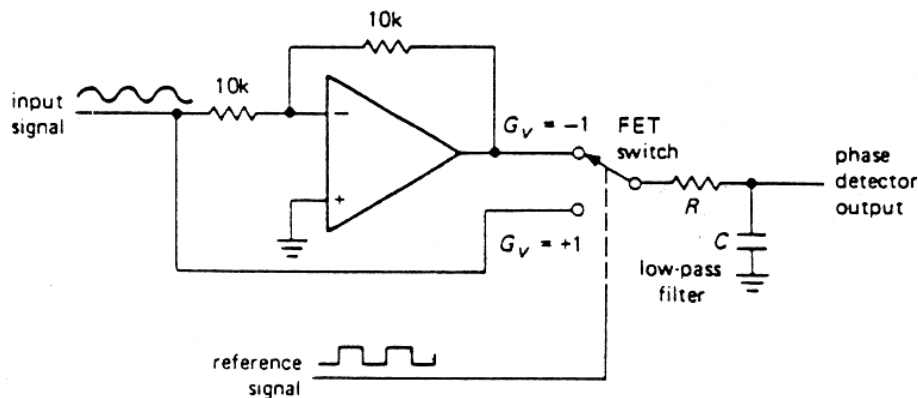
Με τη μέθοδο αυτή είναι εφικτές μετρήσεις με πολύ υψηλό λόγο σήματος-προς-θόρυβο. Η μέθοδος βασίζεται στην ανίχνευση σημάτων σύμφωνων σε συχνότητα με ένα σήμα αναφοράς συχνότητας f_R . Με τον τρόπο αυτό απορρίπτονται όλες οι μη σύμφωνες συνιστώσες συχνοτήτων που συνυπάρχουν, όπως ο θόρυβος, ακόμα και αν είναι πολύ ισχυρότερος από το μετρούμενο σήμα.

Η αρχή της μεθόδου μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσω του διαγράμματος βαθμίδων του Σχ. 2.4. Το σήμα αναφοράς (reference, REF) ενεργοποιεί περιοδικά το φυσικό σύστημα και ταυτόχρονα επιτρέπει την «παρατήρηση» του σήματος από την έξοδο ενός ενισχυτή. Το βασικό κύκλωμα με το οποίο πραγματοποιείται η μέθοδος «κλειδώματος» φαίνεται στο Σχ. 2.6 και λέγεται «Γραμμικός Ανιχνευτής Φάσης». Παρακάτω περιγράφομε αναλυτικά τη διαδικασία της μεθόδου αναφερόμενοι στο ίδιο σχήμα σχήμα.

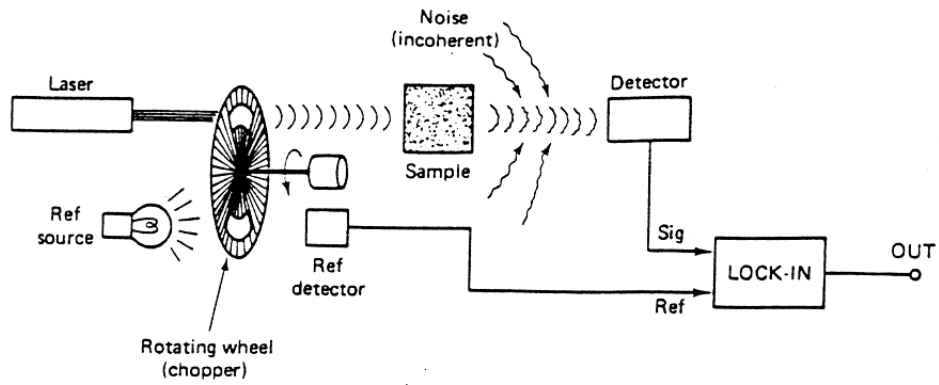
Ας υποθέσουμε ότι το σήμα εισόδου (input signal) είναι αρμονικό της μορφής $V_{IN} = \sin(\omega t + \varphi)$. Το σήμα αναφοράς (reference signal) είναι ένα ορθογώνιο σήμα με περίοδο, T , ίδια με του σήματος. Το φ είναι η διαφορά φάσης με το σήμα αναφοράς, έτσι που, όταν το σήμα είναι μέγιστο θετικό, το σήμα αναφοράς να είναι και αυτό μέγιστο θετικό και να μηδενίζονται μαζί. Το σήμα αναφοράς κάνει την ενίσχυση της διάταξης, G_V , με εναλλαγή τιμών από -1 σε +1 κάθε μισή περίοδο. Το βαθυπερατό φίλτρο δίνει στην έξοδο του τη μέση τιμή του σήματος εξόδου του κυκλώματος, που αποτελεί τη λεγόμενη έξοδο του ανιχνευτή φάσης (Phase Detector Output, PDO). Η έξοδος αυτή, V_{PDO} , είναι ένα σήμα συνεχούς (dc).



