06-10-15

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εμμανουήλ Αντ. Δρης

Ομότιμος Καθηγητής

ΕΜΠολυτεχνείο

2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Timeo hominem unius libri.

Thomas Acquinas

Φοβού τον άνθρωπο του ενός βιβλίου.

Θωμάς Ακινάτης

Αυτά που ακολουθούν είναι μια θεώρηση της Κλασικής Μηχανικής, που στην πραγματικότητα αναφέρεται στη Δυναμική, σε ενδιάμεσο επίπεδο παρουσίασης ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα προπτυχιακά μαθήματα ως προχωρημένη Μηχανική.

Μπορεί να είναι χρήσιμο σύγγραμμα και για μεταπτυχιακούς φοιτητές, για να τους θυμίσει πράγματα που ίσως είναι γνωστά αλλά μπορεί να έχουν λησμονηθεί και χρειάζονται για το αντίστοιχο μεταπτυχιακό μάθημα.

Το περιεχόμενο αναφέρεται κυρίως σε αυτό που λέμε Νευτώνεια Θεώρηση της Μηχανικής, ενώ περιλαμβάνει και στοιχεία Αναλυτικής Δυναμικής. Είναι καλό οι προπτυχιακοί φοιτητές που παρακολουθούν ένα τέτοιο μάθημα να έχουν γνώση Μηχανικής επιπέδου Γενικής Φυσικής, καθώς και γνώση Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Εμμανουήλ Αντ. Δρης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2. ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΒΑΡΥΤΗΤΑ.

2.1 Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, Μάζα σώματος

2.2 Πεδίο δυνάμεων, Το βαρυτικό πεδίο

2.3 Συντηρητικό πεδίο δυνάμεων

2.4 Αναπαράσταση πεδίων, Βαρυτικό πεδίο

2.5 Κεντρική δύναμη, Διατήρηση της στροφορμής, Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, Κεντρικό πεδίο βαρύτητας

2.6 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σε κεντρικό συντηρητικό πεδίο δυνάμεων

2.7 Τροχιά σωματίου σε κεντρικό πεδίο βαρύτητας, Νόμοι του Κέπλερ

2.8 Βάρος σώματος

2.9 Προχωρημένα θέματα

1) Δυναμικό λεπτόπαχου, ομογενούς σφαιρικού φλοιού, όταν το δυναμικό υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση $V(r) = -G'/r^{1+a}$

2) Η μεγάλη έκρηξη

3) Ευστάθεια κυκλικής τροχιάς σε κεντρικό (συντηρητικό) πεδίο δυνάμεων

4) Μετάπτωση τροχιάς ένεκα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Αρχικά η Μηχανική θεμελιώθηκε από το Νεύτωνα στη μορφή που φέρει το όνομά του. Αυτή η θεμελίωση μπορεί να αναφερθεί ως Νευτώνεια Θεώρηση της Μηχανικής, η οποία στηρίζεται σε διανυσματικά μεγέθη, από μερικούς λέγεται και Διανυσματική Μηχανική. Εδώ μας απασχολεί ο κλάδος της Μηχανικής που λέγεται Δυναμική. Η Νευτώνεια Θεώρηση στηρίζεται στους Νόμους του Νεύτωνα και κυρίως στο δεύτερο νόμο που λέγεται και Θεμελειώδης Νόμος της Δυναμικής. Βασικά μεγέθη είναι η ορμή και η δύναμη που είναι δυο διανυσματικά μεγέθη. Φυσικά μπορεί κάποιος να ασχοληθεί με καρτεσιανές συνιστώσες των διανυσματικών μεγεθών που είναι βαθμωτά (μονόμετρα) μεγέθη. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Νεύτωνας έκανε ευρεία χρήση Γεωμετρίας.

Θα κάνομε χρήση του όρου σωμάτιο με την έννοια του υλικού σημείου. Ένα υλικό σημείο είναι μακροσκοπικά μικρό αλλά μπορεί μικροσκοπικά να είναι μεγάλο και να αποτελείται από πολλά σωματίδια τα οποία είναι οι απλοί δομικοί λίθοι της ύλης, κουάρκ, νετρίνα, πρωτόνια, ηλεκτρόνια, άτομα, μικρά μόρια κτλ. Ένα σωματίδιο μπορούμε να πούμε πάντα ότι είναι ένα πολύ απλό σωμάτιο αλλά ένα σωμάτιο δεν είναι πάντα ένα σωματίδιο.

Θεμελιώδης έννοια στην Κλασική Μηχανική, δηλαδή στη μη Κβαντική Μηχανική, είναι η δυνατότητα καθορισμού της θέσης ενός υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή. Το σύνολο των θέσεων στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές αποτελεί την τροχιά του υλικού σημείου. Ανάλογα ισχύουν για συστήματα (πολλών) υλικών σημείων. Αυτή η ιδέα που μας φαίνεται προφανής, δεν ισχύει, σύμφωνα με την αποδεκτή θεώρηση της Κοπεχάγης, για την Κβαντομηχανική. Στην Κβαντομηχανική δεν έχει νόημα η τροχιά υλικού σημείου. Θα περιοριστούμε στη μορφή της Κβαντομηχανικής του Schroedinger. Σε αυτή την περίπτωση για την περιγραφή της εξέλιξης στο χρόνο (κίνησης) ενός σωματιδίου (και γενικώς ενός συστήματος) χρησιμοποιείται η κυματοσυνάρτηση. Η κυματοσυνάρτηση είναι μια μιγαδική συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, είναι ένα μιγαδικό πεδίο. Το μέτρο της κυματοσυνάρτησης ενός σωματιδίου στο τετράγωνο δίνει την πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο, που περιγράφει η κυματοσυνάρτηση, σε κάποιο σημείο του χώρου μια χρονική στιγμή. Η κυματοσυνάρτηση είναι λύση της (διαφορικής) εξίσωσης κίνησης του Schroedinger.

Στο νευτώνειο φορμαλισμό έχομε τη θεμελιώδη σχέση (νόμο) της δυναμικής

$$\text{Δύναμη} = \text{ ρυθμός μεταβολής της ορμής, } \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \ .$$

Αυτή είναι η διανυσματική (διαφορική) εξίσωση κίνησης του Νεύτωνα.

Όπως είπαμε, η δυναμική κατά Νεύτωνα εκφράζεται με χρήση διανυσμάτων. Τα διανύσματα μπορεί να αναλύονται σε συνιστώσες. Σε καρτεσιανό σύστημα έχομε ορθογώνιους ευθύγραμμους άξονες συντεταγμένων και οι συνιστώσες του θεμελιώδους νόμου της δυναμικής έχουν την ίδια μορφή και στους τρεις άξονες.

Όταν οι ταχύτητες είναι μικρές σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, έχομε

$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ οπότε η σχέση $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ γίνεται

$$\begin{aligned} &\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{και σε καρτεσιανές συντεταγμένες} \\ &m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z \ . \end{aligned} \qquad (1.1)$$

X, Y, Z είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες της νευτώνειας δύναμης $\vec{F}$.

Στην περίπτωση αρκετά μεγάλων ταχυτήτων, που πρέπει να χρησιμοποιηθεί Ειδική Σχετικότητα, έχομε

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$p_x = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},\ p_y = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},\ p_z = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1.2)$$

οπότε $\dot{p}_x = X,\ \dot{p}_y = Y,\ \dot{p}_z = Z.$

Μια θεμελιώδης αρχή της Νευτώνειας Μηχανικής είναι η αρχή της επαλληλίας των δυνάμεων. Η ισχύς αυτής της αρχής σχετίζεται με τη γραμμικότητα των (διαφορικών) εξισώσεων που περιγράφουν αυτά τα φαινόμενα.

Για σύγκριση αναφέρομε ότι η Γενική Σχετικότητα είναι κατ εξοχήν μη γραμμική, οπότε στη Γενική Σχετικότητα δεν ισχύει κάτι σαν την παραπάνω αρχή της επαλληλίας.

Η αρχή της επαλληλίας των δυνάμεων μας λέει ότι αν έχομε ένα σύστημα από πολλά σωμάτια που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με ένα άλλο εξωτερικό σωμάτιο, τότε η συνολική δύναμη που ασκείται στο εξωτερικό σωμάτιο από όλα τα σωμάτια του συστήματος, ισούται με το γεωμετρικό άθροισμα των δυνάμεων που θα ασκούσε το καθένα από τα σωμάτια αν ήταν μόνο του και αλληλεπιδρούσε με το εξωτερικό σωμάτιο.

Η Γενική Σχετικότητα, γενικώς, δεν είναι διατυπωμένη με δυνάμεις και δυναμικά πεδία όπως είναι η Νευτώνεια Μηχανική και η Ειδική Σχετικότητα. Όμως για ασθενή βαρυτικά πεδία μπορεί κανείς να έχει μιαν ανάλογη προσέγγιση. Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, μπορούμε να πούμε απλοϊκά ότι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις ασκούν οι μάζες και οι ενέργειες. Στη μηδενική προσέγγιση της Γενικής Σχετικότητας καταλήγομε στη γνωστή σχέση της νευτώνειας Μηχανικής. Αυτό σημαίνει ότι αν έχομε μια σφαιρική κατανομή μάζας το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί θα οφείλεται στο άθροισμα των μαζών που την αποτελούν, αυτό σημαίνει ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Σε μια καλύτερη (πρώτη) προσέγγιση το πεδίο θα οφείλεται στην προηγούμενη μάζα συν την ισοδύναμη μάζα που αντιστοιχεί στην ενέργεια βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών των συστατικών μαζών της κατανομής (βαρυτική ιδιοενέργεια). Αυτό σημαίνει προφανώς ότι δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η ενέργεια αλληλεπίδρασης εξαρτάται από την «αρχική» μάζα και την ακτίνα της σφαίρας. Η παραπάνω ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι αρνητική. Οι αλληλεπιδράσεις μπορεί να είναι όχι μόνο βαρυτικές αλλά οποιασδήποτε μορφής, π.χ. ηλεκτρομαγνητικές ή πυρηνικές.

Γενικώς ισχύει ότι η «συνολική» μάζα συστήματος αλληλεπιδρώντων μεταξύ τους σωματίων, του οποίου το κέντρο μάζας είναι ακίνητο, εξαρτάται από τις μάζες των σωματίων, από τις κινητικές τους ενέργειες και τις δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασής των. Για πολλές αλληλεπιδράσεις το φαινόμενο είναι πολύ μικρό.

Ένα γνωστό παράδειγμα όπου το φαινόμενο είναι έντονο και μετρήσιμο, είναι το σύστημα των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με πυρηνικές και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις και αποτελούν τον πυρήνα ή το άτομο. Η μάζα του πυρήνα ή του ατόμου είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των σωματιδίων τους συν την ισοδύναμη μάζα που αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια των σωματιδίων-συστατικών συν τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών των σωματιδίων. Η συνολική κινητική και δυναμική ενέργεια είναι αρνητική και λέγεται έλλειμμα ενέργειας ή έλλειμμα μάζας ή ενέργεια συνδέσεως.

Επομένως η συνολική μάζα του σώματος δεν ισούται με το άθροισμα των μαζών των δομικών του λίθων-σωματιδίων. Με άλλα λόγια, η βαρυτική αλληλεπίδρασή του με άλλα σώματα και η αδράνειά του, εξαρτιόνται από τις μάζες των δομικών του λίθων και από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους.

Στις συνήθεις περιπτώσεις, σε προβλήματα βαρύτητας και ηλεκτροστατικής, αυτό το φαινόμενο είναι πολύ μικρό και δε λαμβάνεται υπόψη, οπότε η αρχή της επαλληλίας ισχύει με μεγάλη ακρίβεια.

Υπάρχουν τρεις νόμοι του Νεύτωνα, οι εξής:

1) Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ή αρχή της αδράνειας λέει ότι, υπάρχει σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο σώμα μακριά από άλλα σώματα είναι ελεύθερο και κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα. Αυτό το σύστημα λέγεται αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ο πρώτος νόμος μας λέει ουσιαστικά ότι υπάρχουν αδρανειακά συστήματα.

2) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ή θεμελιώδης νόμος της δυναμικής λέει ότι, αιτία της μεταβολής της κίνησης (δηλαδή της μεταβολής της διανυσματικής ταχύτητας ή διανυσματικής ορμής) είναι η δράση δύναμης στο σώμα. Οι σχέσεις (1.1) ή (1.2) που είναι οι (διαφορικές) εξισώσεις κίνησης του σώματος, αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και ισχύουν για αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

3) Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή αρχή της ισότητας δράσης και αντίδρασης, είναι μια σημαντική αρχή για την αντιμετώπιση κίνησης συστημάτων υλικών σημείων (συστημάτων σωματίων). Αυτός ο νόμος λέει ότι, αν σωμάτιο ασκεί δύναμη σε άλλο (δράση) τότε και το δεύτερο ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη (αντίδραση) στο πρώτο.

Για τον τρίτο νόμο υπάρχουν δυο περιπτώσεις, σύμφωνα με τη μια οι δυνάμεις είναι πάνω στον ίδιο φορέα, δηλαδή πάνω στην ίδια ευθεία γραμμή που ενώνει τα δυο σωμάτια (ισχυρή αρχή), σύμφωνα με την άλλη οι δυνάμεις είναι αντίθετες αλλά βρίσκονται πάνω σε διαφορετικούς (παράλληλους) φορείς (ασθενής αρχή). Η ισχυρή αρχή είναι η συνηθέστερη.

Ο τρίτος νόμος ισχύει για πολλές περιπτώσεις δυνάμεων αλλά όχι πάντα.

Ο νόμος στην ισχυρή διατύπωσή του ισχύει για τις δυνάμεις στην επαφή δυο σωμάτων, για τις ηλεκτροστατικές δυνάμεις, για τις βαρυτικές στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής κτλ. Όταν υπάρχουν μαγνητικές δυνάμεις, τότε γενικώς δεν ισχύει η ανωτέρω αρχή. Επίσης η αρχή δεν ισχύει γενικώς, αν ληφθεί υπόψη η διάδοση με πεπερασμένη ταχύτητα των αλληλεπιδράσεων,

Στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, ισχύει η Αρχή της Ισοδυναμίας, η οποία ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο και στα πλαίσια της Κλασικής Μηχανικής. Η Αρχή της Ισοδυναμίας στην απλή μορφή της λέει ότι: Αν ένα σύστημα αναφοράς, αρκούντως μικρών διαστάσεων (local system, τοπικό σύστημα), «πέφτει» ελεύθερα επί μικρό χρονικό διάστημα, μέσα σε εξωτερικό πεδίο βαρύτητας τότε αυτό είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πέφτει ελεύθερα σημαίνει ότι κινείται με την επιτάχυνση της βαρύτητας που αντιστοιχεί στο εν λόγω εξωτερικό βαρυτικό πεδίο. Το «μικρό» σύστημα βρίσκεται σε μικρή περιοχή του εξωτερικού πεδίου στην οποία το πεδίο είναι περίπου ομογενές. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, για το παραπάνω αδρανειακό σύστημα ισχύει η Ειδική Σχετικότητα και οι δυνάμεις που χρειάζονται για την εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της δυναμικής, σε σύστημα υλικών σημείων είναι οι ασκούμενες στο σύστημα υλικών σημείων μη βαρυτικές δυνάμεις και οι εσωτερικές βαρυτικές δυνάμεις του ανωτέρω συστήματος υλικών σημείων.

Σύμφωνα με την αρχή του αναλλοίωτου των βασικών νόμων της μηχανικής ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου ή του Lorentz, ισχύει ότι, αν οι εξισώσεις κίνησης και η αρχή της αδράνειας ισχύουν για κάποιο σύστημα αναφοράς τότε ισχύουν και για κάθε άλλο σύστημα που κινείται ως προς το πρώτο με σταθερή διανυσματική ταχύτητα ως προς αυτό. Δηλαδή υπάρχουν άπειρα αδρανειακά συστήματα.

Είναι ευνόητο ότι αν κάνομε χρήση της αρχής της ισοδυναμίας, μπορεί να έχομε τοπικά αδρανειακά συστήματα σε ελεύθερη πτώση μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να υπάρχει επιτάχυνση του ενός αδρανειακού συστήματος ως προς το άλλο.

Οι «βασικές» δυνάμεις που ασκούνται σε υλικά σημεία, δηλαδή σε σωμάτια (βαρυτική και ηλεκτρομαγνητική) με τις οποίες ασχολείται η κλασική μηχανική, γενικώς μπορεί να εξαρτώνται από τη θέση, από την ταχύτητα, και από το χρόνο αλλά όχι από την επιτάχυνση, δηλαδή ισχύει $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Η περίπτωση εξάρτησης από την ταχύτητα βασικής δύναμης είναι αυτή της μαγνητικής δύναμης η οποία εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα. Για μη βασικές δυνάμεις, όπως είναι διάφορες δυνάμεις τριβής μεταξύ στερεών επιφανειών ή τριβές που σχετίζονται με ρευστά, οι δυνάμεις μπορεί να εξαρτώνται από την ταχύτητα με πιο πολύπλοκο τρόπο.

Υπάρχουν περιπτώσεις, που αφορούν σε πιο σύνθετα σώματα όπως στερεά, στα πλαίσια της κλασικής δυναμικής, όπου για ευκολία μη βασικές δυνάμεις μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτιόνται από την επιτάχυνση. Για παράδειγμα κατά την κίνηση ενός πλοίου το πλοίο κινεί ποσότητα από το νερό που το περιβάλλει. Έτσι μπορούμε να θεωρήσομε ότι η «συλλογική», η ενεργός, δύναμη, που ασκείται πάνω στο πλοίο από το νερό εξαρτάται από την επιτάχυνση του πλοίου.

Ακόμη και στην ηλεκτροδυναμική η δύναμη αντίδρασης ένεκα ακτινοβολίας που ασκείται σε φορτισμένο σωμάτιο το οποίο επιταχύνεται και γι αυτό ακτινοβολεί, εξαρτάται από την παράγωγο ως προς το χρόνο της επιτάχυνσης του σωματίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παραβιάζεται η αιτιότητα, ευτυχώς για πάρα πολύ μικρούς χρόνους έτσι ώστε να μην υπάρχουν ανιχνεύσιμες συνέπειες αυτού του φαινομένου.

Μπορεί να δειχτεί ότι, εφόσον για τις βασικές δυνάμεις ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και η αρχή της επαλληλίας, δε μπορεί αυτές οι δυνάμεις να εξαρτώνται από την επιτάχυνση του σώματος στο οποίο ασκούνται. Αυτό αναλύεται στο βιβλίο Μηχανικής του L. A. Pars.

Υπενθυμίζομε σε αυτό το σημείο ότι η φύση είναι τέτοια που στις εξισώσεις κίνησης έχομε μόνο μέχρι δεύτερες παραγώγους και αυτό σχετίζεται με το (ή μπορούμε να πούμε ότι αυτό οδηγεί στο) ότι, ο προσδιορισμός της κίνησης εξαρτάται μόνο από την αρχική θέση και αρχική ταχύτητα (η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της θέσης ως προς το χρόνο) και όχι από αρχικές τιμές και άλλων ανωτέρων παραγώγων της θέσης, όπως είναι η επιτάχυνση.

Η κλασική μηχανική, σε αντίθεση με την κβαντική μηχανική, εφαρμόζεται για συστήματα, σωμάτια ακόμη και σωματίδια αρκεί οι κβαντικοί αριθμοί που υπεισέρχονται να είναι πολύ μεγάλοι και οι μεταβολές των διαφόρων ποσοτήτων (π.χ. ενέργειας) να μπορούν να θεωρηθούν πρακτικώς ως συνεχείς ποσότητες.

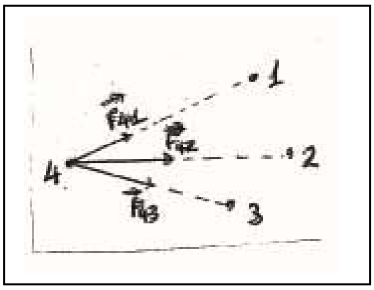
1.1 Παρατηρήσεις σχετικές με τους τρεις νόμους του Νεύτωνα

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ουσιαστικά εισάγει την έννοια του ελεύθερου από δυνάμεις σώματος. Ο νόμος αυτός δέχεται την ύπαρξη ελεύθερων υλικών σωμάτων και είναι έργο του φυσικού να βρει ποια είναι αυτά. Οι δυνάμεις μεταξύ διαφόρων σωμάτων οφείλονται στις αλληλεπιδράσεις τους. Αν τα σώματα είναι σε πολύ μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους οι δυνάμεις με τις οποίες ασχολείται η Κλασική Μηχανική γίνονται πολύ μικρές. Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα δικαιολογεί κατ’ αυτόν τον τρόπο γιατί ένα σώμα πολύ απομακρυσμένο από όλα τα άλλα είναι ελεύθερο σώμα με την παραπάνω έννοια.

Στη Νευτώνεια Μηχανική οι έννοιες χώρος και χρόνος ορίζονται ως ανεξάρτητες, ξεχωριστές οντότητες και δεν σχετίζονται με την κινητική κατάσταση του συστήματος αναφοράς τους. Όπως είπαμε οι δυο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν ως προς ορισμένα συστήματα αναφοράς που λέγονται αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αν αγνοήσομε την περίπτωση της ελεύθερης πτώσης μέσα σε πεδίο βαρύτητας, ισχύει ότι αν ένα σύστημα είναι αδρανειακό τότε κάθε σύστημα ακίνητο ως προς αυτό είναι αδρανειακό και κάθε σύστημα κινούμενο με σταθερή (διανυσματική) ταχύτητα ως προς αυτό είναι επίσης αδρανειακό. Οι δυνάμεις βαρύτητας και οι ηλεκτροστατικές που υπεισέρχονται σε προβλήματα της Κλασικής Μηχανικής υπακούουν στον 3^{o} νόμο του Νεύτωνα. Στη Μηχανική μιλούμε και για δυνάμεις επαφής μεταξύ σωμάτων, δυνάμεις τριβής, άνωση, δυνάμεις που ασκούνται από νήματα κ.τ.λ. και αυτές υπακούουν στην αρχή δράσης-αντίδρασης. Αυτές οι τελευταίες δεν είναι θεμελιώδεις δυνάμεις. Μπορούμε να πούμε ότι θεμελιώδεις δυνάμεις, πιο σωστά αλληλεπιδράσεις, είναι: α) οι ισχυρές που ασκούνται μεταξύ κουάρκ ή και γκλουονίων, β) οι ηλεκτρομαγνητικές, γ) οι ασθενείς και δ) οι βαρυτικές. Η Κλασική Μηχανική ασχολείται με της ηλεκτρομαγνητικές και τις βαρυτικές δυνάμεις (αλληλεπιδράσεις), με τις άλλες αλληλεπιδράσεις ασχολείται η Κβαντομηχανική.

Ξέρομε ότι η διάδοση της αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματιδίων γίνεται με πεπερασμένη ταχύτητα (που δεν ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός στο κενό). Η διάδοση με όχι άπειρη ταχύτητα δημιουργεί πρόβλημα στο πως εφαρμόζει κανείς την αρχή Δράση – Αντίδραση. Εδώ θα υποθέτομε ότι εξετάζομε περιπτώσεις που δεν έχομε διάδοση και θα δεχόμαστε ότι ισχύει ο νόμος Δράσης - Αντίδρασης. Οι μαγνητικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κινούμενων φορτισμένων σωματιδίων ακόμη και αν δεν ληφθούν υπόψη φαινόμενα διάδοσης, δεν ακολουθούν αυτό το νόμο.

Θα θεωρούμε ότι οι αλληλεπιδράσεις που εξετάζομε χαρακτηρίζονται από δυνάμεις που είναι διανυσματικά μεγέθη και προστίθενται με το νόμο του παραλληλόγραμμου (ισχύει η επαλληλία). Δηλαδή αν σε ένα υλικό σημείο ασκούνται συγχρόνως πολλές δυνάμεις το σύστημα αυτών των δυνάμεων μπορεί να αντικατασταθεί με μια μόνο δύναμη που ισούται με το γεωμετρικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε για τη συνολική δύναμη (συνισταμένη) που ασκείται από τα υλικά σημεία 1,2,3 στο 4, $\vec{F}_4 = \vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43}$ όπου $\vec{F}_{41}, \vec{F}_{42}, \vec{F}_{43}$ είναι οι δυνάμεις που θα ασκούσαν τα 1,2,3 στο 4 αν ήταν κάθε φορά το καθένα μόνο του με το 4 (βλ. Σχ. 1.1). Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της συνολικής δύναμης (συνισταμένης) επί του σωματίου είναι ίδιο με το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυνάμεων όταν κάθε μια ασκείται στο σωμάτιο μόνη της.



Σχήμα 1.1

Στα πλαίσια της Κλασικής Δυναμικής που η ορμή εξαρτάται από την ταχύτητα σύμφωνα με τη σχέση $\vec{p} = m\vec{v}$, ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα γράφεται,

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a}$$

όπου $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου που προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, είναι συγγραμμική με τη δύναμη. Στην περίπτωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας έχομε

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Σε αυτή την περίπτωση η επιτάχυνση μπορεί να μην είναι συγγραμμική με τη δύναμη.

1.2 Κίνηση υλικού σημείου

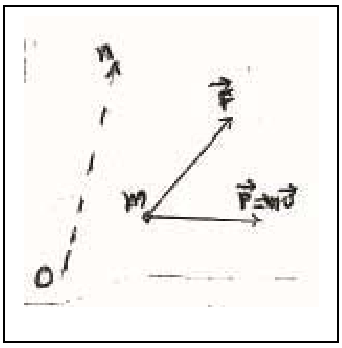
Έστω υλικό σημείο (σταθερής) μάζας *m*, που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F}$, Σχ. 1.3. Ισχύει

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Από τον ορισμό της παραγώγου εύκολα προκύπτει ότι για τυχαίο σταθερό άξονα On μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση,

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 r_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}t^2} \quad (1.3)$$

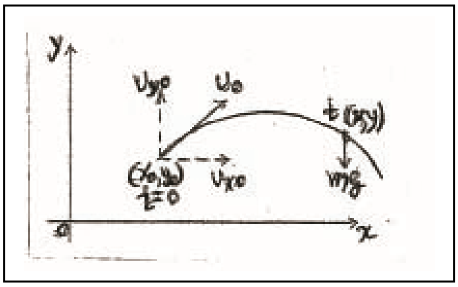
Ο δείκτης n υποδηλώνει τις προβολές των αντίστοιχων διανυσματικών ποσοτήτων. Η Εξ. (1.6) είναι η εξίσωση κίνησης της προβολής του διανύσματος θέσης, ή απλώς της προβολής του υλικού σημείου, πάνω στον άξονα On.



Σχήμα 1.3

Συνήθως, μελετούμε την κίνηση υλικού σημείου στο χώρο, μελετώντας τις κινήσεις των προβολών του σε τρεις ορθογώνιους μεταξύ τους άξονες που αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων, καρτεσιανό σύστημα.

Στο επίπεδο έχει κανείς μόνο δύο άξονες. Μια απλή εφαρμογή είναι η βολή υλικού σημείου κοντά στην επιφάνεια της γης όπου η βαρύτητα είναι σταθερή.



Σχήμα 1.4

Θεωρούμε προφανές ότι έχουμε επίπεδη κίνηση. Παίρνουμε τους άξονες O*x*, O*y*, σταθερούς στο επίπεδο της κίνησης όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4. Τη χρονική στιγμή

t = 0 το κινητό βρίσκεται στη θέση x_0, y_0 και έχει αρχική ταχύτητα υ_0 που σχηματίζει με τον άξονα O*x* γωνία *θ*. Τη χρονική στιγμή *t* το κινητό βρίσκεται στη θέση *x, y*. Υποθέτουμε ότι το σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό οπότε ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα. Έχουμε για τον άξονα O*x*, $0 = m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ και για τον O*y*, $-mg = m\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$. Έχουμε να λύσουμε σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων, τη διαφορική εξίσωση

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg\,, \quad (1.4)$$

με αρχικές συνθήκες, $t = 0$, $y = y_0$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta$ και τη διαφορική εξίσωση

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad (1.5)$$

με αρχικές συνθήκες, $t = 0$, $x = x_0$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta$. Κατά τα γνωστά έχουμε τις γενικές λύσεις,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2 \quad \text{και} \quad x = c_3t + c_4\,.$$

Για να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε τις πρώτες παραγώγους, οπότε βρίσκουμε:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + c_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_3$$

Θέτοντας όπου $t = 0$ έχουμε το σύστημα εξισώσεων που ακολουθεί, από όπου προσδιορίζουμε τις σταθερές

$$y_0 = c_2\,, \qquad x_0 = c_4$$

$$\upsilon_0\sin\theta = c_1\,, \qquad \upsilon_0\cos\theta = c_3$$

Άρα τελικώς :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \upsilon_0\cos\theta\ t \\ y &= y_0 - \frac{gt^2}{2} + \upsilon_0\sin\theta\ t. \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν το υλικό σημείο βάλλεται πάντοτε με την ίδια αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0, αλλάζοντας τη γωνία θ μπορεί να πλήξει μόνο ορισμένη περιοχή του επιπέδου που βρίσκεται στο εσωτερικό καμπύλης που καλείται παραβολή ασφαλείας. Το κάθε σημείο του εσωτερικού μπορεί να βληθεί αν η γωνία βολής είναι κάποια ορισμένη γωνία θ ή η συμπληρωματική της 90° - θ. Η μικρότερη από τις γωνίες βολής που πλήττουν ένα σημείο οδηγεί σε τροχιά που λέγεται ευθύφορος, η τροχιά που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη γωνία βολής λέγεται επισκηπτική.

1.3 Αρχή ανεξαρτησίας (ή επαλληλίας) των κινήσεων

Έστω ότι οι συναρτήσεις $\vec{\xi}_\nu = \vec{\xi}_\nu(u)$ είναι λύσεις των (διαφορικών) εξισώσεων,

$$\vec{A}_\nu(u) = a\frac{\mathrm{d}^2\vec{\xi}_\nu}{\mathrm{d}u^2} + b\frac{\mathrm{d}\vec{\xi}_\nu}{\mathrm{d}u} + c\vec{\xi}_\nu, \quad \nu = 1, 2, ..., n \quad (1.7)$$

όπου για $u = u_0$ έχομε (αρχικές συνθήκες):

$$\vec{\xi}_\nu = \vec{\xi}_\nu(u_0), \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}_\nu}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}_\nu}{\mathrm{d}u}(u_0) \quad (1.8)$$

Έστω $\vec{A}(u) = \sum_\nu \vec{A}_\nu(u)$ τότε η $\vec{\xi}(u) = \sum_\nu \vec{\xi}_\nu(u)$ είναι λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή της

$$\vec{A}(u) = a\frac{\mathrm{d}^2\vec{\xi}}{\mathrm{d}u^2} + b\frac{\mathrm{d}\vec{\xi}}{\mathrm{d}u} + c\vec{\xi} \quad (1.9)$$

με αρχικές συνθήκες (για $u = u_0$)

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(u_0) = \sum_{\nu} \vec{\xi}_{\nu}(u_0), \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}}{\mathrm{d}u}(u_0) = \sum_{\nu} \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}_{\nu}}{\mathrm{d}u}(u_0). \qquad (1.10)$$

Η απόδειξη γίνεται με απλή αντικατάσταση και στηρίζεται στη γραμμικότητα των διαφορικών εξισώσεων που εξετάζουμε. Τα διανύσματα μπορεί να αναλυθούν σε σταθερούς άξονες που μπορεί να μην είναι ορθογώνιοι (καρτεσιανοί).

Στην περίπτωση της Μηχανικής, το κάθε $\vec{\xi}_{\nu}$ είναι συντεταγμένη θέσης ενός σωματιδίου, το a είναι η μάζα του σωματιδίου, $a = m$, το b είναι ο συντελεστής τριβής, το $c = k$ είναι η σταθερά επαναφοράς (σταθερά δύναμης), το u είναι ο χρόνος, $u = t$ και το κάθε $\vec{A}_{\nu}(t) = \vec{F}_{\nu}(t)$ είναι δύναμη. Πρόκειται για αρμονικό ταλαντωτή με (εξωτερική) διέγερση.

Μπορεί διάφορα $\vec{\xi}_{\nu}$ να βρίσκονται πάνω στον ίδιο άξονα.

Προφανές είναι ότι για τον κάθε άξονα με δείκτη ν ισχύει η εξίσωση

$$A_{\nu}(u) = a\frac{\mathrm{d}^2\xi_{\nu}}{\mathrm{d}u^2} + b\frac{\mathrm{d}\xi_{\nu}}{\mathrm{d}u} + c\xi_{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, ..., n$$

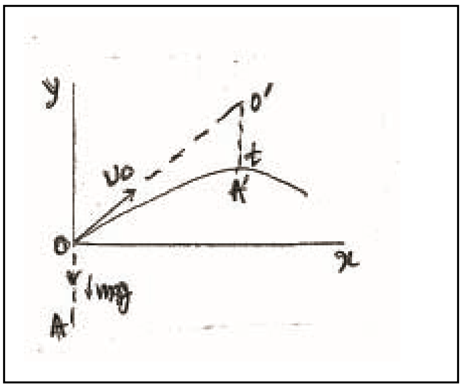
Ας δούμε τι σημαίνουν όλα αυτά σε μια περίπτωση. Αν για ένα υλικό σημείο στο χώρο των τριών διαστάσεων έχομε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης

$$\vec{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + k\vec{r} \qquad (1.11)$$

μπορούμε να αναλύσομε τα διανύσματα σε συνιστώσες (συντεταγμένες) κατά μήκος συστήματος ευθύγραμμων συντεταγμένως που γενικώς δεν είναι ορθογώνιο (δηλαδή γενικώς δεν είναι καρτεσιανό). Έστω ότι x_1, x_2, x_3 είναι οι τρεις συνιστώσες θέσης κατά μήκος των σταθερών αξόνων ενός πλαγιογώνιου συστήματος και F_1, F_2, F_3 οι αντίστοιχες συνιστώσες δύναμης, $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$. Η διανυσματική διαφορική εξίσωση Εξ. (1.11) είναι ισοδύναμη με τρεις γραμμικές εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν την κίνηση κατά μήκος των τριών αξόνων έχομε

$$F_i(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + kx_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Μια απλή εφαρμογή είναι η γνωστή περίπτωση του κυνηγού και του πιθήκου. Μπορεί κανείς στο πρόβλημα αυτό να αναλύσει τη δύναμη βαρύτητας $m\vec{g}$ στο σύστημα του Σχ. 1.5 σε δύο συνιστώσες *-mgy* κατά την κατακόρυφο και μηδέν κατά την ΟΟ′. Επίσης, αναλύει την αρχική ταχύτητα σε συνιστώσα κατά την ΟΟ′ ίση με υ_0 και μηδενική κατά τον άξονα Ο*y*. Η αρχική θέση παίρνεται 0 και για τις δύο διευθύνσεις. Έτσι έχει να λύσει δύο απλά ανεξάρτητα προβλήματα, ένα ευθύγραμμης ισοταχούς κίνησης κατά την OO' και ένα

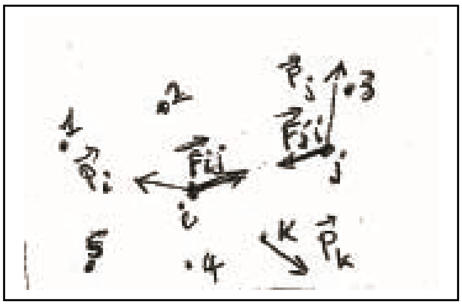


Σχήμα 1.5

ομαλά επιταχυνόμενης ευθύγραμμης κίνησης κατά τον Oy με μηδενική αρχική ταχύτητα. Η σύνθεση των δύο κινήσεων, κάθε στιγμή, δίνει τη συνολική κίνηση. Επειδή έχομε συνηθίσει να καταλαβαίνομε καλύτερα την κίνηση πάνω σε καρτεσιανούς άξονες, μπορούμε από τους άξονες OO' και Oy να μεταβούμε στους καρτεσιανούς άξονες του σχήματος. Εδώ τα b και k είναι ίσα με μηδέν.

1.4 Διατήρηση της ορμής συστήματος υλικών σημείων

Υποθέτομε ότι έχομε ένα σύστημα σωματίων τα οποία αποτελούν κλειστό σύστημα με την έννοια ότι κατά την κίνηση του συστήματος εξακολουθούν να ανήκουν στο σύστημα, στο οποίο δεν προστίθενται άλλα σωμάτια. Δηλαδή δεν υπάρχει ροή σωματίων από και προς το σύστημα. Έστω σύστημα σωματίων όπως φαίνεται στο Σχ.1.6, με ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots$. Έστω ότι το σωμάτιο *j* ασκεί δύναμη $\vec{F}_{ii}$ πάνω στο υλικό σημείο *i*. Έστω ακόμη ότι πάνω στο *i* ασκείται και δύναμη $\vec{F}_{iext}$ που δεν οφείλεται σε κανένα από τα υλικά σημεία του συστήματος, είναι εξωτερική δύναμη.



Σχήμα 1.6

Η συνολική δύναμη $\vec{F}_i$ που ασκείται πάνω στο i θα είναι το άθροισμα όλων των ανωτέρω δυνάμεων. Έχουμε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \ . \quad (1.12)$$

Εφόσον $\vec{F}_i = \vec{F}_{i\mathrm{ext}} + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij}$ καταλήγομε στη σχέση

$$\vec{F}_{i\mathrm{ext}} + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \quad (1.13)$$

Αν αθροίσουμε τις εξισώσεις αυτής της μορφής για όλα τα σωμάτια, δηλαδή για κάθε i έχουμε:

$$\sum_i \vec{F}_{i\mathrm{ext}} + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{p}_i$$

Έστω ότι $\vec{F}_{\mathrm{ext}} = \sum \vec{F}_{i\mathrm{ext}}$, είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στα σωμάτια και έστω ότι $\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \sum \vec{p}_i$, είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών όλων των σωματιδίων. Υποθέτομε ότι για τις εσωτερικές δυνάμεις ισχύει η αρχή Δράσης - Αντίδρασης, οπότε $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \ i \neq j$, άρα ισχύει $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$, έτσι καταλήγομε στη σχέση :

$$\vec{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t}, \quad (1.14)$$

Αν $\vec{F}_{\mathrm{ext}} = 0$ τότε :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t}=0 \;\text{ οπότε }\; \vec{p}_{\mathrm{tot}}=\text{σταθ.}$$

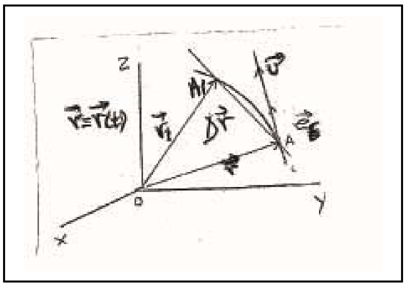
Δηλαδή, αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι εσωτερικές δυνάμεις των υλικών σημείων υπακούουν στην αρχή Δράσης - Αντίδρασης (αρκεί η ασθενής εκδοχή της) το άθροισμα των ορμών (η ολική ορμή του συστήματος) είναι σταθερό διάνυσμα με το χρόνο. Παραδείγματα διατήρησης ορμής μπορεί να έχει κανείς σε ελαστικές ή ανελαστικές κρούσεις ή στην έκρηξη (διάσπαση) ενός βλήματος σε πολλά τεμάχια κτλ.

1.5 Καμπυλόγραμμη κίνηση σημείου

(α) Διανυσματική μέθοδος

΄Εστω ότι η τροχιά ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο είναι η c όπως φαίνεται στο

Σχ. 1.7. ΄Ενα κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στη θέση A και τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ στη θέση A_1.



Σχήμα 1.7

Η μέση (διανυσματική) ταχύτητα μεταξύ των δύο αυτών χρονικών στιγμών είναι :

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{av}}=\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Αυτό είναι διάνυσμα κατά μήκος της χορδής AA_1. Αν θεωρήσουμε ότι $\Delta t\to 0$, τότε ορίζουμε τη στιγμιαία ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t στο σημείο A ως :

$$\vec{\upsilon}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Καθώς το σημείο A_1 πλησιάζει το A, η χορδή AA_1 τείνει να πάρει οριακή θέση κατά τη διεύθυνση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο σημείο A. Αν παραστήσουμε με $\vec{e}_\varepsilon$ το μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο αυτό, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης και με φορά τη φορά της κίνησης, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.7, τότε ισχύει

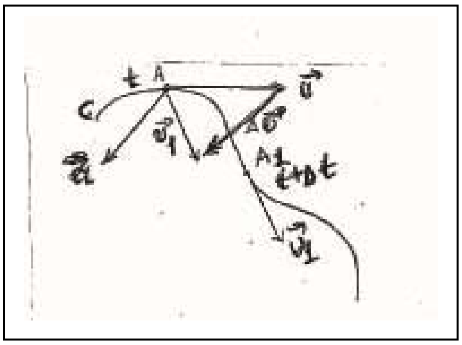
$$\Delta \vec{r} = \left(AA_1\right)\vec{e}_\varepsilon, \ \ AA_1 \geq 0 \ \ .$$

επομένως έχομε

$\vec{\upsilon} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|\vec{e}_\varepsilon = \upsilon\vec{e}_\varepsilon$, όπου $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ είναι το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας .

Σε επίπεδη κίνηση σημείου προφανώς τα $\vec{e}_\varepsilon$ και $\vec{\upsilon}$ όπως και $\vec{\upsilon}_{\mathrm{av}}$ είναι στο επίπεδο κίνησης όπου είναι και το $\vec{r}$.

Έστω μια καμπύλη c στο χώρο όπως φαίνεται στο Σχ. 1.8 η οποία διαγράφεται από ένα κινητό



Σχήμα 1.8

Αν το κινητό τη χρονική στιγμή t είναι στη θέση A και έχει στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ είναι στη θέση A_1 με στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, ορίζουμε ως μέση επιτάχυνση μεταξύ αυτών των δύο χρονικών στιγμών (ή αντίστοιχων θέσεων) το διάνυσμα :

$$\vec{a}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}}{\Delta t} .$$

Το διάνυσμα αυτό έχει την κατεύθυνση του $\Delta\vec{\upsilon}$, η φορά του είναι προς το κοίλο της τροχιάς c στο συγκεκριμένο σημείο. Γενικώς, τα $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}_1$, $\Delta\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}_{\text{av}}$ δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Υποθέτουμε τώρα ότι $\Delta t \to 0$ οπότε το σημείο A_1 πλησιάζει το Α. Τότε οριακά τα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}_1$ θα τείνουν να βρίσκονται σε ένα επίπεδο που θα διέρχεται από το Α και λέγεται εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης c στο σημείο Α. Το εγγύτατο επίπεδο είναι το επίπεδο μέγιστης επαφής με την καμπύλη στο σημείο Α. Για κάθε σημείο της καμπύλης υπάρχει εγγύτατο επίπεδο, εν γένει διαφορετικό. Μόνο σε επίπεδη κίνηση υπάρχει ένα μοναδικό εγγύτατο επίπεδο για κάθε σημείο, που είναι το επίπεδο της τροχιάς. Επομένως, όταν $\Delta t \to 0$ η $\vec{a}_{\text{av}}$ αποκτά μια οριακή τιμή επί του εγγύτατου επιπέδου με φορά προς το κοίλο της καμπύλης c**.** Προφανώς τα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$ είναι πάνω σε αυτό το ίδιο εγγύτατο επίπεδο. Έχουμε:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Άρα η ταχύτητα δίνεται από την πρώτη παράγωγο της σχέσης για την κίνηση (κινηματική εξίσωση) $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon}(t) = \mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t$ και η επιτάχυνση (στιγμιαία επιτάχυνση) από τη δεύτερη παράγωγο, $\vec{a} = \mathrm{d}^2\vec{r}(t)/\mathrm{d}t^2$.Είναι εύκολο, από τον ορισμό της παραγώγου, να δείξει κανείς ότι αν $\vec{A}(t) = \mathrm{d}\vec{B}(t)/\mathrm{d}t$ τότε για τις προβολές σε τυχαίο σταθερό άξονα n ισχύει,

$$A_{\text{n}}(t) = \frac{\mathrm{d}B_{\text{n}}(t)}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.15)$$

Προσοχή ! το μέτρο της παραγώγου διανύσματος δεν ισούται με την παράγωγο του μέτρου.

(β) Μέθοδος συντεταγμένων

(β1) Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η κινηματική εξίσωση γράφεται,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \ . \quad \mathbf{(1.16)}$$

Τότε, εφόσον τα $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ είναι διανύσματα σταθερά με το χρόνο, έχομε:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \quad (1.17)$$

άρα,

$$\vec{\upsilon}(t) = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y + \upsilon_z\vec{e}_z \quad (1.18)$$

όπου $\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\upsilon_y = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t}$, $\upsilon_z = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}$ είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ κατά τους

τρεις άξονες ή οι προβολές της στους εν λόγω άξονες.

Για την επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ ισχύουν,

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z, \quad (1.19)$$

$$\vec{a}(t) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z,$$

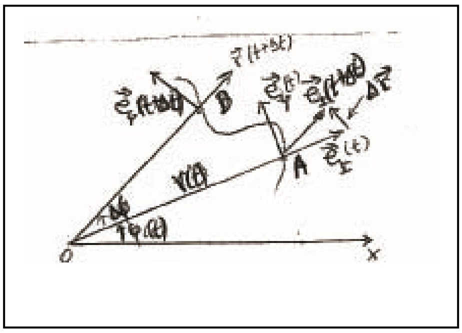
$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}, \ a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}, \ a_z = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} \quad (1.20)$$

(β2) Πολικές συντεταγμένες.

΄Εστω ότι έχουμε επίπεδη κίνηση σημείου που περιγράφεται από τη σχέση $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Έστω $\vec{e}_r(t)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση και φορά που φαίνεται στο Σχήμ. 1.9 και $\vec{e}_\varphi(t)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση και φορά αύξησης της φ, που είναι κάθετο στο $\vec{e}_r$. Θέλουμε να βρούμε την έκφραση για τα υ_r και υ_φ, όπου $\vec{\upsilon}(t) = \upsilon_r \vec{e}_r + \upsilon_\varphi \vec{e}_\varphi$, δηλαδή για τις προβολές της ταχύτητας στους δύο άξονες που καθορίζουν τα $\vec{e}_r$ και $\vec{e}_\varphi$.

Ισχύει η σχέση

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$$



Σχήμα 1.9

επομένως:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \quad (1.21)$$

Χρειάζεται να βρούμε την ταχύτητα μεταβολής του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{e}_r(t)$ που έχει σταθερό μέτρο.

Υποθέτουμε ότι το κινητό σημείο βρίσκεται στη θέση Α τη χρονική στιγμή t και στη θέση Β τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_r(t)$, στη θέση Β θα γίνει $\vec{e}_r(t+\Delta t)$. Για να βρούμε τη διαφορά αυτών των διανυσμάτων αρκεί να σχεδιάσουμε, με αρχή το Α διάνυσμα παράλληλο του $\vec{e}_r(t+\Delta t)$. Το $\vec{e}_r(t+\Delta t)$ είναι του ίδιου μέτρου με το $\vec{e}_r(t)$ αλλά στραμμένο κατά $\Delta\varphi$, όσο είναι στραμμένη η ευθεία ΟΒ σε σχέση με την ΟΑ. ΄Αρα αν $\Delta t \to 0$, το $|\Delta\vec{e}_r|$ θα τείνει στο τόξο του κύκλου με ακτίνα $|\vec{e}_r| = 1$, με κέντρο το Α που βλέπει τη γωνία $\Delta\varphi$. ΄Αρα,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{|\mathrm{d}\vec{e}_r|}{|\vec{e}_r|} = |\mathrm{d}\vec{e}_r|,$$

στο όριο $\Delta t \to 0$ το $\Delta\vec{e}_r$ θα τείνει να σχηματίσει γωνία 90° με το $\vec{e}_r(t)$, άρα $\mathrm{d}\vec{e}_r = |\mathrm{d}\vec{e}_r|\vec{e}_\varphi$ όπου $\vec{e}_\varphi$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο $\vec{e}_r$, κατά τη φορά αύξησης του φ. ΄Εχουμε λοιπόν,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathrm{d}\vec{e}_r|}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi,$$

Επομένως,

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi \quad (1.22)$$

όπου $\mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t = \omega(t)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σημείου Α περί το Ο τη στιγμή t. ΄Αρα,

$$\upsilon_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \text{και} \quad \upsilon_\varphi = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega r \quad . (1.23)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi$, δηλαδή να προσδιορίσουμε τα a_r, a_φ.

Με ανάλογο τρόπο όπως προηγουμένως μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Οπότε τελικώς,

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\vec{e}_r+\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right)\vec{e}_\varphi . \quad (1.24).$$

Άρα

$$a_r=\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\omega^2 \quad \text{και} \quad a_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\omega\right). \quad (1.25)$$

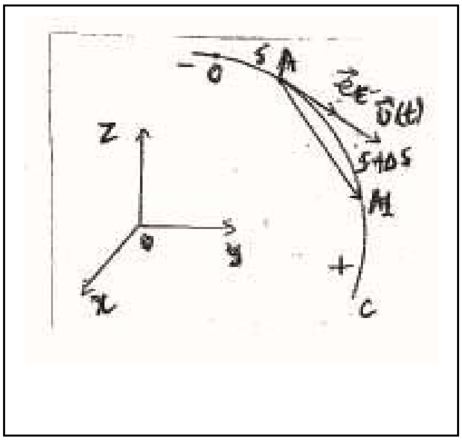
Αν $r =$ σταθερό, έχουμε κυκλική κίνηση οπότε:

$$a_r=-\omega^2 r,\ \ a_\varphi=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},$$

δηλαδή έχομε κεντρομόλο επιτάχυνση (το πρόσημο σχετίζεται με την εκλογή της φοράς του $\vec{e}_r$) και επιτρόχιο επιτάχυνση.

(γ) Φυσική μέθοδος

Ας υποθέσουμε ότι το κινητό διαγράφει την τροχιά c που φαίνεται στο Σχ. 1.10, στο χώρο των τριών διαστάσεων. Η σχέση s = s(t) καθορίζει τη θέση του σημείου επί της c . Το σημείο O είναι η αρχή μέτρησης του s που είναι το μήκος από το O στο A, μετρούμενο πάνω στην τροχιά και με κατάλληλο πρόσημο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κινητό τη χρονική στιγμή t είναι στη θέση A, το s είναι s(t) , οπότε τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ισχύει $s = s(t + \Delta t)$. Από τα προηγούμενα ξέρουμε ότι,



Σχήμα 1.10

τα μέτρα των $\overrightarrow{AA_1}$ και Δs, όταν $\Delta s \to 0\ (\Delta t \to 0)$, τείνουν να γίνουν ίσα, και το διάνυσμα $\overrightarrow{AA_1}$ τείνει στην εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο Α (βλ. Σχ. 1.11). Ά Άρα

$$\vec{e}_\varepsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\Delta s}$$

όπου το $\vec{e}_\varepsilon$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Επίσης,

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

άρα η διανυσματική ταχύτητα είναι

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varepsilon = \upsilon(t)\vec{e}_\varepsilon$$

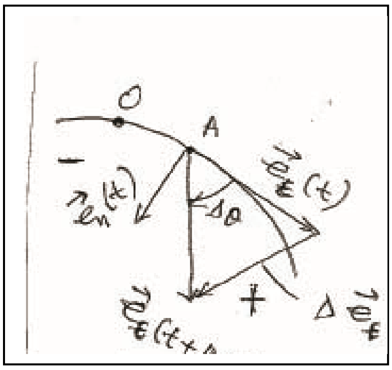
όπου $\upsilon(t)$ είναι η τιμή της ταχύτητας, που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varepsilon + \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varepsilon + \upsilon(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Για να υπολογίσομε το $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$ σκεφτόμαστε όπως και στα προηγούμενα. Θεωρούμε δύο χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$ κατά τις οποίες το $\vec{e}_\varepsilon$ είναι αντιστοίχως $\vec{e}_\varepsilon(t)$ και $\vec{e}_\varepsilon(t+\Delta t)$ (κατά την εφαπτόμενη στο αντίστοιχο σημείο). Με αρχή το Α φέρουμε ένα διάνυσμα (παράλληλο) και ίσο προς το $\vec{e}_\varepsilon(t+\Delta t)$. Το διάνυσμα $\vec{e}_\varepsilon(t)$ με αρχή το A και το $\vec{e}_\varepsilon(t+\Delta t)$ με αρχή το Β δεν είναι εν γένει στο ίδιο επίπεδο όταν έχουμε γενική κίνηση στον τριδιάστατο χώρο, δηλαδή μη επίπεδη κίνηση. Για $\Delta t \to 0$, έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right|\vec{e}_n$$



Σχήμα 1.11

όπου το $\vec{e}_n$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\vec{e}_\varepsilon$ στο σημείο Α, δηλαδή κάθετο στην εφαπτόμενη της καμπύλης στο Α με φορά προς το κοίλο της καμπυλης στο συγκεκριμένο σημείο. Σύμφωνα με όσα είπαμε στα προηγούμενα, το $\vec{e}_\varepsilon(t)$ και το $\vec{e}_\varepsilon(t+\Delta t)$ που έχουν αρχή το σημείο Β, στο όριο $\Delta t \to 0$ τείνουν να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που είναι το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο Α. Είναι προφανές ότι και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_n$ θα είναι σε αυτό το ίδιο επίπεδο. Αφού το $\vec{e}_\varepsilon(t)$ είναι μοναδιαίο, αν $\Delta\theta$ είναι η στροφή του $\vec{e}_\varepsilon(t)$ μεταξύ των στιγμών t και $t+\Delta t$, θα έχουμε ότι :

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \text{άρα} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n .$$

Επομένως,

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varepsilon + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varepsilon + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n$$

Το πηλίκο $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης ορίζει το αντίστροφο της ακτίνας καμπυλότητας, δηλαδή το $1/R(t)$ στο εν λόγω σημείο. Η ακτίνα R είναι η ακτίνα του εγγύτατου κύκλου στο σημείο Α. Αυτός ο κύκλος είναι ο κύκλος μέγιστης επαφής με την καμπύλη στο σημείο αυτό και βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο Α. Αν πάρουμε και ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $\vec{e}_n$ και $\vec{e}_\varepsilon$ στο σημείο Α που να είναι ίσο με $\vec{e}_n \times \vec{e}_\varepsilon$ τότε τα τρία αυτά μοναδιαία διανύσματα ορίζουν το τρίεδρο του Fernet στο σημείο Α. Έχουμε λοιπόν,

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varepsilon + \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n \quad (1.26)$$

Άρα έχουμε ανάλυση της $\vec{a}(t)$ σε δύο συνιστώσες, μια κατά τη διεύθυνση της εφαπτόμενης της τροχιάς και μια κατά την κάθετο στην εφαπτόμενη που βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο (αυτή λέγεται πρώτη κάθετος).

$$\vec{a} = a_\varepsilon \vec{e}_\varepsilon + a_\mathrm{n} \vec{e}_\mathrm{n}$$

a_ε, a_n είναι η επιτρόχιος και η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης, αντίστοιχα. Γενικώς, αν έχουμε ένα διάνυσμα σταθερού μέτρου, η παράγωγός του ως προς το χρόνο είναι διάνυσμα κάθετο προς το διάνυσμα. Η απόδειξη είναι εύκολη όπως φαίνεται παρακάτω

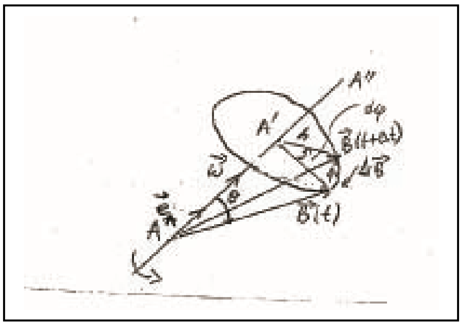
$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad 2\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = 0$$

άρα αν το $\vec{A}$ μεταβάλλεται με το χρόνο πρέπει τα $\vec{A}$ και $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ισχύουν

$$\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = 0 = \left|\vec{A}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|\cos\theta = 0, \quad \cos\theta = 0, \quad \theta = \pi/2 \ .$$

1.6 Περιστροφική κίνηση διανύσματος σταθερού μέτρου περί άξονα



Σχήμα 1.12

Έστω ότι το διάνυσμα $\vec{B}$, όπου $|B| =$ σταθερό, στρέφεται περί τον άξονα ΑΑ″, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.12. Προφανώς το άκρο αυτού του διανύσματος διαγράφει μέρος περιφέρειας του κύκλου που φαίνεται στο σχήμα. Αυτός ο κύκλος είναι κάθετος στον άξονα ΑΑ″. Α′ είναι το κέντρο του κύκλου. $\Delta\vec{B} = \vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t)$ και στο όριο που $\Delta t \to 0$ ενώ $|\vec{B}| =$ σταθερό, έχουμε $\mathrm{d}\vec{B} = h\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varepsilon$ όπου $\vec{e}_\varepsilon$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κατά την εφαπτόμενη του κύκλου στο άκρο του διανύσματος $\vec{B}$ τη χρονική στιγμή t, h είναι το μέτρο της προβολής του $\vec{B}$ πάνω στο επίπεδο του κύκλου (σε μια ακτίνα του κύκλου). ΄Αρα,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varepsilon$$

Παριστάνουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής με το διάνυσμα $\vec{\omega}(t)$ που φαίνεται πάνω στον άξονα περιστροφής.

Έχομε $\vec{\omega}(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_A$, όπου $\vec{e}_A$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα ΑΑ″. Εφόσον $h = B\sin\theta$ καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}(t) \times \vec{B}(t) . \quad (1.27)$$

Η περιστροφή και η φορά του $\vec{\omega}(t)$ είναι συμβιβαστά με στροφή και μετακίνηση δεξιόστροφου κοχλία. Η παραπάνω σχέση για το ρυθμό μεταβολής ισχύει γενικώς για κάθε στρεφόμενο διάνυσμα σταθερού μέτρου. Αν το $\vec{B}$ είναι διάνυσμα θέσης, $\vec{r}(t)$, κάποιου σημείου τότε η ταχύτητα του σημείου είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) . \quad (1.28)$$

Αν το $\vec{B}$ είναι η ταχύτητα, $\vec{\upsilon}(t)$, κάποιου σημείου τότε η επιτάχυνσή του είναι

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}(t) \times \vec{\upsilon}(t) . \quad (1.29)$$

Αν το $\vec{B} = A\vec{\omega},\ A = \text{σταθερό}$, τότε αφού σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, θα έχομε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0 .$$

1.7 Κινητική ενέργεια, ώθηση δύναμης και σχετικά θεωρήματα

Υποθέτουμε ότι σε ένα υλικό σημείο μάζας m ασκείται μια δύναμη $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t)$. Τότε έχουμε,

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad , \ \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} \ , \ \ \vec{p} = m\vec{\upsilon} .$$

Αν το σωματίδιο κινείται κατά $\mathrm{d}\vec{r}$ σε χρόνο $\mathrm{d}t$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \quad \text{ή} \quad \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}=m\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon} \qquad (1.30)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 οπότε εφόσον ισχύουν $\vec{r}_1=\vec{r}_1(t_1), \vec{r}_2=\vec{r}_2(t_2)$, $\vec{\upsilon}_1=\vec{\upsilon}_1(t_1)$, $\vec{\upsilon}_2=\vec{\upsilon}_2(t_2)$, έχουμε

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2}\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}\,,\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2}\frac{1}{2}\mathrm{d}\vec{\upsilon}^2=m\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2}\frac{1}{2}\mathrm{d}\upsilon^2=\frac{m}{2}\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right). \qquad (1.31)$$

Η ποσότητα

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

είναι η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου. $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ είναι το στοιχειώδες έργο της δύναμης που μπορεί να γραφτεί και ως

$$\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\mathrm{d}t$$

(οπότε η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει και ως προς t). Το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ δίνει το έργο που εκτελεί η δύναμη επί του υλικού σημείου το οποίο μετακινεί από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$. Αυτό το έργο εξαρτάται και από τους χρόνους t_1 και t_2 και γενικώς από τη διαδρομή. Το συμπέρασμα είναι ότι, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου είναι ίση με το έργο της δύναμης πάνω στο σημείο κατά τη μετακίνησή του μεταξύ των δύο θέσεων. Για σύστημα υλικών σημείων έχουμε,

$$\sum_i \int_{\vec{r}_1 i}^{\vec{r}_{2i}} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_{i2}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_{i1}^2 . \quad (1.32)$$

Δηλαδή το άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω στα διάφορα υλικά σημεία του συστήματος (εσωτερικές και εξωτερικές) είναι ίσο με τη μεταβολή της ολικής κινητικής τους ενέργειας (της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος) στους αντίστοιχους χρόνου, αυτό είναι το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Αν ορίσει κανείς το $\vec{F} \cdot \mathrm{d}t$ ως τη στοιχειώδη ώθηση της δύναμης, τότε εύκολα προκύπτει ότι,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t = \vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_1(t_1) ,$$

δηλαδή η ολική ώθηση της δύναμης μεταξύ t_1, t_2 είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής κατά το αυτό χρονικό διάστημα. Αυτό είναι το θεώρημα της μεταβολής της ορμής υλικού σημείου.

1.8 Δυναμική Ενέργεια, Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δύναμη εξαρτάται μόνο από τη θέση του υλικού σημείου πάνω στο οποίο ασκείται, δηλαδή $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Τότε το έργο της δύναμης κατά μια διαδρομή που ενώνει δύο σημεία 1 και 2 με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ αντιστοίχως, είναι $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Γενικά το έργο θα εξαρτάται από το δρόμο ολοκλήρωσης (τροχιά του υλικού σημείου). Αν έχουμε τέτοια περίπτωση που το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική θέση και την τελική θέση, δηλαδή το $\vec{r}_1$ και το $\vec{r}_2$, τότε

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{r}_2,\vec{r}_1) \quad (1.33)$$

Αν υποθέσουμε ότι το σημείο $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$ είναι κάποιο σημείο αναφοράς, σταθερό για τη συγκεκριμένη περίπτωση, τότε μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας $V(\vec{r})$ του υλικού σημείου σε κάθε σημείο $\vec{r}$, μετρούμενης ως προς το σημείο αναφοράς $\vec{r}_0$. Συγκεκριμένα, ορίζεται ως δυναμική ενέργεια η ποσότητα,

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad (1.34)$$

επίσης ισχύει $$dV = -\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \quad (1.35)$$

Δηλαδή, η στοιχειώδης μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ίση με μείον το στοιχειώδες έργο της δύναμης. Ομως $\mathrm{d}V = \vec{\nabla}V\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, όπου $\vec{\nabla}V(\vec{r})$ είναι η κλίση (gradient) της βαθμωτής συνάρτησης $V(\vec{r})$. Άρα $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Είναι ευνόητο ότι για κάθε κλειστό δρόμο c έχουμε $\oint_c \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ και με εφαρμογή του νόμου του Stokes, $\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \oint_c \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, καταλήγομε στη σχέσηου $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$.

Η δύναμη F λέγεται συντηρητική. Σύμφωνα με όσα είπαμε προκύπτει για ότι για συντηριτικές συντηρητικές ισχύει

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right)$$

άρα

$$V(\vec{r}_1) + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = V(\vec{r}_2) + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = V(\vec{r}) + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = E_{\mathrm{tot}} = \text{σταθερό}\ . \quad (1.36)$$

Δηλαδή το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας σε περίπτωση συντηρητικών δυνάμεων ορίζει την ολική μηχανική ενέργεια που παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Είναι προφανές ότι ανάλογα ισχύουν για συστήματα υλικών σημείων που και οι εσωτερικές και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές. Τότε φυσικά μιλάμε για τη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας που είναι το άθροισμα της ολικής κινητικής και της ολικής δυναμικής ενέργειας, οι οποίες είναι τα αθροίσματα όλων των κινητικών και όλων των δυναμικών ενεργειών αντιστοίχως.

Γενικότερα, μπορεί να υπάρχει $V = V(\vec{r}, t)$ δηλαδή που να εξαρτάται και από το χρόνο και να ισχύει

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t) \text{ με } t = \text{σταθερό} .$$

Σε αυτή την περίπτωση συνηθίζεται η δυναμική ενέργεια να λέγεται δυναμική συνάρτηση παρόλο που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση και οι δυο όροι. Ακόμη μπορεί να ονομάζομε και το άθροισμα $E = T + V$ μηχανική ενέργεια αλλά δεν διατηρείται κατά την κίνηση του υλικού σημείου. Θα επανέλθομε στο ίδιο θέμα όταν εξετάσομε το πεδίο βαρύτητας.

1.9 Κέντρο μάζας

Για το κέντρο μάζας μη σχετικιστικά ισχύουν τα παρακάτω. Αν έχουμε σύστημα υλικών σημείων ορίζουμε ως κέντρο μάζας του συστήματος το σημείο $\vec{R}_{\text{cm}}$ που προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (1.37)$$

όπου $\vec{r}_i$, $\vec{R}_{\text{cm}}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων i και του κέντρου μάζας αντιστοίχως. $\sum_i m_i = M$ είναι η μάζα του συστήματος, δηλαδή το άθροισμα των μαζών όλων των σωματίων.

Αν τα σωμάτια κινούνται και εν γένει ασκούνται πάνω τους εσωτερικές δυνάμεις που υπακούουν στην αρχή Δράσης - Αντίδρασης και εξωτερικές δυνάμεις τότε, αφού

$$\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\text{cm}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i}{M} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (1.38)$$

$\vec{P}$ είναι η συνολική ορμή του συστήματος.

Έχομε επομένως

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{M}\vec{F}_{\mathrm{ex}} \quad (1.39)$$

αφού έχουμε δείξει σε προηγούμενα ότι $\vec{F}_{\mathrm{ex}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$.

Συμπεραίνομε ότι το κέντρο μάζας κινείται όπως υλικό σημείο πάνω στο οποίο ασκείται η συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα υλικά σημεία. Αν $\vec{F}_{\mathrm{ex}} = 0$ τότε το κέντρο μάζας κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς. Ακόμη μπορούμε να δούμε (με απλή παραγώγιση της σχέσης ορισμού

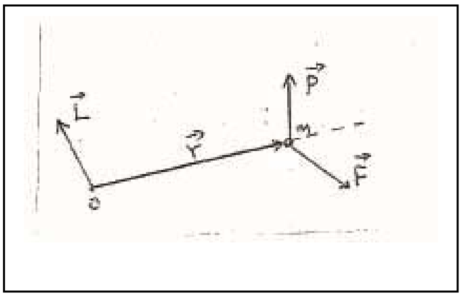
του κέντρου μάζας) ότι

$$M\frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P} \quad (1.40)$$

δηλαδή η ορμή του συστήματος είναι ίση με την ορμή υλικού σημείου μάζας M που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Η διατήρηση της ορμής είναι ισχυρότερο θεώρημα από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Μπορεί να έχει κανείς διατήρηση ορμής συστήματος και όταν ακόμη υπάρχουν μη συντηρητικές δυνάμεις αρκεί αυτές να υπακούουν στην αρχή Δράσης - Αντίδρασης. Μπορεί, για παράδειγμα, να έχουμε δυνάμεις που μετατρέπουν μηχανική ενέργεια σε θερμοδυναμική ενέργεια, όπως στις πλαστικές κρούσεις και όταν ασκούνται δυνάμεις τριβής ολισθήσεως. Σε ελαστικές κρούσεις έχουμε συντηρητικές δυνάμεις και διατηρείται και η ολική ορμή και η ολική ενέργεια. Παραδείγματα εφαρμογής των ανωτέρω έχουμε σε περιπτώσεις συστημάτων που αποτελούνται από τμήματα που ανταλλάσσουν μάζα, όπως στην κίνηση πυραύλων, την κίνηση ταινίας μεταφοράς χώματος κτλ.

1.10 Στροφορμή και Διατήρησή της



Σχήμα 1.15

Έστω το υλικό σημείο μάζας m που έχει ορμή $\vec{p}$ ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Έστω σημείο Ο που είναι η αρχή του συστήματος και $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ το διάνυσμα που φαίνεται στο Σχ.1.15 (διάνυσμα θέσης του κινητού). Ορίζουμε ως στροφορμή του m περί το Ο το διάνυσμα

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} \quad (1.41)$$

όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα της μάζας m. Το $\vec{L}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{p}$ και μαζί τους αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα ($\vec{r}, \vec{p}, \vec{L}$). Αν πάνω στο σωμάτιο στη θέση A ασκείται δύναμη $\vec{F}$ ορίζουμε ως ροπή της δύναμης $\vec{F}$ περί το σημείο Ο το διάνυσμα $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$. Λέμε ότι η στροφορμή είναι η ροπή της ορμής $\vec{p}$ περί το Ο. Έχουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, (δεχόμαστε ότι το σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό),

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

πολλαπλασιάζοντας επί $\vec{r}$ εξωτερικά εξ αριστερών έχουμε,

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Οπότε

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t},$$

από τον ορισμό της στροφορμής έχουμε επίσης,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{\upsilon}+m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=m\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}+m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t},$$

όμως $\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}=0$ άρα,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} \quad \text{ή} \quad \vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.42)$$

Το ίδιο ισχύει και σχετικιστικά αφού τότε $\vec{p}=\dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}$,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=0+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ίσος με τη ροπή της δύναμης που ασκείται στο εξεταζόμενο υλικό σημείο. Αν $\vec{N}=0$ τότε η στροφορμή περί το δεδομένο σημείο διατηρείται. Όσα αναφέραμε ισχύουν σίγουρα για αδρανειακό σύστημα αναφοράς για το οποίο ξέρομε ότι ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα.

Αν έχουμε κεντρική δύναμη που πάντα κατευθύνεται σε σταθερό σημείο τότε $\vec{N}=0$ περί αυτό το κέντρο της δύναμης, οπότε $\vec{L}=$ σταθερό περί αυτό το σημείο, καθόλη τη διάρκεια της κίνησης του υλικού σημείου.

1.11 Ροπές εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων συστήματος υλικών σημείων

Όσα ακολουθούν είναι μη σχετικιστικά. Ας υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής με το χρόνο της ολικής στροφορμής συστήματος σωματίων περί σημείο Ο, το οποίο εν γένει κινείται. Για τη στροφορμή $\vec{L}_{oi}$ του σωματίου *i* περί το Ο, αν $\vec{r}_i$ είναι το διάνυσμα θέσης του ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε και $\vec{r}_{\mathrm{o}}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου Ο ως προς το ίδιο σύστημα (γενικότερος ορισμός στροφορμής), τότε

$$\vec{L}_{\mathrm{o}i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \vec{p}_i . \quad (1.43)$$

Ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σωμάτιο i, στο οποίο ασκούνται η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\mathrm{ex}i}$ και εσωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_{ij}$ τις οποίες οφείλονται στα άλλα σωμάτια j του συστήματος,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{\mathrm{ex}i} + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij} \quad . (1.44)$$

'

Πολλαπλασιάζουμε εξωτερικά επί $(\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{o}})$ από τα αριστερά οπότε,

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \vec{F}_{\mathrm{ex}i} + (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij}$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (1.45) για τη στροφορμή έχομε,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{o}i}}{\mathrm{d}t} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_i - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_i \quad (1.45)$$

όπου ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος μηδενίζεται διότι $\vec{p}_i = m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$ και

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$ είναι συγγραμμικά. Με τη χρήση και της προηγούμενης σχέσης παίρνουμε,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{o}i}}{\mathrm{d}t} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \vec{F}_{\mathrm{ex}i} + (\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{o}}) \times \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_i . \quad (1.46)$$

Αν $\vec{L}_{\rm o} = \sum_i \vec{L}_{{\rm o}i}$ είναι η ολική στροφορμή περί το Ο και $\vec{N}_{\rm o} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{{\rm ex}i}$ είναι η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων περί το Ο, έχουμε αθροίζοντας την τελευταία διαφορική σχέση πάνω σε όλα τα σωμάτια,

$$\frac{{\rm d}\vec{L}_{\rm o}}{{\rm d}t} = \vec{N}_{\rm o} + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{ij} - \frac{{\rm d}\vec{r}_{\rm o}}{{\rm d}t} \times \vec{P} \qquad (1.47)$$

όπου $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ είναι η ολική ορμή που έχει τη διεύθυνση και φορά της ταχύτητας του κέντρου μάζας.

Ο νόμος του Νεύτωνα Δράσης - Αντίδρασης λέει ότι $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ και επίσης λέει ότι οι δυνάμεις κείνται στην ευθεία (φορέα) που ενώνει τα δύο υλικά σημεία τα οποία αλληλεπιδρούν. ΄Αρα το $(\vec{r}_i - \vec{r}_{\rm o}) - (\vec{r}_j - \vec{r}_{\rm o}) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ είναι συγγραμμικό διάνυσμα με τις $\vec{F}_{ij}$ και $\vec{F}_{ji}$, επομένως

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{ij} - (\vec{r}_j - \vec{r}_{\rm o}) \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \,.$$

Άρα

$$\frac{{\rm d}\vec{L}_{\rm o}}{{\rm d}t} = \vec{N}_{\rm o} - \frac{{\rm d}\vec{r}_{\rm o}}{{\rm d}t} \times \vec{P} \quad . \quad (1.48)$$

Δηλαδή στη σχέση για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής υπεισέρχονται μόνο οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων και οι ταχύτητες είναι ως προς το αδρανειακό σύστημα.

Αν η ταχύτητα του Ο, $\frac{{\rm d}\vec{r}_{\rm o}}{{\rm d}t}$, είναι κατά τη διεύθυνση του $\vec{P}$ ή είναι μηδέν,

τότε ο τελευταίος όρος στο δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την πιο γνώριμη σχέση.

$$\frac{{\rm d}\vec{L}_{\rm o}}{{\rm d}t} = \vec{N}_{\rm o} \quad . \quad (1.49)$$

Δηλαδή ισχύει ανάλογος τύπος που ισχύει για υλικό σημείο. Προσοχή, στη σχέση αυτή υπεισέρχονται μόνο οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων και οι ταχύτητες είναι ως προς το αδρανειακό σύστημα.

1.12 Στροφορμή περί το κέντρο μάζας

Θεωρούμε ότι όλα αναφέρονται σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς που το λέμε απόλυτο σύστημα αναφοράς..

Για την ολική στροφορμή συστήματος σωματίων περί τυχαίο σημείο Ο (γενικώς κινούμενο) έχομε

$$\vec{L}_{\mathrm{o}} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i \; .$$

$\vec{\upsilon}_i$ είναι η ταχύτητα του σωματίου i ως προς το συγκεκριμένο απόλυτο σύστημα αναφοράς. Το $\vec{r}_i$ είναι το διάνυσμα από το Ο μέχρι το σωμάτιο i και μπορεί να

γραφτεί ως άθροισμα

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\mathrm{A}} + \vec{r}_{\mathrm{A}i}$$

όπου $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ είναι το διάνυσμα από το Ο μέχρι κάποιο (γενικώς) κινούμενο σημείο Α και $\vec{r}_{\mathrm{A}i}$ διάνυσμα που ξεκινά από το σημείο Α και καταλήγει στο υλικό σημείο i. Έυκολα προκύπτει ότι κάθε μια χρονική στιγμή ισχύουν για τη στροφορμή περί το Α και Ο αντιστοίχως,

$$\vec{L}_{\mathrm{A}} = \sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{A}i} \times \vec{\upsilon}_i \quad \text{και} \quad \vec{L}_{\mathrm{o}} = \vec{L}_{\mathrm{A}} + \vec{r}_{\mathrm{A}} \times \vec{P} \qquad (1.50)$$

όπου $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = M\vec{V}_{\mathrm{cm}}$ είναι η ολική ορμή του συστήματος, $M = \sum_i m_i$ είναι η ολική μάζα του συστήματος και $\vec{V}_{\mathrm{cm}}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Δηλαδή κάθε μια χρονική στιγμή, η ολική στροφορμή περί το Ο θα είναι ίση με τη στροφορμή του συστήματος περί το Α συν τη στροφορμή περί το Ο υλικού σημείου που έχει στιγμιαία ορμή $\vec{P}$ που συμπίπτει στιγμιαία με το σημείο Α (δεν έχουν κατ ανάγκη την ίδια ταχύτητα!).

Ξαναθυμίζομε ότι οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_i$ και επομένως και η ολική ορμή του συστήματος είναι ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς.

Ειδική περίπτωση είναι η επιλογή του σημείου Α να είναι το κέντρο μάζας C του συστήματος. Τότε

$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = \sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \times \vec{\upsilon}_i \qquad (1.51)$$

Όμως

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{V}_{\mathrm{cm}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i} \ ,$$

όπου $\vec{V}_{\mathrm{cm}}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, $\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}$ είναι η ταχύτητα του σωματίου i ως προς σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με το κέντρο μάζας χωρίς να περιστρέφεται ως προς το προηγούμενο συγκεκριμένο σύστημα (μεταφορική κίνηση). Τα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}$ που αναφέρονται στο παραπάνω σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, είναι οι εσωτερικές ταχύτητες. Από τον ορισμό του κέντρου μάζας εύκολα προκύπτει ότι σε αυτή την περίπτωση η ολική στροφορμή του συστήματος εξαρτάται μόνο από τις εσωτερικές ταχύτητες, δηλαδή

$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = \sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \times \vec{\upsilon}_i = \sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \times (\vec{V}_{\mathrm{c}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}) \,. \ (1.52)$$

Πράγματι ο όρος $\sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \times \vec{V}_{\mathrm{c}} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \right) \times \vec{V}_{\mathrm{c}} = \left(M \vec{R}_{\mathrm{cc}} \right) \times \vec{V}_{\mathrm{c}} = 0$

Διότι $\vec{R}_{\mathrm{cc}} = 0$ αφού είναι (ουσιαστικά) το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας στο ανωτέρω σύστημα κέντρου μάζας που προφανώς έχει αρχή το κέντρο μάζας!

άρα $\qquad \vec{L}_{\mathrm{cm}} = \sum_i m_i \vec{r}_{\mathrm{c}i} \times \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i} \ .$

Έτσι καταλήγομε ότι μόνο αν το σημείο Α είναι το κέντρο μάζας, ισχύει η σχετικά απλή σχέση

$$\vec{L}_{\mathrm{o}} = \vec{L}_{\mathrm{cm}} + \vec{r}_{\mathrm{cm}} \times \vec{P} \,. \ (1.53)$$

Από τα προηγούμενα ξέρουμε ότι για τις ολικές ποσότητες ισχύει,

$$\vec{N}_{\mathrm{ex}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (1.54)$$

Οι ροπές των δυνάμεων και η στροφορμή λαμβάνονται περί σημείο που ή είναι ακίνητο ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς ή έχει ταχύτητα ίδια με το κέντρο μάζας του συστήματος των σωματίων που εξετάζουμε. Αν το σημείο αυτό ληφθεί να είναι το κέντρο μάζας τότε ισχύει

$$\vec{N}_{\mathrm{ex,c}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t}. \quad (1.55)$$

Δηλαδή, στην περίπτωση του κέντρου μάζας η στροφορμή που υπεισέρχεται στη σχέση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης υπολογίζεται από τις εσωτερικές ταχύτητες.

Προφανώς αυτό ισχύει ανεξάρτητα του αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται ή όχι.

Δείξαμε στα προηγούμενα ότι

$$\vec{F}_{\mathrm{ex}} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t^2} = M\,\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \quad (1.56)$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι, αν έχομε σύστημα υλικών σημείων μπορούμε να εξετάσομε χωριστά την κίνηση του κέντρου μάζας θεωρούμενου ως υλικού σημείου και χωριστά την κίνηση του συστήματος σχετικά με το κέντρο μάζας, όπου οι ταχύτητες που υπεισέρχονται είναι οι εσωτερικές. Το τελευταίο δεν ισχύει για άλλα σημεία, τότε οι ταχύτητες είναι ως προς το αδρανειακό στο οποίο αναφέρεται και η κίνηση του κέντρου μάζας.

1.13 Κινητική ενέργεια συστήματος υλικών σημείων

Ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα θέσης του κάθε σωματίου i του συστήματος γράφεται ως

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{\mathrm{cm}} + \vec{r}_{\mathrm{c}i} \quad (1.57)$$

όπου $\vec{R}_{\mathrm{cm}}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος και $\vec{r}_{\mathrm{c}i}$ είναι το διάνυσμα από το κέντρο μάζας μέχρι το σωμάτιο i. Ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\upsilon}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{c}i}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}_{\mathrm{cm}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}. \quad (1.58)$$

Το $\vec{\upsilon}_i$ είναι η ταχύτητα του σωματίου i ως το σύστημα σύστημα αναφοράς, $\vec{V}_{\mathrm{c}}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς και $\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}$ είναι η ταχύτητα του σωματίου i στο σύστημα του κέντρου μάζας που αναφέραμε στα προηγούμενα . Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματίων είναι :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V}_{\mathrm{cm}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i (V_{\mathrm{cm}}^2 + \upsilon_{\mathrm{c}i}^2 + 2\vec{V}_{\mathrm{cm}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}). \end{aligned} \qquad (1.59)$$

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας έχουμε,

$$\vec{R}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Άρα

$$\vec{V}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i (\vec{V}_{\mathrm{cm}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}) = \vec{V}_{\mathrm{cm}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i} \qquad (1.60)$$

οπότε

$$\sum_i m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i} = 0 \ . \qquad (1.61)$$

Τα $\vec{p}_{\mathrm{c}i} = m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i}$ είναι οι εσωτερικές ορμές των σωματίων του συστήματος, οπότε η ολική εσωτερική ορμή των υλικών σημείων στο σύστημα του κέντρου μάζας, που ορίσαμε στα προηγούμενα, είναι μηδέν. Από την έκφραση της E_{k} έχουμε,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}MV_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_{\mathrm{c}i}^2 + 2\vec{V}_{\mathrm{cm}}\cdot\sum_i m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}i} \\ &= \frac{1}{2}MV_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \upsilon_{\mathrm{c}i}^2. \end{aligned} \qquad (1.62)$$

Δηλαδή η ολική κινητική ενέργεια είναι ίση με την κινητική ενέργεια υλικού σημείου μάζας M ίσης με το άθροισμα των μαζών των υλικών σημείων το οποίο κινείται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, συν την κινητική ενέργεια των υλικών σημείων όταν το καθένα κινείται με ταχύτητα ίση με την εσωτερική ταχύτητά του (δηλαδή, τη σχετική ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας).

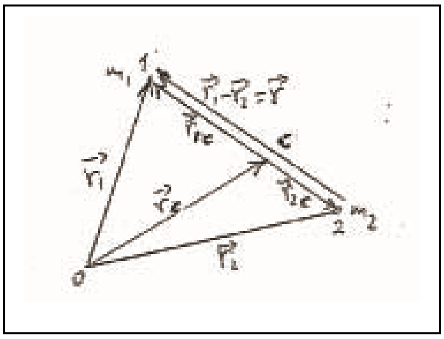
1.14 Σύστημα δύο υλικών σημείων, Ανηγμένη Μάζα

Είναι προφανές ότι, αν C είναι το κέντρο μάζας (βλ. Σχ. 1.16), έχουμε:

$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_{\mathrm{c}})\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}1} + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_{\mathrm{c}})\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}2} \quad (1.63)$$

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{c}1} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{c}1}, \quad \vec{\upsilon}_{\mathrm{c}2} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{c}2}\,,\ \vec{r}_{\mathrm{c}1} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_{\mathrm{c}}),\ \vec{r}_{\mathrm{c}2} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_{\mathrm{c}})$$

$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = m_1\vec{r}_{\mathrm{c}1}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{c}1}) + m_2\vec{r}_{\mathrm{c}2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{c}2})\,.$$



Σχήμα 1.16

Επίσης ισχύουν

$$m_1\vec{r}_{\mathrm{c}1} + m_2\vec{r}_{\mathrm{c}2} = 0,\ \ \vec{r}_{\mathrm{c}1} - \vec{r}_{\mathrm{c}2} = \vec{r}\ ,\ \text{άρα}$$

$$m_1\vec{r}_{\mathrm{c}1} + m_2(\vec{r}_{\mathrm{c}1} - \vec{r}) = 0$$

$$\vec{r}_{\mathrm{c}1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r},\ \ \vec{r}_{\mathrm{c}2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad (1.64)$$

και επομένως

$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$\vec{L}_{\mathrm{cm}} = \mu \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (1.65)$$
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχομε,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}_{\mathrm{ex}} = \vec{N}_{\mathrm{ex1}} + \vec{N}_{\mathrm{ex2}} \qquad (1.66)$$

όπου οι ροπές είναι περί το κέντρο μάζας.

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_1, \quad m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_2 \\ & \frac{\mathrm{d}^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{ex1}}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{ex2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \end{aligned} \qquad (1.67)$$

όμως $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, επομένως

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{ex1}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{\mathrm{ex2}}}{m_2} + \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \qquad (1.68)$$

Αν ισχύει

$$\frac{\vec{F}_{\mathrm{ex1}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{\mathrm{ex2}}}{m_2} = 0 \ , \ (1.69)$$

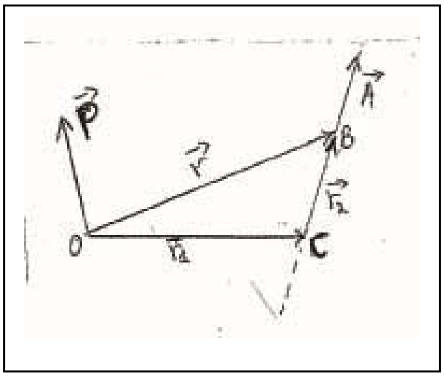
τότε καταλήγομε στη σχέση

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{12} . \quad (1.70)$$

Έχομε αναγωγή του προβλήματος της σχετικής κίνησης των δυο σωματίων σε κίνηση ενός υλικού σημείου.

Το πρόβλημα της κίνησης δυο σωματίων ανάγεται σε δυο προβλήματα ενός σωματίου, το ένα αναφέρεται στην κίνηση του κέντρου μάζας και το άλλο στη σχετική κίνηση (του ενός ως προς το άλλο) των δυο σωματίων.

1.15 Ροπή διανύσματος περί σημείο



Σχήμα 1.17

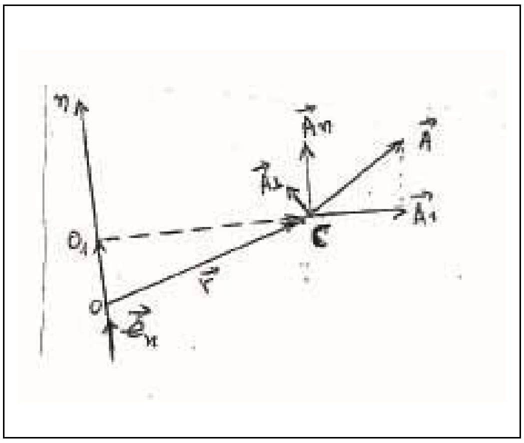
Ορίζουμε ως ροπή του διανύσματος $\vec{A}$ περί το σημείο O, Σχ. 1.17, το μέγεθος $\vec{P}$ που δίνεται από τη σχέση, $\vec{P} = \vec{r} \times \vec{A}$ όπου το $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου B σχετικά με το O. Αν C είναι τυχαίο σημείο του φορέα του διανύσματος $\vec{A}$ μπορούμε να γράψουμε $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, άρα

$$\vec{P} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{A} = \vec{r}_1 \times \vec{A} + \vec{r}_2 \times \vec{A} , \quad (1.71)$$

όμως $\vec{r}_2 \times \vec{A} = 0$ διότι τα $\vec{r}_2$ και $\vec{A}$ είναι μεταξύ τους συγγραμμικά. Επομένως, $\vec{P} = \vec{r}_1 \times \vec{A}$. Αν το $\vec{A}$ είναι δύναμη, έχουμε τη συνηθισμένη ροπή δύναμης περί σημείο, αν το $\vec{A}$ είναι η ορμή έχουμε τη στροφορμή περί σημείο.