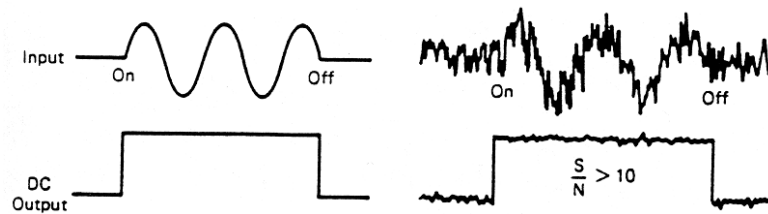
Σχήμα 2.4. Διάγραμμα βαθμίδων της διάταξης της μεθόδου «κλειδώματος» (Lock-in).



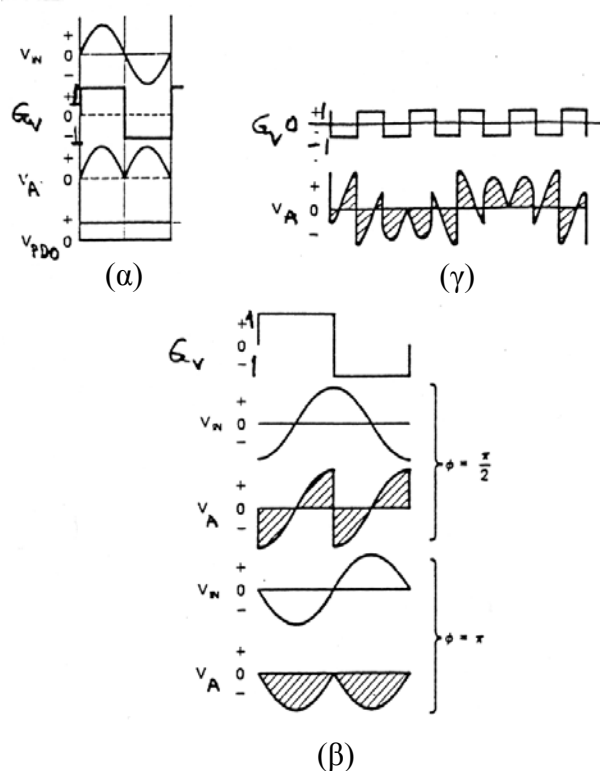
Σχήμα 2.5. Κύκλωμα Γραμμικού Ανιχνευτή Φάσης.



Σχήμα 2.6. Παραδείγματα της μεθόδου: καταγραφή απορρόφησης υλικού.



Σχήμα 2.7. Διαγράμματα που δείχνουν τη σημαντική βελτίωση του *SNR*.



Σχήμα 2.8. Παραδείγματα με διαφορές φάσης 0, $\pi/2$ και π .