1.16 Ροπή διανύσματος περί άξονα

Ορίζουμε ως ροπή διανύσματος περί άξονα την προβολή πάνω στον άξονα της ροπής του διανύσματος περί ένα τυχαίο σημείο του άξονα. Από το Σχ.1.18 έχουμε για τη ροπή p_{n} περί τον άξονα On, $p_{\mathrm{n}} = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\vec{r} \times \vec{A})$. Φανταζόμαστε ότι φέρνουμε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα On που περνά από το σημείο C (που είναι η αρχή του $\vec{A}$). Η ευθεία O_1C είναι πάνω σε αυτό το επίπεδο και είναι κάθετη στον άξονα On. Αναλύουμε το $\vec{A}$ σε τρεις διανυσματικές συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους $\vec{A}_1$, $\vec{A}_\perp$, $\vec{A}_{\mathrm{n}}$. Η $\vec{A}_1$ είναι στη διεύθυνση O_1C, η $\vec{A}_{\mathrm{n}}$ έχει διεύθυνση παράλληλη με τον On και η $\vec{A}_\perp$ είναι πάνω στο παραπάνω κάθετο στον άξονα On επίπεδο. Η $\vec{A}_\perp$ είναι κάθετη στην O_1C. Έχουμε,



Σχήμα 1.18

$$p_{\mathrm{n}} = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\vec{r} \times \vec{A}) = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot \left((\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}_1 C}) \times (\vec{A}_1 + \vec{A}_\perp + \vec{A}_{\mathrm{n}}) \right) \quad (1.72)$$

άρα

$$p_{\mathrm{n}} = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_\perp + \overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_{\mathrm{n}} + \overrightarrow{\mathrm{O}_1 C} \times \vec{A}_1 + \overrightarrow{\mathrm{O}_1 C} \times \vec{A}_\perp + \overrightarrow{\mathrm{O}_1 C} \times \vec{A}_{\mathrm{n}} \right)$$

Προφανώς

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_1 = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_{\mathrm{n}} = 0$$

επομένως

$$p_{\mathrm{n}} = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_1) + \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_{\perp}) + \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}} \times \vec{A}_{\mathrm{n}}) + \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}} \times \vec{A}_{\perp}) \,.$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.73)$$

οπότε ο πρώτος όρος του 2ου μέλους γίνεται,

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_1) = (\vec{e}_{\mathrm{n}} \times \overrightarrow{\mathrm{OO}_1}) \cdot \vec{A}_1 = 0$$

εφόσον τα $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OO}_1}$ είναι παράλληλα. Το ίδιο ισχύει για τον δεύτερο όρο

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OO}_1} \times \vec{A}_{\perp}) = 0 \,.$$

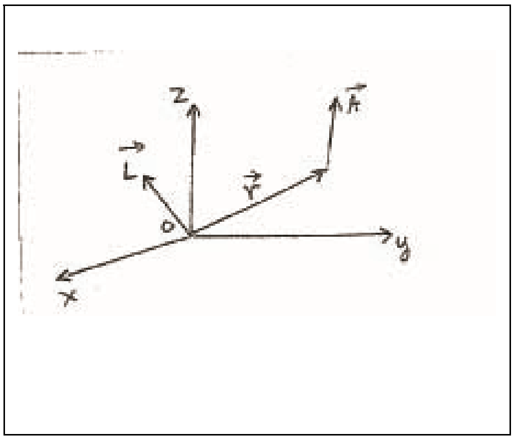
Για τον ίδιο λόγο όπως προηγουμένως ο τελευταίος όρος γράφεται,

$$\vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}} \times \vec{A}_{\mathrm{n}}) = -\vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\vec{A}_{\mathrm{n}} \times \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}}) = -(\vec{e}_{\mathrm{n}} \times \vec{A}_{\mathrm{n}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}} = 0 \,.$$

Τελικώς,

$$p_{\mathrm{n}} = \vec{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{C}} \times \vec{A}_{\perp}) = (\mathrm{O}_1\mathrm{C}) A_{\perp} \,. \quad (1.74)$$

Δηλαδή η ροπή είναι ανεξάρτητη από το σημείο Ο και ισχύει η γνωστή σχέση που ισχύει για ροπή περί άξονα διανύσματος το οποίο είναι πάνω σε επίπεδο ενώ ο άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό. Μπορεί να βγάλει κανείς και άλλη χρήσιμη σχέση αναλύοντας το $\vec{A}$ στη $\vec{A}_{\mathrm{n}}$ και σε συνιστώσα πάνω σε επίπεδο κάθετο στην *On*.



Σχήμα 1.19

Από τα ανωτέρω προκύπτει εύκολα ότι αν έχουμε τους άξονες του Σχ. 1.19, η ροπή του $\vec{A}$ περί το Ο μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσεις που είναι ίσες με τις ροπές του $\vec{A}$ περί τους τρεις άξονες Ο*x,* Ο*y,* Ο*z*. Συγκεκριμένα έχουμε,

$$\vec{p}_{\rm o} = \vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(yA_z - zA_y) + \vec{e}_y(zA_x - xA_z) + \vec{e}_z(zA_y - xA_x) \quad (1.75)$$

Η προβολή της ροπής $\vec{p}_{\rm o}$ στον άξονα *x,* δηλαδή το $\vec{e}_x \cdot \vec{p}_{\rm o}$ είναι:

$$p_x = yA_z - zA_y, \;\; p_y = zA_x - xA_z, \;\; p_z = xA_y - yA_x \quad (1.76)$$

Αν το $\vec{A}$ είναι η (γραμμική) ορμή, τότε από τα ανωτέρω έχουμε τον ορισμό και στις ιδιότητες της στροφορμής περί άξονα.

1.17 Κεντρική δύναμη, Επίπεδη κίνηση

Θα δείξουμε ότι αν η δύναμη που δρα σε υλικό σημείο είναι της μορφής $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$ δηλαδή κεντρική, τότε το σημείο διαγράφει επίπεδη κίνηση.

Έχουμε για τη ροπή $\vec{N}$ της κεντρικής δύναμης περί την αρχή των αξόνων που υποθέτουμε ότι είναι το κέντρο της δύναμης,

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times (F(r)\vec{e}_r) = F(r)\vec{r} \times \vec{e}_r = 0 \; \mathit{(1.77)}$$

αφού τα $\vec{r}$ και $\vec{e}_r$ είναι παράλληλα (συγγραμμικά). Έχουμε λοιπόν από το θεώρημα της μεταβολής της στροφορμής περί την αρχή των αξόνων,

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (1.78)$$

επομένως

$\vec{L}_{\mathrm{o}} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \text{σταθερό}$. Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά επί $\vec{r}$ οπότε,

$$m\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{\upsilon}) = (\vec{r} \cdot \vec{L}_{\mathrm{o}}). \quad (1.79)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχετική ταυτότητα οπότε,

$$m\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{\upsilon}) = m(\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{\upsilon} = \vec{r} \cdot \vec{L}_{\mathrm{o}} = 0. \; (1.80)$$

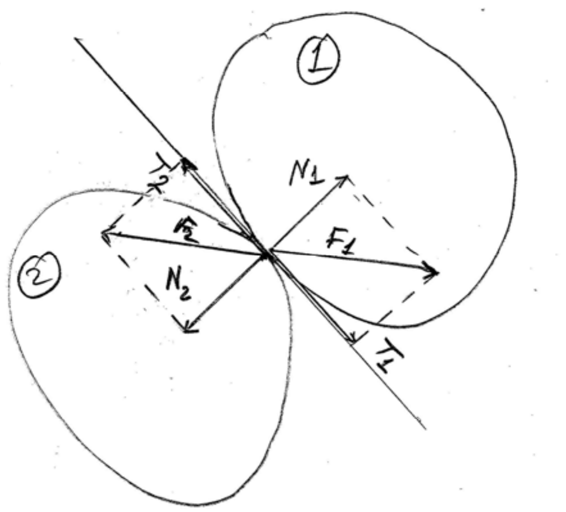
Επομένως τα $\vec{r}$ και $\vec{L}_{\mathrm{o}}$ είναι κάθετα μεταξύ τους κατά τη διάρκεια της κίνησης. Με τον ίδιο τρόπο δείχνει κανείς ότι το $\vec{\upsilon}$ και το $\vec{L}_{\mathrm{o}}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν διαλέξουμε τον άξονα Oz (για παράδειγμα) κατά τη διεύθυνση του $\vec{L}_{\mathrm{o}}$, που είναι σταθερό διάνυσμα, έχουμε

$$\vec{r} \cdot \vec{L}_{\mathrm{o}} = L_{\mathrm{o}}\vec{r} \cdot \vec{e}_z = L_{\mathrm{oz}} = 0, \quad (1.81)$$

όου $\vec{r} \cdot \vec{e}_z$ είναι η προβολή του $\vec{r}$ στον άξονα Oz άρα είναι z. Δηλαδή $z = 0$ για κάθε τιμή του χρόνου. Αυτή όμως είναι η εξίσωση επιπέδου κάθετου στον άξονα Oz που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή παρόλο που οι άλλες συντεταγμένες του κινητού μπορούν να αλλάζουν με το χρόνο, η συντεταγμένη z δεν αλλάζει και το κινητό είναι σε ένα επίπεδο που φυσικά εξαρτάται από την αρχική (διανυσματική) ταχύτητα του κινητού ή αλλιώς από το $\vec{L}_{\mathrm{o}}$.

1.18 Τριβή μεταξύ στερεών σωμάτων

Έστω δύο στερεά σώματα που βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους, Σχ. 1.20. Στο σύστημα των δυο σωμάτων ασκούνται, γενικώς, εξωτερικές δυνάμεις τέτοιες που τα διατηρούν σε επαφή.



Σχήμα 1.20

Μεταξύ τους ασκούνται και εσωτερικές δυνάμεις στην μεταξύ τους επαφή, το σώμα 2 ασκεί στο σώμα 1 δύναμη $\vec{F}_1$ και το σώμα 1 στο σώμα 2 δύναμη $\vec{F}_2$. Για αυτές τις δυνάμεις επαφής ισχύει η αρχή δράσης – αντίδρασης, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Οι δυνάμεις είναι τέτοιες που εμποδίζουν τα δυο στερεά σώματα να εισχωρήσει το ένα μέσα στο άλλο. Υπάρχει ένα κοινό εφαπτόμενο επίπεδο επαφής των δυο σωμάτων. Η κάθε μια από τις δυνάμεις επαφής αναλύονται, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.20, σε μια καρτεσιανή συνιστώσα κατά την κάθετο στο επίπεδο επαφής N_1, N_2 και σε μια που κείται πάνω σε αυτό το επίπεδο T_1, T_2, αυτή είναι ένα είδος τριβής, που στην περίπτωση των δυο στερεών σωμάτων που εξετάζομε, λέγεται ξηρή (στεγνή) τριβή (dry friction).

Προφανώς έχομε για τα μέτρα (απόλυτες τιμές) των κάθετων δυνάμεων $N_1 = N_2 = N$, οπότε αναφερόμαστε στην κάθετη δύναμη επαφής N. Για τα μέτρα των δυνάμεων των τριβών έχομε επίσης $T_1 = T_2 = T$, έτσι αναφερόμαστε στη δύναμη τριβής T.

Η κατεύθυνση της δύναμης τριβής είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της κίνησης που θα αποκτούσε το σώμα αν δεν υπήρχε τριβή.

Η λεπτομερής εξέταση του φαινομένου της τριβής δεν είναι εύκολη, είναι ένα πολύπλοκο φυσικομηχανικό πρόβλημα.

Οι υπολογισμοί που συνήθως κάνουμε στηρίζονται σε μερικούς γενικούς νόμους που έχουν προκύψει εμπειρικά από πειράματα.

Ξεχωρίζουν δυο περιπτώσεις, α) τα σώματα έχουν σχετική κίνηση κατά μήκος της επιφάνειας επαφής, τότε η τριβή λέγεται κινητική τριβή ή τριβή ολισθήσεως, β) τα σώματα δεν έχουν τέτοια σχετική κίνηση, τότε η τριβή λέγεται στατική τριβή.

Οι προσεγγιστικοί, εμπειρικοί νόμοι της τριβής ολισθήσεως είναι:

α) Η δύναμη τριβής είναι ανάλογη προς την κάθετη δύναμη.

$$T = n_{\mathrm{k}} N \quad (1.82).$$

Ο συντελεστής (καθαρός αριθμός) n_{k} λέγεται συντελεστής κινητικής τριβής ή τριβής ολισθήσεως. Εξαρτάται από το είδος των εφαπτόμενων επιφανειών και την κατάστασή τους, για παράδειγμα από την τραχύτητά τους.

β) Η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη από την «φαινόμενη» επιφάνεια επαφής.

γ) Η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης μεταξύ των δυο σωμάτων.

Στην περίπτωση της στατικής τριβής έχομε ότι

$$T \le T_{\max} = n_{\mathrm{s}} N \qquad (1.83)$$

Ο συντελεστής n_s λέγεται συντελεστής στατικής τριβής, είναι αδιάστατο φυσικό μέγεθος και εξαρτάται και αυτός από το είδος των εφαπτόμενων επιφανειών και την κατάστασή τους .

Στην πραγματικότητα συντελεστής κινητικής τριβής n_k εξαρτάται σε κάποιο βαθμό και από τη σχετική ταχύτητα των δύο επιφανειών και ελαττώνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα αποκτώντας τελικώς μια σταθερή τιμή. Ισχύει γενικώς $n_s \geq n_k$. Πολλές φορές δεν λαβαίνουμε υπόψη τη μεταβολή με την ταχύτητα και επίσης θεωρούμε ότι $n = n_s = n_k$. Όμως επειδή $n_s \geq n_k$, συνιστάται στους οδηγούς να μην πατούν συνέχεια το φρένο οχήματος που ντεραπάρει σε γλιστερό δρόμο αλλά να το πατούν και να το αφήνουν ρυθμικά, έτσι οι ρόδες δεν γλιστρούν και υπεισέρχεται στο φαινόμενο ο κάπως μεγαλύτερος συντελεστής στατικής τριβής με καλύτερα αποτελέσματα πρόσφυσης των ροδών στο έδαφος. Αυτό σήμερα το κάνουν αυτόματα συστήματα που έχουν ενσωματωθεί στο σύστημα πέδησης των σύγχρονων αυτοκινήτων.

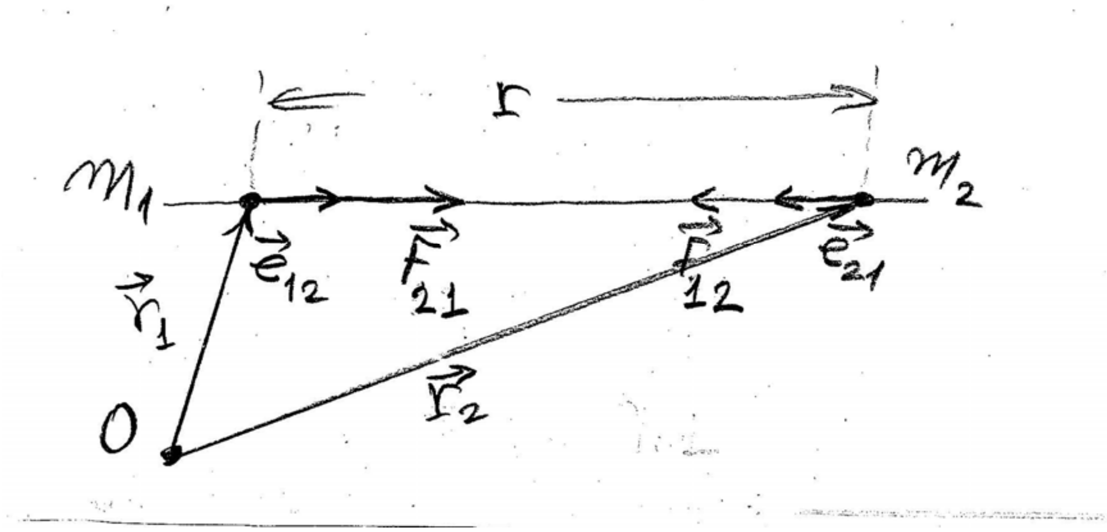
2. ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ. ΒΑΡΥΤΗΤΑ.

2.1 Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, Μάζα σώματος

Τα υλικά σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με βαρυτικές δυνάμεις, σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης που λέγεται και νόμος του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη. Αυτός ο νόμος αναφέρεται σε δυο υλικά σημεία που βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση r. Η δύναμη που το σωμάτιο 1 ασκεί στο σωμάτιο 2 δίνεται από την Εξ. (2.1)

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} \qquad (2.1)$$

Στο Σχ. 2.1 φαίνεται η σημασία των διαφόρων μεγεθών αυτής της σχέσης.



Σχήμα 2.1

Το G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας ή βαρυτική σταθερά, στο SI ισχύει $G = 6,672\ 59 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2 / \text{kg}^2$. Τα μεγέθη m_1, m_2 είναι χαρακτηριστικά μεγέθη των δυο υλικών σημείων, είναι οι μάζες τους. Η απόσταση μεταξύ των υλικών σημείων είναι r. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_{12}$ και το $\vec{r}_{12}$, κατευθύνονται από το υλικό σημείο 1 που ασκεί τη δύναμη προς το υλικό σημείο 2 στο οποίο ασκείται η δύναμη. Προφανώς ισχύει η σχέση $\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{r}$ όπου το $r = r_{12} > 0$ είναι η απόσταση μεταξύ των σωματίων και $\vec{r}_{12}$ το διάνυσμα με αρχή το 1 και τέλος το 2. Η δύναμη βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δυο σωμάτια και είναι ελκτική.

Η δύναμη $\vec{F}_{21}$ που το σωμάτιο 2 ασκεί στο 1 δίνεται από την ίδια σχέση αφού εναλλάξομε τις θέσεις των δεικτών 1 και 2 , οπότε καταλήγομε στην Εξ. (2.2)

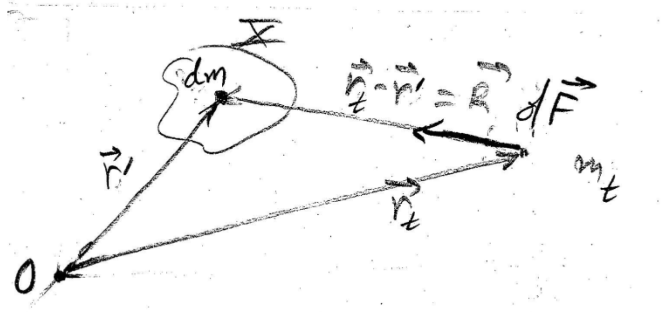
$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_2 m_1}{r^2} \vec{e}_{21} \quad (2.2)$$

Η δύναμη αυτή έχει αντίθετη φορά από την προηγούμενη και ίδια απόλυτη τιμή. Αυτό συνάγεται εύκολα διότι $\vec{e}_{12}$=-$\vec{e}_{21}$ οπότε $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (Σχ. 2.1).

Βλέπομε ότι αυτές οι δυνάμεις υπακούουν στο νόμο της δράσης-αντίδρασης και μάλιστα στην ισχυρή διατύπωσή του. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.3)$$

Τα $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ είναι τα διανύσματα θέσης των δυο υλικών σημείων, Σχ. 2.1.



Σχήμα 2.2

Με εναλλαγή των 1,2 βρίσκομε τη δύναμη που ασκεί το 2 στο 1.

Ισχύει $\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}$.

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης ισχύει με μεγάλη ακρίβεια όπως έχουν δείξει πειράματα τύπου των πειραμάτων του Cavendish για αποστάσεις εντός εργαστηρίου (της τάξης μεγέθους κάτω του mm, κάπου 50 μm). Για τις μεγάλες αποστάσεις της τάξης των $10^{15}\,\mathrm{m}$, η ακρίβεια καθορίζεται από το πόσο καλά μπορούμε να περιγράψουμε τις κινήσεις πλανητών και αντικειμένων του ηλιακού μας συστήματος, σήμερα πια, λαμβάνοντας υπόψη και μικρές διορθώσεις από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Έχουν υπάρξει ιδέες που λένε ότι ίσως τροποποιείται λίγο σε μικρές αποστάσεις (όχι πλανητικές) αλλά αυτό δεν έχει βεβαιωθεί με τρόπο που να γίνει αποδεκτό. Η ιδέα σχετίζεται με ύπαρξη αλληλεπιδράσεων που τροποποιούν κατάλληλα τη βαρυτική δύναμη. Η σχέση που ισχύει σε αυτή την περίπτωση μπορεί να είναι της μορφής,

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}(1+\alpha \mathrm{e}^{-r/\lambda}) = -G\frac{m_1 m_2}{r} - G\frac{m_1 m_2}{r}\alpha \mathrm{e}^{-r/\lambda} .$$

Δηλαδή έχομε μια διόρθωση στη δυναμική ενέργεια (δυναμικό) τύπου Yukawa.

Ενδεικτικές τιμές για τις καινούργιες σταθερές είναι, $\alpha = -7,2 \times 10^{-3}$, $\lambda = 2,00 \times 10^2$ m.

Η αρνητική παράμετρος α σημαίνει απωστική δύναμη, δηλαδή ελάττωση της αναμενόμενης δύναμης της παγκόσμιας έλξης. Οι παράμετροι α, λ εξαρτιόνται, γενικώς, από τα είδη των υλικών που αλληλεπιδρούν. Αυτά μπορεί να συσχετιστούν με τα πειράματα Eodvos.

Μια άλλη παρατήρηση που οφείλουμε να κάμουμε είναι ότι η διατύπωση του νόμου αυτού εμπεριέχει το γεγονός της ομογένειας και ισοτροπίας του χώρου. Αν δηλαδή δύο αλληλεπιδρώντα σωμάτια μετακινηθούν χωρίς να αλλάξει η σχετική τους απόσταση (μεταφορά και / ή στροφή) δεν αλλάζει το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο καθένα και επίσης δεν αλλάζει η σχετική με τα σωμάτια κατεύθυνση της δύναμης.

Στην πράξη η αλληλεπίδραση μεταξύ υλικών σωμάτων περιγράφεται με το νόμο της παγκόσμιας έλξης (στην παραπάνω μορφή του) για υλικά σημεία αν οι διαστάσεις των σωμάτων είναι μικρές σε σχέση με τη μεταξύ τους απόσταση.

Τα υλικά σώματα αποτελούνται από πολλά υλικά σημεία. Για να βρούμε τη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ συστημάτων που αποτελούνται από πολλά υλικά σωμάτια μπορούμε να προσθέσομε διανυσματικά τις επιμέρους δυνάμεις που ασκούν τα υλικά σωμάτια. Για διακριτά υλικά σημεία έχομε

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Αν έχομε συνεχείς κατανομές αυτό αντιστοιχεί σε υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Η δυνατότητα της εύρεσης της ολικής δύναμης με τους ανωτέρω τρόπους στηρίζεται στο ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Αυτό είναι αλήθεια για τη νευτώνεια αλληλεπίδραση που αναφέραμε προηγουμένως αλλά δεν ισχύει στη Γενική Σχετικότητα. Η Γενική Σχετικότητα δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τη νευτώνεια Μηχανική όταν οι βαρυτικές δυνάμεις είναι αρκετά ασθενικές.

Στο Σχ. 2.2 φαίνεται ο χώρος (το χωρίο) X όπου είναι κατανεμημένη η μάζα κατά συνεχή τρόπο. Τότε η μάζα στη θέση 1 που ασκεί τη δύναμη, είναι στοιχειώδης μάζα $\mathrm{d}m$. Η στοιχειώδης δύναμη που ασκεί στην m_2 είναι

$$\mathrm{d}\vec{F} = -Gm_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\mathrm{d}m$$

Αθροίζομε τις δυνάμεις των στοιχειωδών μαζών $\mathrm{d}m$ ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση πάνω στο χωρίο Χ και βρίσκομε τη συνολική δύναμη πάνω στη μάζα m_2. Έχομε

$\vec{F} = -Gm_2 \int\limits_{\mathrm{X}} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\mathrm{d}m$. Θέτομε $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ οπότε βρίσκομε

$$\vec{F} = -Gm_2 \int\limits_{\mathrm{X}} \frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}m = -Gm_2 \int\limits_{\mathrm{X}} \frac{\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}m$$

$\vec{e}_R$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το 1 στο 2 κατά μήκος του $\vec{R}$ και R η απόλυτη τιμή του $\vec{R}$, ($\vec{R} = R\vec{e}_R$).

Αν η κατανομή είναι κατανομή όγκου τότε το χωρίο Χ είναι τρισδιάστατος χώρος και μπορεί να παριστάνεται με το σύμβολο του όγκου, V. Η κατανομή χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα όγκου ρ και η στοιχειώδης μάζα είναι $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}\upsilon'$ όπου $\mathrm{d}\upsilon'$ είναι ο στοιχειώδης όγκος που καταλαμβάνει η στοιχειώδης μάζα που ασκεί τη δύναμη. Αν έχομε επιφανειακή κατανομή μάζας τότε ισχύει $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S'$ όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας και dS' η στοιχειώδης επιφάνεια. Το χωρίο σε αυτή την περίπτωση είναι διδιάστατο και μπορεί να παριστάνεται με το σύμβολο της επιφάνειας, S. Αν η κατανομή είναι μονοδιάστατη, πάνω σε κάποια γραμμή, τότε $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l'$, όπου λ είναι η γραμμική πυκνότητα της μάζας και $\mathrm{d}l'$ το αντίστοιχο στοιχείο μήκους πάνω στη γραμμική κατανομή. Το χωρίο ολοκλήρωσης θα είναι μονοδιάστατο και μπορεί να παριστάνεται με το σύμβολο για την καμπύλη, c.

Αν έχομε κατανομή που είναι μείγμα συνεχούς και διακριτής κατανομής τότε έχομε άθροισμα και ολοκλήρωμα.

Στο νόμο της παγκόσμιας έλξης θα μπορούσε να μπαίνουν δυο μάζες για κάθε σωμάτιο. Δηλαδή, το κάθε σωμάτιο θα είχε μια μάζα που ασκεί τη δύναμη (βαρυτική ενεργητική μάζα, m'_{a}) και μια που δέχεται τη δύναμη (βαρυτική παθητική μάζα, m'_{p}). Έτσι για την απόλυτη τιμή της δύναμης που ασκεί το 1 στο 2 θα είχαμε,

$F_{12} = G\frac{m'_{\mathrm{a}1} m'_{\mathrm{p}2}}{r^2}$. Για τη δύναμη που το 2 ασκεί στο 1 θα είχαμε,

$F_{21} = G\frac{m'_{a2}m'_{p1}}{r^2}$. Επειδή ισχύει η αρχή δράση-αντίδραση έχομε $F_{21} = F_{12}$ άρα $m'_{a1}m'_{p2} = m'_{a2}m'_{p1}$, $\frac{m'_{a1}}{m'_{p1}} = \frac{m'_{a2}}{m'_{p2}}$. Η σχέση ισχύει για οποιαδήποτε ζεύγη υλικών σημείων, δηλαδή για κάθε υλικό σημείο οι λόγοι των δυο μαζών του είναι μια παγκόσμια σταθερά την οποία λαμβάνομε ίση με 1 (αδιάστατη σταθερά). Αυτός είναι ο λόγος που μπορούμε να μιλούμε για μια βαρυτική μάζα m' χωρίς δείκτη.

Η μάζα m που μπαίνει στο θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) λέγεται αδρανειακή μάζα, για μικρές ταχύτητες σε σχέση με αυτή του φωτός στο κενό ($\upsilon << c$) έχομε $F = ma$. Ας θεωρήσομε ότι το υλικό σημείο 1 ασκεί δύναμη στο υλικό σημείο 2 και του δίνει επιτάχυνση a. Έχομε

$F_{12} = G\frac{m'_1 m'_2}{r^2} = m_2 a$. Η αδρανειακή μάζα του 2 είναι η m_2 και η βαρυτική του μάζα είναι η m'_2. Η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση

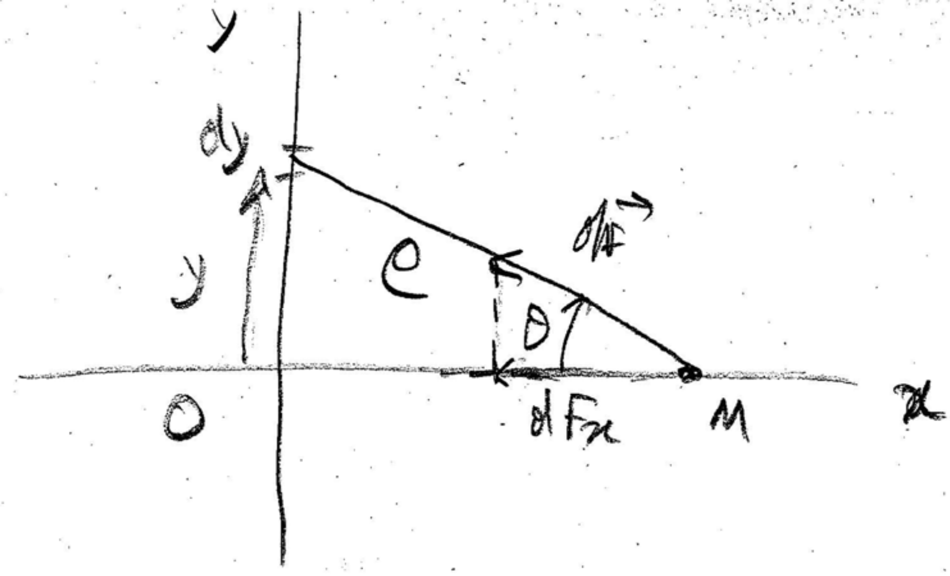
$a = G\frac{m'_1}{r^2}\frac{m'_2}{m_2}$. Είναι γνωστό ότι οποιοδήποτε υλικό σημείο και αν φέρομε στο σημείο 2 αυτό θα αποκτήσει την ίδια επιτάχυνση. Το συμπέρασμα είναι ότι ο λόγος $\frac{m'_2}{m_2}$ είναι μια παγκόσμια σταθερά ανεξάρτητη από το επιμέρους σωμάτιο. Όπως και πριν, θεωρούμε ότι η σταθερά είναι ο καθαρός αριθμός 1 οπότε η βαρυτική και η αδρανειακή μάζα για κάθε ένα σωμάτιο είναι ίδιες, έτσι μιλούμε μόνο για μια μάζα m η οποία ασκεί και δέχεται αλληλεπιδράσεις και επίσης μπαίνει στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, εκφράζοντας την αδράνεια του σώματος,.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί λεπτή ομογενής ευθύγραμμη ράβδος με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας, λ, σε σωμάτιο μάζας M που βρίσκεται σε απόσταση r από τη ράβδο. Η ράβδος εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δυο της κατευθύνσεις.

Λύση

Θεωρούμε το Σχ. 2.3. Η ράβδος είναι τοποθετημένη πάνω στον άξονα y και το υλικό σημείο μάζας M είναι πάνω στον άξονα x.



Σχήμα 2.3

Η δύναμη είναι ελκτική και για λόγους συμμετρίας κατευθύνεται κάθετα προς τη ράβδο. Η στοιχειώδης μάζα $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y$ ασκεί στη μάζα M τη στοιχειώδη δύναμη $\mathrm{d}\vec{F}$. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{d}F = GM\frac{\mathrm{d}m}{\rho^2} = GM\frac{\lambda \mathrm{d}x}{\rho^2}.$$

Επειδή δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμης παράλληλη στη ράβδο, για τις απόλυτες τιμές ισχύει $F = F_x$. Επομένως θα υπολογίσομε το μέτρο (απόλυτη τιμή) της προβολής της δύναμης.

Για τη στοιχειώδη προβολή ισχύει

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = GM\lambda\frac{\mathrm{d}y}{\rho^2}\cos\theta\text{, όμως } \tan\theta = \frac{y}{r},\ \ \mathrm{d}y = \frac{r}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta,\ \rho = r/\cos\theta.$$

$\mathrm{d}F_x = \dfrac{GM\lambda}{r}\cos\theta \mathrm{d}\theta$. Επειδή υπάρχει συμμετρία, η δύναμη που ασκεί το κάτω μισό της ράβδου είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το πάνω μισό, έτσι ολοκληρώνομε από $\theta = 0$ μέχρι $\theta = \pi/2$ και έχομε

$$F = F_x = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta \mathrm{d}\theta = 2\frac{GM\lambda}{r}\int_0^1 \mathrm{d}(\sin\theta)$$

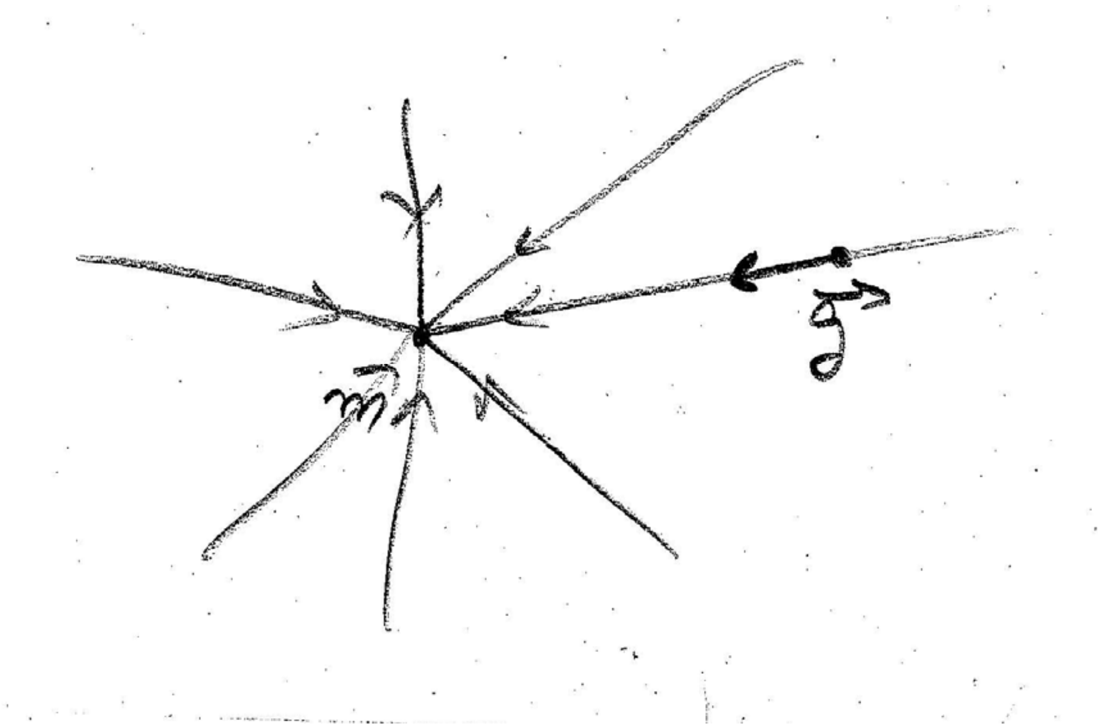
άρα $F = 2\dfrac{GM\lambda}{r}$.

2.2 Πεδίο δυνάμεων, Το βαρυτικό πεδίο

Για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης μεταξύ σωμάτων πολλές φορές είναι χρήσιμη η εισαγωγή της έννοιας του πεδίου δυνάμεων, που λέγεται και δυναμικό πεδίο. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι το σώμα που ασκεί τη δύναμη δημιουργεί στο χώρο ένα πεδίο δυνάμεων, αν μέσα σε αυτόν το χώρο τοποθετηθεί ένα άλλο σώμα με τις κατάλληλες ιδιότητες, θα ασκηθεί πάνω του μια δύναμη ένεκα του πεδίου. Αυτή η ιδέα ενώ εκ πρώτης όψεως δε φαίνεται να έχει πολύ σημασία, έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Φυσικής όπως μπορεί να διαπιστώσει όποιος ασχοληθεί με λίγο πιο προχωρημένα θέματα Φυσικής. Το πεδίο δυνάμεων χαρακτηρίζεται από ένα πεδιακό διανυσματικό μέγεθος που είναι συνάρτηση της θέσης στο χώρο και γενικώς μπορεί να εξαρτάται και από το χρόνο. Για την περίπτωση του πεδίου βαρύτητας όπως και για το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται ένα πεδιακό διανυσματικό μέγεθος που λέγεται ένταση του πεδίου. Για το βαρυτικό πεδίο η ένταση του πεδίου συνήθως παριστάνεται με το σύμβολο $\vec{g}$. Γενικώς $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$. Πολλές φορές λέγεται πεδίο $\vec{g}$ ή πεδίο g. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του χώρου, ορίζεται ως

$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, όπου $\vec{F}$ είναι η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα m η οποία τοποθετείται στο συγκεκριμένο σημείο. Η μάζα m λέγεται υπόθεμα ή δοκιμαστική μάζα για το πεδίο βαρύτητας και πρέπει να μην επηρεάζει την κατανομή μαζών η οποία δημιουργεί το πεδίο. Στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας τα πράγματα είναι πολύ πιο πολύπλοκα, η μάζα m συμβάλλει στη δημιουργία του βαρυτικού πεδίου στο χώρο, το οποίο δρα και στην ίδια τη μάζα m. Στο όριο που η μάζα $m \to 0$ (δοκιμαστική μάζα) το πεδίο οφείλεται μόνο στα άλλα σώματα. Στα πλαίσια της νευτώνειας Φυσικής ή και της Ειδικής Σχετικότητας δεν θα μας απασχολήσουν τέτοια θέματα. Ακόμη θα θεωρούμε ότι η διάδοση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης θα γίνεται ακαριαία, δηλαδή με άπειρη ταχύτητα.

Ας θεωρήσομε υλικό σημείο (σημειακή μάζα, υλικό σωμάτιο) μάζας m ακίνητο σε κάποιο σημείο του χώρου. Σε άλλο σημείο του χώρου φανταζόμαστε ότι τοποθετείται δοκιμαστική μάζα m_{t}. Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα από τη θέση της μάζας m μέχρι τη θέση της μάζας m_{t}. Για την ένταση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργεί η μάζα m στη θέση της μάζας m_{t}, ισχύει $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m_{\mathrm{t}}} = -G\dfrac{mm_{\mathrm{t}}}{r^2 m_{\mathrm{t}}}\vec{e}_r$, Σχ. 2.4.



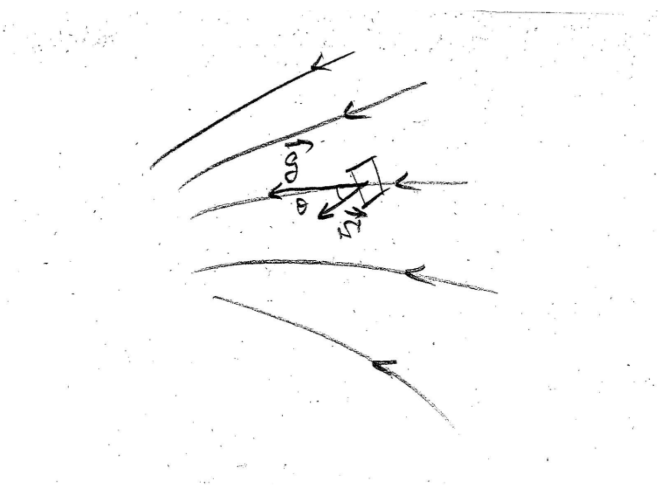
Σχήμα 2.4

Παρατηρούμε ότι το πεδίο g δεν εξαρτάται από το υπόθεμα αλλά μόνο από τη μάζα που δημιουργεί το πεδίο και τη θέση στο χώρο. Το πεδίο g, σε κάθε σημείο, έχει φορά τη φορά της δύναμης που ασκείται σε δοκιμαστική μάζα που τοποθετείται στο σημείο που εξετάζομε. Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ υλικών σωμάτων είναι πάντα ελκτικές. Στην περίπτωση ηλεκτρικών πεδίων οι δυνάμεις μπορεί να είναι είτε ελκτικές ή απωστικές. Η δύναμη αλλάζει φορά αν αλλάξει το πρόσημο του φορτίου που φέρομε σε ένα σημείο του χώρου του ηλεκτρικού πεδίου. Για αυτή την περίπτωση η φορά της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως η φορά της δύναμης πάνω σε θετικό σημειακό φορτίο που φέρεται στο σημείο του πεδίου που εξετάζομε, δηλαδή το υπόθεμα, δοκιμαστικό φορτίο, θεωρείται θετικό.

Δυναμικά πεδία, όπως το πεδίο βαρύτητας και το ηλεκτροστατικό πεδίο, απεικονίζονται με πεδιακές γραμμές που λέγονται και δυναμικές γραμμές. Οι πεδιακές γραμμές είναι νοητές συνεχείς γραμμές στο χώρο του πεδίου. Σε κάθε σημείο η συνεχής πεδιακή γραμμή είναι εφαπτόμενη στην ένταση του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο. Στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου σημειακής μάζας (ανάλογα ισχύουν και για το ηλεκτροστατικό πεδίο σημειακού φορτίου) έχομε την απεικόνιση που φαίνεται στο Σχ. 2.4. Η φορά των δυναμικών γραμμών σε κάθε σημείο συμπίπτει με τη φορά του διανύσματος της εφαπτόμενης έντασης του πεδίου. Όταν έχομε μάζες που δεν είναι σημειακές η εύρεση της έντασης του πεδίου βαρύτητας πρέπει να γίνει με χρήση της αρχής της επαλληλίας η οποία εφόσον ισχύει για τις δυνάμεις ισχύει και για τις εντάσεις. Για συνεχείς κατανομές μάζας χρησιμοποιούμε ολοκληρώματα όπως γίνεται και για τον υπολογισμό των δυνάμεων.

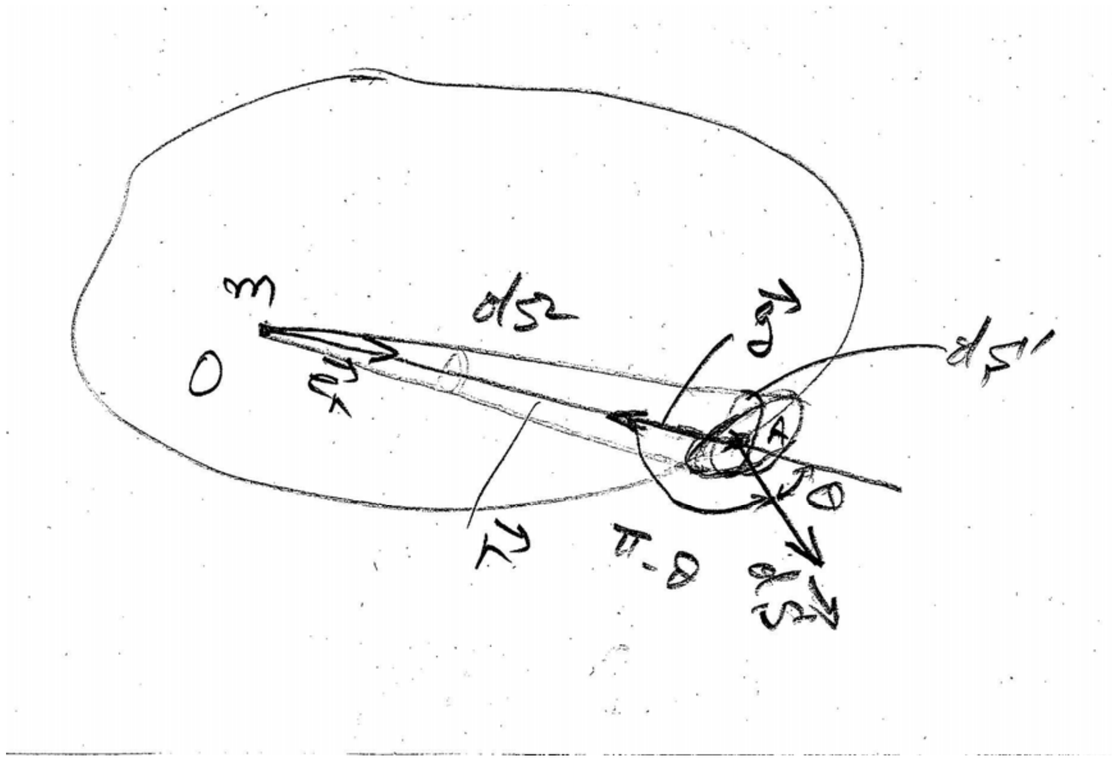
Από όσα έχομε πει συνάγεται ότι η δύναμη $\vec{F}_g$ που ασκεί πεδίο βαρύτητας έντασης $\vec{g}$ σε σώμα μάζας m είναι $\vec{F}_g = m\vec{g}$, επομένως η επιτάχυνση $\vec{a}_g$ που αποκτά αυτή η μάζα ένεκα της βαρύτητας είναι $\vec{a} = \dfrac{F_g}{m} = \dfrac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$. Δηλαδή η επιτάχυνση που οφείλεται στη βαρύτητα ισούται με την ένταση της βαρύτητας και τα δυο παριστάνονται με το σύμβολο $\vec{g}$ και το μέτρο τους με g.

Ορίζεται ως ροή του πεδίου $\vec{g}$ μέσα από στοιχειώδη προσανατολισμένη επιφάνεια $\mathrm{d}\vec{S}$ το φυσικό μέγεθος $\mathrm{d}\Phi = (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{S}) = g\mathrm{d}S\cos\theta$, Σχ. 2.5.



Σχήμα 2.5

Ισχύει για τη ροή στην περίπτωση της βαρύτητας το ανάλογο του νόμου του Gauss για την ηλεκτροστατική. Συγκεκριμένα, η συνολική ροή $\Phi_{\text{ολ}}$ που περνά από κλειστή επιφάνεια με προσανατολισμό από το εσωτερικό προς το εξωτερικό, ισούται με $\Phi_{\text{ολ}} = -4\pi G m_{\text{εσ}}$, όπου $m_{\text{εσ}}$ η μάζα που βρίσκεται στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας. Η μάζα που βρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας δίνει ολική ροή ίση με μηδέν. Θα ασχοληθούμε αρχικά με το πεδίο σημειακής μάζας, Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6

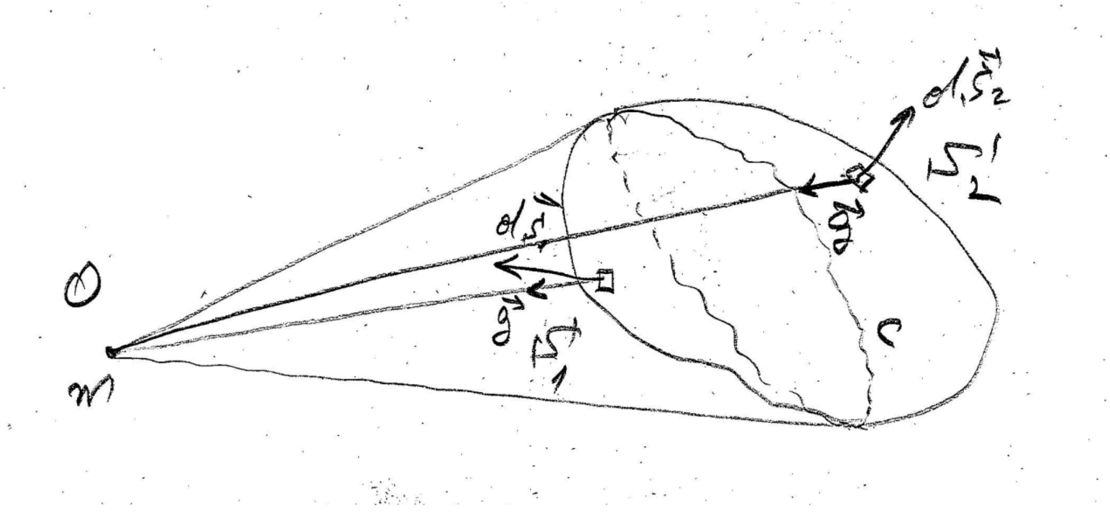
Το σωμάτιο μάζας m βρίσκεται στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας S και δημιουργεί πεδίο $\vec{g}$ στο σημείο Α της επιφάνειας. Η στοιχειώδης ροή δια μέσου της στοιχειώδους επιφάνειας $\mathrm{d}\vec{S}$ στο σημείο Α, ισούται με $\mathrm{d}\Phi = (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{S}) = g\mathrm{d}S\cos(\pi\text{-}\theta) = -g\mathrm{d}S\cos\theta$, θεωρούμε ότι $g>0$, δηλαδή είναι η απόλυτη τιμή (το μέτρο) του $\vec{g}$. Όμως $\mathrm{d}S\cos\theta = \mathrm{d}S'$, αυτή είναι η προβολή της $\mathrm{d}S$ σε κάθετο επίπεδο στη διεύθυνση του $\vec{r}$. Έχομε επομένως $\mathrm{d}\Phi = -g\mathrm{d}S'$.

Ισχύει $g = G\dfrac{m}{r^2}$ άρα $\mathrm{d}\Phi = -Gm\dfrac{\mathrm{d}S'}{r^2} = -Gm\mathrm{d}\Omega$, όπου $\mathrm{d}\Omega$ η στερεά γωνία που αντιστοιχεί στις επιφάνειες $\mathrm{d}S, \mathrm{d}S'$. Η σχέση $\mathrm{d}\Phi = -Gm\mathrm{d}\Omega$ μας λέει ότι η στοιχειώδης ροή δεν εξαρτάται από την απόσταση αλλά μόνο από τη στοιχειώδη στερεά γωνία. Για να βρούμε τη συνολική ροή δια της κλειστής επιφάνειας πρέπει να αθροίσομε όλες τις στοιχειώδεις ροές (ολοκλήρωση). Είναι ευνόητο από την τελευταία σχέση ότι $\Phi_{\text{ολ}} = \Phi = -Gm\int \mathrm{d}\Omega$. Η συνολική στερεά γωνία προς όλες τις κατευθύνσεις περί ένα σημείο είναι 4π, επομένως βρίσκομε τη σχέση $\Phi = -4\pi Gm$.

Αν η μάζα βρίσκεται έξω από την κλειστή επιφάνεια έχομε το Σχ. 2.7.

Σε αυτή την περίπτωση η επιφάνεια χωρίζεται σε δυο επιφάνειες την S_1 και την S_2. Η καμπύλη c είναι η διαχωριστική μεταξύ των δυο αυτών επιφανειών. Η c

αποτελείται από το σύνολο των σημείων όπου οι ευθείες από το Ο εφάπτονται στην κλειστή επιφάνεια S. Είναι ευνόητο ότι από την S_1 εξέρχεται ροή από το εσωτερικό



Σχήμα 2.7

προς το εξωτερικό $\Phi_1 > 0$, ενώ από την S_2 εισέρχεται ροή από τα έξω προς τα μέσα $\Phi_2 < 0$. Από το Σχ. 2.7 φαίνεται ότι οι στερεές γωνίες για τις δυο επιφάνειες έχουν ίδια μέτρα αλλά αντίθετα πρόσημα, $\Omega_2 = -\Omega_1 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ολική στερεά γωνία από το σημείο Ο προς όλη την κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_1 + (-\Omega_1) = 0$ άρα σε αυτή την περίπτωση $\Phi_{\text{ολ}} = \Phi = -Gm\int \mathrm{d}\Omega = 0$. Συνοψίζοντας γράφομε $\Phi_{\text{ολ}} = -4\pi G m_{\text{εσ}}$. Πρέπει να τονίσομε ότι αν υπάρχει ένα υλικό σημείο στο εσωτερικό και ένα άλλο στο εξωτερικό τότε η αρχή της επαλληλίας μας οδηγεί στο ότι παρόλο που το $\vec{g}$ στα σημεία της κλειστής επιφάνειας εξαρτάται και από τις δυο μάζες η ολική ροή εξαρτάται μόνο από τη μάζα στο εσωτερικό και μάλιστα δεν εξαρτάται από το σημείο στο οποίο βρίσκεται η μάζα.

Με την αρχή της επαλληλίας μπορούμε να προσθέσομε τις ροές των υλικών σημείων που αποτελούν οποιαδήποτε κατανομή οπότε καταλήγομε στο ότι η σχέση $\Phi_{\text{ολ}} = -4\pi G m_{\text{εσ}}$ ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή μάζας.

Από τον ορισμό της απόκλισης (divergence) διανυσματικής συνάρτησης προκύπτει ότι για συνεχή κατανομή μάζας πυκνότητας $\rho = \rho(\vec{r})$ ισχύει σε κάθε σημείο του χώρου

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r}).$$

Ανάλογη σχέση ισχύει για κάθε πεδίο που υπακούει στο ανωτέρω νόμο της ροής, π.χ. στην ηλεκτροστατική. Για σημεία όπου δεν υπάρχει μάζα ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = 0$.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχομε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(x, y, z) = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}.$$

Σε κυλινδρικές έχομε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_z}{\partial z}.$$

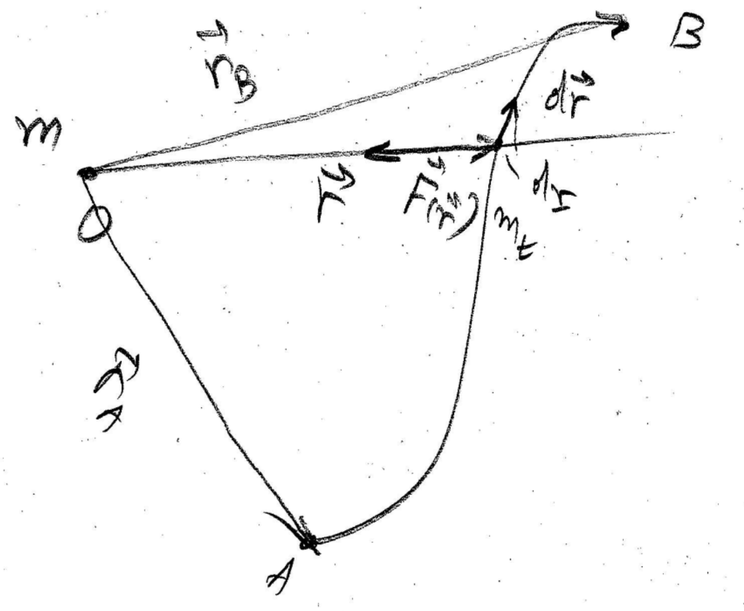
Σε σφαιρικές έχομε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta g_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial g_z}{\partial \varphi}.$$

Η απεικόνιση των πεδίων με πεδιακές γραμμές έχει μεγαλύτερη αξία όταν γίνεται κατά τρόπο που η πυκνότητά τους να είναι ανάλογη της απόλυτης τιμής του διανυσματικού πεδιακού μεγέθους που χαρακτηρίζει το πεδίο. Για παράδειγμα, στο βαρυτικό πεδίο του Σχ. 2.4 οι δυναμικές γραμμές είναι ισοτροπικά κατανεμημένες περί το υλικό σημείο που δημιουργεί το πεδίο. Αυτή η απεικόνιση γίνεται για το βαρυτικό πεδίο στο χώρο εκτός των μαζών που το δημιουργούν και για το ηλεκτροστατικό πεδίο στο χώρο εκτός των φορτίων που το δημιουργούν, σε άλλες περιπτώσεις τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το άπειρο και καταλήγουν στα υλικά σημεία που παράγουν το πεδίο. Στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου οι γραμμές μπορεί να ξεκινούν από το άπειρο ή από θετικά φορτία και να καταλήγουν στο άπειρο ή σε αρνητικά φορτία. Στις περιπτώσεις της βαρύτητας και του ηλεκτρικού πεδίου η διεύθυνση της δυναμικής γραμμής είναι η διεύθυνση της δύναμης πάνω στο υπόθεμα που τοποθετείται στο συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Αυτό δεν ισχύει για το μαγνητικό πεδίο διότι δεν υπάρχει το αντίστοιχο του ηλεκτρικού φορτίου ή της μάζας, δηλαδή δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα, οι δυνάμεις ασκούνται πάνω σε ρεύματα και σε μαγνητικά δίπολα και δεν έχουν γενικώς την κατεύθυνση του πεδίου.

2.3 Συντηρητικό πεδίο δυνάμεων

Υπάρχουν πεδία δυνάμεων όπως το βαρυτικό και το ηλεκτροστατικό που είναι συντηρητικά, λέγονται και διατηρητικά. Συντηρητικό είναι το πεδίο στο οποίο όταν μετακινείται το υπόθεμα από ένα σημείο σε άλλο, το έργο της δύναμης του πεδίου επί του υποθέματος δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από την αρχική θέση και την τελική θέση. Θα εξετάσομε την περίπτωση βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί σημειακή μάζα m η οποία βρίσκεται στη θέση Ο, Σχ. 2.8.



Σχήμα 2.8

Κατά τη μετακίνηση του υποθέματος μάζας m_t από τη θέση $\vec{r}_A$ στη θέση $\vec{r}_B$ το πεδίο παράγει έργο $W_{AB} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_A^B F|d\vec{r}|\cos\theta = \int_{r_A}^{r_B} F(r)dr$.

Οπότε $W_{AB} = -Gmm_t \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = Gmm_t \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$.

Παρατηρούμε ότι πράγματι το έργο εξαρτάται από τα δυο σημεία και δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διαδρομή μεταξύ των σημείων. Για κατανομή πολλών υλικών σημείων πρέπει να αθροίσομε τα επιμέρους αποτελέσματα, ή για συνεχή κατανομή να ολοκληρώσομε κατάλληλα. Είναι ευνόητο ότι, αφού ισχύει η αρχή της επαλληλίας, το έργο κατά τη μετακίνηση του υποθέματος θα εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση και για την περίπτωση κατανομής πολλών υλικών σημείων.

Για συνεχή κατανομή μάζας σύμφωνα με όσα έχομε πει ισχύει (Σχ. 2.2),

$$\vec{F} = -G\int_X \frac{(\vec{r}_t - \vec{r}')}{|\vec{r}_t - \vec{r}'|^3} dm = -Gm_t \int_X \frac{\vec{e}_R}{R^2} dm .$$

Η ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m_{\mathrm{t}}}=-G\int\limits_{\mathrm{X}}\frac{(\vec{r}_{\mathrm{t}}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}_{\mathrm{t}}-\vec{r}'\right|^{3}}\mathrm{d}m=-G\int\limits_{\mathrm{X}}\frac{\vec{e}_{R}}{R^{2}}\,\mathrm{d}m\,.$$

Το έργο κατά την παραπάνω μετακίνηση από τη θέση $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ στη θέση $\vec{r}_{\mathrm{B}}$ δίνεται από τη σχέση $W_{\mathrm{AB}}=\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r})=m_{\mathrm{t}}\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r})=m_{\mathrm{t}}\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{l})$.

Το l παριστάνει απόσταση κατά μήκος της διαδρομής οπότε μπορούμε να γράψομε $\mathrm{d}\vec{l}=\vec{e}_{l}\mathrm{d}l$, επίσης ισχύει $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\vec{l}=\vec{e}_{l}\mathrm{d}l$.

Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι το έργο αυτό είναι το ίδιο με το έργο που παράγει εξωτερική δύναμη σε ισορροπία με τη βαρυτική δύναμη, όταν η σημειακή μάζα μετακινείται από το σημείο Β μέχρι το σημείο Α.

Για κλειστή διαδρομή προφανώς θα έχομε ότι το έργο είναι μηδέν.

$\oint\limits_{c}(\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l})=m\oint\limits_{c}(\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{l})=0$, m είναι η μάζα του υποθέματος.

Η δυναμική ενέργεια $U(\vec{r})$ της σημειακής μάζας m που βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$ του πεδίου ορίζεται ως το έργο που παράγει επί της μάζας το βαρυτικό πεδίο όταν η μάζα μετακινείται από το σημείο αυτό μέχρι ένα άλλο σημείο $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ το οποίο θεωρείται ως σημείο αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια λαμβάνεται ίση με μηδέν, $U(\vec{r})=W(\vec{r},\vec{r}_{\mathrm{A}})$. Προφανώς η ενέργεια ισούται και με το έργο που παράγει η εξωτερική δύναμη επί της μάζας m κατά τη μετακίνησή της από το σημείο αναφοράς μέχρι τη θέση $\vec{r}$, $U(\vec{r})=W'(\vec{r}_{\mathrm{A}},\vec{r})$. Για εντοπισμένες κατανομές μάζας που δημιουργούν το πεδίο, δηλαδή για κατανομές μάζας που η πυκνότητά τους τείνει με κατάλληλο τρόπο στο μηδέν καθώς πάμε στο άπειρο, μπορεί να ληφθεί ως σημείο αναφοράς το άπειρο.

Ας υποθέσομε ότι αντί για ένα υλικό σημείο έχομε μια κατανομή μάζας, δηλαδή ένα σύστημα υλικών σημείων. Αν αυτή η κατανομή μάζας είναι εντοπισμένη μπορεί να οριστεί η δυναμική της ενέργεια. Αυτή βρίσκεται ως επαλληλία των ενεργειών όλων των επιμέρους υλικών σημείων της κατανομής όπου ως σημείο μηδενικής ενέργειας θεωρείται το άπειρο. Σημειώνομε ότι θεωρούμε πως δεν υπάρχει αλληλεπίδραση των υλικών σημείων όταν βρίσκονται στο άπειρο. Διευκρινίζομε ότι το πεδίο στο οποίο βρίσκεται ένα υλικό σημείο της κατανομής μπορεί να οφείλεται σε άλλα υλικά σημεία που δεν ανήκουν στην κατανομή που εξετάζομε αλλά και στα υπόλοιπα υλικά σημεία της ίδιας της κατανομής. Η ενέργεια που οφείλεται στην ίδια την κατανομή λέγεται ιδιοενέργεια της κατανομής. Για να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια μπορεί να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία.

Ξεκινούμε με άδειο χώρο, χωρίς κατανομή μάζας, φανταζόμαστε ότι από το άπειρο μεταφέρομε διαδοχικά στοιχειώδεις μάζες μέχρι την τελική τους θέση και κάθε φορά υπολογίζομε το έργο που παράγει η εξωτερική δύναμη κατά τη μεταφορά τους. Τελικώς με άθροιση για διακριτά υλικά σημεία ή ολοκλήρωση για συνεχή κατανομή, υπολογίζομε το ολικό έργο και επομένως την ολική ενέργεια της κατανομής.

Ορίζεται ως δυναμικό του πεδίου στη θέση $\vec{r}$ το φυσικό μέγεθος $V(\vec{r}) = \dfrac{U(\vec{r})}{m} = \dfrac{W(\vec{r})}{m}$ όπου m είναι η σημειακή μάζα στο συγκεκριμένο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και $U(\vec{r})$ είναι η δυναμική ενέργεια της μάζας m, ενώ $W(\vec{r})$ είναι το έργο κατά τη μετακίνησή της όπως το ορίσαμε προηγουμένως. Από τα προηγούμενα συμπεραίνομε ότι $U = W = \int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}) = m\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}) = m\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l})$.

Το δυναμικό χαρακτηρίζει το πεδίο $\vec{g}(\vec{r})$ και δεν εξαρτάται από το υπόθεμα m, έχομε

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{m}\int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}) = \int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}) = \int\limits_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l}).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ύπαρξη δυναμικού σχετίζεται με αυτό που λέμε στροβιλότητα. Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ που χαρακτηρίζεται με την ιδιότητα $\oint\limits_{c}(\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}) = 0$ λέγεται αστρόβιλο πεδίο, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι διάφορο του μηδενός λέγεται στροβιλό.. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα λαμβάνεται κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής c μέσα στο χώρο του πεδίου. Στην περίπτωση της βαρύτητας είδαμε ότι $\oint\limits_{c}(\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{l}) = 0$. Από τον ορισμό του διανύσματος του στροβιλισμού (rotation) της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{A}(\vec{r})$ το οποίο είναι η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\nabla}\times\vec{A}$, προκύπτει ότι ένα πεδίο είναι αστρόβιλο όταν ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης του πεδίου είναι μηδέν σε κάθε σημείο του, δηλαδή όταν έχομε $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$. Αυτό είναι το κριτήριο για να είναι το πεδίο αστρόβιλο. Όταν $\vec{\nabla}\times\vec{A} \neq 0$ το πεδίο είναι στροβιλό, δηλαδή ο στροβιλισμός του είναι γενικώς μη μηδενικός. Ένα συντηρητικό πεδίο χαρακτηρίζεται από δυναμικό ή δυναμική συνάρτηση και από το ότι έχει στροβιλισμό ίσον με μηδέν.

Για τη βαρύτητα έχομε, $\vec{\nabla}\times\vec{g} = 0$.

Ο στροβιλισμός στις καρτεσιανές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\varphi,z)=\vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\vec{e}_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right).$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχομε

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\varphi)=\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)+\vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

Το έργο που παράγει το πεδίο πάνω σε σωμάτιο μάζας m που μετακινείται από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$ δίνεται από τη σχέση $W_{12}=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)=\left(V(\vec{r}_1)-V(\vec{r}_2)\right)m$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για το δυναμικό που δημιουργεί μια συνεχής κατανομή μάζας (Σχήμα 9.9) σε ένα σημείο $\vec{r}$ ισχύει η σχέση

$$V(\vec{r})=-G\int_{\mathrm{X}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}m=-G\int_{\mathrm{X}}\frac{1}{R}\mathrm{d}m\,.$$

Τα φυσικά μεγέθη που εισέρχονται έχουν οριστεί στα προηγούμενα.

Επειδή το δυναμικό είναι βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος ο υπολογισμός του είναι ευκολότερος από ότι είναι της δύναμης.

Όταν ξέρομε το δυναμικό που δημιουργεί μια εξωτερική κατανομή μάζας σε μια περιοχή, μπορούμε να υπολογίσομε τη δυναμική ενέργεια που θα έχει μια κατανομή μάζας που τοποθετείται σε αυτή την περιοχή και που οφείλεται μόνο στο εξωτερικό πεδίο. Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση δε λαμβάνονται υπόψη οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υλικών σημείων της ίδιας της κατανομής.

Αν η κατανομή είναι διακριτή για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια αθροίζομε τις επιμέρους ενέργειες.

$$U=\sum_{i=1}^{n}U_i=\sum_{i=1}^{n}V_i m_i\,.$$

Αν είναι συνεχής κατανομή έχομε

$$U=\int_{\mathrm{X}}V\mathrm{d}m\,.$$

Στην πραγματικότητα η ολική δυναμική ενέργεια της κατανομής είναι άθροισμα δυο όρων, ενός που οφείλεται στο εξωτερικό πεδίο και ενός άλλου που οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υλικών σημείων της ίδιας της κατανομής που λέγεται ιδιοενέργεια.

Είναι εύκολο να μελετήσομε διακριτό σύστημα και κατόπιν για συνεχή κατανομή να μετατρέψομε το άθροισμα σε ολοκλήρωμα.

Θα υπολογίσομε την ιδιοενέργεια μιας κατανομής υλικών σημείων ακολουθώντας την παρακλάτω διαδικασία. Για να φτιάξομε την κατανομή υλικών σημείων μεταφέρομε από το άπειρο στην τελική τους θέση ένα ένα τα υλικά σημεία. Για τη μεταφορά του πρώτου η εξωτερική δύναμη παράγει έργο ίσο με μηδέν, $W_1 = 0$, διότι δεν υπάρχουν άλλα υλικά σημεία που να αλληλεπιδρούν με αυτό. Για το δεύτερο παράγει έργο $W_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$. Το έργο είναι αρνητικό γιατί η εξωτερική δύναμη που ισορροπεί σε κάθε σημείο με τη βαρυτική μεταξύ των m_1, m_2, είναι αντίθετη της μετατόπισης. Για το τρίτο υλικό σημείο έχομε $W_3 = -Gm_3\left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}}\right)$ διότι στο m_3 που μετακινείται από το άπειρο ασκούν ελκτικές δυνάμεις βαρύτητας τα m_1 και m_2. Το συνολικό έργο για σύστημα από n υλικά σημεία, το οποίο «αποθηκεύεται» στο σύστημα και αποτελεί την ολική βαρυτική του ενέργεια είναι

$$U = \sum_{i=1}^{n} W_i = -G\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{m_j}{r_{ij}}\right) = -G\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}\right).$$

Η εναλλαγή μεταξύ των i, j δεν αλλάζει τον αντίστοιχο όρο, έτσι αν πάρομε και τα δυο αθροίσματα από 1 έως n θα έχομε όλους τους όρους δυο φορές άρα μπορούμε να γράψομε

$$U = -\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Ο απειριζόμενος όρος της ιδιοενέργειας του κάθε υλικού σημείου ο οποίος αντιστοιχεί σε $i = j$ δεν περιλαμβάνεται στο άθροισμα, δηλαδή $i \neq j$.

Όμως $V_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{m_j}{r_{ji}}$ είναι το δυναμικό στη θέση του υλικού σημείου i που δημιουργούν όλα τα υπόλοιπα υλικά σημεία όταν βρίσκονται στις τελικές τους θέσεις αφού έχει δημιουργηθεί η κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει

$$U = -\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{n} m_i V_i.$$

Για συνεχή κατανομή είναι ευνόητο ότι το άθροισμα οδηγεί σε ολοκλήρωμα και έχομε,

$$U = -\frac{1}{2}G\int_{\mathrm{X}} V\mathrm{d}m\,.$$

Το έργο που παράγει δύναμη που ασκείται σε υλικό σημείο το οποίο μετακινείται κατά μήκος μιας διαδρομής, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου. Έχομε επομένως

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\,) = K_2 - K_1\,.$$

K_1, K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες στη θέση 1 και 2 και το ολοκλήρωμα γενικώς, εξαρτάται από τη διαδρομή. Στην περίπτωση που η δύναμη είναι συντηρητική σημαίνει ότι $W_{12} = U_1 - U_2 = m(V_1 - V_2)$, δηλαδή το έργο της δύναμης του πεδίου πάνω στο σωμάτιο μάζας m δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά από τις τιμές της δυναμικής ενέργειας ή του δυναμικού στην αρχική και στην τελική θέση.

Έχομε επομένως $U_1 - U_2 = K_2 - K_1$ ή $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$. Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι η ολική ή απλώς η μηχανική ενέργεια του σωματίου $E = K + U$. Αυτό σημαίνει ότι κατά την κίνηση του σωματίου μέσα σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων η μηχανική ενέργεια διατηρείται, $E_1 = E_2$. Αυτό είναι το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Η δυναμική ενέργεια μπορεί να έχει και άλλον όρο που να οφείλεται σε άλλου είδους δυνάμεις όπως ηλεκτροστατικές δυνάμεις, ελαστικές δυνάμεις κτλ.

Όταν υπάρχουν και άλλες μη συντηρητικές δυνάμεις που δεν οδηγούν σε ύπαρξη δυναμικού και δυναμικής ενέργειας, τέτοιες είναι οι τριβές, ή με άλλα λόγια όταν υπάρχει μετατροπή ενέργειας σε άλλη μορφή εκτός της μηχανικής ενέργειας, τότε δεν ισχύει το παραπάνω θεώρημα της μηχανικής ενέργειας. Μπορεί να έχομε, για παράδειγμα, μετατροπή σε θερμοδυναμική ενέργεια (λέγεται και εσωτερική ενέργεια) η οποία δεν είναι μέρος της μηχανικής ενέργειας.

Πάντα, στη Φυσική ισχύει η αρχή της διατήρησης της ολικής ενέργειας, όπου περιλαμβάνονται όλες οι μορφές ενέργειας. Στα πλαίσια της Ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας η σχέση για την ενέργεια είναι διαφορετική, λαμβάνεται υπόψη και η ενέργεια που αντιστοιχεί στη μάζα των σωμάτων, δηλαδή η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας.

Το στοιχειώδες έργο $\mathrm{d}W$ δύναμης $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $\mathrm{d}\vec{r}$ είναι $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$. Ας περιοριστούμε στο βαρυτικό πεδίο όπου αν λάβομε υπόψη το δυναμικό έχομε $\vec{F} = m\vec{g}$, $\mathrm{d}W = -m\mathrm{d}V = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ άρα $\mathrm{d}V = \vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, $\left(\Delta V = V_1 - V_2 = -(V_2 - V_1)\right)$.

Επομένως $-\mathrm{d}V = \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = g\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$, θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{g}, \mathrm{d}\vec{r}$. Η βαθμίδα ή κλίση μιας βαθμωτής (μονόμετρης) συνάρτησης όπως η $V = V(\vec{r})$ μπορεί να οριστεί με τη σχέση, $\mathrm{d}V = \vec{\nabla} V \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left|\vec{\nabla} V\right|\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\nabla} V, \mathrm{d}\vec{r}$. Επομένως έχομε $\vec{g} = -\vec{\nabla} V$. Η τιμή του $\vec{g}$, δηλαδή το g, ισούται με την παράγωγο κατεύθυνσης ως προς τη θέση κατά μήκος της κατεύθυνσης μέγιστης μεταβολής του δυναμικού ανά μονάδα μήκους. Αυτό γίνεται κατανοητό γιατί τότε $\theta = 0$ οποτε $\cos\theta = 1$.

Η βαθμίδα βαθμωτής συνάρτησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\vec{\nabla} A(x,y,z) = \vec{e}_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Σε κυλινδρικές έχομε

$$\vec{\nabla} A(r,\varphi,z) = \vec{e}_r \frac{\partial A}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Σε σφαιρικές έχομε

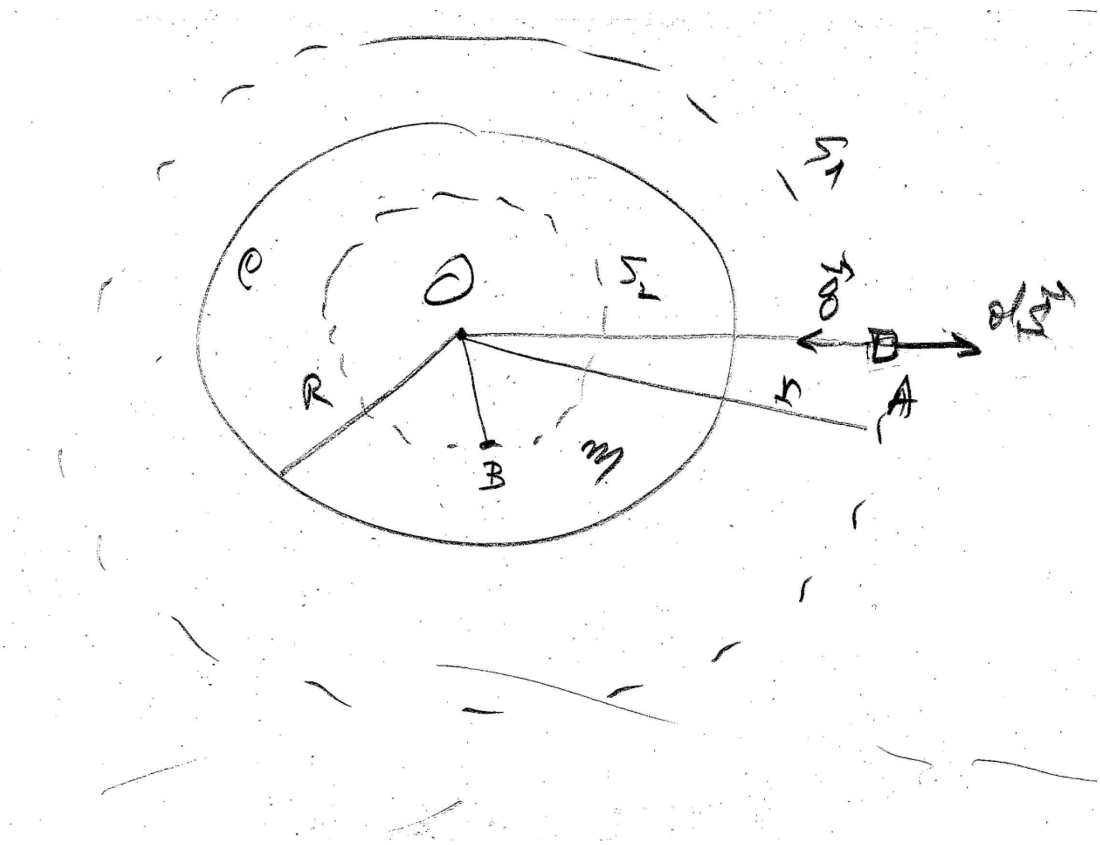
$$\vec{\nabla} A(r,\theta,\varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial A}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Για δυναμικό σημειακής μάζας m η οποία βρίσκεται στην αρχή των αξόνων έχομε $V(\vec{r}) = V(r) = -G\dfrac{m}{r}$. Επομένως $\vec{g} = -\vec{\nabla} V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = -G\dfrac{m}{r^2}\vec{e}_r$. Δηλαδή βρίσκομε τη γνωστή σχέση για την ένταση ή επιτάχυνση του βαρυτικού πεδίου υλικού σημείου.

Παράδειγμα 1

Ένταση βαρυτικού πεδίου συμπαγούς ομογενούς σφαίρας ή θεώρημα του Νεύτωνα

Ο εύκολος τρόπος υπολογισμού στηρίζεται στη χρήση του θεωρήματος της ροής του πεδίου $\vec{g}$.



Σχήμα 2.9

Η συνολική μάζα είναι m και βρίσκεται μέσα στη σφαίρα ακτίνας R (Σχ. 2.9). Για την πυκνότητα ισχύει $\rho = \dfrac{3m}{4\pi R^3}$. Θα υπολογίσομε την ένταση στο σημείο Α στο εξωτερικό της σφαίρας, $r \geq R$. Για λόγους συμμετρίας είναι ευνόητο ότι παντού πάνω στη σφαιρική επιφάνεια S_1 με ακτίνα r που φαίνεται ως διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 2.19, η ένταση $\vec{g}$ θα έχει την ίδια απόλυτη τιμή g και κατεύθυνση προς το κέντρο Ο. Επομένως η ροή δια της σφαιρικής επιφάνειας S_1 θα είναι $\varPhi = \int\limits_{S_1} (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{S}) = \int\limits_{S_1} g \mathrm{d}S = -4\pi G m_{\varepsilon\sigma} = -4\pi G m$, επειδή $m_{\varepsilon\sigma} = m$.

Έχομε ακόμη $\varPhi = g(r) \int\limits_{S_1} \mathrm{d}S = -4\pi G m$ ή $g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G m$ τελικώς

$g(r) = -G\dfrac{m}{r^2}$ επομένως $\vec{g}(r) = -G\dfrac{m}{r^2}\vec{e}_r$. Το μείον σημαίνει ότι το $\vec{g}$ κατευθύνεται προς το κέντρο ενώ το $\vec{r}$ ή το $\vec{e}_r$ προς τα έξω όπως και το $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_r$ ($\mathrm{d}S > 0$).

Η ένταση στο εξωτερικό της σφαιρικής κατανομής είναι ίδια όπως στην περίπτωση που όλη η μάζα θα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της κατανομής. Σημειώνομε ότι για το εξωτερικό η σχέση είναι ίδια και όταν $\rho = \rho(r)$.

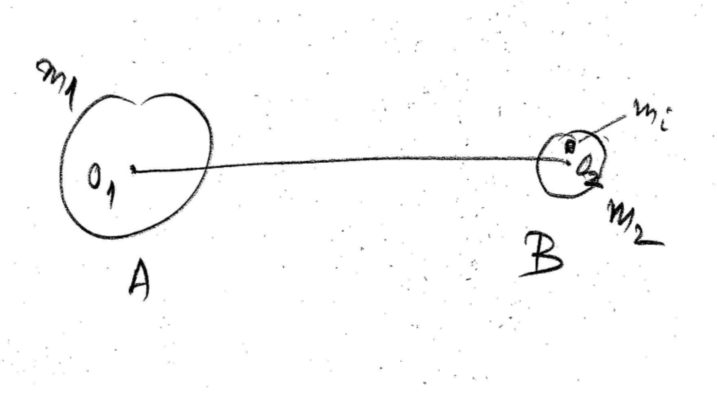
Στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας, μέσα στην κατανομή μάζας στο σημείο Β ($r < R$) το οποίο βρίσκεται πάνω στη σφαιρική επιφάνεια S_2 για λόγους συμμετρίας έχομε πάλι την ίδια σχέση, $\Phi = \int_{S_2} (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{S}) = \int_{S_2} g\mathrm{d}S = -4\pi G m_{\varepsilon\sigma}$. Η μάζα στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας r είναι $m_{\varepsilon\sigma} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{mr^3}{R^3}$. Επομένως $g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{mr^3}{R^3}$

τελικώς $\vec{g}(r) = -G\frac{m}{R^3} r\vec{e}_r$. Δηλαδή στο εσωτερικό της κατανομής το μέτρο της έντασης είναι ανάλογο της απόστασης από το κέντρο.

Ας υποθέσομε ότι έχομε δυο σφαίρες με μάζες m_1, m_2 με πυκνότητες της μορφής $\rho_1 = \rho_1(r_1), \rho_2 = \rho_2(r_2)$ και ακτίνες R_1, R_2. r_1, r_2 είναι οι αντίστοιχες αποστάσεις από τα κέντρα τους. Οι σφαίρες βρίσκονται κοντά η μια στην άλλη και ισχύει $r \geq R_1 + R_2$. Η μεταξύ τους δύναμη έχει μέτρο $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ είναι ελκτική και βρίσκεται πάνω στην ευθεία που περνά από τα κέντρα τους. Δηλαδή η δύναμη είναι ίδια με αυτή που θα ασκούσαν δυο σωμάτια με μάζες m_1, m_2 που θα βρίσκονταν στα κέντρα των δυο σφαιρών.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τον παρακάτω συλλογισμό.

Θεωρείστε το Σχ. 2.10. Η σφαίρα Α ασκεί στο τυχαίο υλικό σημείο m_i της Β



Σχήμα 2.10

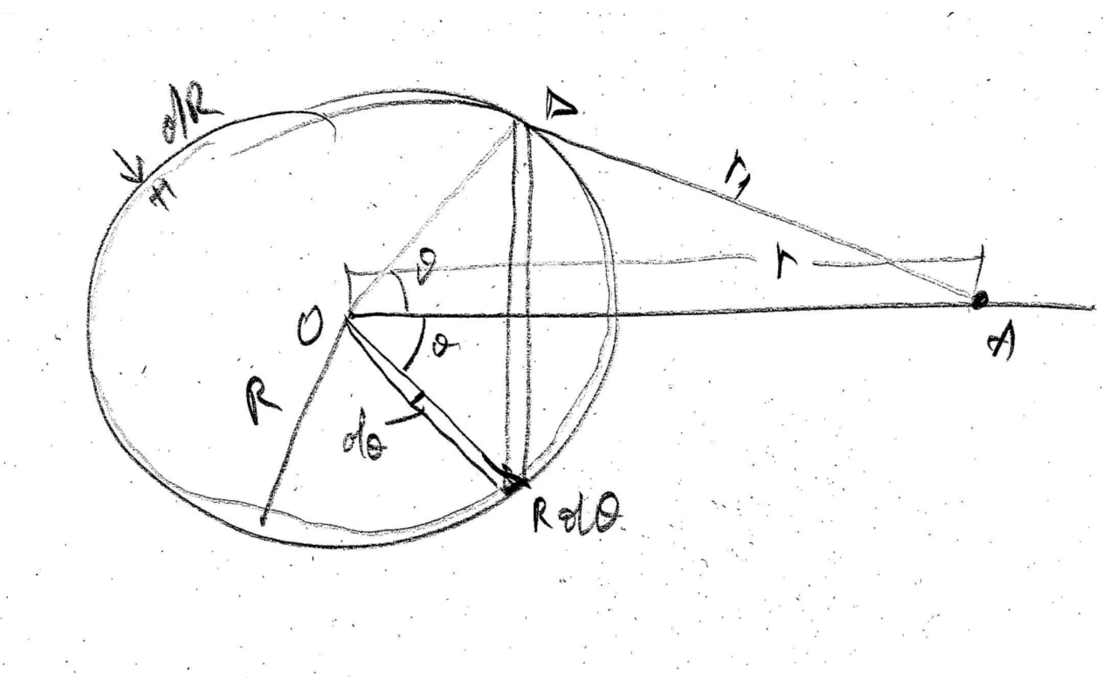
ελκτική δύναμη που ισούται με τη δύναμη που θα ασκούσε στο m_i υλικό σημείο μάζας m_1 στο κέντρο της Α (στο O_1). Σύμφωνα με την αρχή δράσης αντίδρασης το m_i ασκεί στη σφαίρα Α δύναμη ελκτική ίσου μέτρου. Συνεπώς το τυχαίο m_i ασκεί την ίδια δύναμη στην Α που ασκεί στο υλικό σημείο μάζας m_1 στη θέση O_1. Για να βρούμε επομένως τη συνολική ελκτική δύναμη μεταξύ των σφαιρών πρέπει να αθροίσομε διανυσματικά τις δυνάμεις που ασκούν όλα τα σωμάτια (m_i) της σφαίρας Β στο υλικό σημείο που αναφέραμε με μάζα m_1. Αυτή η δύναμη όμως, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Νεύτωνα, βρίσκεται ότι είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί σωμάτιο μάζας m_2 που βρίσκεται στο κέντρο O_2 της Β. Επομένως καταλήγομε στο ανωτέρω συμπέρασμα. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12}$ όπου $r = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$.

Παράδειγμα 2

Υπολογισμός δυναμικού ομογενούς λεπτόπαχου φλοιού

Η μάζα του σφαιρικού φλοιού είναι m. Έχομε το Σχ. 2.11.

Ανάλογα ισχύουν αν πάρομε ομοιόμορφη κατανομή σε σφαιρική επιφάνεια.



Σχήμα 2.11

Θεωρούμε το σημείο Α όπου θέλομε να υπολογίσομε το δυναμικό. Όλα τα σημεία του δακτύλιου Δ απέχουν ίδια απόσταση r_1 από το Α. Η απόσταση του Α από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού είναι r. Ο δακτύλιος έχει ακτίνα $R\sin\theta$. Η επιφάνεια του δακτυλίου που βρίσκεται πάνω στη σφαίρα ακτίνας R είναι $2\pi(R\sin\theta)R\mathrm{d}\theta$. Η μάζα του δακτυλίου είναι $dm = m\dfrac{2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi R^2}$ άρα $\mathrm{d}m = \dfrac{1}{2}m\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Επομένως το δυναμικό που δημιουργεί αυτός ο δακτύλιος στο Α είναι $\mathrm{d}V = -G\dfrac{\mathrm{d}m}{r_1} = -\dfrac{1}{2}Gm\dfrac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r_1}$.

Από το τρίγωνο ΟΔΑ έχομε $r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$. Τα r, R είναι σταθερά, επομένως $2r_1\mathrm{d}r_1 = 2rR\sin\theta\mathrm{d}\theta$, οπότε $\dfrac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r_1} = \dfrac{\mathrm{d}r_1}{rR}$. Έχομε $\mathrm{d}V = -\dfrac{Gm}{2rR}\mathrm{d}r_1$.

Το r_1 παίρνει τιμές από $r-R$ έως $r+R$, επομένως ολοκληρώνομε και έχομε

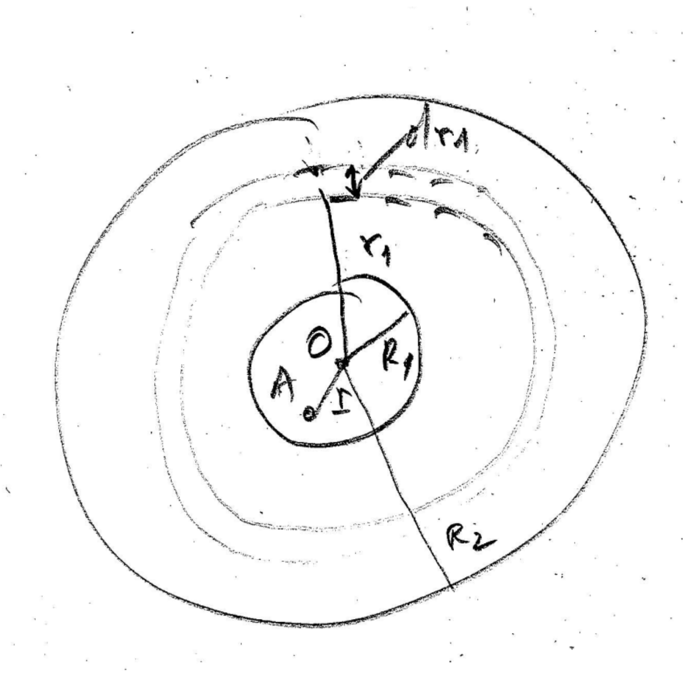
$V(r) = -\dfrac{Gm}{2rR}\displaystyle\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}r_1 = -G\dfrac{m}{r}$ για $r \geq R$. Δηλαδή το δυναμικό είναι το ίδιο που θα είχαμε αν όλη η μάζα ήταν στο κέντρο του φλοιού.

Αν το σημείο είναι το Α που βρίσκεται στο εσωτερικό τότε αλλάζουν τα όρια ολοκλήρωσης, δηλαδή το r_1 παίρνει τιμές από $R-r$ μέχρι $R+r$ οπότε έχομε $\displaystyle\int_{R-r}^{R+r}\mathrm{d}r_1 = 2r$, επομένως $V(r) = -G\dfrac{m}{R}$ για $r \leq R$. Δηλαδή στο εσωτερικό το δυναμικό είναι σταθερό ίσο με αυτό στην επιφάνεια του φλοιού, ισοδυναμικός χώρος.

Για το εξωτερικό φλοιού μεγάλου πάχους του οποίου η πυκνότητα γενικώς έχει τη μορφή $\rho = \rho(r)$ όπου r είναι η απόσταση του σημείου από το κέντρο, $r \geq R$, μπορούμε να βρούμε το δυναμικό με τους παρακάτω συλλογισμούς. Χωρίζομε τον παχύ φλοιό σε ομόκεντρους λεπτόπαχους φλοιούς. Ο καθένας δημιουργεί στο εξωτερικό του δυναμικό ίδιο με αυτό που δημιουργείται αν όλη η μάζα του είναι στο κέντρο. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από την ακτίνα του κάθε λεπτόπαχου φλοιού. Επομένως με την επαλληλία (άθροιση) των στοιχειωδών δυναμικών των λεπτών φλοιών θα καταλήξομε στη σχέση για το ολικό δυναμικό

$V(r) = -G\dfrac{m}{r}$ για $r \geq R$.

Ο παχύς φλοιός περιλαμβάνει και την περίπτωση συμπαγούς σφαίρας με $\rho = \rho(r)$. Θα αναλύσομε την περίπτωση άδειας κοιλότητας μέσα σε παχύ φλοιό, με $\rho =$ σταθερό. Χρησιμοποιούμε το Σχ. 2.12.