Στο Σχ. 2.8 (α) βλέπουμε τις κυματομορφές που προκύπτουν στην περίπτωση που το σήμα αναφοράς και το αρμονικό σήμα είναι σε φάση $\varphi=0$. Το σήμα V_{IN} πολλαπλασιάζεται επί G_v και προκύπτει η τάση στην έξοδο του ενισχυτή V_A η οποία οδηγείται στο βαθυπερατό φίλτρο για να δώσει το σήμα εξόδου V_{PDO} . Στο (β) φαίνεται η περίπτωση διαφορών φάσης $\pi/2$ και π . Το σήμα V_{PDO} θα είναι προφανώς η μέση τιμή του V_A και άρα μηδέν και αρνητικό (ίσου μέτρου με την περίπτωση (α)), αντιστοίχως. Στο (γ) φαίνεται η περίπτωση τυχαίων θετικών και αρνητικών σημάτων, όπου η μέση τιμή του V_A θα προκύπτει μηδέν μετά το φίλτρο, γεγονός που ισοδυναμεί με απόρριψη του θορύβου. Η σταθερά χρόνου του βαθυπερατού φίλτρου επιλέγεται να είναι $\tau = RC \gg T_R = 2\pi/\omega_R$, οπότε η διάταξη lock-in λειτουργεί ως ενισχυτής στενής ζώνης συχνοτήτων (narrow-band amplifier), με εύρος $\Delta f = 1/RC = \omega_b$, όπου ω_b η συχνότητα καμπής του βαθυπερατού φίλτρου. Στην πράξη, η σταθερά χρόνου λαμβάνεται από κλάσμα του δευτερολέπτου ως μερικά δευτερόλεπτα και επομένως η συχνότητα f_R μπορεί να είναι ως και 100 kHz. Στα Σχ. 1.3.9 και 1.3.10 δίνονται παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου αυτής και της βελτίωσης που επιτυγχάνεται στον SNR.

Η ποσοτική ανάλυση γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Αν πάρουμε τη μέση τιμή για χρόνο αρκετά μεγαλύτερο της περιόδου, αυτό ισοδυναμεί με τη μέση τιμή ανά περίοδο. Η έξοδος V_{PDO} υπολογίζεται ως το αλγεβρικό άθροισμα των μέσων τιμών του σήματος πολλαπλασιασμένου επί την εκάστοτε αντίστοιχη ενίσχυση G_v . Έχουμε επομένως,

$$V_{PDO} = \langle E_s \sin(\omega t + \varphi) \rangle_0^{\pi/\omega=T/2} - \langle E_s \sin(\omega t + \varphi) \rangle_{\pi/\omega=T/2}^{2\pi/\omega=T}$$

ή αναλυτικότερα,

$$V_{PDO} = -\frac{E_s}{T\omega} \left\{ \cos\left(\omega \frac{\pi}{\omega} + \varphi\right) - \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) - \cos\left(\omega \frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right) + \cos\left(\omega \frac{\pi}{\omega} + \varphi\right) \right\}$$

και τελικά,

$$V_{PDO} = \frac{2E_s}{\pi} \cos \varphi$$

Δηλαδή η έξοδος V_{PDO} εξαρτάται από τη διαφορά φάσης μεταξύ σήματος εισόδου και σήματος αναφοράς. Μερικές φορές βλέπει κανείς στη σχέση αυτή $-\sin \varphi$ αντί $\cos \varphi$ που οφείλεται στο διαφορετικό ορισμό της διαφοράς φάσης μεταξύ σήματος εισόδου και σήματος αναφοράς. Μπορεί δηλαδή το σήμα να γραφτεί ως $E_s \cos(\omega t + \varphi)$, ενώ το σήμα αναφοράς να παραμένει (ως προς το χρόνο) όπως προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι αν $\varphi = 0$ η έξοδος γίνεται μέγιστη, ενώ όταν $\varphi = \pi/2$ γίνεται μηδέν.

Ας μελετήσουμε και την ακόλουθη περίπτωση. Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι ένα αρμονικό σήμα με κυκλική συχνότητα ω διαφορετική από την κυκλική συχνότητα, ω_R , αναφοράς αλλά παραπλήσιας τιμής. Μπορούμε να πούμε, ότι αν το σήμα είναι $E_s \sin \omega t$ (δηλαδή η διαφορά φάσης με το σήμα αναφοράς είναι μηδέν για $t=0$). Όμως, η χρονική στιγμή t το σήμα θα έχει στιγμιαία φάση $\theta = \omega t$ και το σήμα αναφοράς $\theta_R = \omega_R t$. Υπολογίζουμε τώρα τη στιγμιαία διαφορά φάσης μεταξύ σήματος εισόδου και σήματος αναφοράς, όπως και στα προηγούμενα. Αυτή είναι, $\varphi(t) = \theta - \theta_R = \omega t - \omega_R t = (\omega - \omega_R)t = \Delta\omega \cdot t$, όπου $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_R$. Άρα το σήμα μπορεί να γραφτεί ως,

$$E_s \sin(\omega t) = E_s \sin(\omega t + \omega_R t - \omega_R t) = E_s \sin(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t)$$

Δηλαδή έχουμε σήμα συχνότητας ω_R με διαφορά φάσης $\Delta\omega \cdot t$ ως προς τη φάση του σήματος αναφοράς μεταβαλλόμενη με το χρόνο. Κάνοντας μια διερεύνηση της παραπάνω σχέσης να καταλήξουμε στο σωστό αποτέλεσμα Αν το $\Delta\omega$ είναι πολύ μικρό, τότε για μικρές μεταβολές χρόνου παρατήρησης της τάξης του $T_R (= 2\pi / \omega_R)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, διότι τότε το φ παραμένει σταθερό, ή αν αυτό δεν ισχύει, το $\Delta\omega \cdot t$ είναι μικρό σε σχέση με το $\omega_R t$. Αν αγνοήσουμε την (πολύ μικρή ενδεχομένως) μείωση του ύψους του σήματος από το φίλτρο, θα έχουμε,

$$V_{PDO} = \frac{2E_s}{\pi} \cos(\Delta\omega \cdot t)$$

δηλαδή η έξοδος είναι αρμονικό με το χρόνο σήμα, με συχνότητα πολύ μικρή σε σχέση με τις ω , ω_R . Στην περίπτωση που $\Delta\omega < \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = \omega_b$ το σήμα αυτό θα περάσει χωρίς σημαντική μείωση από το φίλτρο, ενώ αν $\Delta\omega > \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = \omega_b$ θα

περιοριστεί σημαντικά στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου (σχεδόν μηδενική έξοδος). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αρμονικά σήματα έστω και με μικρές διαφορές συχνοτήτων (στην πράξη μερικά Hz ή κλάσμα του Hz, σε σύγκριση πάντα με τη δεδομένη κυκλική συχνότητα καμπής του φίλτρου), σε σχέση με αυτήν του σήματος αναφοράς, δίνουν μηδενική έξοδο ($V_{PDO}=0$). Επίσης, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τυχαίο (στοχαστικού χαρακτήρα) θόρυβο, οι αποκλίσεις συχνότητας $\Delta\omega$ θα είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με την ω_b λόγω του ευρέως και ομοιόμορφου φάσματος του θορύβου («λευκός» θόρυβος), οπότε με βάση τα παραπάνω, η έξοδος θα είναι σχεδόν μηδενική. Συχνότητες του θορύβου παραπλήσιες του σήματος, εν δυνάμει συνεισφέρουν ($\Delta\omega \ll \omega_b$), αλλά η ολική ισχύς τους σ' αυτή τη μικρή περιοχή του φάσματος είναι αμελητέα. Αυτό μπορεί να γίνει επίσης κατανοητό παρατηρώντας ότι ο χρόνος καταγραφής της μέσης τιμής είναι μεγάλος σε σχέση με την περίοδο μεταβολής του θορύβου, οπότε η ισοπίθανη εναλλαγή πολικότητας (- ή +) του θορύβου οδηγεί σε μηδενική μέση τιμή.