Σχήμα 2.12

Θα βρούμε το δυναμικό στο σημείο Α που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο Ο. Ο φλοιός απειροστού πάχους, $\mathrm{d}r_1$, ακτίνας r_1 που έχει μάζα $\mathrm{d}m$, δημιουργεί παντού στο εσωτερικό του δυναμικό $\mathrm{d}V = -\frac{G}{r_1}\mathrm{d}m = -\frac{G}{r_1}4\pi r_1^2 \rho dr_1$. Όλοι οι στοιχειώδεις φλοιοί που μπορούμε να χωρίσομε τον παχύ φλοιό έχουν το σημείο Α στο εσωτερικό τους, επομένως για να βρούμε το συνολικό δυναμικό ολοκληρώνομε την ανωτέρω έκφραση στο διάστημα $R_1 \le r_1 \le R_2$. Έχομε

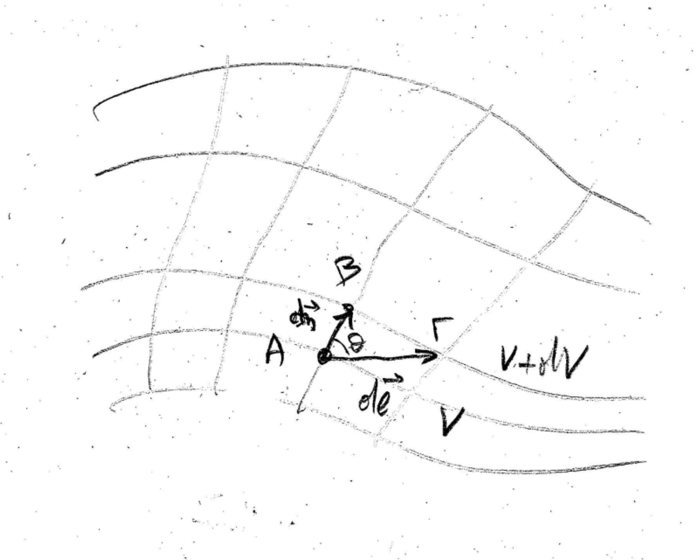
$$V(r) = -4\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} r_1 dr_1 = -2\pi G\rho(R_2^2 - R_1^2).$$

Μπορεί κάποιος να θεωρήσει δεδομένα τα m, R_1, R_2 και να βρει μια σχέση που θα περιέχει τη συνολική μάζα αντί να περιέχει την πυκνότητα.

Επειδή $\vec{g} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ και το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του r έχομε ότι στο εσωτερικό της κοιλότητας $\vec{g} = 0$.

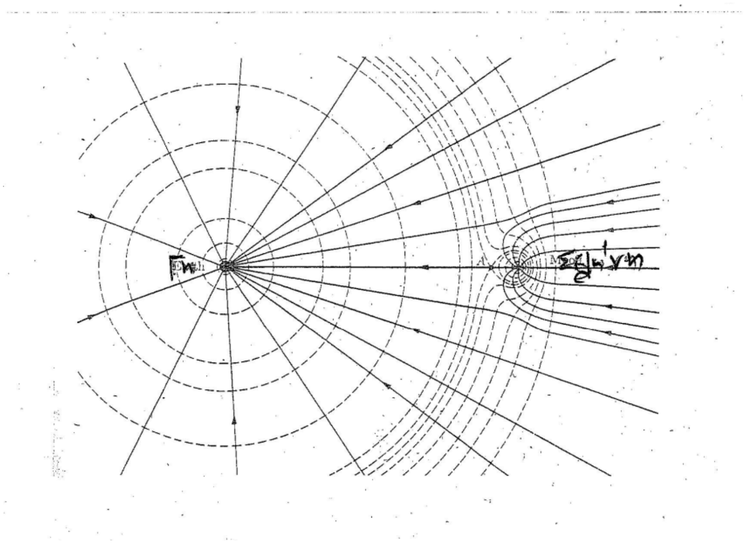
2.4 Αναπαράσταση πεδίων, Βαρυτικό πεδίο

Μιλήσαμε για την αναπαράσταση του πεδίου με πεδιακές (δυναμικές) γραμμές στον χώρο όπου δεν υπάρχουν πηγές πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου στο χώρο δεν υπάρχουν φορτία, για την περίπτωση της βαρύτητας δεν υπάρχει μάζα. Εκτός από τις πεδιακές γραμμές μπορεί η αναπαράσταση να γίνει και με ισοδυναμικές επιφάνειες, Σχ. 2.13. Μια ισοδυναμική επιφάνεια είναι επιφάνεια πάνω στην οποία το δυναμικό έχει παντού ίδια τιμή. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες δεν τέμνονται μεταξύ τους.



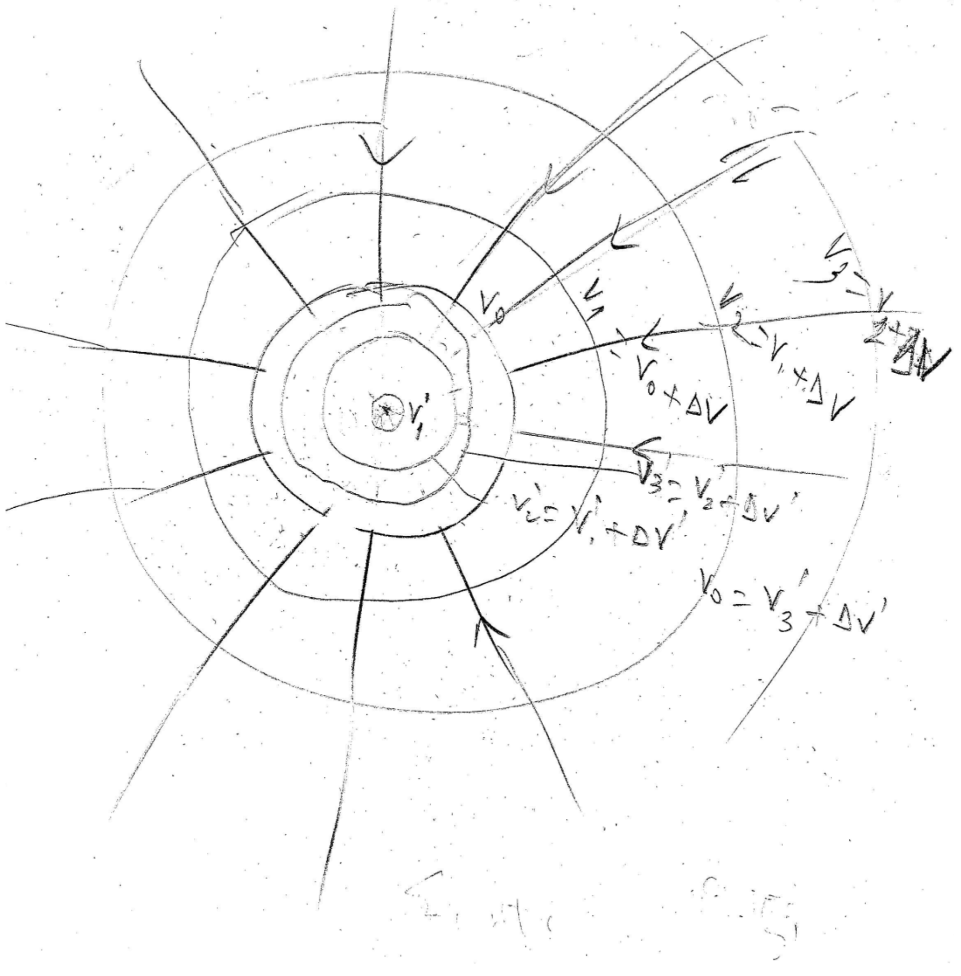
Σχήμα 2.13

Το Σχ. 2.14 δείχνει το πεδίο Γης και Σελήνης.



Σχήμα 2.14

Η διανυσματική συνάρτηση που χαρακτηρίζει το πεδίο, η οποία για τη βαρύτητα είναι η ένταση $\vec{g}(\vec{r})$, σχετίζεται με τη βαθμίδα (gradient) του δυναμικού του πεδίου το οποίο είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσης. Για το βαρυτικό πεδίο έχομε αναφέρει τη σχέση $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$. Από τις ιδιότητες της βαθμίδας $\vec{\nabla}V$ προκύπτει ότι οι πεδιακές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες. Οι πεδιακές γραμμές είναι συνεχείς και τις σχεδιάζομε έτσι που η πυκνότητά τους να είναι ανάλογη της απόλυτης τιμής της διανυσματικής συνάρτησης (π.χ. έντασης) του πεδίου. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες σχεδιάζονται έτσι που να είναι κοντύτερα η μια στην άλλη σε περιοχές μεγάλης τιμής της διανυσματικής συνάρτησης (π.χ. της έντασης). Στο Σχ. 2.15 δείχνομε το βαρυτικό πεδίο συμπαγούς ομογενούς σφαίρας, έχομε σχεδιάσει δυναμικές γραμμές και ισοδυναμικές επιφάνειες ακολουθώντας την ανωτέρω πρακτική για την κατανομή τους.



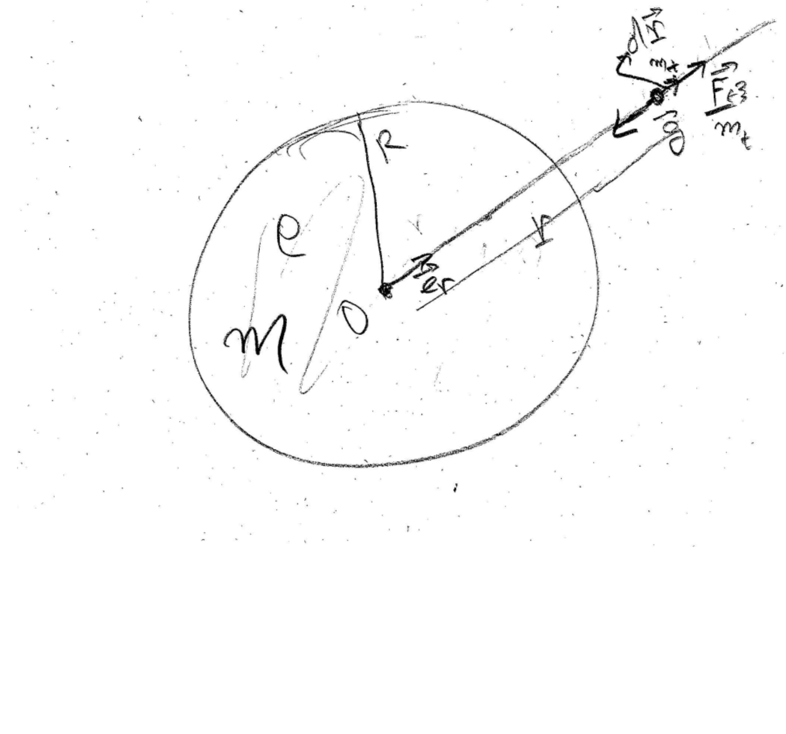
Σχήμα 2.15

Παρατηρείστε ότι σχεδιάζομε ισοδυναμικές επιφάνειες και στο εσωτερικό της κατανομής της μάζας και στο εξωτερικό της, ενώ δεν δείχνομε δυναμικές γραμμές στο εσωτερικό αλλά μόνο στον εξωτερικό χώρο της κατανομής μάζας. Αυτό δε μπορεί να γίνει για το εσωτερικό αν τηρηθεί ο κανόνας της πυκνότητάς των γραμμών, δηλαδή η πυκνότητά τους να είναι ανάλογη της τιμής του πεδίου . Δηλαδή η συνέχεια των γραμμών μαζί με τον ανωτέρω κανόνα για την πυκνότητα μπορεί να γίνει χωρίς ειδική μέριμνα σε άδειο χώρο και μόνο για πεδία που υπακούουν στο νόμο του Γκάους. Αν για παράδειγμα θεωρήσετε πεδίο που η έντασή του είναι της μορφής $\vec{A} = \frac{k}{r^3}\vec{e}_r$ δε μπορείτε να το παραστήσετε με δυναμικές γραμμές. Προσέξτε ότι δεν ισχύει ο νόμος του Γκάους.

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός του βαρυτικού δυναμικού ομογενούς σφαίρας σε όλο το χώρο

Θεωρούμε το Σχ. 2.16. Για τον προσδιορισμό του δυναμικού $V(\vec{r})$ μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τη σχέση $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να κάνομε τον υπολογισμό του έργου του πεδίου ανά μονάδα δοκιμαστικής μάζας κατά τη μετακίνηση από το σημείο που θέλομε να βρούμε το δυναμικό μέχρι το άπειρο. Μπορεί να γίνει ο αντίστοιχος συλλογισμός με την εξωτερική δύναμη που κάθε φορά ισορροπεί με τη δύναμη του πεδίου.



Σχήμα 2.16

Επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό η διαδρομή μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Παρατηρούμε ότι ένεκα συμμετρίας ισχύει $V = V(r)$. Θα διαλέξομε διαδρομή ακτινική, Σχ. 2.16. Σύμφωνα με τα προηγούμενα πρέπει να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα $V(r) = \int_r^\infty (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r})$..

Για το εξωτερικό της σφαίρας ($r \geq R$) έχομε σύμφωνα με το σχετικό θεώρημα για την απόλυτη τιμή της έντασης,

$g = G\dfrac{m}{r^2} > 0$. Επομένως

$$V(r) = \int_r^\infty (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}) = \int_r^\infty (-g\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}r\vec{e}_r) = -Gm\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Τελικώς βρίσκομε τη γνωστή σχέση $V(r) = -G\dfrac{m}{r}$, $r \geq R$.

Για σημεία στο εσωτερικό $r \leq R$, ξεκινούμε από την αρχική σχέση $V(r) = \int_r^\infty (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r})$. και καταλήγομε στο άθροισμα δυο ολοκληρωμάτων, ένα για το εξωτερικό και το άλλο για το εσωτερικό, συγκεκριμένα

$$V(r) = \int_r^\infty (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}) = V_1 + V_2 = \int_r^R (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}) + \int_R^\infty (\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}), \quad r \leq R.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα του τελευταίου μέλους (V_2) βρίσκεται από το ολοκλήρωμα για το εξωτερικό της σφαίρας θέτοντας $r = R$. Έχομε $V_2 = -G\dfrac{m}{R}$.

Το πεδίο στο εσωτερικό της κατανομής ($r \leq R$) υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση $g = G\dfrac{m_{\varepsilon\sigma}}{r^2}$ όπου $m_{\varepsilon\sigma}$ η μάζα μέσα στη σφαίρα ακτίνας r.

Όμως $m_{\varepsilon\sigma} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$ επομένως το άλλο ολοκλήρωμα είναι $V_1 = -\dfrac{4}{3}\pi\rho G\int_r^R \dfrac{r^3\mathrm{d}r}{r^2} = -\dfrac{4}{3}\pi\rho G\int_r^R r\mathrm{d}r = -\dfrac{2}{3}\pi\rho G(R^2 - r^2)$.

Τελικώς, επειδή $\rho = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ βρίσκομε

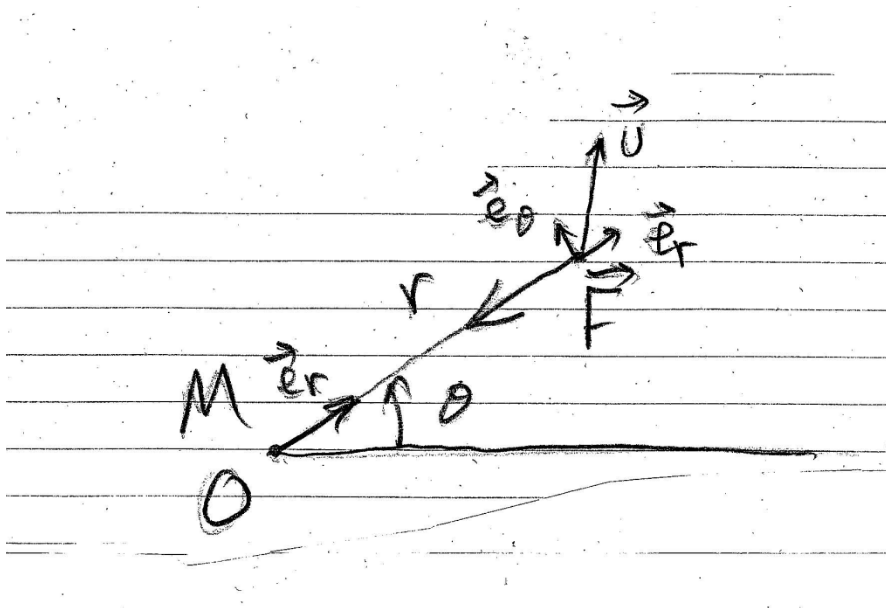
$$V = V_1 + V_2 = -\frac{Gm}{2R}\left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

2.5 Κεντρική δύναμη, Διατήρηση της στροφορμής, Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, Κεντρικό πεδίο βαρύτητας

Αν η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα υλικό σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία του φορέα που ενώνει το υλικό σημείο με ένα σταθερό σημείο του χώρου, τότε λέμε ότι η δύναμη αυτή είναι κεντρική δύναμη. Το σταθερό σημείο είναι το κέντρο της δύναμης. Αν θεωρήσομε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_r$ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει κάθε φορά τα δυο σημεία με κατεύθυνση από το κέντρο της δύναμης προς το υλικό σημείο, τότε η δύναμη έχει τη μορφή, $\vec{F} = F\vec{e}_r$, F είναι η τιμή της δύναμης, όταν είναι θετική τότε η δύναμη είναι απωστική όταν είναι αρνητική τότε είναι ελκτική (έχει φορά προς το κέντρο της δύναμης).

Ας θεωρήσομε το Σχ. 2.17. Το υλικό σημείο μάζας m υφίσταται κεντρική δύναμη $\vec{F} = F\,\vec{e}_r$, το κέντρο δύναμης είναι το Ο. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) δίνει

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{\upsilon}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}.$$



Σχήμα 2.17

Υποθέσαμε ότι για τις ταχύτητες ισχύει $\upsilon << c$, όμως μπορεί το θέμα να εξεταστεί και μέσα στα πλαίσια της Ειδικής Σχετικότητας με παρόμοια αποτελέσματα. Από αυτή τη σχέση βρίσκομε $\vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \dot{\vec{\upsilon}}$. Το αριστερό μέλος είναι η ροπή $\vec{\tau}$ της δύναμης, περί το Ο.

Το μέγεθος $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}$ είναι η στροφορμή του σωματίου περί το Ο. Έχομε $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{\upsilon} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\upsilon}} = m\vec{\upsilon} \times \vec{\upsilon} + m\vec{r} \times \dot{\vec{\upsilon}} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$.

Προφανώς η ροπή της κεντρικής δύναμης περί το Ο $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, διότι τα $\vec{r}, \vec{F}$ είναι συγγραμμικά οπότε η μεταξύ τους γωνία θ είναι 0 ή π, άρα το ημίτονό της είναι μηδέν ($\tau = rF\sin\theta$). Αυτό σημαίνει ότι κατά την κίνηση του υλικού σημείου $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$, άρα $\vec{L} =$ σταθερό. Βρήκαμε ότι η στροφορμή περί το κέντρο της δύναμης είναι σταθερά του χρόνου, διατηρείται. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι η κίνηση γίνεται σε ένα σταθερό επίπεδο (έχομε επίπεδη κίνηση). Πράγματι, το σταθερό στο χώρο διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$ είναι συγχρόνως κάθετο στα διανύσματα $\vec{r}, \vec{\upsilon}$ κάθε χρονική στιγμή, επομένως αφού το $\vec{r}$ έχει αρχή το Ο τα $\vec{r}, \vec{\upsilon}$ ορίζουν το κάθετο στο $\vec{L}$ επίπεδο που διέρχεται από το Ο, άρα είναι σταθερό με το χρόνο.

Εφόσον βλέπομε ότι η κίνηση γίνεται σε ένα σταθερό επίπεδο, μπορούμε όταν εξετάζομε την κίνηση ενός μόνο υλικού σημείου να διαλέξομε πολικές συντεταγμένες πάνω στο επίπεδο της κίνησης. Αρχή των συντεταγμένων παίρνομε το κέντρο της δύναμης. Η ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση $\vec{\upsilon} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$ επομένως η σχέση $\vec{L} =$ σταθερό δίνει

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} = mr\vec{e}_r \times \left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta\right) = 0 + mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \text{σταθερό}.$$

Το $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$ ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\omega$ κάθετο στο επίπεδο. Βάζομε το δείκτη ω γιατί έχει τη διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου περί την αρχή των συντεταγμένων. Τελικώς η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί στη σχέση $L = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} =$ σταθερό.

2.6 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σε κεντρικό συντηρητικό πεδίο δυνάμεων

Ας θεωρήσομε ότι έχομε ένα κεντρικό συντηρητικό πεδίο δυνάμεων. Από τον ορισμό του συντηρητικού πεδίου προκύπτει ότι υπάρχει δυναμικό $V = V(\vec{r})$ έτσι ώστε το διανυσματικό μέγεθος του πεδίου $\vec{A}(\vec{r})$ (εδώ πρόκειται για την ένταση του πεδίου) να δίνεται από τη σχέση $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες θα έχομε $A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r\dfrac{\partial V}{\partial r} - \vec{e}_\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} - \vec{e}_\varphi\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ όπου γενικώς $A_r, A_\theta, A_\varphi, V$ είναι συναρτήσεις των r, θ, φ.

Αν το πεδίο είναι κεντρικό τότε $A_\theta = A_\varphi = 0$ άρα $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ που σημαίνει ότι το δυναμικό είναι συνάρτηση μόνο του r.

Δηλαδή, $V = V(r)$ και $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = F(r)\vec{e}_r,\ F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

Σε αυτή την περίπτωση η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνηση υλικού σημείου σε κεντρικό συντηρητικό δυναμικό γράφεται $E = T + V(r)$.

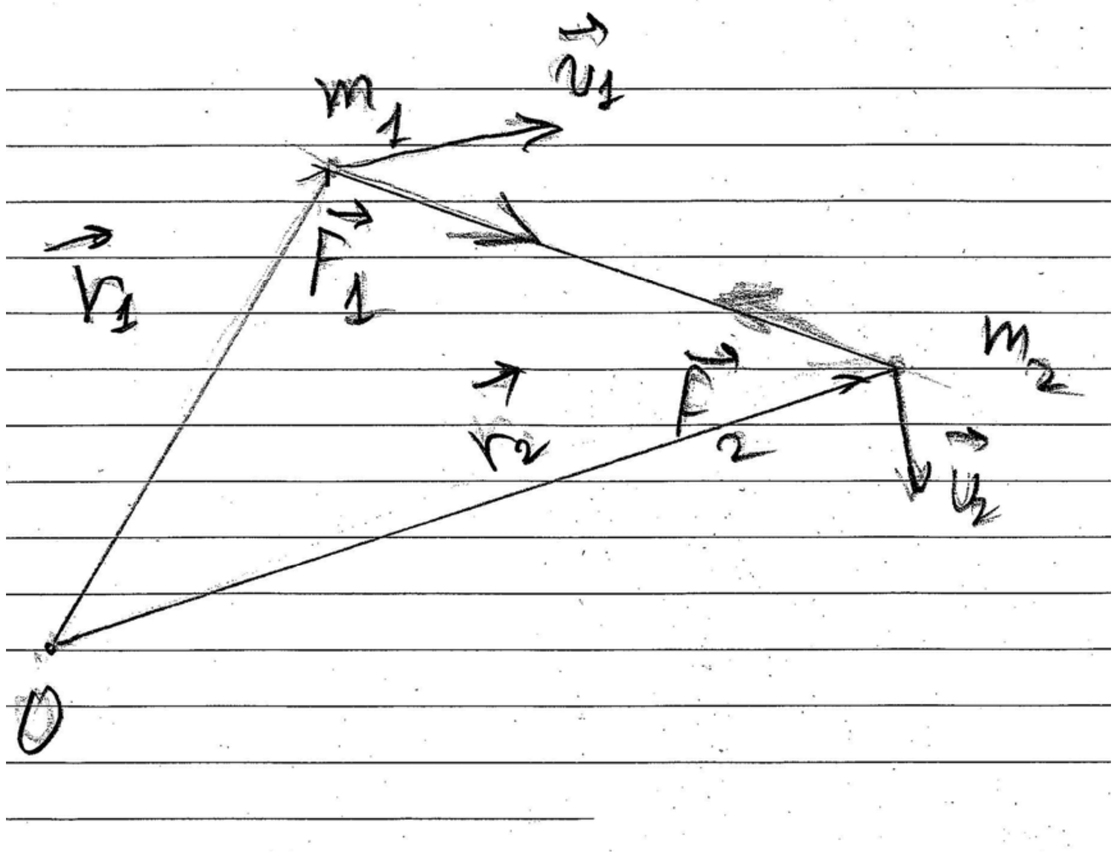
Πρέπει να τονίσομε ότι αν έχομε δυο σωμάτια τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με (εσωτερικές) δυνάμεις που ακολουθούν την ισχυρή αρχή δράσης αντίδρασης τότε λέμε ότι η δύναμη στο καθένα είναι κεντρική και αυτή η περίπτωση ανάγεται σε ότι είπαμε πριν. Πράγματι, θεωρούμε το Σχ. 9.18, υποθέτομε ότι δεν δρουν στο σύστημα άλλες (εξωτερικές) δυνάμεις. Έχομε $\vec{F}_2 = m_2\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_2}{\mathrm{d}t},\ \vec{F}_1 = m_1\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_1}{\mathrm{d}t},\ \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Θέτομε $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, οπότε καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} + \frac{\vec{F}_2}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\vec{F}_2.$$

$\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_1}$, όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα του συστήματος, άρα

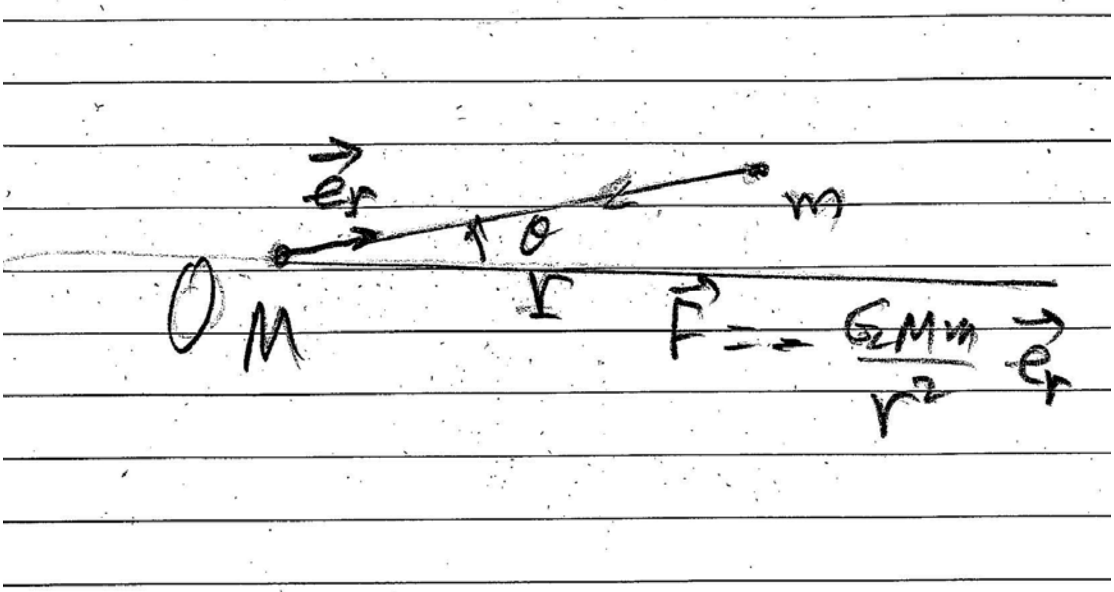
$\vec{F}_2 = \mu\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα ενός υλικού σημείου μάζας μ του οποίου η θέση καθορίζεται από το διάνυσμα (θέσης) $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Το $\vec{r}$ έχει αρχή τη θέση του σωματίου 1 το οποίο θεωρείται ακίνητο ως προς κατάλληλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η δύναμη πάνω στο σωμάτιο μάζας μ $\vec{F}_2$ έχει φορέα τον φορέα του $\vec{r}$ δηλαδή βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σωμάτια m_1, m_2. Δηλαδή είμαστε στην περίπτωση της κεντρικής δύναμης όπως την εισαγάγαμε στην αρχή. Αν προσθέσομε τις εξισώσεις κίνησης των δυο υλικών σημείων, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσομε την κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος, το οποίο στην περίπτωσή μας θα κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα ή θα είναι ακίνητο.



Σχήμα 2.18.

2.7 Τροχιά σωματίου σε κεντρικό πεδίο βαρύτητας, Νόμοι του Κέπλερ

Υποθέτομε ότι έχομε σημειακή μάζα M που βρίσκεται ακίνητη στην αρχή συστήματος πολικών συντεταγμένων όπως στο Σχ. 2.19. Σωμάτιο μάζας m βρίσκεται στο βαρυτικό πεδίο της μάζας M και κατά τα γνωστά, γενικώς κινείται στο επίπεδο. Στην πραγματικότητα για τυχαίες μάζες M, m πρέπει να γίνει ανάλυση κάνοντας χρήση της έννοιας της ανηγμένης μάζας όπου και οι δυο μάζες περιφέρονται περί το κέντρο μάζας τους. Αν ισχύει $M \gg m$ τότε το κέντρο μάζας συμπίπτει με τη θέση της μάζας M που μπορεί να ληφθεί ότι μένει ακίνητη. Η επιτάχυνση της μάζας m σε πολικές συντεταγμένες είναι $\vec{a} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta$.



Σχήμα 2.19

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης δίνει για τη δύναμη πάνω στη μάζα m, $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$, όπου $k = GMm > 0$. Έχομε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$-\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = m\vec{a} = m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_\theta$, άρα ξαναβρίσκομε τη σχέση που εκφράζει τη διατήρηση της στροφορμής $L = r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} =$ σταθερό και τη σχέση $-\frac{k}{mr^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Από αυτές τις δυο βρίσκομε $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{k}{mr^2} = 0$.

Δε μπορεί να βρεθεί αναλυτική λύση του προβλήματος της μορφής $r = r(t),\ \theta = \theta(t)$, όμως μπορεί να βρεθεί η σχέση για την τροχιά στη μορφή $r = r(\theta)$.

Έχομε $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ άρα $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2L^2}{m^2 r^5}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$

ή $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{L}{mr^2}$.

Παίρνομε την παράγωγο της αρχικής οπότε βρίσκομε μετά από μερικές πράξεις

$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{L^2}{m^2r^4}-\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\frac{2L^2}{m^2r^5}$. Τελικώς έχομε $\frac{L^2}{m^2r^4}\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]-\frac{L^2}{m^2r^3}+\frac{k}{mr^2}=0$. Κάνομε αλλαγή μεταβλητής $u(\theta)=\frac{1}{r(\theta)}$ οπότε καταλήγομε στην εξίσωση $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u-\frac{km}{L^2}=0$. Η λύση της είναι πολύ απλή, είναι της γενικής μορφής $u=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{km}{L^2}$, $A=$ σταθερά. Η άλλη σταθερά η θ_0 σχετίζεται με τον προσανατολισμό της τροχιάς στο επίπεδο. Αυτές οι σταθερές ολοκλήρωσης εξαρτώνται από της αρχικές συνθήκες.

Εφόσον διατηρείται η μηχανική ενέργεια έχομε $E=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]-\frac{k}{r}=\text{σταθερό}$. Από τον ορισμό του u προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]-ku$. Όμως $\frac{du}{d\theta}=-A\sin(\theta-\theta_0)$ οπότε αντικαθιστούμε στην προηγούμενη σχέση αυτή την παράγωγο και τελικώς καταλήγομε στη σχέση

$A=\pm\frac{km}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{k^2m}}$. Άρα $u=\frac{1}{r}=\frac{km}{L^2}\left[1\pm\sqrt{1+\frac{2EL^2}{k^2m}}\cos(\theta-\theta_0)\right]$.

Η σχέση $r=r(\theta)$ παριστάνει κωνική τομή (κύκλο, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Ορίζομε το μέγεθος $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{k^2m}}$ το οποίο στην περίπτωση της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα. Έχομε

$\frac{1}{r}=\frac{1}{s}\left[1\pm\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right]$, όπου $s=\frac{L^2}{km}$.

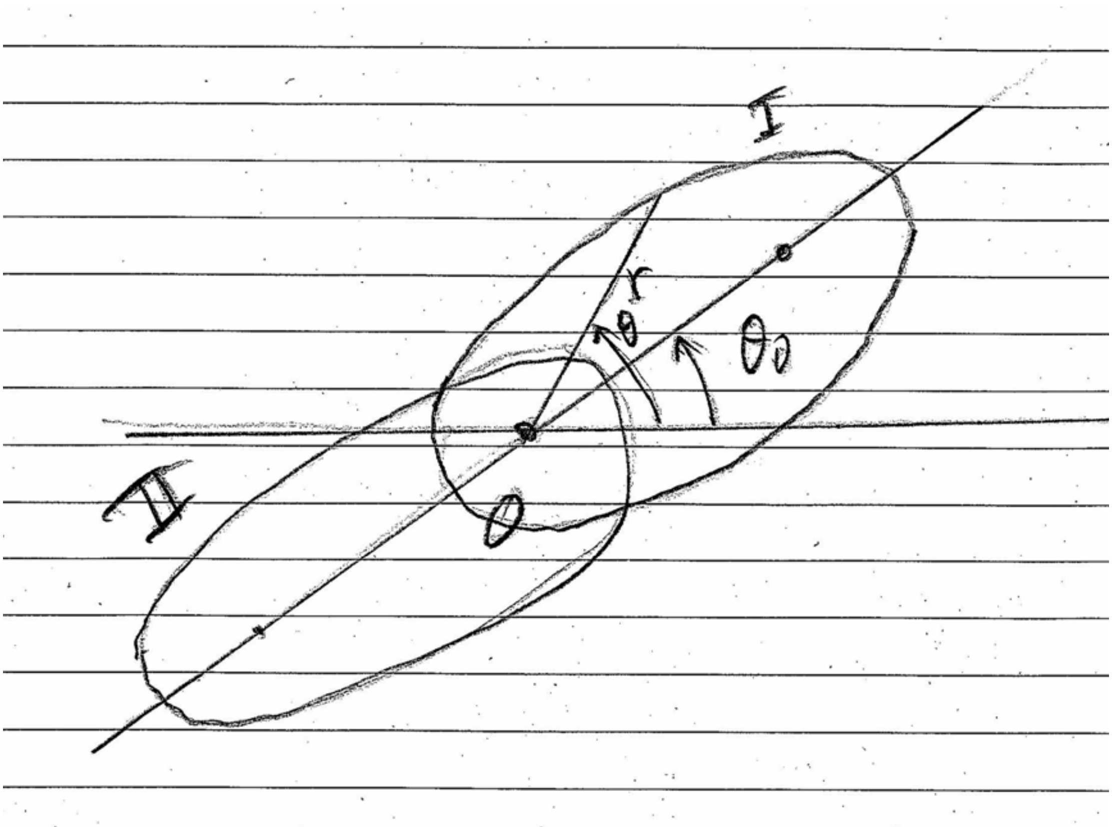
Οι τροχιές κατατάσσονται με βάση την ενέργεια E και την αντίστοιχη τιμή του μεγέθους ε ως εξής,

$E<0$	$\varepsilon<1$	κλειστή τροχιά, έλλειψη ($\varepsilon=0$, κύκλος)
$E=0$	$\varepsilon=1$	ανοιχτή τροχιά, παραβολή
$E>0$	$\varepsilon>1$	ανοιχτή τροχιά, υπερβολή

Εφόσον $E=T+V$ για τις κλειστές τροχιές έχομε $T<|V|$ για τις ανοιχτές $T\geq|V|$.

Η επιλογή του προσήμου $\pm$ στη σχέση $r=r(\theta)$ σχετίζεται με τον προσανατολισμό της τροχιάς.

Σε όσα ακολουθούν θα περιοριστούμε στις ελλειπτικές τροχιές. Αν πάρομε το + τότε το σημείο της έλλειψης που αντιστοιχεί στο $\theta=\theta_0$ έχει $r=r_0$ που είναι μικρότερο από το r του σημείου της έλλειψης με $\theta=\theta_0+\pi$ (Σχ. 2.20, έλλειψη Ι). Όταν επιλέξομε το – έχομε την αντίθετη κατάσταση (Σχ. 2.20, έλλειψη ΙΙ). Στα παρακάτω θα επιλέξομε το +, εκτός αν κάνομε άλλη ειδική αναφορά.



Σχήμα 2.20

Αν θέσομε στη σχέση για την τροχιά όπου $\theta = \theta_0$, με την επιλογή του προσήμου +, βρίσκομε $r_1 = r_0 = \dfrac{s}{1+\varepsilon}$ αν θέσομε $\theta = \theta_0 + \pi$ έχομε $r_2 = \dfrac{s}{1-\varepsilon}$, επομένως πράγματι έχομε $r_2 > r_1$. Για κύκλο $r_2 = r_1$.

Εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι, όταν $\theta = \theta_0$ (και $\varepsilon < 1$) η απόσταση r_1 του σημείου της τροχιάς από το ελκτικό κέντρο, που είναι και η μια εστία της έλλειψης, είναι η ελάχιστη από όλα τα σημεία της τροχιάς. Αυτό το σημείο λέγεται περιάψιο ή περίκεντρο αλλά πολλές φορές (καταχρηστικά) λέγεται περιήλιο. Όταν $\theta = \theta_0 + \pi$ τότε η απόσταση r_2 είναι η μέγιστη και το αντίστοιχο σημείο λέγεται αποάψιο ή απόκεντρο και καταχρηστικώς αφήλιο. Για το περιάψιο θέτομε $r_1 = r_\pi$. Για το αποάψιο θέτομε $r_2 = r_\alpha$.

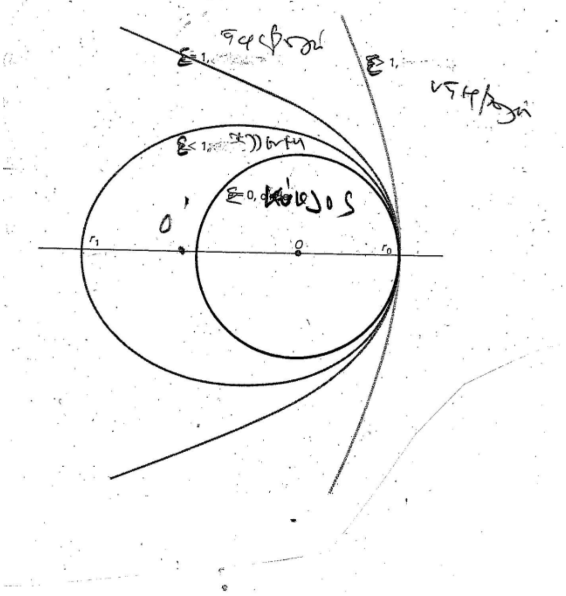
Ισχύουν οι σχέσεις

$$r = r_\pi \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$r_\alpha = r_\pi \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}.$$

Στο Σχ. 2.21 φαίνονται διάφορες περιπτώσεις τροχιών.



Σχήμα 2.21

Η εκκεντρότητα μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση $\varepsilon = \dfrac{L^2}{kmr_\pi} - 1$.

Αν παραστήσομε με υ_π την ταχύτητα στο περιάψιο ($\theta = \theta_0$, $r = r_\pi$) αυτή (προφανώς) είναι η μέγιστη ταχύτητα για το σωμάτιο που διατρέχει την τροχιά. Από τη σχέση της διατήρησης της στροφορμής έχομε

$\upsilon_\pi = \dfrac{L}{mr_\pi}$ οπότε έχομε για την εκκεντρότητα, $\varepsilon = \dfrac{mr_\pi \upsilon_\pi^2}{k} - 1$.

Για κυκλική κίνηση ξέρομε ότι ισχύει $\dfrac{GMm}{r_c^2} = \dfrac{m\upsilon_c^2}{r_c}$.

Αυτό συμφωνεί και από την τελευταία σχέση για την εκκεντρότητα αν θέσομε $\varepsilon = 0, r_c = r_\pi$, επομένως $\upsilon_c^2 = \dfrac{GM}{r_\pi}$.

Για την εκκεντρότητα βρίσκομε $\varepsilon = \left(\dfrac{\upsilon_\pi}{\upsilon_c} \right)^2 - 1$.

Η εξίσωση της τροχιάς μπορεί να γραφτεί

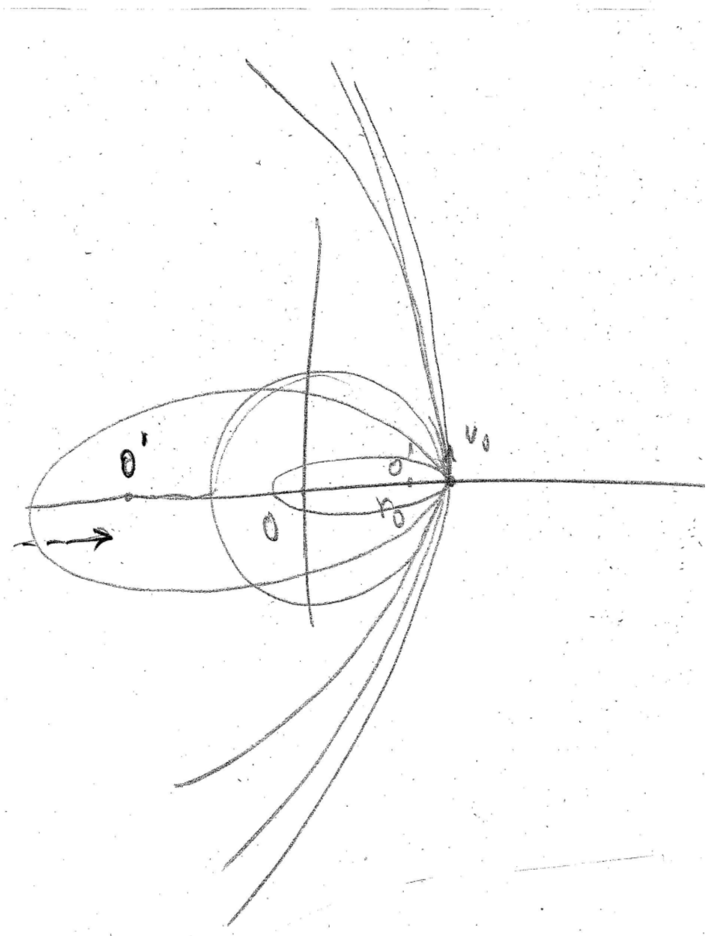
$$r = r_0 \frac{(\upsilon_0 / \upsilon_c)^2}{1 + \left[(\upsilon_0 / \upsilon_c)^2 - 1 \right] \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Το r_0 είναι η απόσταση του σημείου με $\theta = \theta_0$ από το ελκτικό κέντρο, υ_0 είναι η ταχύτητα του σώματος στη θέση $(r = r_0, \theta = \theta_0)$ της τροχιάς η οποία είναι κάθετη στο $\vec{r}_0$. Αυτή η σχέση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, δηλαδή δε χρειάζεται $\pm$. Το r_0 μπορεί να είναι η απόσταση από το ελκτικό κέντρο (αρχή των συντεταγμένων) του περιάψιου ή του αποάψιου.