Παρακάτω δίνεται η μαθηματική απόδειξη του αποτελέσματος που προέκυψε για μικρές διαφορές στη συχνότητα σήματος εισόδου και σήματος αναφοράς. Στη γενική αυτή περίπτωση, η έξοδος V_{PDO} υπολογίζεται και πάλι με τον ίδιο τρόπο, με μόνη διαφορά ότι τώρα η φάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο,

$$V_{PDO} = \langle E_s \sin(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) \rangle \Big|_{t_1}^{t_1+T_R/2} - \langle E_s \sin(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) \rangle \Big|_{t_1+T_R/2}^{t_1+T_R}$$

υπολογίζουμε στη συνέχεια τους δύο όρους με τις μέσες τιμές με ολοκλήρωση και έχουμε,

$$\begin{aligned} V_{PDO} &= \frac{E_s}{T_R} \int_{t_1}^{t_1+T_R/2} \sin(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) dt - \frac{E_s}{T_R} \int_{t_1+T_R/2}^{t_1+T_R} \sin(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) dt = \\ &= \frac{E_s}{\omega_R T_R} \left[\cos(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) \Big|_{t_1+T_R/2}^{t_1+T_R} - \cos(\omega_R t + \Delta\omega \cdot t) \Big|_{t_1}^{t_1+T_R/2} \right] \end{aligned}$$

Μετά από τις αντικαταστάσεις των ορίων στους δύο όρους, καταλήγουμε στη σχέση,

$$V_{PDO} = \frac{E_s}{\omega_R T_R} \left[\cos(\Delta\omega \cdot t_1 + \Delta\omega \cdot T_R) + 2 \cos(\Delta\omega \cdot t_1 + \Delta\omega \cdot \frac{T_R}{2}) + \cos(\Delta\omega \cdot t_1) \right]$$

Αντικαθιστούμε το χρόνο t_1 με την έκφραση του συναρτήσεως του ακέραιου αριθμού περιόδων που έχουν παρέλθει ως εκείνη τη στιγμή, $t_1 = NT_R$, οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση,

$$V_{PDO} = \frac{E_s}{\omega_R T_R} \left\{ \cos[\Delta\omega \cdot T_R (N+1)] + 2 \cos \left[\Delta\omega \cdot T_R \left(N + \frac{1}{2} \right) \right] + \cos(\Delta\omega \cdot T_R N) \right\}$$

Μετά από επαρκή αριθμό περιόδων N , έτσι ώστε, $N \gg 1$, μπορούμε να δεχθούμε με πολύ καλή προσέγγιση ότι, $N \approx N+1$ και κατά συνέπεια, $N \approx N + \frac{1}{2}$, οπότε τα

ορίσματα στους δύο πρώτους όρους του συνημιτόνου προσεγγίζονται με αυτό του τρίτου και επομένως,

$$V_{PDO} \approx \frac{4E_s}{\omega_R T_R} \cos(\Delta\omega \cdot T_R N) = \frac{2E_s}{\pi} \cos(\Delta\omega \cdot t_1)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για τον αυθαίρετο χρόνο t_1 , επομένως ισχύει και για κάθε άλλο χρόνο t , οπότε λαμβάνουμε την τελική γενική σχέση,

$$V_{PDO} \approx \frac{2E_s}{\pi} \cos(\Delta\omega \cdot t)$$

3. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

3.1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Χρήσιμες στατιστικές κατανομές

Η τυχαία μεταβλητή x_k ακολουθεί τη δυνωμική κατανομή όταν η συνάρτηση πιθανότητας, που ισχύει για k και n ακέραιους, είναι,

$$P(x_k = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

όπου n ο αριθμός δοκιμών, p η πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής και $P(x_k = k)$ η πιθανότητα για ακριβώς k επιτυχίες σε n δοκιμές. Η μέση τιμή της κατανομής είναι $\lambda = np$, οπότε $\sigma^2 = np(1-p) = \lambda(1-p)$, όπου σ^2 η διασπορά και σ η τυπική απόκλιση.

Η διασπορά ορίζεται γενικά από τη σχέση $\sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k - \lambda)^2 P(x_k = k)$

Για $n \rightarrow \infty$ με σταθερή μέση τιμή $\lambda = pn$ (οπότε $p \rightarrow 0$), η δυνωμική κατανομή τείνει στη λεγόμενη κατανομή Poisson (από τον S. D. Poisson στις αρχές του 19^{ου} αιώνα),

$$P(x_k = k) = \frac{(pn)^k e^{-pn}}{k!} \quad \text{ή} \quad P(x_k = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Στην κατανομή αυτή η διασπορά είναι, $\sigma^2 = pn = \lambda$ και επομένως η τυπική απόκλιση, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

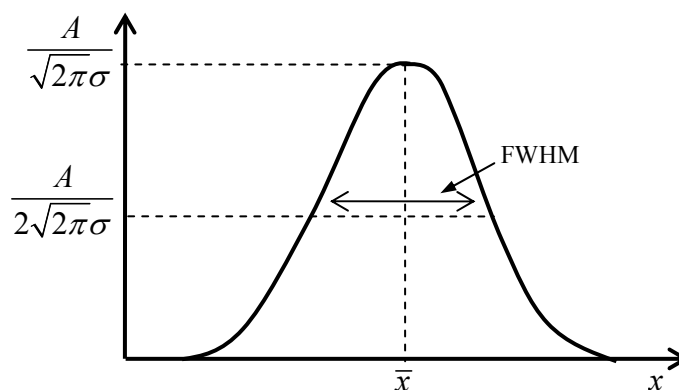
Επίσης, αν $p \leq 0,1$ (δηλαδή για σπάνια γεγονότα) και $\lambda = np \leq 5$ η δυωνυμική κατανομή προσεγγίζεται και πάλι ικανοποιητικά από την Poisson, με την ίδια μέση τιμή λ .

Αν η μέση τιμή είναι μεγαλύτερη από περίπου 10 ($\lambda \geq 10$) η κατανομή Poisson θεωρείται ότι προσεγγίζεται ικανοποιητικά από γκαουσιανή κατανομή. Ο βαθμός προσέγγισης μπορεί να εκτιμηθεί από τους συντελεστές «ασυμμετρίας» α_3 και «κύρτωσης» α_4 . Οι συντελεστές αυτοί στην γκαουσιανή είναι 0 (είναι δηλαδή συμμετρική) και 3, αντίστοιχα, ενώ στην Poisson (που δεν είναι συμμετρική) εξαρτώνται το κλάσμα $1/\sqrt{\lambda}$.

Για $\lambda = 20$ ο α_3 διαφέρει από το μηδέν κατά $1/\sqrt{\lambda} = 1/\sqrt{10} = 0,316$, ενώ ο α_4 προσεγγίζει το 3 κατά $1 - 1/(3\sqrt{\lambda}) = 1 - 1/(3\sqrt{10}) = 0,895$ (89,5 %). Η σχέση ισότητας μεταξύ διασποράς και μέσης τιμής που αναφέρθηκε, διατηρείται σε κάθε περίπτωση ($\sigma^2 = \lambda$). Δηλαδή έχουμε,

$$P(x_k = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(k-\lambda)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left[-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}\right]$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας, v , (ποσοστιαία διασπορά), ορίζεται ως $v = \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sigma}$. Στο Σχ. Π1.1 φαίνεται μια γκαουσιανή κατανομή η οποία είναι πολλαπλασιασμένη με μια αυθαίρετη σταθερά A . Το μέγεθος «Πλήρες Εύρος στο Μισό του Μεγίστου» (Full Width at Half Maximum, FWHM), που φαίνεται στο ίδιο σχήμα, αφορά στο εύρος μεταξύ των σημείων της κατανομής που αντιστοιχούν στο μισό της μέγιστης πιθανότητας,



Σχήμα Π1.1 Γκαουσιανή κατανομή και ορισμός του FWHM.