Το αποάψιο έχει απόσταση από το ελκτικό κέντρο

$$r_\alpha = r_\pi \frac{(\upsilon_\pi / \upsilon_c)^2}{2 - (\upsilon_\pi / \upsilon_c)^2}.$$

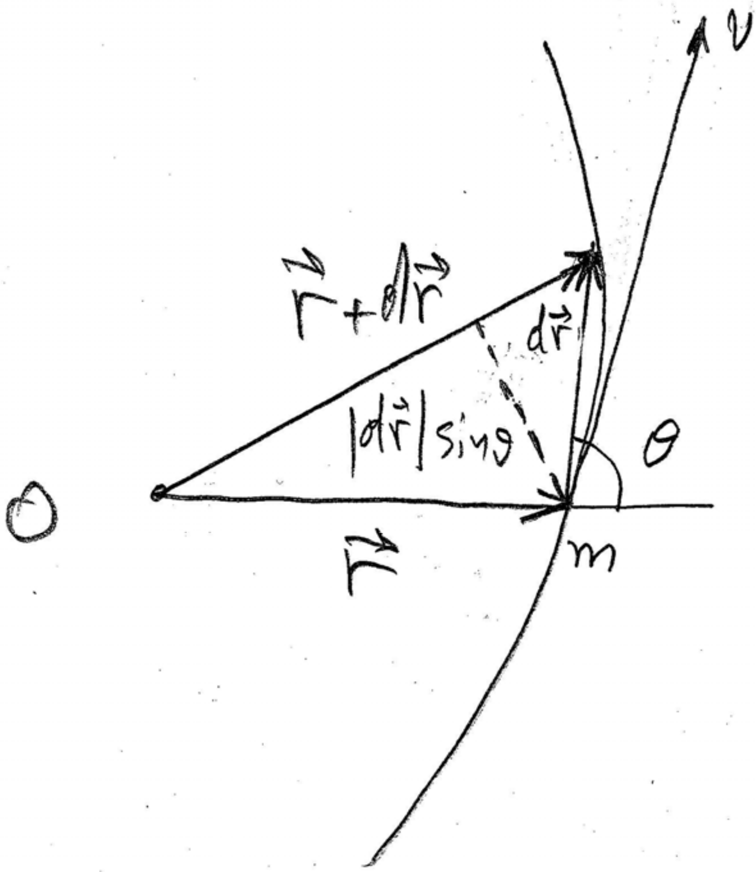
Στο Σχ. 2.22 δείχνονται τροχιές για δεδομένα υ_c, r_0, και διάφορες τιμές της (κάθετης) ταχύτητας υ_0. Θα περιγράψομε τι γίνεται καθώς η ταχύτητα αρχίζει από μεγάλες τιμές και μειώνεται διαδοχικά. Μπορεί να διαπιστωθεί ότι αν $\upsilon_0 > \sqrt{2}\upsilon_c$ τότε η τροχιά είναι υπερβολή με εστία στο ελκτικό κέντρο, αν $\upsilon_0 = \sqrt{2}\upsilon_c$ (ταχύτητα διαφυγής) τότε η τροχιά είναι παραβολή με εστία στο ελκτικό κέντρο. Στη συνέχεια, αν $\upsilon_0 < \sqrt{2}\upsilon_c$ η τροχιά είναι κλειστή γενικώς έλλειψη, με την μια εστία της στο ελκτικό κέντρο. Στην αρχή το σημείο με $r = r_0$ $(\theta = \theta_0 = 0)$ είναι το περίκεντρο (περιάψιο), δηλαδή το ελκτικό κέντρο βρίσκεται στην εστία την κοντινότερη στο σημείο $r = r_0$ $(\theta = \theta_0 = 0)$ η άλλη εστία είναι μακριά και καθώς η ταχύτητα υ_0 μικραίνει η μακρινή εστία πλησιάζει προς την κοντινή εστία. Όταν $\upsilon_0 = \upsilon_c$ οι δυο εστίες συμπίπτουν και η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας r_c. Καθώς η ταχύτητα μειώνεται, $\upsilon_0 < \upsilon_c$, η τροχιά γίνεται πάλι έλλειψη αλλά τώρα το ελκτικό κέντρο βρίσκεται στην απομακρυσμένη εστία, το σημείο $r = r_0$ $(\theta = \theta_0 = 0)$ είναι αποάψιο (απόκεντρο) και η άλλη εστία συνεχώς πλησιάζει το αποάψιο.



Σχήμα 2.22

Στο Σχ. 2.23 φαίνεται σωμάτιο μάζας m που κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης. Το εμβαδόν της επιφάνειας που διαγράφει το διάνυσμα θέσης (επιβατική ακτίνα) του σωματίου είναι $\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r |\mathrm{d}\vec{r}| \sin\theta$ επομένως $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} \sin\theta$.

Η ταχύτητα του σωματίου είναι $\upsilon = \dfrac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ άρα $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2m}(rm\upsilon \sin\theta)$. Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η στροφορμή περί το Ο. Κατά την κίνηση η στροφορμή διατηρείται, επομένως $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2m} =$ σταθερό.



Σχήμα 2.23

Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας (εμβαδική ταχύτητα) που διαγράφει το διάνυσμα θέσης είναι σταθερός σε κάθε σημείο της τροχιάς. Αυτό σημαίνει ότι, για πεπερασμένους χρόνους t_{12} οι πεπερασμένες επιφάνειες A_{12} που διαγράφονται είναι ανάλογες του αντίστοιχου χρόνου, $A_{12} = \dfrac{L}{2m} t_{12}$ ή $t_{12} = \dfrac{2m}{L} A_{12}$. Για την περίπτωση της ελλειπτικής τροχιάς το εμβαδόν της είναι πab όπου a,b είναι αντιστοίχως ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης . Για μια πλήρη περιφορά έχομε χρόνο μιας περιόδου της κίνησης, T. Αυτό μας οδηγεί στη σχέση $T = \frac{2m}{L}\pi ab$. Για την έλλειψη ισχύει επίσης, $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$ οπότε μπορούμε να γράψομε, $T = \frac{2\pi m a^2}{L}\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Για το μέγιστο άξονα μήκους $2a = r_\pi + r_\alpha$ μπορούμε να δείξομε ότι ισχύει $2a = \frac{2L^2}{km(1-\varepsilon^2)}$. Τελικώς για την περίοδο περιφοράς βρίσκομε $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$.

Αν θεωρήσομε ότι το κινούμενο υλικό σημείο είναι ένας πλανήτης και το ακίνητο ελκτικό κέντρο είναι ο Ήλιος, τότε από τα παραπάνω βρίσκομε τους νόμους κίνησης των πλανητών, τους νόμους του Κέπλερ. Θεωρούμε ότι οι υπόλοιποι πλανήτες δεν αλληλεπιδρούν σημαντικά με τον εξεταζόμενο πλανήτη.

1^{ος} Νόμος

Ο κάθε πλανήτης κινείται σε έλλειψη, με τον Ήλιο στη μια εστία της.

2^{ος} Νόμος

Το διάνυσμα θέσης ενός πλανήτη μετρούμενο από τον Ήλιο, διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

3^{ος} Νόμος

Το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς περί τον Ήλιο είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς.

Υποθέσαμε ότι το ελκτικό κέντρο (εδώ ο Ήλιος) είναι σταθερό, ακίνητο. Αυτό, όπως έχομε ξαναπεί, ισχύει αν η μάζα του σώματος που είναι το ελκτικό κέντρο είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας του πλανήτη. Αν όμως αυτό δεν ισχύει και οι μάζες δεν διαφέρουν πολύ τότε πρέπει να κάνομε την ανάλυση εισάγοντας την έννοια της ανηγμένης μάζας. Οι δυο μάζες κινούνται περί το κέντρο μάζας τους.

Αυτή η ιδέα αποτελεί στις μέρες μας εργαλείο παρατήρησης (ανακάλυψης) εξωηλιακών πλανητικών συστημάτων. Ένεκα της μεγάλης απόστασης δεν είναι ορατός ο σκοτεινός (μη αυτόφωτος) πλανήτης αλλά μόνο το αυτόφωτο άστρο το αντίστοιχο του Ήλιου μας. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι το άστρο κινείται πέρα-δώθε διότι περιφέρεται περί το κέντρο μάζας του συστήματος που αποτελείται από το άστρο και τον πλανήτη.

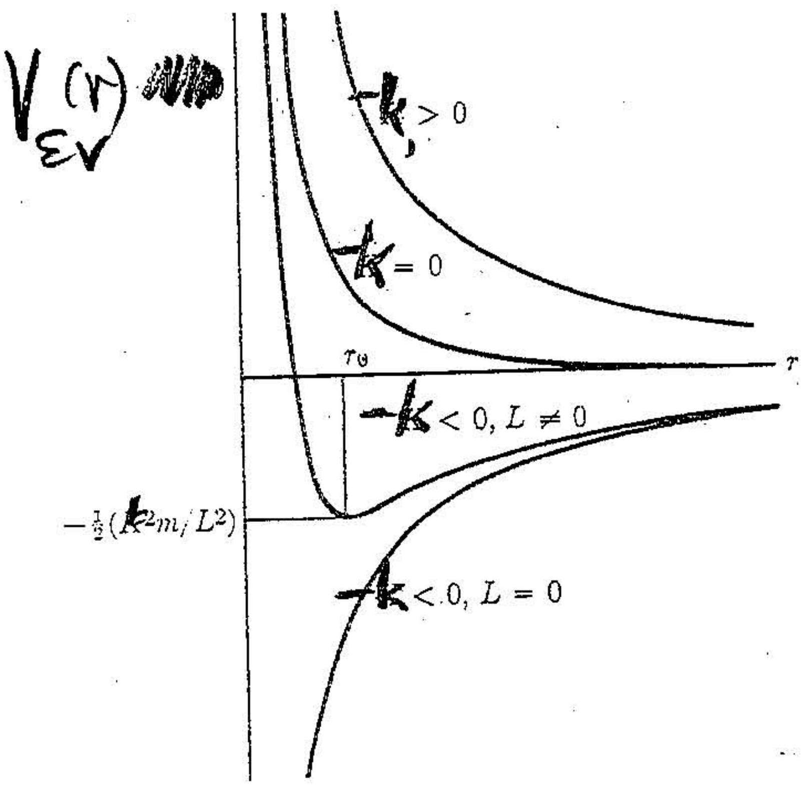
Η κίνηση των ουράνιων σωμάτων σχετίζεται με τη βαρύτητα. Στις περιπτώσεις μελέτης κίνησης πολλών σωμάτων που αλληλεπιδρούν οι υπολογισμοί είναι πολύπλοκοι και γίνονται με ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Η κίνηση τεχνητών δορυφόρων και διαστημικών οχημάτων που στέλνονται στο διάστημα, πέραν του ηλικακού μας συστήματος, ακολουθούν το νόμο της βαρυτικής έλξης και τους νόμους κίνησης του Νεύτωνα. Η ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί οριζόντια ένα σώμα ώστε να διαγράφει κυκλική τροχιά περί ένα ουράνιο σώμα λέγεται πρώτη κοσμική ταχύτητα και εξαρτάται από τη μάζα του ουράνιου σώματος και την απόσταση του σημείου εκτόξευσης από το κέντρο του.

Χρήσιμη είναι η εισαγωγή της έννοιας της ενεργού δυναμικής ενέργειας και του αντίστοιχου ενεργού κεντρικού δυναμικού. Αν το πεδίο δυνάμεων χαρακτηρίζεται από δυναμική ενέργεια της μορφής $V = V(r)$ τότε η ακτινική εξίσωση κίνησης είναι $m\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{L^2}{mr^3} - \dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$.

Το μέγεθος $V_{\varepsilon\nu} = V(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$ λέγεται ενεργός δυναμική ενέργεια. Αποτελείται από τον όρο $V(r)$ της «συνήθους» δυναμικής ενέργειας και τον όρο $\dfrac{L^2}{2mr^2}$ που λέγεται φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια. Η ακτινική εξίσωση κίνησης γράφεται $m\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\mathrm{d}V_{\varepsilon\nu}(r)}{\mathrm{d}r}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσομε ότι έχομε μονοδιάστατη (ακτινική) κίνηση και ότι ο φυγοκεντρικός όρος αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια που οδηγεί στο φυγοκεντρικό όρο για τη «δύναμη» $\dfrac{L^2}{mr^3}$.

Για την ολική μηχανική ενέργεια έχομε $E = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_{\varepsilon\nu} = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2} = \text{σταθερή}$.

Όταν έχομε δυναμική ενέργεια της μορφής $V(r) = -\dfrac{k}{r} < 0$ (ελκτική δύναμη) τότε έχομε το Σχ. 2.24 για τη γραφική παράσταση των δυναμικών ενεργειών συναρτήσει της απόστασης.



Σχήμα 2.24

Όταν το $V_{εν}$ είναι ελάχιστο η τιμή του είναι $V_{m}=-\frac{1}{2}\frac{k^2m}{L^2}$. Αν η ολική μηχανική ενέργεια $E>0$ τότε η κίνηση είναι απεριόριστη, αν $-\frac{1}{2}k^2m/L^2<E<0$ η κίνηση είναι περιορισμένη μεταξύ δυο τιμών του r. Αν $E=-\frac{1}{2}k^2m/L^2$, από τη σχέση για τη μηχανική ενέργεια προκύπτει ότι το σωμάτιο έχει ακτινική ταχύτητα $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$ και κινείται σε κύκλο ακτίνας $r_c=\frac{L^2}{km}$.

Παράδειγμα 1

Ταχύτητα διαφυγής

Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί αντικείμενο (υλικό σημείο) μάζας m m που βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο του ουράνιου σώματος ώστε υπερνικώντας τη βαρύτητα να απομακρυνθεί μέχρι το άπειρο. Να υποτεθεί ότι το αντικείμενο δεν αλληλεπιδρά με άλλα ουράνια σώματα. Το ουράνιο σώμα είναι ακίνητο. Η μάζα του ουράνιου σώματος είναι M, το σώμα είναι ομογενές ως προς την πυκνότητά του και έχει ακτίνα $R_\Sigma \le R$. R. Δώστε την τιμή της ταχύτητας για διαφυγή από την επιφάνεια της Γης. $R_\Gamma = 6{,}37 \times 10^6$ m, $M_\Gamma = 5{,}98 \times 10^{24}$ $M_\Gamma = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

$G = 6{,}670 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 $G = 6{,}670 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Αυτή η ταχύτητα λέγεται δεύτερη κοσμική ταχύτητα.

Λύση

Στην απόσταση R η μηχανική ενέργεια του αντικειμένου είναι $E_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R}$ $E_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R}$ στο άπειρο η ταχύτητα θα είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια επίσης μηδέν, άρα $E_2 = 0$ $E_2 = 0$. Επομένως $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} = 0$ $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} = 0$. Τελικώς $\upsilon = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ $\upsilon = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

Αν λάβομε υπόψη ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του ουράνιου σώματος είναι $g = \frac{GM}{R_\Sigma^2}$, τότε βρίσκομε και τη σχέση $\upsilon = \sqrt{2gR}$ $\upsilon = \sqrt{2gR_\Sigma}$. Για την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης θα έχομε

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}670 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^6}}$$

$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}670 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^6}}$ m/s≈$1{,}1 \times 10^4$ m/s 10^4 m/s=11 km/s.

Αν λάβομε υπόψη την τιμή της πρώτης κοσμικής ταχύτητας $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ προκύπτει ότι η δεύτερη κοσμική ταχύτητα $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2MG}{R}}$ είναι $\upsilon_2 = \sqrt{2}\upsilon_1$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης (αυτή λέγεται Τρίτη κοσμική ταχύτητα) α) αν ληφθεί υπόψη μόνο η έλξη του Ήλιου και παραληφθεί η έλξη της Γης. β) Ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση εκτόξευσης του σώματος από την επιφάνεια της Γης ώστε η ταχύτητά του ως προς την επιφάνεια της Γης να είναι η ελάχιστη δυνατή; Θα υποθέσομε ότι η Γη και ο Ήλιος είναι ακίνητα καθ όλη τη διάρκεια της απομάκρυνσης του σώματος. Να αγνοηθεί η περιστροφή της Γης περί τον άξονά της. Δίνονται η μάζα του Ήλιου $M_{\rm H} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg $M_{\rm H} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg και η απόσταση Ήλιου-Γης $R_{\rm H\Gamma} = 1{,}49 \times 10^{11}$ m. Η περιφορά της Γης περί τον Ήλιο είναι περίπου 365 ημέρες. Οι τιμές των άλλων μεγεθών που χρειάζονται δίνονται στο

Λύση

α) Σε αυτή την περίπτωση έχομε

$$\upsilon_{\rm H} = \sqrt{\frac{2GM_{\rm H}}{R_{\rm H\Gamma}}} = \sqrt{\frac{2\times 7\times 10^{-11}\times 2\times 10^{30}}{1{,}5\times 10^{11}}}\,\frac{\rm m}{\rm s} \approx 4{,}2\times 10^{4}\,\frac{\rm m}{\rm s} = 42\,\frac{\rm km}{\rm s}$$

$$\upsilon_{\rm H} = \sqrt{\frac{2GM_{\rm H}}{R_{\rm H\Gamma}}} = \sqrt{\frac{2\times 7\times 10^{-11}\times 2\times 10^{30}}{1{,}5\times 10^{11}}} \approx 4\times 10^{4}\,{\rm m/s}\,.$$

β) Αυτή είναι η ταχύτητα ως προς αδρανειακό σύστημα που είναι ακίνητο ως προς τον Ήλιο (αγνοούμε την κίνηση του ηλιακού συστήματος). Το σώμα βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης άρα ακολουθεί τη Γη στην περιφορά της περί τον Ήλιο. Θα υπολογίσομε την ταχύτητα που αντιστοιχεί σε αυτή την κίνηση. Έχομε,

$$\upsilon_\pi = \frac{2\pi R_{\rm H\Gamma}}{T_\pi} = \frac{2\pi\times 1{,}49\times 10^{11}}{365\times 24\times 3600}\,\frac{\rm m}{\rm s} \approx 29{,}7\,\frac{\rm km}{\rm s}\quad \upsilon_\pi = \frac{2\pi R_{\rm H\Gamma}}{T_\pi} = \frac{2\pi\times 1{,}49\times 10^{11}}{365\times 24\times 3600}\,\frac{\rm m}{\rm s} \approx 29{,}7\,\frac{\rm km}{\rm s}.$$

Για να εκμεταλλευτεί κάποιος αυτή την ταχύτητα πρέπει να κάνει την εκτόξευση έτσι που η ταχύτητα ως προς τη Γη να έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα περιφοράς. Σε αυτή την πιο ευνοϊκή περίπτωση, η ταχύτητα εκτόξευσης είναι $\upsilon_\varepsilon = \upsilon_{\rm H\Gamma} - \upsilon_\pi \approx (43{,}7 - 29{,}7)\,\dfrac{\rm km}{\rm s}$.

Αυτή θα ήταν η ταχύτητα ως προς τη Γη αν η Γη είχε αμελητέα μάζα, δηλαδή αν στη θέση της Γης ήταν ένας μικρός τεχνητός δορυφόρος του Ήλιου, όμως η Γη ασκεί δύναμη πάνω στο εκτοξευόμενο σώμα, άρα η ταχύτητα εκτόξευσης είναι λίγο μεγαλύτερη.

Η Τρίτη κοσμική ταχύτητα υ_3 συνδέεται με την ταχύτητα που χρειάζεται για να τεθεί το σώμα σε κυκλική τροχιά περί τον Ήλιο στο ίδιο ύψος με τη σχέση που αναφέραμε στα προηγούμενα, δηλαδή $\upsilon_3 = \sqrt{2}\upsilon_\pi$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν η δυναμική βαρυτική ενέργεια, η κινητική ενέργεια και η μηχανική ενέργεια υλικού σημείου μάζας m, που κινείται σε κυκλική τροχιά περί ελκτικό κέντρο (με σημειακή μάζα M) το οποίο ασκεί συνήθη βαρυτική δύναμη, συναρτήσει της απόστασής του από αυτό. Υποθέστε ότι ένεκα τριβής ή οποιουδήποτε άλλου λόγου, το υλικό σημείο «χάνει» ενέργεια και διαγράφει μια έλικα πολύ μικρού βήματος (η κίνηση είναι κάθε φορά σχεδόν κυκλική με μεταβαλλόμενη ακτίνα, απόσταση από το κέντρο). Δείξτε ότι το σωμάτιο κατέρχεται προς το κέντρο και η κινητική του ενέργεια (οπότε και η ταχύτητά του) αυξάνεται. Αυτό λέγεται συνήθως παράδοξο τριβής για τους δορυφόρους.

Λύση

Έχομε κατά τα γνωστά $\frac{m\upsilon^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$, και για την ενέργεια $E = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{Mm}{r}$.

Από την πρώτη βρίσκομε $\upsilon^2 = G\frac{M}{r}$ άρα $K = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$. Παρατηρούμε ότι η $K = \frac{1}{2}|U|$, ενώ η δυναμική ενέργεια $U = -G\frac{Mm}{r}$, είναι αρνητική. Ισχύει $E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$.

Δεχόμαστε ότι οι σχέσεις ισχύουν και κατά την κάθοδο διότι η τροχιά έχει μικρό βήμα και μπορεί να προσεγγιστεί κάθε φορά με κύκλο.

Εφόσον με την πάροδο του χρόνου, η ενέργεια μειώνεται με το r μειώνεται άρα το σώμα πλησιάζει προς το ελκτικό κέντρο. Είναι προφανές ότι όσο το r μικραίνει η κινητική ενέργεια αυξάνεται. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι κατά την κάθοδο η δυναμική ενέργεια μειώνεται με διπλάσιο ρυθμό και γι αυτό το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας, δηλαδή η (ολική) μηχανική ενέργεια μειώνεται.

$\upsilon_{\varepsilon} = \upsilon_{ΗΓ} - \upsilon_{\pi} - \upsilon_{\sigma}$.

2.8 Βάρος σώματος

Συνήθως λέμε ότι βάρος ενός σώματος είναι η δύναμη που ασκεί πάνω του η βαρύτητα. Στην επιφάνεια της Γης η βαρύτητα οφείλεται στην έλξη της Γης, στο Φεγγάρι στην έλξη του Φεγγαριού κτλ. Αν κρεμάσομε ένα σώμα από ένα σημείο κάπου στην επιφάνεια της Γης η τάση του νήματος όταν το σώμα ισορροπεί ως προς τη Γη, δεν είναι ίση με τη δύναμη της βαρύτητας που ασκεί η Γη στο σώμα. Επειδή η Γη περιστρέφεται περί τον άξονά της και το κρεμασμένο σώμα την ακολουθεί, αυτό έχει επιτάχυνση ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς άρα οι δυνάμεις τάση νήματος και δύναμη βαρύτητας δεν ισορροπούν. Αν εξετάζομε τα πράγματα ως προς το στρεφόμενο με τη Γη μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να πούμε ότι η τάση του νήματος ισορροπεί τη βαρυτική δύναμη μαζί με τη φυγόκεντρο δύναμη. Η τάση του νήματος υπό τις ανωτέρω συνθήκες συνηθίζονταν και ακόμη συνηθίζεται να λέγεται φαινόμενο βάρος του σώματος. Σύμφωνα όμως με το Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (International Standards Organization, ISO) και το Διεθνές Σύστημα μονάδων (SI), βάρος του σώματος είναι αυτό που μετρά ζυγός ελατηρίου που ζυγίζει ένα σώμα σε κάποιο σημείο. Για ουράνια σώματα όπως η Γη και το Φεγγάρι, το βάρος εξαρτάται από τη βαρυτική δύναμη και τη φυγόκεντρο δύναμη. Γενικώς το βάρος εξαρτάται από τη δύναμη της βαρύτητας και από την κινητική κατάσταση του συστήματος ως προς το οποίο μετρούμε το βάρος. Για παράδειγμα μέσα σε ένα δορυφόρο ή γενικώς πάνω σε σύστημα σε ελεύθερη πτώση σε οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας, το βάρος του σώματος είναι μηδέν. Συνήθως μιλούμε για την επιτάχυνση $\vec{g}$ ως προς το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, στην περίπτωση αυτή δε λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό του βάρους το φαινόμενο Coriolis αλλά εξετάζεται ως πρόσθετο φαινόμενο για σώματα που έχουν σχετική ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς.

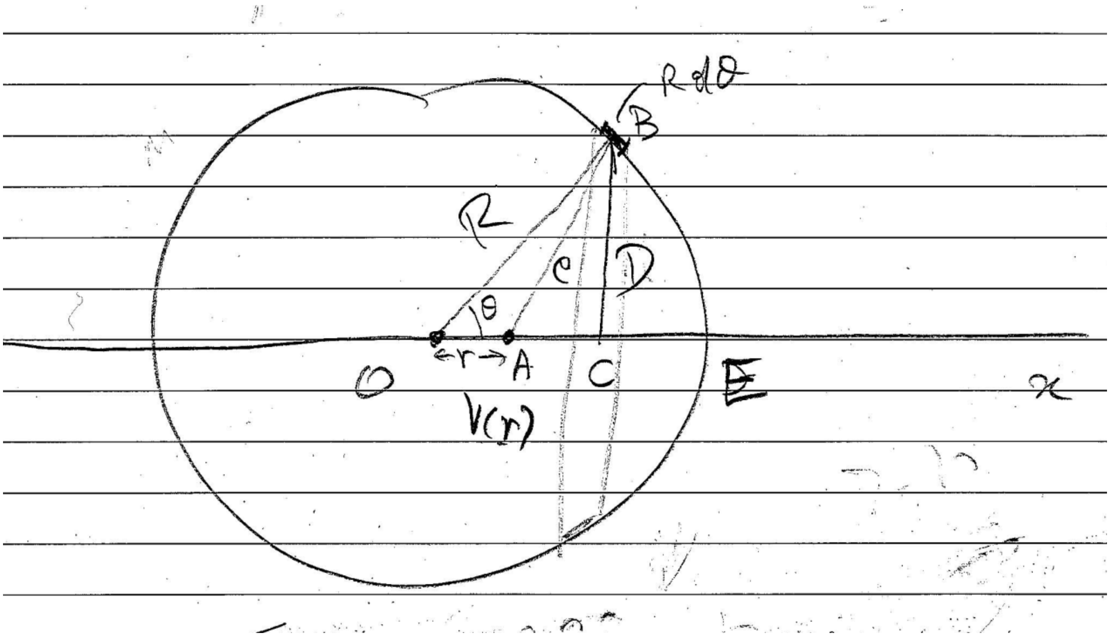
Για τη Γη και τα ουράνια σώματα έχομε $\vec{g} = \vec{g}_\beta + \vec{g}_\varphi$, όπου $\vec{g}_\beta, \vec{g}_\varphi$ είναι η ένταση (ή επιτάχυνση) του πεδίου βαρύτητας και η φυγόκεντρος ένταση (επιτάχυνση) αντιστοίχως.

Το g είναι μεγαλύτερο στους πόλους της Γης από ότι στον Ισημερινό, αυτό οφείλεται στο ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη και επομένως στους πόλους η απόσταση από το κέντρο της είναι μικρότερη από ότι στον Ισημερινό, αλλά και στο ότι η φυγόκεντρος είναι μέγιστη στον Ισημερινό και μηδέν στους πόλους. Η φυγόκεντρος έχει σχεδόν αντίθετη κατεύθυνση από τη βαρυτική έλξη της Γης.

2.9 Προχωρημένα θέματα

1. Δυναμικό λεπτόπαχου ομογενούς σφαιρικού φλοιού όταν το δυναμικό σημειακής μάζας είναι της μορφής $V(r) = -\dfrac{G'm}{r^{1+\alpha}}, G' > 0$

Μπορούμε να εισαγάγομε μια ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ για το φλοιό συνολικής μάζας M, $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} = \dfrac{M}{4\pi R^2}$, Σχ. 2.25.



Σχήμα 2.25

Θα υπολογίσομε το δυναμικό $V(r)$ στο σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο O του φλοιού. Το δυναμικό που οφείλεται στο λεπτό δακτυλίδι που δημιουργείται αν φανταστούμε ότι το στοιχειώδες τμήμα $R\mathrm{d}\theta$ στο B, περιστρέφεται περί τον άξονα x, θα είναι

$$dV = -G'\frac{\mathrm{d}m}{\rho^{1+\alpha}} = -G'\frac{2\pi DR\mathrm{d}\theta\sigma}{\rho^{1+\alpha}}. \qquad \rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta, \qquad D = R\sin\theta,$$

$2\rho\mathrm{d}\rho = 2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Τελικώς $\rho\mathrm{d}\rho = rD\mathrm{d}\theta$.

Επομένως $\mathrm{d}V = -G'\dfrac{2\pi R\sigma}{r}\rho^{-\alpha}\mathrm{d}\rho$.

Για το εσωτερικό $0 \le r \le R$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι από $\rho_1 = R - r$ μέχρι $\rho_2 = R + r$. Επομένως $V(r) = -\dfrac{2\pi G'R\sigma}{\mathrm{r}}\displaystyle\int_{R-r}^{R+r}\rho^{-\alpha}\mathrm{d}\rho$, τελικώς

$$V(r) = -G'\frac{M}{2R}\frac{1}{r}\frac{(R+r)^{1-\alpha} - (R-r)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad 0 \le r \le R.$$

Για το εξωτερικό $r \ge R$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι από $\rho_1 = r - R$ μέχρι $\rho_2 = r + R$ οπότε βρίσκομε $V(r) = -\dfrac{2\pi G'R\sigma}{\mathrm{r}}\displaystyle\int_{r-R}^{r+R}\rho^{-\alpha}\mathrm{d}\rho$.

Τελικώς $V(r) = -G' \frac{M}{2R} \frac{1}{r} \frac{(R+r)^{1-\alpha} - (r-R)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $r \geq R$.

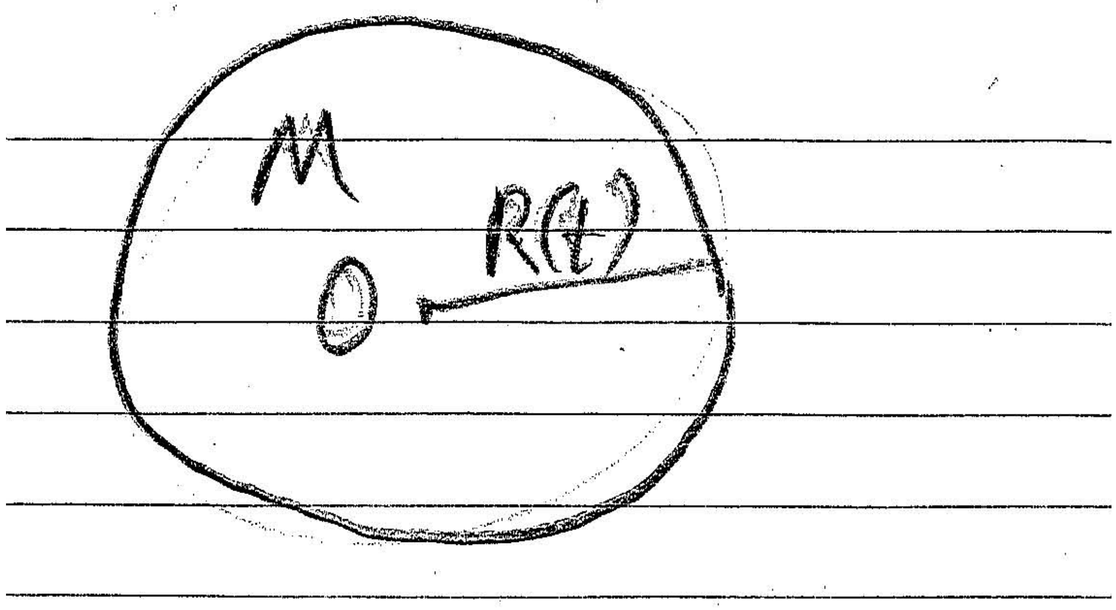
Παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό του φλοιού γενικώς το δυναμικό δεν είναι σταθερό. Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$ δηλαδή στη συνήθη περίπτωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα και για ηλεκτροστατικό δυναμικό.

Στη γενική περίπτωση που $\alpha \neq 0$, προκύπτει ότι στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας φορτισμένου μεταλλικού αγωγού μπορεί να υπάρχουν φορτία σε αντίθεση με την περίπτωση που ισχύει ο νόμος του Coulomb. Επίσης παρατηρούμε ότι για το εξωτερικό δεν ισχύει αυτό που ισχύει για τη γνωστή περίπτωση που $\alpha = 0$. Δηλαδή δεν ισχύει το θεώρημα του Νεύτωνα.

Επειδή η μη ύπαρξη φορτίου στο εσωτερικό μεταλλικής κοιλότητας είναι χαρακτηριστικό του νόμου του Coulomb (και του αντίστοιχου νόμου του Gauss) αυτό αξιοποιείται πειραματικά για να ελεγχθεί η ισχύς του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου για την ηλεκτροστατική δύναμη. Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται με τέτοια πειράματα είναι κατά πολύ ανώτερη από ότι με πειράματα τύπου ζυγού του Cavendish με τα οποία επιτυγχάνεται μια απευθείας μέτρηση της ηλεκτροστατικής δύναμης συναρτήσει της απόστασης. Δυστυχώς δε μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο για τη βαρύτητα, δεν υπάρχουν ελεύθερες μάζες ανάλογες των ελεύθερων φορτίων των αγωγών.

2. Η μεγάλη έκρηξη

Θα βρούμε σχέσεις που σχετίζονται με τη Μεγάλη έκρηξη (Big Bang), στηριζόμενοι στη Μηχανική του Νεύτωνα. Οι σχέσεις δεν ακριβώς οι σωστές αφού πρέπει για το σύμπαν να χρησιμοποιηθεί η Γενική θεωρία της Σχετικότητας, όμως η διαδικασία είναι βολική για να πάρει κάποιος μια ιδέα για αυτή τη σημαντική εξέλιξη της Κοσμολογίας. Ας θεωρήσομε μια ομογενή υλική σφαίρα με ολική μάζα M σταθερή με το χρόνο, Σχ. 2.26. Η σφαίρα είναι μέρος του Σύμπαντος και διαστέλλεται (ή συστέλλεται) ισοτροπικά ως προς το κέντρο της O, επομένως η ακτίνα της $R(t)$ θα



Σχήμα 2.26

μεταβάλλεται με το χρόνο. Υποθέτομε ότι στην επιφάνειά της είναι μια μικρή σημειακή (δοκιμαστική) μάζα m. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη έχομε για τη δύναμη στη μάζα m, $F=-\dfrac{GMm}{R^2(t)}$. Επομένως η επιτάχυνση κάθε σημείου της επιφάνειας της σφαίρας όπως και του υλικού σημείου m θα είναι $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{GM}{R\ (t)}$. Πολλαπλασιάζομε και τα δυο μέλη επί $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, ολοκληρώνομε οπότε βρίσκομε $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dfrac{GM}{R(t)}+E_m$ δηλαδή $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(-\dfrac{GM}{R}\right)=E_m$ όπου E_m είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Αυτό μας λέει ότι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας για μάζα που βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας δηλαδή το E_m είναι σταθερό με το χρόνο. Αυτή είναι ένα είδος διατήρησης ενέργειας. Καθώς η ακτίνα μεταβάλλεται με το χρόνο, η μάζα μένει σταθερή και έχομε $M=\dfrac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$. Η μεταβολή είναι ισοτροπική ως προς το κέντρο της σφαίρας γι αυτό μπορούμε να γράψομε $R(t)=a(t)r_c$, όπου r_c μια σταθερά, που λέγεται συγκινούμενη (comoving) ακτίνα της σφαίρας. Το $a(t)$ είναι ένας αδιάστατος συντελεστής. Έτσι η σχέση για την ενέργεια στην επιφάνεια της σφαίρας, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{R}(t) = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \dot{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, γίνεται

$\frac{1}{2} r_c^2 \dot{a}^2 = \frac{4\pi}{3} G r_c^2 \rho(t) a^2(t) + E_m$. Τελικώς $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2E_m}{r_c^2}\frac{1}{a^2(t)}$.

Αυτό είναι το κλασικό ανάλογο της εξίσωσης του Friedmann η οποία είναι η σωστή σχέση που στηρίζεται στη Γενική Σχετικότητα και στο ότι το Σύμπαν είναι παντού (ομογενές και) ισότροπο και όχι μόνο ως προς το κέντρο της σφαίρας όπως είπαμε προηγουμένως. Από την παραπάνω κλασική σχέση μπορούμε να βγάλομε κάποια συμπεράσματα για το μέλλον του Σύμπαντος. Αν $\dot{a} < 0$ τότε η σφαίρα (ο χώρος του Σύμπαντος) συστέλλεται. Αν $\dot{a} > 0$ η σφαίρα διαστέλλεται. Ας συγκεντρωθούμε στην περίπτωση της διαστολής που αντιστοιχεί στον κόσμο που ζούμε (Μεγάλη Έκρηξη). Το μέλλον της διαστελλόμενης σφαίρας μπορεί να ακολουθεί μια από τις τρεις δυνατές περιπτώσεις που εξαρτώνται από το πρόσημο της (ειδικής) ενέργειας E_m. Αν $E_m > 0$, το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης είναι πάντα θετικό, επομένως το $\dot{a}^2$ είναι πάντα μη μηδενικό και η σφαίρα θα διαστέλλεται επ' άπειρον. Αν $E_m < 0$, τότε το δεξί μέλος ξεκινά θετικό αλλά όταν το $a(t)$ πάρει μια μέγιστη τιμή την $a_{\max} = -\dfrac{GM}{E_m r_c} > 0$ τότε θα γίνει μηδέν και θα σταματήσει η διαστολή. Όμως $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{a}(t) r_c = -\dfrac{GM}{R^2} < 0$, δηλαδή $\ddot{a} < 0$, επομένως η σφαίρα θα συστέλλεται.

Η άλλη περίπτωση είναι όταν $E_m = 0$. Αυτή είναι μια οριακή περίπτωση όπου το $\dot{a} \to 0$ καθώς το $t \to \infty$ και το $\rho \to 0$. Αυτό είναι το ανάλογο της διαφυγής σώματος από το πεδίο βαρύτητας ουράνιου σώματος αν έχει την κατάλληλη ταχύτητα, αν η ταχύτητα προς τα πάνω είναι μικρή (μικρότερη της ταχύτητας διαφυγής), αρχικά το σώμα απομακρύνεται αλλά κατόπιν κατευθύνεται προς το ουράνιο σώμα. Αν η ταχύτητα είναι αρκετά μεγάλη (μεγαλύτερη της ταχύτητας διαφυγής) τότε απομακρύνεται συνεχώς ενώ η ταχύτητά του ποτέ δε μηδενίζεται. Αν έχει μια κρίσιμη ταχύτητα (την ταχύτητα διαφυγής) τότε απομακρύνεται συνεχώς και τείνει να έχει ταχύτητα μηδέν καθώς πλησιάζει το άπειρο.

3. Ευστάθεια κυκλικής τροχιάς σε κεντρικό (συντηρητικό) πεδίο δυνάμεων

Έστω ότι , σύμφωνα με όσα έχομε πει, η κεντρική δύναμη είναι της μορφής $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r, F = F_r = f(r)$. Η διατήρηση της στροφορμής περί το ελκτικό κέντρο, οδηγεί στη σχέση $L = mr^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} =$ σταθερά, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{mr^2}$. Η ακτινική (διαφορική) εξίσωση κίνησης είναι, $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = \frac{f(r)}{m}$. Για κυκλική τροχιά ακτίνας r_c θα έχομε $r = r_c =$ σταθερό οπότε $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t} = 0$, επομένως $-\frac{L^2}{m^2 r^3} = \frac{f(r)}{m}$.

Εφόσον θέλομε να εξετάσομε την ευστάθεια της κυκλικής τροχιάς, φανταζόμαστε μικρή «διαταραχή» (απόκλιση) από την κυκλική τροχιά, δηλαδή προσπαθούμε να δούμε υπό ποιες προϋποθέσεις μπορεί να υπάρξει (ευσταθής) τροχιά που διαφέρει λίγο από την κυκλική. Τότε το $r = r_c + x$, όπου $x << r_c$. Η εξίσωση κίνησης γίνεται $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} - \frac{L^2}{m\,(r_c + x)^3} - \frac{f(r_c + x)}{m} = 0$. Αναπτύσσομε σε σειρά Taylor και κρατούμε όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς x, οπότε έχομε $\frac{1}{(r_c + x)^3} = \frac{r_c^{-3}}{\left(1 + \frac{x}{r_c}\right)^3} \approx r_c^{-3}\left(1 - 3\frac{x}{r_c}\right)$

$$f(r_c + x) \approx f(r_c) + f'(r_c)x\,, \quad f'(r_c) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}.$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης γίνεται $m\ddot{x} + [\frac{-3}{r_c} f(r_c) - f'(r_c)]x = 0$. Αυτή είναι της μορφής $m\ddot{x} + Dx = 0$. Αν $D > 0$ τότε έχομε αρμονική ταλάντωση του x, δηλαδή η κίνηση είναι φραγμένη και η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής. Αν $D \leq 0$ η τροχιά δεν είναι φραγμένη, η κυκλική τροχιά είναι ασταθής. Επομένως για να έχομε ευστάθεια πρέπει $D = f(r_c) + \frac{r_c}{3} f'(r_c) < 0$. Αυτή είναι η γενική συνθήκη για ευστάθεια.

Αν υποθέσομε ότι $f(r) = -kr^{\alpha},\ k > 0$, τότε η συνθήκη ευστάθειας δίνει $\alpha > -3$.

Για την περίπτωση του νόμου της βαρύτητας έχομε $\alpha = -2$ οπότε η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής.

Αν έχομε $\alpha = 1$ τότε η τροχιά είναι επίσης ευσταθής, αν $\alpha = -4$ ή $\alpha = -3$ η τροχιά είναι ασταθής.

4. Δεν υπάρχει μετάπτωση τροχιάς στα πλαίσια της νευτώνειας θεώρησης της μηχανικής

Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με αυτή του 3. Έχομε για κεντρικές δυνάμεις τις εξισώσεις κίνησης: $m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = f(r)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$, $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$.

Υποθέτομε ότι η τροχιά είναι, όπως στην περίπτωση των πλανητών του ηλιακού συστήματος, περίπου κυκλική. Όταν ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης (του αντιστρόφου τετραγώνου για τη δύναμη), έχομε για κυκλική τροχιά,

$r = r_c =$σταθερό, άρα $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = 0$. Επίσης ισχύει $f(r) = -\dfrac{GMm}{r^2}$. Η δεύτερη εξίσωση κίνησης οδηγεί στη διατήρηση της στροφορμής, δηλαδή $mr^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = L = \text{σταθερό}$.

Επομένως για κυκλική τροχιά έχομε $-\dfrac{L^2}{m^2 r_c^3} = -\dfrac{GM}{r_c^2}$.

Γενικώς η ακτινική εξίσωση κίνησης είναι $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t} - \dfrac{L^2}{m^2 r^3} + \dfrac{GM}{r^2} = 0$.

Υποθέτομε ότι η τροχιά διαφέρει πολύ λίγο από την κυκλική ώστε να ισχύει $r = r_c + x$, όπου $x \ll r_c$. Καταλήγομε ότι για το x ισχύει η εξίσωση $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{L^2}{m\, r_c^3 (1+\frac{x}{r_c})^3} + \dfrac{GM}{r_c^2\left(1+\dfrac{x}{r_c}\right)^2} = 0$. Αναπτύσσομε κατά Taylor και κρατούμε όρους μέχρι πρώτης τάξης $\dfrac{x}{r_c}$. Έχομε $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x}{r_c}\right)^3} \approx 1 - 3\dfrac{x}{r_c}$, $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x}{r_c}\right)^2} \approx 1 - 2\dfrac{x}{r_c}$.

Βρίσκομε $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{L^2}{m\, r_c^3}\left(1 - 3\dfrac{x}{r_c}\right) + \dfrac{GM}{r_c^2}\left(1 - 2\dfrac{x}{r_c}\right) = 0$. Όμως $L^2 = GMm^2 r_c$ άρα

$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} - \dfrac{GM}{r_c^2}\left(1 - 3\dfrac{x}{r_c}\right) + \dfrac{GM}{r_c^2}\left(1 - 2\dfrac{x}{r_c}\right) = 0$, τελικώς $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{GM}{r_c^3} x = 0$. Αυτή έχει λύση αρμονική συνάρτηση του χρόνου με κυκλική συχνότητα $\omega_r = \sqrt{\dfrac{GM}{r_c^3}}$. Για την κυκλική κίνηση ισχύει $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{mr_c^2}$ και αφού $L^2 = GMm^2 r_c$ βρίσκομε $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_\theta = \sqrt{\dfrac{GM}{r_c^3}}$, άρα $\omega_\theta = \omega_r$. Αυτό σημαίνει ότι το αποάψιο (το αφήλιο) δεν υφίσταται μετάπτωση, δηλαδή η ελλειπτική τροχιά, που εδώ διαφέρει λίγο από την κυκλική, διαγράφεται συνεχώς η ίδια.

Στην περίπτωση της Ειδικής και Γενικής Σχετικότητας μπορεί να δειχτεί ότι υπάρχει μετάπτωση.

5. Διάνυσμα Laplace-Runge-Lenz (LRL)

Θα δείξομε ότι στην κεντρική κίνηση με νόμο αλληλεπίδρασης της μορφής $f(r) = -\dfrac{k}{r^2}$, $V(r) = -\dfrac{k}{r}$, $k > 0$, υπάρχει ένα διάνυσμα με το ανωτέρω όνομα (LRL) το οποίο κατά την κίνηση του υλικού σημείου διατηρείται (ως διάνυσμα), δηλαδή σε κάθε σημείο της τροχιάς έχει την ίδια απόλυτη τιμή και ίδια κατεύθυνση.

Ορίζομε το διάνυσμα ως εξής, $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$. Το $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης $\vec{L}$ είναι η στροφορμή του σωματίου περί το ελκτικό κέντρο και $\vec{p}$ είναι η ορμή του σωματίου.

Αυτό το διάνυσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της τροχιάς σχετικά εύκολα.

Το διάνυσμα LRL χρησιμοποιήθηκε από τον Lenz για τη μελέτη του ατόμου του υδρογόνου στα πλαίσια της παλιάς κβαντικής θεωρίας. Επίσης, ο Pauli το χρησιμοποίησε για να βρει τις ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου με χρήση της σύγχρονης κβαντομηχανικής όχι με χρήση της εξίσωσης του Schroedinger, αλλά με χρήση της διατύπωσης του Heisenberg (και του Born). Αυτό έγινε μόλις λίγο πριν το κάνει ο Schroedinger με λύση της κυματικής εξίσωσής του.