Επομένως,

$$P(x_k = k) = \frac{A}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{A}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\text{FWHM}}{2}\right)^2 \frac{1}{2\sigma^2}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \exp\left[-\frac{\text{FWHM}^2}{8\sigma^2}\right]$$

οπότε, $\text{FWHM}=2,348\sigma$

Εκτίμηση του μέσου αριθμού φωτοηλεκτρονίων ανά προσπίπτον φωτόνιο σε απαριθμητή-σπινθηριστή με PM

Θεωρούμε ένα φωτοπολλαπλασιαστή στο παράθυρο του οποίου έχει προσαρμοστεί σπινθηριστής τύπου κρυστάλλου NaI. Έστω ότι ένα φωτόνιο ενέργειας $E_\phi=0,5 \text{ MeV}$ διέρχεται από τον σπινθηριστή και όλη η ενέργειά του απορροφάται μέσα στο υλικό. Επίσης, υποθέτουμε ότι το 12 % της ενέργειας αυτής μετατρέπεται σε ορατό φως με μέση ενέργεια $E_\mu=3 \text{ eV}$. Επομένως, η συνολική ενέργεια των φωτονίων αυτών (ορατού φωτός) θα είναι $E_i=0,12 \times E_\phi=60 \text{ keV}$ και ο αριθμός τους $N_\phi = E_\phi / E_\mu = 60000 / 3 = 2 \times 10^4$ φωτόνια. Αν από τη σύζευξη σπινθηριστή-φωτοπολλαπλασιαστή έχουμε κάποια απώλεια, έστω 25 %, θα καταφθάσουν στη φωτοκάθοδο του PM $1,5 \times 10^4$ φωτόνια. Με κβαντική απόδοση 20 % θα παράγονται κατά μέσο όρο 3000 φωτοηλεκτρόνια.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο διακριτική ικανότητα, R , ενός μεγέθους που ορίζεται γενικά ως,

$$R = \frac{\text{FWHM}}{\bar{x}}$$

όπου FWHM είναι το εύρος (μέτρο του εύρους) της κατανομής του μεγέθους x και \bar{x} η μέση τιμή του ίδιου του μεγέθους. Η διακριτική ικανότητα αφορά στη δυνατότητα διάκρισης κορυφών σε ένα σύνθετο φάσμα κατανομών που, εν γένει, είναι χαρακτηριστικό του ανιχνευτή που χρησιμοποιούμε.

Θα δεχθούμε ότι κυριαρχούν οι διακυμάνσεις στο σημείο που συμβαίνει η μετατροπή σε φωτοηλεκτρόνια (φωτοκάθοδος). Αυτή η παραδοχή είναι ρεαλιστική διότι εκεί τα ανιχνευόμενα σωματίδια (φωτόνια) είναι τα ελάχιστα σε όλη την «αλυσίδα» μετατροπών που ακολουθεί. Οπότε θα έχουμε,

$$\text{FWHM} = k \times \text{FWHM}_{pe}$$

όπου k σταθερά και FWHM_{pe} το εύρος της κατανομής των φωτοηλεκτρονίων. Επίσης, $\bar{x} = k\bar{N}_{pe}$, που είναι προφανές.

Όμως γνωρίζουμε ότι $\text{FWHM}_{pe} = 2,35\sigma_{pe} = 2,35\bar{N}_{pe}$, άρα η διακριτική ικανότητα θα είναι,

$$R = \frac{\text{FWHM}}{\bar{x}} = \frac{k \times \text{FWHM}_{pe}}{k \times \bar{N}_{pe}} = \frac{2,35\sqrt{\bar{N}_{pe}}}{\bar{N}_{pe}} = \frac{2,35}{\sqrt{\bar{N}_{pe}}}$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τη διακριτική ικανότητα, R , μπορούμε να εκτιμήσουμε πολύ ικανοποιητικά το μέσο αριθμό των φωτοηλεκτρονίων \bar{N}_{pe} από τη σχέση,

$$\bar{N}_{pe} = \left(\frac{2,35}{R} \right)^2 \approx \frac{5,5}{R^2}$$

Π.χ. αν $R=0,25$ (25 %), προκύπτει $\bar{N}_{pe} = 88$ φωτοηλεκτρόνια ανά προσπίπτον φωτόνιο στη φωτοκάθοδο του PM.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) S. Ramo, Proc. IRE 27(1939)584
- 2) B. B. Rossi, H. H. Staub, Ionization Chambers and Counters, chapter 3, McGraw-Hill (1949)
- 3) ATLAS, Muon Spectrometer Technical Design Report, CERN/LHCC 97-22, June 1997
- 4) CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, Third Edition, by John David Jackson, JOHN WILEY & SONS, INC (1998)
- 5) FOUNDATIONS OF MICROWAVE ENGINEERING by Robert E. Collin, McGraw-Hill Company (1966)
- 6) HANDBUCH DER PHYSIK, BAND XVI, HERAUSGEGEBEN VON S. FLUGGE, Electromagnetic Waveguides and Resonators, by F. E. Borgnis and C. H. Papas, page 285, Springer-Verlag (1958)
- 7) E. Gatti, G. Padovini, V. Radeka, Nucl. Instr. And Meth. 193(1982)651
- 8) Radiation Detection and Measurement (THIRD EDITION), by GLENN F. KNOLL, JOHN WILEY & SONS, INC. (1999)
- 9) Electronics with Digital and Analog Integrated Circuits, by RICHARD J. HIGGINS, PRENTICE-HALL, INC. (1983)
- 10) Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Second Revised Edition, by W. R. Leo, Springer-Verlag (1993)

- 11) Particle Detection with Drift Chambers, by W. Blum, L. Rolandi, Springer-Verlag (1993)
- 12) PRINCIPLES OF OPERATION OF MULTIWIRED PROPORTIONAL AND DRIFT CHAMBERS, (Yellow Report) CERN 77-09, 3 May 1977
- 13) Veljko Radeka, LOW-NOISE TECHNIQUES IN DETECTORS, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 38(1988)217
- 14) R. A. Boie, A. T. Hrisoho, P. Rehak Nucl. Instr. And Methods 192 (1982) 365
- 15) Werner Riegler, Martin Aleksa, Bipolar versus Unipolar Shaping of MDT Signals, ATL-MUON-99-003, Geneva, CERN, 16 March 1999
- 16) ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΘΟΡΥΒΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, του Κ. Καρούμπαλου, ΑΘΗΝΑ 1979
- 17) The ART OF ELECTRONICS (Second Edition), by P. Horowitz, W. Hill, Cambridge Univ. Press (1989)

REFERENCES

- 1) S. Ramo, Currents induced by electron motion, Proc. I.R.E., 27(1939)584
- 2) B. B. Rossi, H. H. Staub, Ionization Chambers and Counters, chapter 3, McGraw-Hill (1949)
- 3) E. Gatti, G. Padovini, V. Radeka, Signal evaluation in multielectrode radiation detectors by means of a time dependent weighting vector, Nucl. Instr. and Meth. 193(1982)651
- 4) ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ Τόμος Ι, του Άγγελου Παπαϊωάννου, ΕΜΠολυτεχνείο, (1993)
- 5) The Physics of Electricity and Magnetism, Second Edition, by William Taussig Scott, John Wiley & Sons, Inc.(1966)
- 6) Foundations of Electromagnetic Theory, 4th edition, by J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, Addison Wesley, (1993)
- 7) CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, Third Edition, by John David Jackson, JOHN WILEY & SONS, INC (1998)
- 8) FOUNDATIONS OF MICROWAVE ENGINEERING by Robert E. Collin, McGraw-Hill Company (1966)
- 9) HANDBUCH DER PHYSIK, BAND XVI, HERAUSGEGEBEN VON S. FLUGGE, Electromagnetic Waveguides and Resonators, by F. E. Borgnis and C. H. Papas, page 285, Springer-Verlag (1958)
- 10) ATLAS, Muon Spectrometer Technical Design Report, CERN/LHCC 97-22, June 1997