Ορίζεται και το διάνυσμα της εκκεντρότητας σύμφωνα με τη σχέση, $\vec{\varepsilon} = \frac{1}{mk}(\vec{p} \times \vec{L}) - \frac{\vec{r}}{r}$.

Τότε $\vec{A} = mk\vec{\varepsilon}$. Ισχύουν $\vec{p} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$, $-\frac{k\vec{r}}{r^3} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$. Έχομε την ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Από τον ορισμό του $\vec{A}$ μετά από παραγώγιση βρίσκομε $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} - \frac{mk}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{r} = -\frac{k}{r^3}\left[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})\right] + 0 - \frac{mk}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{r}$.

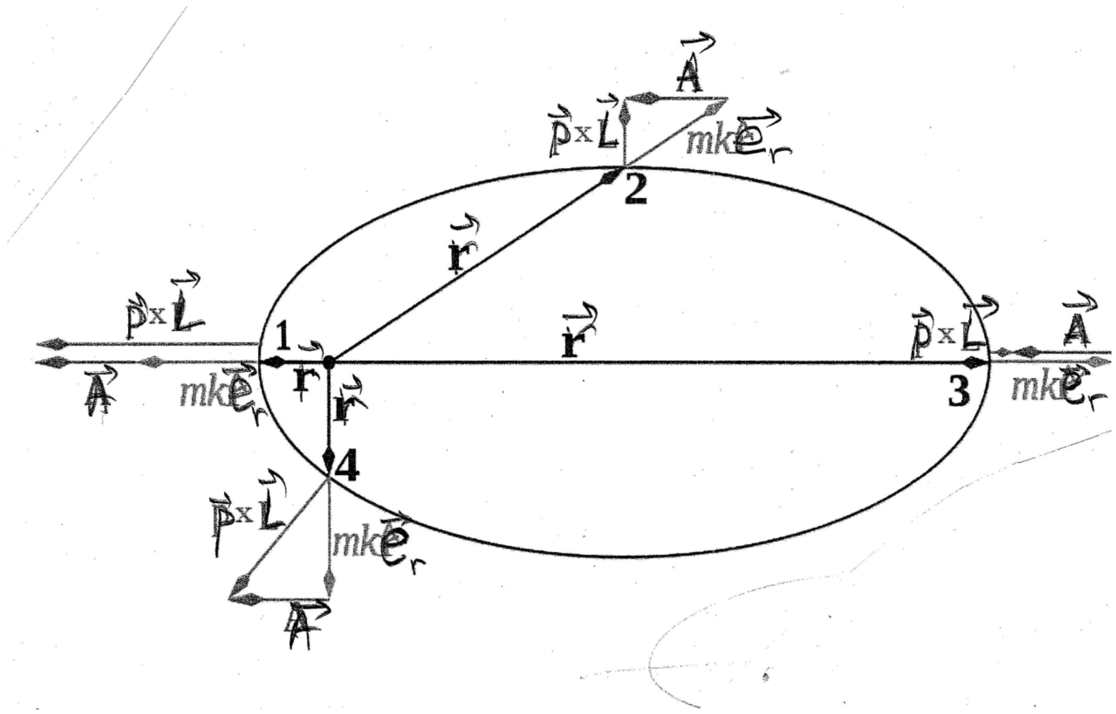
Στη συνέχεια $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{r^3}\left[(\vec{r} \cdot \vec{p}) - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{p}\right] - \frac{mk}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{r} = -\frac{km}{r^3}\left[\left(\vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{r} - r^2\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{mk}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{r}$.

$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{km}{r^3}\left(\vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{r} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{r}$. Ισχύουν $2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}^2)}{\mathrm{d}t} = 2\vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

Επομένως $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \left[-\frac{km}{r^3}r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{mk}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]\vec{r} = 0$.

Δηλαδή κατά την κίνηση $\vec{A} = \text{σταθερό}$, οπότε και $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{A}}{km} = \text{σταθερό}$.

Το διάνυσμα LRL φαίνεται στο Σχ. 2.27.



Σχήμα 2.27

Για το $\vec{\varepsilon}$ έχομε $\vec{\varepsilon}\cdot\vec{r}=\varepsilon r\cos\theta=\frac{1}{mk}\left[(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r}\right]-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}$. Με χρήση της ταυτότητας $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ βρίσκομε $(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{L})=\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{L}\cdot\vec{L}=L^2$.

Επομένως $\varepsilon r\cos\theta=\frac{L^2}{mk}-r$ ή $r(1+\varepsilon\cos\theta)=\frac{L^2}{mk}$.

Οπότε $\frac{1}{r}=\frac{mk}{L^2}(1+\varepsilon\cos\theta)$. Δηλαδή ξαναβρίσκομε τη γνωστή σχέση για την τροχιά. Η απόλυτη τιμή του διανύσματος $\vec{\varepsilon}$ είναι η συνήθης εκκεντρότητα που ορίσαμε στα προηγούμενα. Έχομε επομένως $A=mk\varepsilon$. Όταν $\theta=0$ ή $\theta=\pi$, τα διανύσματα $\vec{A},\vec{\varepsilon}$ έχουν φορέα τον μεγάλο άξονα της έλλειψης ή τον άξονα της υπερβολής ή της παραβολής που περιγράφει την τροχιά όπως φαίνεται στο Σχ. 2.26. Αφού είναι σταθερά διανύσματα θα έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και κατεύθυνση σε κάθε σημείο της τροχιάς. Έχομε $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2L^2}{mk^2}E}$, όπου E είναι η ολική μηχανική ενέργεια του σωματίου. Ισχύει $A=mk\sqrt{1+\frac{2L^2}{mk^2}E}=\sqrt{m^2k^2+2mL^2E}$.

6. Αρχή της ισοδυναμίας και εφαρμογές της

Υπάρχουν διάφορες διατυπώσεις αυτής της αρχής η οποία αρχικά στηρίζεται στην ισότητα βαρυτικής και αδρανειακής μάζας. Αποτέλεσμα αυτής της ισότητας είναι ότι όλα τα σώματα, ανεξάρτητα από τη μάζα τους, κινούνται υπό την επίδραση του ίδιου βαρυτικού πεδίου με τον ίδιο τρόπο, αν ξεκινήσουν από το ίδιο σημείο με την ίδια διανυσματική ταχύτητα. Με άλλα λόγια αποκτούν την ίδια επιτάχυνση. Αυτή είναι μια διατύπωση της αρχής αυτής.

Μια άλλη διατύπωση είναι η εξής, αν έχομε ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται με επιτάχυνση $\vec{a}$ (δεν περιστρέφεται), αυτό είναι ισοδύναμο με άλλο σύστημα αναφοράς που δεν επιταχύνεται αλλά βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης $-\vec{a}$. Αυτό είναι φανερό από όσα ξέρομε για την περιγραφή της κίνησης ως προς μη αδρανειακό σύστημα που κινείται ως προς αδρανειακό με επιτάχυνση $\vec{a}$. Η περιγραφή είναι ισοδύναμη αν εισαχθεί η έννοια της «φανταστικής» (αδρανειακής) δύναμης $-m\vec{a}$. Οι αδρανειακές δυνάμεις είναι ανάλογες της αδρανειακής μάζας και οι βαρυτικές ανάλογες της βαρυτικής μάζας, όμως οι δυο μάζες είναι ίσες άρα οι αδρανειακές και οι βαρυτικές δυνάμεις είναι ανάλογες της μάζας του σωματίου.

Μια άλλη θεώρηση είναι η εξής, ας υποθέσομε ότι είμαστε μέσα σε ένα κουτί, δεν βλέπομε έξω από το κουτί, το κουτί βρίσκεται μέσα σε ένα εξωτερικό ομογενές στατικό βαρυτικό πεδίο στο οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση, χωρίς να περιστρέφεται. Η αρχή λέει ότι δε μπορούμε να ανιχνεύσομε την ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου με διαδικασίες που γίνονται μέσα στο κουτί. Αν υποθέσομε ότι τα σώματα μέσα στο κουτί δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους τότε αυτό είναι αναμενόμενο διότι όλα τα σώματα μέσα στο κουτί «πέφτουν» με την ίδια επιτάχυνση όπως και το ίδιο το κουτί.

Μπορούμε να περιγράψομε μαθηματικά την κατάσταση όπως φαίνεται στα επόμενα. Θεωρούμε σύστημα N σωματίων που αλληλεπιδρούν, γενικώς, με εσωτερικές δυνάμεις της μορφής $\vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε εξωτερικό ομογενές πεδίο βαρύτητας με $\vec{g} = \text{σταθερό}$. Οι εξισώσεις κίνησης ως προς ένα αδρανειακό σύστημα είναι $m_i \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = m_i\vec{g} + \sum\limits_{\substack{j=1,2,\ldots,N \\ i\neq j}} \vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, $\quad i = 1,2,\ldots,N$.

Ας μετασχηματίσομε τις συντεταγμένες από το αδρανειακό στο σύστημα, δηλαδή τις $\vec{r}_i$, σε αυτό που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση (άρα είναι επιταχυνόμενο με επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{g}$), δηλαδή στις $\vec{r}_i'$. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$. Προφανώς $\vec{r}_i' - \vec{r}_j' = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, οπότε βρίσκομε $m_i \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t^2} = m_i\vec{g} - m_i\vec{g} + \sum\limits_{\substack{j=1,2,\ldots,N \\ i\neq j}} \vec{F}(\vec{r}_i' - \vec{r}_j') = \sum\limits_{\substack{j=1,2,\ldots,N \\ i\neq j}} \vec{F}(\vec{r}_i' - \vec{r}_j')$. Παρατηρούμε ότι το πεδίο βαρύτητας εξουδετερώνεται από την αδρανειακή δύναμη $-m_i\vec{g}$. Αυτό σημαίνει ότι το κουτί (το σύστημα αναφοράς) που «πέφτει» ελεύθερα μέσα σε πεδίο βαρύτητας είναι αδρανειακό σύστημα, αφού στην εξίσωση κίνησης δεν υπεισέρχεται αδρανειακή δύναμη και είναι σα να βρίσκεται σε χώρο που δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο βαρύτητας. Δηλαδή, δε γίνεται αισθητή η εξωτερική βαρύτητα.

Έστω ότι το πεδίο βαρύτητας δεν είναι ομογενές. Μια τέτοια περίπτωση είναι το ακτινικό πεδίο ενός ουράνιου σώματος όπως ο Ήλιος ή η Γη. Αν το κουτί (σύστημα αναφοράς) έχει σχετικά μεγάλες διαστάσεις και πέφτει ελεύθερα ακτινικά μέσα σε ένα τέτοιο πεδίο, είναι ευνόητο ότι ενώ όλα τα σημεία του συστήματος αναφοράς έχουν κάθε μια δεδομένη στιγμή όλα την ίδια επιτάχυνση τα διάφορα ελεύθερα υλικά σημεία που βρίσκονται μέσα στο κουτί σε διάφορες θέσεις, δεν έχουν την ίδια επιτάχυνση διότι το πεδίο δεν είναι ομογενές. Έτσι υλικά σημεία που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα που αφέθηκαν αρχικά χωρίς ταχύτητα ενώ ήταν σε διαφορετικά ύψη, όσο περνά ο χρόνος θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο. Αν βρίσκονται αρχικά στο ίδιο ύψος, σε διαφορετικά σημεία του χώρου, θα πλησιάζουν το ένα το άλλο. Αυτό σχετίζεται με τις λεγόμενες αδρανειακές παλιρροϊκές δυνάμεις. Δηλαδή για μεγάλες αποστάσεις και μεγάλους χρόνους δε γίνεται εξουδετέρωση των εξωτερικών βαρυτικών δυνάμεων από τις αδρανειακές και δεν ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας. Είναι γνωστό πόσο σημαντικό ρόλο παίζουν στη θάλασσα οι παλίρροιες, παρόλο που οφείλονται σε σχετικά μικρές ανομοιογένειες του πεδίου του Ήλιου και της Σελήνης στο χώρο που καταλαμβάνει η Γη.

Ακόμη και για ομογενές βαρυτικό πεδίο αν το (τοπικό αδρανειακό) σύστημα αναφοράς και ο χρόνος παρατήρησης δεν είναι αρκούντως μικρά δεν ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας. Αυτό γίνεται γιατί ο χώρος και ο χρόνος μέσα σε πεδίο βαρύτητας είναι καμπύλος και η καμπυλότητά του σε μεγάλες περιοχές του χωρόχρονου δε μπορεί να εξαλειφθεί, έτσι δεν ισχύουν όσα είπαμε εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα που ισχύουν για επίπεδο (ευκλείδειο) χώρο.

Η σωστή και γενική διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας είναι η παρακάτω.

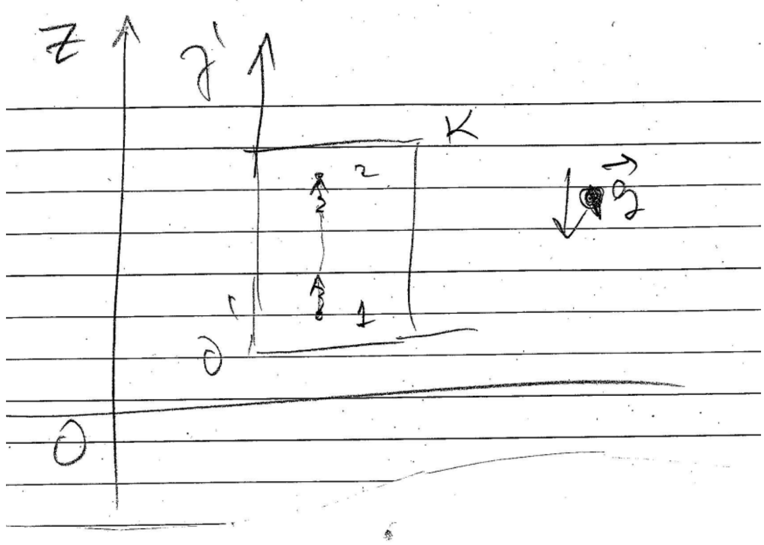
Σε κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου μέσα σε ένα αυθαίρετο βαρυτικό πεδίο, μπορεί πάντα να βρεθεί ένα «τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς» τέτοιο που, μέσα σε αρκετά μικρή περιοχή του χωρόχρονου περί το σημείο αυτό, όλοι οι νόμοι της φυσικής να έχουν την ίδια μορφή που έχουν σε ένα μη επιταχυνόμενο καρτεσιανό (ευκλείδειο) σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εκτός εξωτερικής βαρύτητας. Οι νόμοι της φυσικής νοούνται αυτοί της Ειδικής Σχετικότητας. Εφόσον το σύστημα είναι ευκλείδειο, ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα.

Υποθέτομε ότι τα σωμάτια των οποίων την κίνηση εξετάζομε μέσα στο πεδίο βαρύτητας δεν επηρεάζουν το βαρυτικό πεδίο, έχουν πολύ μικρή μάζα ή/και ορμή, είναι δοκιμαστικά υλικά σημεία.

Σημειώνομε ότι η αρχή της ισοδυναμίας είναι μια γενική αρχή η οποία ισχύει και για άλλες θεωρίες βαρύτητας που είναι διαφορετικές από τη Γενική Θεωρία της σχετικότητας.

α) Βαρυτική ερυθρή μετατόπιση

Μια εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας είναι η ερυθρή μετατόπιση. Υποθέτομε ότι τα βαρυτικά πεδία είναι αρκετά ασθενικά ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσομε σχέσεις που ισχύουν για τα δυναμικά μέσα στα πλαίσια της βαρύτητας του Νεύτωνα. Στο Σχ. 2.28 φαίνεται η εκπομπή και η απορρόφηση φωτός, ενός φωτονίου, στις θέσεις 1 και 2 αντίστοιχα. Η διαδικασία γίνεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας (απόλυτης τιμής) g. Τα σημεία 1,2 είναι ακίνητα ως προς το σύστημα $\mathrm{O}z$ το οποίο «αισθάνεται» το βαρυτικό πεδίο $-g<0$. Δεν ξέρομε τι επίδραση έχει στο φως το βαρυτικό πεδίο. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας ξέρομε τι γίνεται ως προς το σύστημα Κ το οποίο πέφτει ελεύθερα κατακόρυφα μέσα στο πεδίο βαρύτητας και επομένως είναι αδρανειακό χωρίς πεδίο βαρύτητας. Υποθέτομε ότι το φωτόνιο



Σχήμα 2.28

εκπέμπεται όταν το Κ αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα. Τότε η συχνότητά του ως προς τα δυο συστήματα $\mathrm{O}z, \mathrm{O}z'$ είναι ίδια, f_1. Το Κ επιταχύνεται με επιτάχυνση $-g$ ως προς το σύστημα $\mathrm{O}z$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία 1, 2 επιταχύνονται με επιτάχυνση g ως προς το Κ. Το μήκος μεταξύ των σημείων 1,2 είναι z_{12}, το οποίο είναι θετικό όταν μετριέται από κάτω προς τα πάνω. Το φωτόνιο θα απορροφηθεί από ανιχνευτή στο σημείο 2. Επειδή οι διαστάσεις του κουτιού Κ (και το μήκος μεταξύ των σημείων 1,2) είναι πολύ μικρές και ο χρόνος μεταξύ εκπομπής και απορρόφησης είναι πολύ μικρός, έπεται ότι η ταχύτητα του Κ (και του 2 ως προς το Κ) θα είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Έτσι μπορούμε να αγνοήσομε τη συστολή του μήκους και τη διαστολή του χρόνου, να χρησιμοποιήσομε νευτώνεια μηχανική και κατάλληλες προσεγγίσεις. Θα έχομε ότι κατά προσέγγιση $t = \frac{z_{12}}{c}$, όπου t ο χρόνος μεταξύ εκπομπής και απορρόφησης. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του σημείου 2 ως προς το σύστημα Κ είναι $\upsilon = gt$ οπότε ο ανιχνευτής κατά την απορρόφηση του φωτονίου κινείται ως προς το σύστημα Κ με ταχύτητα $\upsilon = \frac{gz_{12}}{c}$ (δηλαδή προς τα πάνω). Ένεκα του (κινητικού) φαινομένου Doppler η συχνότητα που «βλέπει» παρατηρητής που κινείται με το Κ θα είναι, στην προσέγγιση που $\upsilon << c$, $\frac{f_1 - f_2}{f_1} = -\frac{\upsilon}{c} = -\frac{gz_{12}}{c^2}$ ή $f_2 = f_1\left(1 - \frac{gz_{12}}{c^2}\right)$. Αν το φωτόνιο κινείται αντίθετα προς το $\vec{g}$, όπως στην περίπτωσή μας, τότε $f_2 < f_1$ και έχομε μετατόπιση προς το ερυθρό (ερυθρή μετατόπιση), αν κινείται κατά την κατεύθυνση του $\vec{g}$ έχομε $f_2 > f_1$, δηλαδή μετατόπιση προς το κυανό. Γενικώς μπορούμε να γράψομε για μικρές περιοχές του χωρόχρονου $f_2 = f_1\left(1 - \frac{V_2 - V_1}{c^2}\right)$, όπου V_1, V_2 τα δυναμικά του βαρυτικού πεδίου στις θέσεις 1,2 εκπομπής και απορρόφησης.

Η αρχή της ισοδυναμίας μας λέει ότι ως προς το σύστημα Οz το οποίο «αισθάνεται» το πεδίο βαρύτητας και δεν υπάρχει φαινόμενο Doppler έχομε μετατόπιση της συχνότητας όπως δείχνουν οι προηγούμενες σχέσεις, που εξαρτάται από τη διαφορά του δυναμικού της βαρύτητας.

Η ανάλυση μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση της εξάρτησης του μήκους και του χρόνου (κατά προσέγγιση) από την ταχύτητα όπως περιγράφει η Ειδική Σχετικότητα.

Θα δείξομε ότι μπορούμε να πάρομε την ίδια σχέση με τη διαδικασία που ακολουθεί. Θεωρούμε φωτόνιο ορμής ενέργειας $E = hf$ οπότε η ορμή του, κατά τα γνωστά, είναι $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$. Τα h, c, f είναι αντιστοίχως η σταθερά του Planck, η ταχύτητα του φωτός στο κενό και η συχνότητα του φωτονίου. Υποθέτομε ότι το φωτόνιο κινείται κατά μήκος δυναμικής γραμμής ομογενούς πεδίου βαρύτητας και ότι το πεδίο βαρύτητας g ασκεί στο φωτόνιο δύναμη $F = \frac{hf}{c^2}g$. Υποθέτομε ακόμη ότι η ταχύτητα c δεν αλλάζει μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ οδηγεί στη σχέση $g\frac{hf}{c^2} = \frac{h}{c}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. Σε χρόνο $\mathrm{d}t$ το φωτόνιο διανύει κατακόρυφη απόσταση $\mathrm{d}z = c\mathrm{d}t$, επομένως $g\frac{f}{c^2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$, $\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{g}{c^2}\mathrm{d}z$, ολοκληρώνομε και θέτοντας ότι για $z = z_1$, $f = f_1$, βρίσκομε $\ln\frac{f}{f_1} = \frac{g}{c^2}(z - z_1)$ ή $\ln\left(1 + \frac{f - f_1}{f_1}\right) = \frac{g}{c^2}(z - z_1)$. Για $z = z_2$ έχομε $f = f_2$. Επειδή η διαδικασία ισχύει για μικρά χωρικά και χρονικά διαστήματα το $f_2 \approx f_1$ οπότε $\ln\left(1 + \frac{f_2 - f_1}{f_1}\right) = \ln(1 + x) \approx x$, για $x = \frac{f_2 - f_1}{f_1} << 1$. Έτσι βρίσκομε σχέση που ουσιαστικά είναι ίδια με τη σχέση που βρήκαμε προηγουμένως, $\frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{g(z_2 - z_1)}{c^2}$.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη χρήση της κβαντικής ιδέας του φωτονίου και της ισότητας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Συγκεκριμένα, έστω ότι μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$ υπάρχει ένα σώμα μεγάλης μάζας (ηρεμίας) m_1 το οποίο είναι ακίνητο σε κάποια θέση 1 (βλέπε Σχ. 2.28 , σύστημα αναφοράς Οz). Το σώμα εκπέμπει φωτόνιο συχνότητας f_1. Το φωτόνιο στη συνέχεια απορροφάται από άλλο σώμα μεγάλης μάζας m_2 που βρίσκεται ακίνητο στη θέση 2. Τα σώματα δεν ανακρούουν γιατί έχουν πολύ μεγάλες μάζες και επομένως πολύ μεγάλες ενέργειες ηρεμίας σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου. Η (αδρανειακή και βαρυτική) μάζα του σώματος 1 θα γίνει $m_1 - \frac{hf_1}{c^2}$ και η μάζα του 2 θα γίνει $m_2 + \frac{hf_2}{c^2}$. Η ολική μηχανική ενέργεια πριν και μετά την εκπομπή και απορρόφηση διατηρείται, άρα

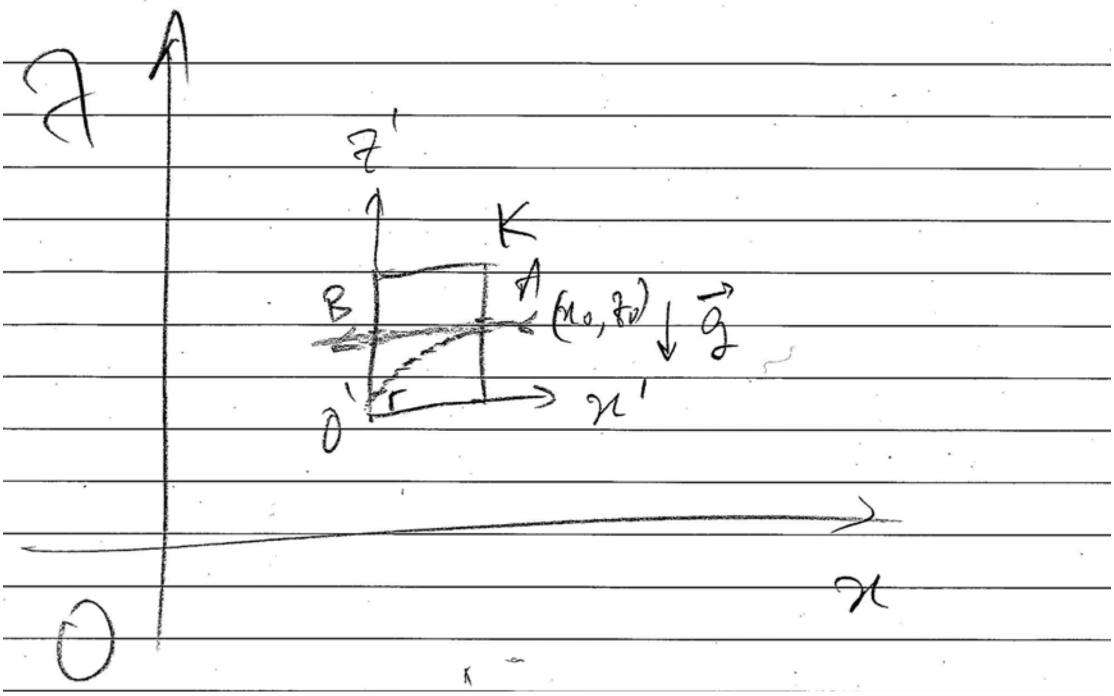
$$m_1 c^2 + m_1 g z_1 + m_2 c^2 + m_2 g z_2 = \left(m_1 - \frac{hf_1}{c^2}\right)c^2 + \left(m_1 - \frac{hf_1}{c^2}\right)g z_1 + \left(m_2 + \frac{hf_2}{c^2}\right)c^2 + \left(m_2 + \frac{hf_2}{c^2}\right)g z_2 .$$

Από αυτήν βρίσκομε $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1 + \frac{g z_1}{c^2}}{1 + \frac{g z_2}{c^2}} \approx 1 - \frac{g(z_2 - z_1)}{c^2}$ και τελικώς βρίσκομε ξανά την προηγούμενη σχέση $f_2 = f_1\left(1 - \frac{V_2 - V_1}{c}\right)$.

β) Εκτροπή του φωτός ένεκα πεδίου βαρύτητας

Όταν κάνομε υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την αρχή της ισοδυναμίας χρειάζεται προσοχή γιατί αναφέρεται σε μικρές περιοχές του χωρόχρονου, για τοπικά συστήματα αναφοράς που πέφτουν ελεύθερα μέσα στο πεδίο βαρύτητας και ισχύουν οι νόμοι της φυσικής όπως ισχύουν στην Ειδική Σχετικότητα. Όταν όμως έχομε χωρόχρονους μεγάλης έκτασης τότε δημιουργείται πρόβλημα διότι πρέπει να χωρίσει κάποιος το χωρόχρονο σε μικρές περιοχές («πλάκες») και μετά να «συνδέσει» τα αποτελέσματα των πλακών για να βρει το αποτέλεσμα για το φαινόμενο μεγάλης έκτασης. Αυτό δεν είναι εύκολο γιατί ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος από τη βαρύτητα. Όταν αυτό δεν ληφθεί υπόψη και ο χώρος θεωρηθεί ευκλείδειος, η προσέγγιση μπορεί να μην είναι αρκετά καλή και τα αποτελέσματα να μη συμφωνούν με αυτά της Γενικής Σχετικότητας. Αυτό δε σημαίνει πως η αρχή της ισοδυναμίας στη γενική μορφή της δεν είναι σωστή, απλώς σημαίνει ότι πολλές φορές είναι δύσκολη η εφαρμογή της και επίσης δε μπορεί να δώσει λύση σε προβλήματα που χρειάζεται καλύτερη προσέγγιση του δυναμικού πέραν του δυναμικού της νευτώνειας Μηχανικής. Τότε χρειάζεται η Γενική Σχετικότητα έστω με κατάλληλη προσέγγιση.

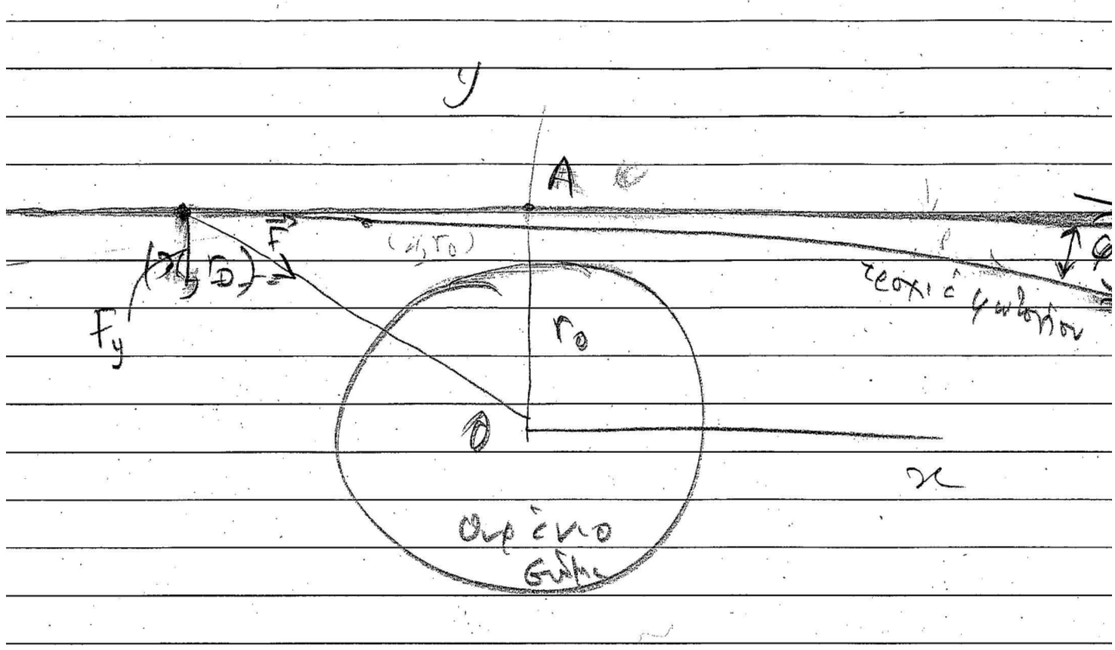
Το ότι το φως εκτρέπεται ένεκα πεδίου βαρύτητας φαίνεται με απλή εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας για μικρή περιοχή στο χωρόχρονο. Θεωρούμε το Σχ. 2.29.



Σχήμα 2.29

Έχομε το ομογενές πεδίο βαρύτητας μέσα στο οποίο «πέφτει» ελεύθερα κατακόρυφα το σύστημα K ($O'x'z'$) που είναι συνδεδεμένο με ένα κλειστό κουτί. Τη στιγμή $t = 0$ το κουτί έχει ταχύτητα μηδέν και φως (ένα φωτόνιο) εισέρχεται στο κουτί από την τρύπα στο A με αρχική κίνηση οριζόντια, θέση (x_0, z_0) . Το κουτί είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο δεν αισθάνεται τη βαρύτητα, άρα η διάδοση του φωτός ως προς το $O'x'z'$ είναι ευθύγραμμη με ταχύτητα c, ευθεία AB. Είναι εύλογο ότι η ευθύγραμμη τροχιά μετασχηματίζεται σε καμπύλη διακεκομμένη τροχιά ως προς το σύστημα $O'xz$ το οποίο «αισθάνεται» τη βαρύτητα. Δηλαδή το φως καμπυλώνεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας.

Η καμπύλωση που γίνεται σε μικρή περιοχή του χώρου είναι πολύ μικρή και δε μπορεί να μετρηθεί. Μπορεί όμως να μετρηθεί εκτροπή του φωτός σε μεγάλης κλίμακας φαινόμενα όπως είναι η εκτροπή από τον Ήλιο. Θα κάνομε μια πολύ απλοϊκή εκτίμηση της καμπύλωσης (εκτροπής) του φωτός που διέρχεται από το πεδίο βαρύτητας ουράνιου σώματος. Έστω το Σχ. 2.30. Το φωτόνιο (η ακτίνα φωτός)



Σχήμα 2.30

ακολουθεί τροχιά που λίγο διαφέρει από την ευθεία γραμμή. Για αυτό το λόγο μπορούμε να θεωρήσομε κάθε σημείο της τροχιάς έχει συντεταγμένη $y = r_0$=σταθερή. Επίσης το r_0 είναι περίπου η ελάχιστη απόσταση της τροχιάς από το κέντρο του ουράνιου σώματος. Θα δεχτούμε ότι ισχύει (και για τα διανυσματικά μεγέθη) αυτό που υποθέσαμε στον υπολογισμό της ερυθρής μετατόπισης, δηλαδή θα δεχτούμε ότι η δύναμη που ασκεί το πεδίο $\vec{g}$ δίνεται από τη σχέση $\vec{F} = -\vec{g}\dfrac{E}{c^2} = -\vec{g}\dfrac{hf}{c^2}$.

Έτσι η συνιστώσα F_y της δύναμης (περίπου κάθετη στην τροχιά) στη θέση του φωτονίου (x, r_0) είναι περίπου, σύμφωνα με τα προηγούμενα $F_y \approx -g\dfrac{hf}{c^2}\dfrac{r_0}{\left(r_0^2+x^2\right)^{1/2}} = -\dfrac{GM}{r_0^2+x^2}\dfrac{r_0}{\left(r_0^2+x^2\right)^{1/2}}\dfrac{hf}{c^2} = -GM\dfrac{r_0}{\left(r_0^2+x^2\right)^{3/2}}\dfrac{hf}{c^2}$.

Όπου M η μάζα του ουράνιου σώματος.

Εφαρμόζομε το θεώρημα μεταβολής της ορμής $(p_y - 0)$ του φωτονίου κατά μήκος του άξονα y, η οποία ισούται με την ώθηση της δύναμης και έχομε $p_y - 0 \approx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_y \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_y \dfrac{\mathrm{d}x}{c_x} \approx \dfrac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_y \mathrm{d}x$, άρα $p_y \approx -\dfrac{GMr_0}{c}\dfrac{hf}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(r_0^2+x^2\right)^{3/2}}$ ή

$$p_y \approx -\frac{2GMr_0}{c}\frac{hf}{c^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(r_0^2+x^2\right)^{3/2}} = -\frac{2GM}{cr_0}\frac{hf}{c^2} = -\frac{2GM}{cr_0}p\,,\quad p=\frac{hf}{c^2}$$ η ορμή του φωτονίου.

Έτσι η εκτροπή φ θα δίνεται από τη σχέση $\tan\varphi \approx \varphi \approx \frac{|p_y|}{p} \approx \frac{2GM}{r_0c^2}$.

Για την περίπτωση που η ακτίνα περνά κοντά στην επιφάνεια του Ήλιου βρίσκομε ότι η εκτροπή είναι $\varphi \approx 0{,}87$ δεύτερα λεπτά της μοίρας δηλαδή 0,87/3600 της μοίρας. Η τιμή που έχει μετρηθεί είναι διπλάσια δηλαδή 1,75 δεύτερα λεπτά της μοίρας, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Μπορεί να βρεθεί αυτό το σωστότερο αποτέλεσμα με πιο προσεκτική εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας και χρήση του νευτώνειου βαρυτικού δυναμικού καθώς και της Ειδικής Σχετικότητας.

Όταν ακολουθήσαμε την ανωτέρω απλοποιημένη διαδικασία ουσιαστικά λάβαμε υπόψη μόνο τη μεταβολή του ρυθμού των ρολογιών μέσα στο πεδίο βαρύτητας αλλά όχι τη μεταβολή του μήκους, οι δυο αιτίες οδηγούν σε ίσες εκτροπές γι αυτό βρήκαμε μισή από την πραγματική εκτροπή.

Με την λύση του προβλήματος προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας τη Γενική Σχετικότητα παίρνομε το σωστό αποτέλεσμα, διότι η προσέγγιση είναι τέτοια που λαβαίνει υπόψη και την καμπύλωση του χρόνου και του χώρου. Εμείς είναι σα να λάβαμε υπόψη μόνο την καμπύλωση του χρόνου.

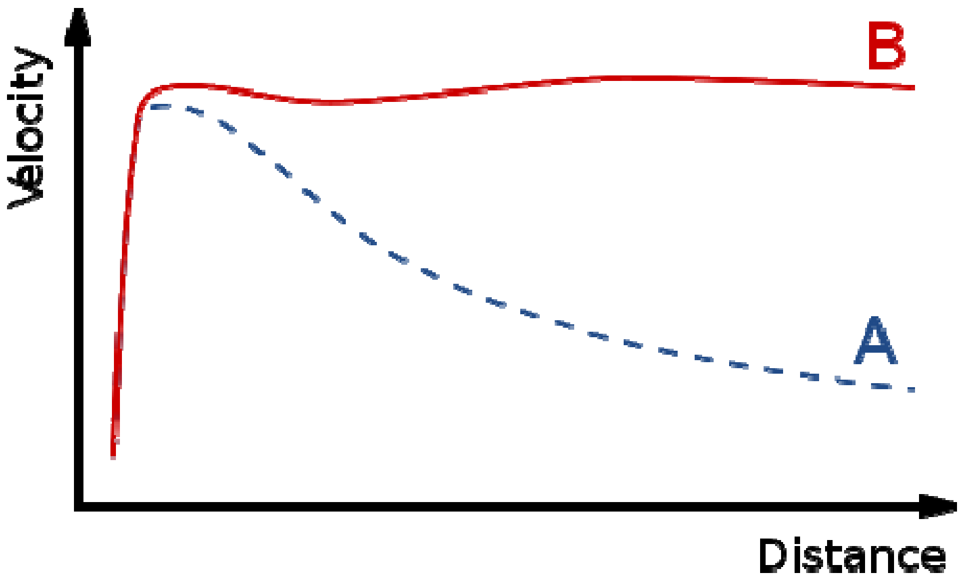
7) Σκοτεινή ύλη

Υπάρχουν ενδείξεις ότι ένα μεγάλο ποσοστό της υλοενέργειας του σύμπαντος (περίπου 23 %) αποτελείται από άγνωστη μορφή ύλης η οποία αλληλεπιδρά βαρυτικά με το γνωστό τρόπο αλλά αλληλεπιδρά με άλλες αλληλεπιδράσεις πάρα πολύ ασθενικά ή καθόλου και γι αυτό δε μπορεί να ανιχνευτεί εύκολα τουλάχιστο μέχρι τώρα. Για αυτό λέγεται και σκοτεινή ύλη αφού δε «φαίνεται». Μια από τις ενδείξεις για την ύπαρξη τέτοιας ύλης είναι η ταχύτητα άστρων ενός γαλαξία συναρτήσει της απόστασής τους από το κέντρο του γαλαξία.

Φανταστείτε το εξής απλοποιημένο μοντέλο γαλαξία, ο γαλαξίας είναι σφαιρικός, όλη η συνήθης (ορατή) ύλη του κατανέμεται με ομοιόμορφη πυκνότητα, ρ_Σ, για αποστάσεις από το κέντρο του γαλαξία r, τέτοια που να ισχύει, $0 \le r \le R_\Gamma$ και $\rho_\Sigma = 0,\quad R_\Gamma < r$.

Έστω ότι η σκοτεινή ύλη είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα παντού, $\rho_{\Sigma Y},\quad 0 \le r < \infty$. Θεωρείστε ότι $\rho_\Sigma = 20\rho_{\Sigma Y}$.

Έχει παρατηρηθεί ότι η ταχύτητα περιφοράς αστέρα που κινείται σε κυκλική τροχιά περί το κέντρο ενός γαλαξία, συναρτήσει της απόστασής του από αυτό είναι όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση με συνεχή γραμμή στο Σχ. 2.31. Η καμπύλη με διακεκομμένη γραμμή είναι αυτή που θα ίσχυε αν δεν υπήρχε η σκοτεινή ύλη.



Σχήμα 2.31

Θα προσπαθήσομε να δικαιολογήσομε ποιοτικά την ύπαρξη σκοτεινής ύλης.

Υποτίθεται ότι κατά την κίνηση του αστέρα μέσα στο γαλαξία υπάρχουν μόνο οι βαρυτικές δυνάμεις, δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις που να τον επιβραδύνουν.

Λύση

α) Υπολογίζομε τη σχέση της ταχύτητας στο τετράγωνο ενός αστέρα (μάζας m) συναρτήσει της απόστασής του από το κέντρο του γαλαξία, αν δεν υπάρχει σκοτεινή ύλη. Έχομε για κυκλική τροχιά

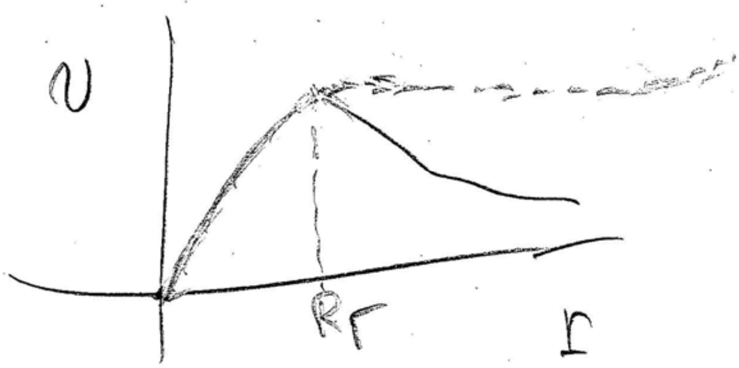
$m\frac{\upsilon^2}{r} = F$, για $r \le R_\Gamma$ ισχύει $F = G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\Sigma m / r^2$,

άρα $\upsilon^2 = G\frac{4}{3}\pi\rho_\Sigma r^2$, $r \le R_\Gamma$.

Για $r > R_\Gamma$, $F = G\frac{4}{3}\pi R_\Gamma{}^3 \rho_\Sigma m / r^2$

άρα $\upsilon^2 = G\frac{4}{3}\pi\rho_\Sigma R_\Gamma^3 \frac{1}{r}$, $r > R_\Gamma$.

Η γραφική παράσταση του υ ως προς r φαίνεται, ποιοτικά, στο Σχ. 2.32 (συνεχής καμπύλη). Αυτή μοιάζει κάπως με τη διακεκομμένη καμπύλη του Σχ. 2.31 αλλά διαφέρει κατά πολύ από την πειραματική καμπύλη του ίδιου σχήματος.



Σχήμα 2.32.

β) Θα υπολογίσομε την ίδια σχέση για την περίπτωση της σκοτεινής ύλης. Είναι ευνόητο ότι αν είχαμε μόνο σκοτεινή ύλη παντού θα καταλήγαμε στη σχέση $\upsilon^2 = G\frac{4}{3}\pi\rho_{\Sigma\Upsilon}r^2,\ 0 \le r < \infty$.

Εύκολα προκύπτει ότι όταν συνυπάρχουν η συνήθης και η σκοτεινή ύλη η σχέση θα είναι $\upsilon^2 = G\frac{4}{3}\pi\rho_{\Sigma\Upsilon}r^2 + G\frac{4}{3}\pi\rho_{\Sigma}r^2,\ r \le R_\Gamma$

και $\upsilon^2 = G\frac{4}{3}\pi\rho_{\Sigma\Upsilon}r^2 + G\frac{4}{3}\pi R_\Gamma{}^3\rho_{\Sigma}m / r^2,\ r > R_\Gamma$.

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας (διακεκομμένη καμπύλη στο Σχ. 2.32) μοιάζει με την πειραματική καμπύλη, για όχι πάρα πολύ μεγάλες τιμές του r.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρείστε δορυφόρο ο οποίος «χάνει» συνεχώς ύψος ένεκα ελαφριάς τριβής. Υποθέστε ότι η τροχιά ενώ είναι κάποια ελικοειδής καμπύλη, είναι σε κάθε σημείο περίπου κύκλος με ακτίνα την απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο του ουράνιου σώματος περί το οποίο περιφέρεται. Δείξτε ότι αν η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη του υ^4 τότε ο ρυθμός ελάττωσης της περιόδου του είναι σταθερός με το χρόνο. Αν η τριβή είναι ανάλογη του υ^3 τότε ο ρυθμός ελάττωσης του ύψους του είναι σταθερός με το χρόνο.

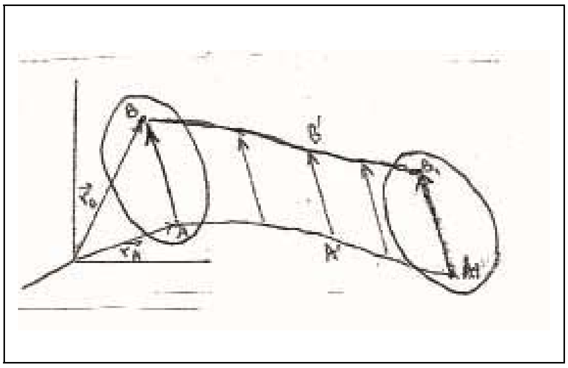
Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η τριβή είναι γενικώς ανάλογη του υ^a.

3. ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Ως στερεό ορίζουμε ένα σώμα, σύστημα υλικών σημείων, που οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του είναι σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησής του. Ένα συνεχές στερεό αποτελείται από υλικά σημεία που έχουν άλλα απείρως κοντά. Μερικές φορές λέμε στερεό και εννοούμε συνεχές στερεό. Πολλές φορές θεωρούμε ως στερεό, σύστημα σημείων που δεν είναι υλικά σημεία, όπως για παράδειγμα, ένα κινούμενο σύστημα τρισορθογώνιων αξόνων με όλα τα σημεία του. Πολλές φορές σε ένα υλικό στερεό προσαρτούμε και μη υλικά σημεία και φανταζόμαστε έτσι ένα στερεό με επέκταση.

3.1 Μεταφορική κίνηση

Στη μεταφορική κίνηση στερεού κάθε ευθεία μεταξύ δύο σημείων του παραμένει συνεχώς παράλληλη προς τον εαυτό της κατά την κίνηση του στερεού.



Σχήμα 3.1

Είναι εύκολο να συμπεράνουμε το παρακάτω θεώρημα. Στη μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία του σώματος κινούνται κατά μήκος ομοίων τροχιών (που θα συμπέσουν αν τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη) και έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια διανυσματική ταχύτητα και διανυσματική επιτάχυνση. Από το Σχ. 3.1 έχουμε

$$\vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{r}_{\mathrm{A}} + \overrightarrow{AB} \qquad (3.1)$$

επομένως

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}. \quad (3.2)$$

Το $\overrightarrow{AB}$ είναι σταθερό ανεξάρτητο του χρόνου, άρα

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = 0$$

οπότε,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}.$$

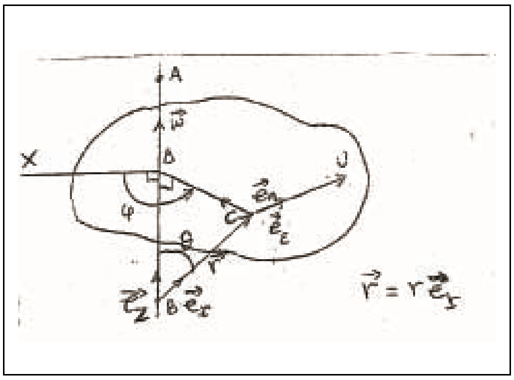
Ανάλογα ισχύουν για τις δεύτερες παραγώγους οπότε,

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_{\mathrm{A}},\ \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_{\mathrm{B}},\ \vec{a}_{\mathrm{A}}=\vec{a}_{\mathrm{B}}. \qquad (3.3)$$

Είναι ευνόητο ότι μπορούμε να χαράξουμε ευθείες που ενώνουν οποιαδήποτε δύο σημεία, οπότε τελικά θα βρούμε ότι όλα έχουν ίδια $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$. Γιαυτό, στη μεταφορική κίνηση στερεού έχει νόημα να μιλάμε για την ταχύτητα και επιτάχυνση της κίνησης γιατί αυτή είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση οποιουδήποτε σημείου του σώματος.

3.2 Περιστροφική κίνηση στερεού

΄Ενα στερεό εκτελεί περιστροφική κίνηση αν υπάρχουν δύο σημεία του σώματος ή της επέκτασής του που παραμένουν ακίνητα κατά τη διάρκεια της κίνησης.



Σχήμα 3.2

Με τον όρο σώμα, εδώ μπορεί να εννοούμε και την επέκταση του σώματος. Είναι προφανές, αφού δύο σημεία ορίζουν μόνο μια ευθεία και όλα τα σημεία της είναι μέρος στερεού, ότι όλα τα σημεία της ευθείας που ορίζεται από τα δύο αυτά ακίνητα σημεία θα παραμένουν ακίνητα. Η ευθεία αυτή λέγεται άξονας περιστροφής. ΄Ολα τα σημεία κινούνται σε περιφέρειες κύκλων κάθετων στον άξονα περιστροφής με κέντρο το σημείο τομής τους με τον άξονα αυτό. Στο Σχ. 3.2 η γωνία φ καθορίζει πλήρως τη θέση του σώματος. Η γωνιακή ταχύτητα είναι το διάνυσμα που έχει μέτρο

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Η διεύθυνσή του είναι η διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά σχετίζεται με την κίνηση του σώματος με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Το επίπεδο XDC είναι κάθετο στο σταθερό άξονα AB. Δx είναι μια σταθερή ευθεία στο επίπεδο αυτό. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}. \quad (3.4)$$

Αφού ο άξονας AB είναι σταθερός είναι προφανές ότι το $\vec{\alpha}$ θα είναι κατά τη διεύθυνση του $\vec{\omega}$ και του AB.

3.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση σημείου στερεού που περιστρέφεται περί σταθερό άξονα

Έστω ότι το σημείο B είναι η αρχή μέτρησης των διανυσμάτων θέσης. Το $\vec{r}$ καθορίζει τη θέση του σημείου C στο Σχ. 3.2 και το μέτρο του $|\vec{r}|$ παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της κίνησης. Από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (3.5)$$

έχουμε,

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.6)$$

Ισχύουν

$$\upsilon = (\mathrm{DC})\omega, \quad \vec{\upsilon} = (\mathrm{DC})\omega\vec{e}_{\varepsilon}.$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.7)$$

Επομένως

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r(\vec{e}_z \times \vec{e}_r) + \omega^2 r \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \ (3.8)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r \sin\theta \vec{e}_\varepsilon + \omega^2 r \sin\theta \vec{e}_z \times \vec{e}_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} (\mathrm{DC}) \vec{e}_\varepsilon + \omega^2 (\mathrm{DC}) \vec{e}_\mathrm{n} .(3.9)$$

Είναι προφανές ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{e}_z \times \vec{e}_\varepsilon$ είναι διάνυσμα με μέτρο sin θ και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο ACB με φορά που φαίνεται στο προηγούμενο

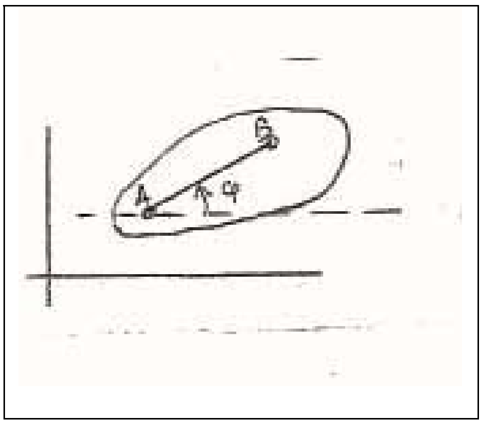
Σχήμ. 1.20, αφού ισχύει $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\varepsilon$. Τα $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\varepsilon$ είναι κάθετα μεταξύ τους και ισχύει $\vec{e}_n = \vec{e}_z \times \vec{e}_\varepsilon$, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2. Από τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \vec{e}_\varepsilon + \frac{\upsilon^2}{(\mathrm{DC})} \vec{e}_n , \ (3.10)$$

Όπου ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση και ο δεύτερος η κεντρομόλος επιτάχυνση για την κυκλική κίνηση.

3.4 Επίπεδη κίνηση στερεού

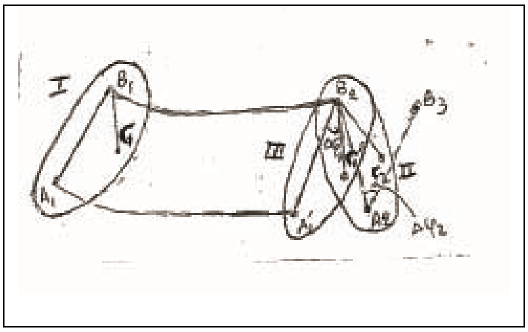
Επίπεδη κίνηση στερεού είναι εκείνη η κίνηση κατά την οποία όλα τα σημεία του στερεού κινούνται παράλληλα προς ένα σταθερό επίπεδο. Είναι προφανές ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στο εν λόγω επίπεδο κινούνται με τον ίδιο τρόπο το καθένα στο δικό του επίπεδο που είναι παράλληλο με τα επίπεδα των άλλων σημείων αυτής της ευθείας. Για την περιγραφή της κίνησης είναι αρκετή η περιγραφή της κίνησης σημείων που βρίσκονται σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο παράλληλο με το σταθερό επίπεδο. Μπορούμε να μιλούμε για την κίνηση των προβολών των σημείων του στερεού στο σταθερό επίπεδο ή σε οποιοδήποτε επίπεδο παράλληλο προς αυτό.



Σχήμα 3.3

Είναι ευνόητο ότι για τον προσδιορισμό της θέσης του σώματος αρκεί να δίνεται

η θέση ενός σημείου του, για παράδειγμα του Α στο Σχ. 3.3 και η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία, σταθερή ως προς το στερεό, με έναν σταθερό άξονα στο σύστημα αναφοράς. Είναι βολικό η σταθερή ως προς το στερεό ευθεία και η σταθερή ευθεία ως προς το σύστημα αναφοράς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που το οποίο είναι παράλληλο προς το σταθερό επίπεδο ως προς το οποίο γίνεται η κίνηση.



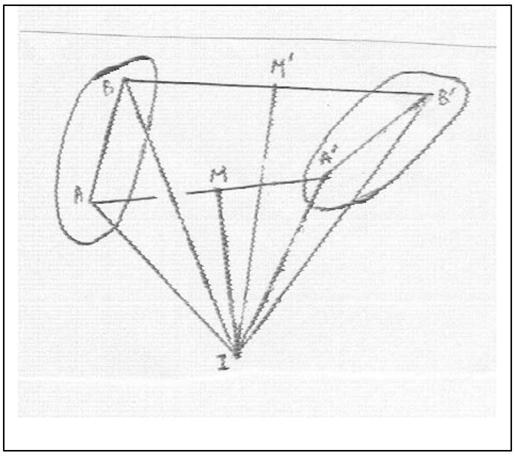
Σχήμα 3.4

Ας θεωρήσουμε δύο τυχαίες θέσεις του στερεού που εκτελεί επίπεδη κίνηση. Τη θέση Ι και τη θέση ΙΙ στο Σχ. 3.4. Μπορούμε να φανταστούμε ότι η κίνηση γίνεται ως εξής, πρώτα μετακινούμε μεταφορικά (στο επίπεδο) το σώμα στη θέση ΙΙΙ. Κάνουμε τη μετακίνηση έτσι που το σημείο B_1 να πάει στη θέση B_2 που είναι και η θέση του σημείου αυτού όταν το στερεό είναι στη θέση ΙΙ. Στη συνέχεια στρέφουμε το σώμα περί το B_2 έτσι ώστε η ευθεία η σταθερή ως προς το σώμα που είναι αρχικά η B_1A_1 και κατόπιν B_2A_1' να συμπέσει με την B_2A_2, οπότε το σώμα είναι στην τελική του θέση ΙΙ. Η στροφή αυτή γίνεται όπως φαίνεται στο Σχ. 2.4 κατά γωνία $\Delta\varphi_1$, η οποία είναι αντίθετη προς τους δείκτες του ρολογιού, άρα δεξιόστροφη. Είναι εύκολο να δει κανείς αν διαλέξει άλλη ευθεία, π.χ. την B_1C_1, ότι η μεταφορά και η περιστροφή θα είναι πάλι οι ίδιες.

Στη συνέχεια αν διαλέξει αντί του B_1 το σημείο A_1 να πάει στην τελική του θέση A_2 κατά τη μεταφορά τότε η ευθεία A_1B_1 θα πάει στη θέση A_2B_3 και θα χρειάζεται περιστροφή κατά γωνία $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$ δεξιόστροφη για να πάει το σώμα στην τελική του θέση ΙΙ. Το συμπέρασμα που συνάγουμε είναι ότι η επίπεδη μετατόπιση στερεού από μια θέση σε άλλη τυχαία θέση μπορεί να γίνει με διαδοχική μεταφορά του στερεού και περιστροφή περί σημείο που λέγεται πόλος της περιστροφής. Φυσικά πρόκειται για περιστροφή περί άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο κίνησης που συναντά το επίπεδο στον πόλο. Είναι ευνόητο ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά μεταφορά-περιστροφή, δηλαδή μπορούμε πρώτα να περιστρέψουμε και μετά να μεταφέρουμε το σώμα.

Φάνηκε ακόμα ότι ενώ η μεταφορά εξαρτάται από τον πόλο, η περιστροφή είναι ανεξάρτητη από τον πόλο που διαλέγουμε. Μπορεί φυσικά ο πόλος να μην είναι υλικό σημείο του σώματος αλλά να είναι σημείο της (στερεάς) επέκτασής του. Αν έχουμε τυχαία στοιχειώδη μετατόπιση αυτή θα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία μιας στοιχειώδους μεταφοράς και μιας στοιχειώδους περιστροφής. Τότε είναι εύκολο να ορίσουμε στιγμιαία ταχύτητα μεταφοράς και στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση της μεταφοράς θα εξαρτάται από τον πόλο που διαλέγουμε και θα είναι η ταχύτητα και επιτάχυνση του πόλου, ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και η επιτάχυνση της περιστροφικής κίνησης θα είναι ανεξάρτητη του πόλου. Αν είχαμε ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση μεταφορικής κίνησης για κάθε πόλο τότε η κίνηση του στερεού θα ήταν μεταφορική χωρίς περιστροφή. Ας πάρουμε μια ευθεία του σώματος και θεωρήσουμε την τυχαία μετατόπιση που φαίνεται στο Σχ. 2.5. Φέρουμε τις MI και $M'I$ μεσοκάθετες στα AA' και BB'. Τα τρίγωνα AIB, $A'IB'$ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

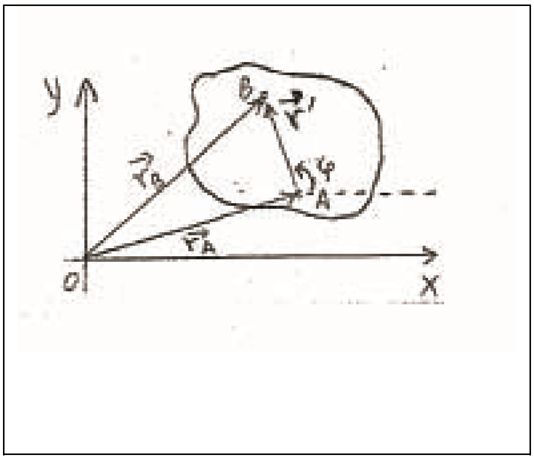


Σχήμα 3.5

Οι γωνίες τους με κορυφή το Ι είναι επομένως ίσες άρα και οι γωνίες AIA' και BIB' είναι ίσες, $\theta = AIA' = BIB'$. Αν το τρίγωνο AIB στραφεί κατά $\theta = AIA'$ η AB θα λάβει τη θέση A'B' και τα τρίγωνα AIB και A'IB' ως ίσα θα συμπέσουν. Επομένως η μετατόπιση επιπέδου σχήματος στο επίπεδο μπορεί να γίνει δια μιας περιστροφής του σχήματος περί ένα σημείο του επιπέδου του, που είναι το κέντρο της περιστροφής (η μεταφορά είναι μηδέν σε αυτή την περίπτωση).

Αν το κέντρο περιστροφής είναι το άπειρο έχουμε ουσιαστικά μόνο μεταφορά. Μια συνεχής μετατόπιση στερεού σε επίπεδη κίνηση μπορεί να γίνει με διαδοχικές στοιχειώδεις μεταφορές και περιστροφές περί κάποιο σημείο του στερεού που παίρνουμε ως πόλο για την εν λόγω μετατόπιση. Ακόμη, η συνεχής μετατόπιση μπορεί να θεωρηθεί ως διαδοχικές στοιχειώδεις περιστροφές περί κέντρα περιστροφής που απέχουν μεταξύ τους κατά διαδοχικές στοιχειώδεις αποστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση τα κέντρα της περιστροφής (άξονες περιστροφής) είναι στιγμιαία και δεν είναι ένα και το αυτό σημείο του στερεού αλλά συμπίπτουν εν γένει με διάφορα σημεία του στερεού κατά τη διάρκεια της κίνησης.

3.5 Καθορισμός της ταχύτητας σημείου ενός σώματος που εκτελεί επίπεδη κίνηση



Σχήμα 3.6

Ας θεωρήσουμε το σημείο Β με $\vec{r} = \vec{r}_{\mathrm{B}}$ και το σημείο Α ως πόλο της κίνησης, ακόμη $\vec{r}' = \overrightarrow{AB}$. Έχουμε,

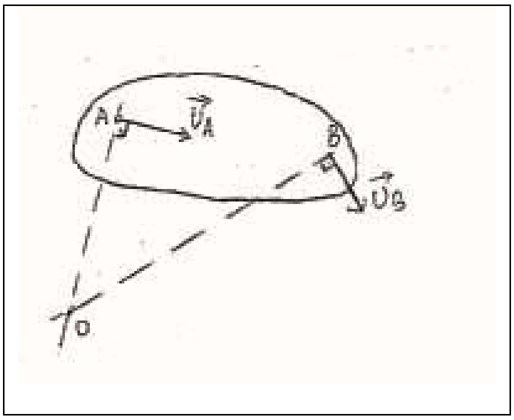
$$\vec{r}' = \vec{r}_{\mathrm{A}} + \vec{r}', \quad \vec{\upsilon}_{\mathrm{B}} = \vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}. \quad (3.11)$$

Προφανώς $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{A} + \vec{V}_{BA}$ όπου $\vec{\upsilon}_{A}$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του πόλου A , $\vec{\upsilon}_{BA}$ είναι η ταχύτητα του B που οφείλεται στην περιστροφή περί τον πόλο Α, άρα $\vec{\upsilon}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$. Η τελευταία σχέση ισχύει και αν ακόμη τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι στο ίδιο επίπεδο. Το $\vec{\omega}$ είναι κατά τον άξονα z που δεν φαίνεται στο Σχ. 2.6 και ισχύει, $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. Δηλαδή, η (διανυσματική) ταχύτητα ενός σημείου στην επίπεδη κίνηση στερεού είναι ίση με την (διανυσματική) ταχύτητα ενός σημείου του στερεού που θεωρούμε ως πόλο κατά την κίνηση συν την (διανυσματική) ταχύτητα του σημείου που οφείλεται μόνο στην περιστροφική κίνηση του στερεού περί τον πόλο.

Εύκολα δείχνεται ότι οι προβολές των ταχυτήτων δύο σημείων ενός στερεού στην ευθεία που τα ενώνει είναι ίσες.

3.6 Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής στο επίπεδο στερεού ή σημείο μηδενικής ταχύτητας

Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής είναι ένα σημείο του στερεού ή της επέκτασής του που έχει στιγμιαία ταχύτητα μηδέν. Η ύπαρξη τέτοιου σημείου καθεκάστη στιγμή συμπεραίνεται από τα προηγούμενα. Ας θεωρήσουμε το Σχ. 3.7 όπου έχουμε δύο σημεία Α και Β με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{A}$ και $\vec{\upsilon}_{B}$ αντιστοίχως. Στην ειδική περίπτωση παραλλήλων ταχυτήτων και που οι ταχύτητες είναι κάθετες στην ευθεία ΑΒ χρειάζεται άλλη μεθοδολογία. Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής είναι το Ο το οποίο έχει ταχύτητα μηδέν.



Σχήμα 3.7

Αυτό ισχύει γιατί αν το Ο έχει ταχύτητα μη μηδενική $\vec{\upsilon}_{\text{o}}$, τότε πρέπει η προβολή της στον άξονα ΟΑ να είναι μηδέν αφού η προβολή της $\vec{\upsilon}_{\text{A}}$ είναι μηδέν, άρα η $\vec{\upsilon}_{\text{o}}$ είναι κάθετη στον ΟΑ. Για τον ίδιο λόγο η προβολή της $\vec{\upsilon}_{\text{o}}$ στην ΟΒ πρέπει να είναι μηδέν αφού η προβολή της $\vec{\upsilon}_{\text{B}}$ είναι μηδέν. Είναι τότε ευνόητο ότι πρέπει $\vec{\upsilon}_{\text{o}} = 0$. Το Ο όπως και κάθε άλλο σημείο μπορεί να ληφθεί ως πόλος κατά μια στοιχειώδη μετατόπιση, και αφού έχει στιγμιαία ταχύτητα μηδέν είναι στιγμιαίο κέντρο περιστροφής. Προφανώς ισχύουν $\upsilon_{\text{A}} = \omega(\text{OA}),\ \upsilon_{\text{B}} = \omega(\text{OB})$. Για τον προσδιορισμό του Ο χρειαζόμαστε μόνο τις διευθύνσεις ταχυτήτων δύο σημείων όταν δεν ισχύει η ειδική περίπτωση που αναφέραμε πιο πάνω.

Γενικώς, για να προσδιορίσουμε τη διανυσματική ταχύτητα κάθε σημείου χρειαζόμαστε τη διανυσματική ταχύτητα ενός γνωστού σημείου και τη διεύθυνση της ταχύτητας ενός άλλου γνωστού σημείου.

3.7 Προσδιορισμός της επιτάχυνσης κάθε σημείου στερεού στην επίπεδη κίνηση

Εύκολα από το Σχ. 3.6 συμπεραίνουμε ότι,

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{\text{B}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{\text{A}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2},\quad \vec{a} = \vec{a}_{\text{A}} + \vec{a}_{\text{BA}} \quad (3.12)$$

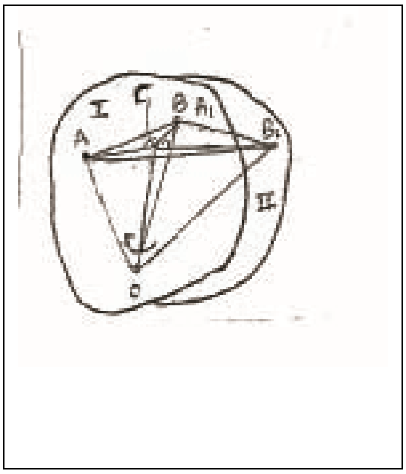
όπου $\vec{a}_{\text{A}}$ είναι η επιτάχυνση του πόλου Α και $\vec{a}_{\text{BA}}$ είναι η επιτάχυνση που οφείλεται μόνο στην περιστροφική κίνηση περί τον πόλο. Έχουμε ακόμη, $\vec{a}_{\text{BA}} = a_{\varepsilon}\vec{e}_{\varepsilon} + a_{\text{c}}\vec{e}_{\text{c}}$ όπου το $\vec{e}_{\varepsilon}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα με φορά αυτή κατά την οποία αυξάνεται το φ (αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού) κάθετο στο $\overrightarrow{AB} = \vec{r}'$ και το $\vec{e}_{\text{c}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του $\overrightarrow{AB} = \vec{r}'$. Προφανώς,

$$a_{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{\text{BA}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}r',\quad a_{\text{c}} = \frac{\upsilon_{\text{BA}}^2}{r'} = \omega^2 r'\,. \quad (3.13)$$

Μπορεί να βρεθεί και το στιγμιαίο κέντρο μηδενικής επιτάχυνσης που όμως δεν συμπίπτει με το αντίστοιχο κέντρο των μηδενικών των ταχυτήτων δηλαδή με το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής. Αυτό μπορεί να προσδιοριστεί από την επιτάχυνση ενός γνωστού σημείου και τα $\vec{\omega}$ και $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ της κίνησης την ίδια χρονική στιγμή. Η επιτάχυνση κάθε σημείου ισούται με την επιτάχυνση ένεκα περιστροφής περί το στιγμιαίο κέντρο μηδενικής επιτάχυνσης.

3.8 Κίνηση στερεού στο χώρο με ένα σταθερό σημείο

Ας θεωρήσουμε δύο καταστάσεις (θέσης) ενός στερεού τις Ι, ΙΙ, Σχ. 3.8. Το στερεό κινείται στο χώρο ενώ ένα σημείο του το Ο είναι συνεχώς ακίνητο. Έστω τα σημεία Α και Β του στερεού στην κατάσταση Ι όπου ενώ το Α είναι αυθαίρετο το Β έχει επιλεγεί έτσι που η θέση του να είναι η θέση στην οποία πάει το Α όταν το στερεό βρεθεί στην κατάσταση ΙΙ. Όταν το στερεό βρεθεί στην κατάσταση ΙΙ τότε το Α πάει στη θέση A_1 που συμπίπτει με τη θέση του Β στην κατάσταση Ι του στερεού. Το Β της κατάστασης Ι καταλαμβάνει τη θέση B_1 όταν το στερεό είναι στην κατάσταση ΙΙ.

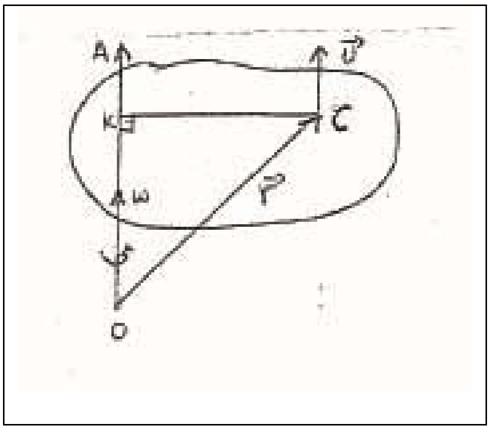


Σχήμα 3.8

Αφού τα σημεία O,A,B,A_1,B_1 είναι σημεία του στερεού, έχουμε $OA=OA_1=OB_1$, $AB=A_1B_1$. Φέρουμε την κάθετο από το O στο επίπεδο των A,B,B_1, αυτή συναντά το επίπεδο στο C. Τα ορθογώνια τρίγωνα OCA,OCB_1,OCB είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και την OC κοινή άρα $AC=A_1C=B_1C$. Επίσης έχουμε $CA=CB=CB_1$. Άρα τα τρίγωνα ACB,A_1CB,A_1CB_1 είναι ίσα ως έχοντα όλες τις πλευρές τους ίσες. Επομένως οι γωνίες ACB,A_1CB_1 είναι ίσες. Αν λοιπόν στρέψουμε το σώμα κατά γωνία $ACB=\theta$ περί την OC τα σημεία A, B θα συμπέσουν με τα A_1,B_1 αντιστοίχως. Είναι ευνόητο ότι η θέση του στερεού στο χώρο καθορίζεται από τρία σημεία, εδώ έχουμε το σημείο O ως τρίτο άρα το στερεό θα πάει από τη θέση I στη θέση II με μια περιστροφή κατά θ περί την OC. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μετατόπιση στερεού στο χώρο από μια κατάσταση I σε μια κατάσταση II, όταν το στερεό έχει ένα σταθερό σημείο, μπορεί να γίνει με μια περιστροφή περί κατάλληλο άξονα και κατάλληλη γωνία. Ο άξονας διέρχεται δια του σταθερού σημείου. Αν το σώμα κάνει στοιχειώδη μετατόπιση και έχει ένα σταθερό σημείο είναι προφανές ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί με στοιχειώδη περιστροφή περί τον κατάλληλο άξονα περιστροφής. Έτσι μπορεί να ορίσει κανείς τη γωνιακή ταχύτητα που είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής και έχει μέγεθος $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Αν έχουμε πεπερασμένη συνεχή κίνηση του στερεού τότε έχουμε στοιχειώδεις περιστροφές περί στιγμιαίους άξονες που διέρχονται δια του σταθερού σημείου αλλά η διεύθυνσή τους αλλάζει, δηλαδή $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ όπου και η διεύθυνση και το μέτρο του $\vec{\omega}$ είναι εν γένει συναρτήσεις του χρόνου. Η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ δεν είναι εν γένει διάνυσμα πάνω στον στιγμιαίο άξονα περιστροφής, τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\omega}$ δεν είναι γενικώς συγγραμμικά όπως συμβαίνει κατά την κίνηση που ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός στο χώρο.

3.9 Ταχύτητα και επιτάχυνση κάθε σημείου στερεού το οποίο κατά την κίνησή του έχει ένα σταθερό σημείο

Για μια χρονική στιγμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9, ο (στιγμιαίος) άξονας περιστροφής είναι ο OA. Η KC είναι κάθετη στην OA, δηλαδή στον στιγμιαίο άξονα



Σχήμα 3.9

περιστροφής. C είναι το υπό εξέταση σημείο και O είναι το σταθερό σημείο που το παίρνουμε ως σημείο αναφοράς των διανυσμάτων θέσης. Προφανώς από τα προηγούμενα έχουμε, $\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ το $\vec{\upsilon}$ είναι κάθετο στο επίπεδο KOC και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα OA, πάνω σε αυτό το επίπεδο είναι το σημείο C. Ισχύει προφανώς, $\upsilon = \omega(\mathrm{KC})$. Ακόμη ισχύουν,

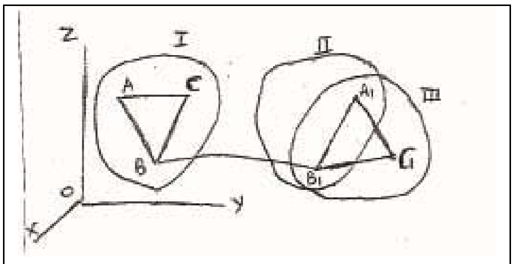
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}, \quad (3.14)$$

$\vec{\alpha}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής, δηλαδή το $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$. Ενώ η

διανυσματική συνιστώσα $\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ της επιτάχυνσης $\vec{a}$ είναι πάνω στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα που περιέχει το C (πάνω του βρίσκεται και η $\vec{\upsilon}$) δεν ισχύει εν γένει το ίδιο για την άλλη συνιστώσα την $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ που απλώς είναι κάθετη στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{r}$. Η $\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ είναι κατά την ευθεία KC, και είναι προφανώς η κεντρομόλος επιτάχυνση.

3.10 Γενική κίνηση στερεού στο χώρο

Η θέση στερεού στο χώρο καθορίζεται από τις θέσεις τριών δεδομένων σημείων του. Είναι λοιπόν προφανές ότι για τον προσδιορισμό της μετατόπισής του αρκεί να χρησιμοποιηθούν τρία σημεία του.



Σχήμα 3.10

΄Εστω το Σχ. 3.10 όπου το στερεό βρίσκεται αρχικά στην (θεσική) κατάσταση I και η τελική του κατάσταση είναι η III. Φανταζόμαστε τη μετατόπιση σε δύο στάδια, συγκεκριμένα, κάνουμε μεταφορά του σώματος από τη θέση I στη θέση II έτσι που το σημείο B να πάει στο B_1 όπου είναι και η τελική του κατάσταση III. Στη συνέχεια κάνουμε μετατόπιση του σώματος από την II στην τελική III. Αφού όμως το B_1 δε μετακινείται κατ' αυτή τη μετατόπιση, αυτή η μετατόπιση μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά τα προηγούμενα με περιστροφή περί κατάλληλο άξονα και γωνία. O άξονας διέρχεται από το B_1. Το σημείο B_1 είναι ο πόλος. Μπορεί να δειχθεί με απλή γεωμετρική μέθοδο (ή με αλγεβρική) ότι ενώ η μεταφορά εξαρτάται από τον πόλο που διαλέγουμε, η γωνία περιστροφής είναι ανεξάρτητη του πόλου και ο άξονας περιστροφής ανεξάρτητα από τον πόλο έχει ορισμένη διεύθυνση. Ακόμη μπορεί να δειχθεί ότι οι προβολές των μεταφορών πάνω στην κοινή διεύθυνση των αξόνων περιστροφής είναι ίσες. ΄Αρα, η μετατόπιση στερεού από μια θέση σε άλλη μπορεί να γίνει με μια μεταφορά και μια περιστροφή. Ακόμη δείχνεται ότι από όλους τους δυνατούς τρόπους μετατόπισης στερεού δια μιας μεταφοράς και μιας περιστροφής μπορούμε να προσδιορίσουμε έναν μοναδικό κατά τον οποίο η διεύθυνση της μεταφοράς να συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής. Αυτή λέγεται ελικοειδής μετατόπιση. Το συμπέρασμα είναι ότι η γενική μετατόπιση στερεού στο χώρο μπορεί να γίνει με μια ελικοειδή μετατόπιση.

Αν θεωρήσουμε στοιχειώδη γενική μετατόπιση είναι προφανές ότι θα έχουμε στοιχειώδη μεταφορά και στοιχειώδη περιστροφή αφού εκλέξουμε κάποιο σημείο του στερεού ως πόλο. Αν τώρα θεωρήσουμε συνεχή κίνηση στερεού, αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαδοχικές στοιχειώδεις μεταφορές και στοιχειώδεις περιστροφές, όπου πόλος εκλέγεται κάποιο σημείο του στερεού το ίδιο για όλη την κίνηση. Θα έχουμε προφανώς για την ταχύτητα κάποιου σημείου C,

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{P}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{CP}}. \quad (3.15)$$

Δηλαδή η ταχύτητα του C, που είναι η $\vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}$, είναι ίση με το άθροισμα της ταχύτητας του πόλου (ο πόλος παριστάνεται με P) $\vec{\upsilon}_{\mathrm{P}}$ (είναι ταχύτητα ίδια για όλα τα σημεία αφού αντιστοιχεί σε μεταφορά) και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\mathrm{CP}}$ που οφείλεται στην περιστροφή περί τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από τον πόλο. Ισχύει προφανώς $\vec{\upsilon}_{\mathrm{CP}} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{CP}}$ όπου $\vec{r}_{\mathrm{CP}}$ το διάνυσμα από τον πόλο μέχρι το σημείο C. Το $\vec{\omega}$ είναι ανεξάρτητο από τον πόλο που επιλέγεται ενώ το $\vec{\upsilon}_{\mathrm{P}}$ εξαρτάται από την επιλογή του πόλου. Για την επιτάχυνση του σημείου C έχουμε,

$$\vec{a}_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{CP}}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_{\mathrm{P}} + \vec{a}_{\mathrm{CP}} = \vec{a}_{\mathrm{P}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}_{\mathrm{CP}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{CP}})\,. \quad (3.16)$$

3.11 Απόλυτη και σχετική κίνηση σημείου

Συχνά στη μηχανική εμφανίζεται το εξής πρόβλημα, ξέρουμε την κίνηση σημείου ως προς σύστημα O$x'y'z'$, επίσης ξέρουμε την κίνηση του συστήματος O'$x'y'z'$ ως προς το σύστημα Oxyz και θέλουμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του σημείου ως προς το σύστημα Oxyz. Το σύστημα O$x'y'z'$ θα το λέμε κινούμενο σύστημα, την κίνησή του ως προς το Oxyz μετοχική κίνηση, την κίνηση του σημείου ως προς το O'$x'y'z'$ σχετική κίνηση του σημείου και την κίνηση του σημείου ως προς το Oxyz απόλυτη κίνηση και το Oxyz απόλυτο σύστημα. Αν φανταστούμε το χώρο που συμπαρασύρεται με το O'$x'y'z'$ (σαν στερεό με όχι κατανάγκην υλικά σημεία) τότε μιλούμε για μετοχικές ταχύτητες και επιταχύνσεις των σημείων του συστήματος που οφείλονται στη μετοχική κίνησή του ως προς το Oxyz. Αυτές φυσικά είναι διαφορετικές για τα διαφορετικά σημεία εκτός αν η μετοχική κίνηση είναι μεταφορική.

3.12 Ρυθμός μεταβολής διανύσματος με το χρόνο

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{G}$ που μπορεί να είναι οτιδήποτε, όπως διάνυσμα θέσης ως προς κάποιο σύστημα, ταχύτητα ως προς κάποιο σύστημα, στροφορμή ως προς κάποιο σύστημα κτλ. Θέλουμε να ξέρουμε πώς σχετίζονται οι μεταβολές του διανύσματος, όπως φαίνονται από δύο συστήματα. Το ένα σύστημα είναι αυτό που αναφέραμε προηγουμένως, θα το λέμε απόλυτο σύστημα και το άλλο που κινείται ως προς αυτό είναι το κινούμενο σύστημα. Μπορούμε να παραστήσουμε με $\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{a}}$ τη μεταβολή του διανύσματος ως προς το απόλυτο σύστημα (απόλυτη μεταβολή) και με $\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{r}}$ τη μεταβολή του ως προς το κινούμενο σύστημα, σχετική μεταβολή. Κάνουμε τον εξής συλλογισμό, φανταζόμαστε ότι το διάνυσμα $\vec{G}$ στην αρχή συμπαρασύρεται με το κινούμενο σύστημα χωρίς να

μεταβάλλεται ως προς αυτό. Το απόλυτο σύστημα θα βλέπει τη μεταβολή του που θα οφείλεται στη μετοχική κίνηση του κινούμενου συστήματος ως προς το απόλυτο. Παριστάνουμε αυτή τη μεταβολή του $\vec{G}$ με $\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{t}}$, μεταβολή που οφείλεται στη μετοχική (transport) κίνηση. Φανταζόμαστε στη συνέχεια ότι σταματά η μετοχική κίνηση και το $\vec{G}$ μεταβάλλεται ως προς το κινούμενο σύστημα κατά το $\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{r}}$. Αυτή όμως η μεταβολή θα είναι η μεταβολή που θα φαίνεται από το απόλυτο σύστημα γιατί "παγώσαμε" την κίνηση του κινούμενου συστήματος. Άρα,

$$\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{a}}=\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{r}}+\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{t}} \quad (3.17)$$

δηλαδή η συνολική μεταβολή, όταν συνυπάρχουν η μετοχική κίνηση και η μεταβολή του $\vec{G}$ ως προς το κινούμενο σύστημα (σχετική μεταβολή), είναι το άθροισμα των δύο επί μέρους μεταβολών. Προφανώς για τις ταχύτητες μεταβολής του $\vec{G}$ θα έχουμε,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{a}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}}. \quad (3.18)$$

Ξέρουμε όμως ότι η κίνηση του κινούμενου συστήματος (που το θεωρούμε ως στερεό) μπορεί να περιγραφεί ως συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής. Παίρνουμε ως πόλο την αρχή του $\vec{G}$. Το $\vec{\omega}$ της στιγμιαίας περιστροφής δεν εξαρτάται από αυτή την επιλογή. Ακόμη, κατά τη μετοχική κίνηση το διάνυσμα δεν μεταβάλλεται ως προς το κινούμενο σύστημα. Η μετοχική κίνηση λοιπόν θα είναι μεταφορά και περιστροφή, άρα αφού το διάνυσμα $\vec{G}$ είναι σταθερό κατά μέτρο ως προς το απόλυτο σύστημα θα ισχύει,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} = \vec{\omega}\times\vec{G}. \quad (3.19)$$

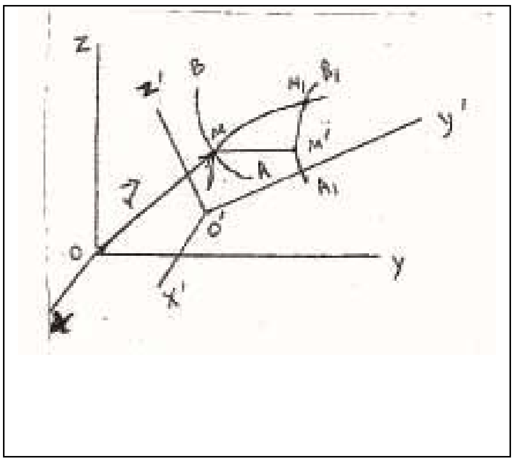
Επομένως

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{a}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} + \vec{\omega}\times\vec{G}\,. \quad (3.20)$$

Ο τελευταίος όρος οφείλεται στη μετοχική κίνηση του κινούμενου συστήματος ως προς το απόλυτο και φυσικά το $\vec{\omega}$ είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το απόλυτο.

3.13 Σχέση απόλυτης και σχετικής ταχύτητας

Ας θεωρήσουμε το Σχ. 3.11. Εξετάζουμε την κίνηση σημείου Μ που τη χρονική στιγμή t είναι στη θέση που καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ στο απόλυτο σύστημα $Oxyz$. ΑΒ είναι η τροχιά του στο κινούμενο σύστημα ($O'x'y'z'$ τη χρονική στιγμή t). Το κινητό τη χρονική στιγμή $t + \mathrm{d}t$ βρίσκεται στη θέση M_1. Η τροχιά του



Σχήμα 3.11

ως προς το κινούμενο σύστημα είναι τώρα η A_1B_1. Η τροχιά του ως προς το Oxyz είναι η καμπύλη που περνά από τα M και M_1. Η μετακίνηση της τροχιάς από το AB στο A_1B_1 οφείλεται στη μετοχική κίνηση. Μπορούμε να εφαρμόσουμε όσα είπαμε προηγουμένως, δηλαδή να βάλουμε στη θέση του $\vec{G}$ το $\vec{r}$ οπότε έχουμε

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{a}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}. \ (3.21)$$

Εφόσον κατά τη σχετική κίνηση όταν υπολογίζουμε το $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}}$ «παγώνομε» τη μετοχική

Κίνηση, δηλαδή το $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ είναι σταθερό, άρα

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O'M}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}, \ (3.22)$$

όπου $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ είναι η σχετική ταχύτητα του εξεταζόμενου σημείου ως προς το σύστημα $\mathrm{O}'x'y'z'$. Με τη χρήση του Σχ. 3.11 μπορεί κανείς να βρει το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς αναφορά στα προηγούμενα.

Έχομε

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{a}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}. \ (3.23)$$

Μπορούμε να πούμε ότι η μετοχική κίνηση είναι η κίνηση του σημείου του συστήματος κινούμενων αξόνων (θεωρούμενο σαν στερεό) που τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή συμπίπτει με το κινητό. Η μετοχική ταχύτητα, $\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}$ συμπίπτει με την ταχύτητα του σημείου του κινούμενου συστήματος στο οποίο βρίσκεται το κινητό τη δεδομένη χρονική στιγμή. Αν λάβουμε υπόψη ό,τι έχουμε πει για τη γενική κίνηση στερεού και πάρουμε ως πόλο της μετοχικής κίνησης την αρχή O′ του κινούμενου συστήματος έχουμε, για τη χρονική στιγμή t που είναι $\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \vec{r}'$ ότι ισχύει

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{O'}} + \vec{\omega}\times\vec{r}', \quad \vec{\upsilon}_{\mathrm{a}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{O'}} + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \ (3.24)$$

Δηλαδή, η απόλυτη ταχύτητα κινούμενου σημείου (ταχύτητα ως προς το απόλυτο σύστημα) είναι ίση με το άθροισμα της μετοχικής ταχύτητας, που είναι η ταχύτητα εκείνου του σημείου που συμπαρασύρεται με το κινούμενο σύστημα και με το οποίο συμπίπτει τη δεδομένη χρονική στιγμή το εν λόγω κινούμενο σημείο, συν τη σχετική ταχύτητα του κινούμενου σημείου (ταχύτητα ως προς το κινούμενο σύστημα).

3.14 Σχέση απόλυτης και σχετικής επιτάχυνσης, Φαινόμενο Coriolis

Χρησιμοποιούμε τη σχέση, $\vec{\upsilon}_{\mathrm{a}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}$. Οι απειροστές μεταβολές ως προς το απόλυτο σύστημα είναι οι απόλυτες μεταβολές στο δεδομένο απειροστό χρονικό διάστημα. Έχουμε,

$$(\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{a}})_{\mathrm{a}} = (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{a}} + (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{a}} \quad (3.25)$$

δηλαδή πήραμε τις απειροστές μεταβολές ως προς το απόλυτο σύστημα. Σύμφωνα με όσα είπαμε στην παράγραφο 3.12 έχομε,

$$(\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{a}} = (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{r}} + (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{t}} \quad \text{και} \quad (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{a}} = (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{r}} + (\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{t}} \quad (3.26)$$

επομένως

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{a}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} + \left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}}\right). \quad (3.27)$$

Το αριστερό μέλος είναι η απόλυτη επιτάχυνση, δηλαδή η επιτάχυνση του κινητού σημείου ως προς το απόλυτο σύστημα, ο πρώτος και ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους είναι αντιστοίχως η σχετική επιτάχυνση (η επιτάχυνση ως προς το κινούμενο σύστημα) και η μετοχική επιτάχυνση, δηλαδή η επιτάχυνση σημείου του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα με το οποίο το κινητό συμπίπτει τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Σε αντίθεση με την ταχύτητα, για την επιτάχυνση έχουμε ότι:

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{t}} + \left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}}\right), \quad (3.28)$$

δηλαδή η απόλυτη επιτάχυνση σημείου είναι ίση με το άθροισμα της σχετικής επιτάχυνσης, της μετοχικής επιτάχυνσης και ενός άλλου όρου που λέγεται επιτάχυνση ένεκα του φαινομένου Coriolis ή συμπληρωματική επιτάχυνση $\vec{a}_{\mathrm{c}}$ (λέγεται και επιτάχυνση Coriolis),

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{c}} \,. \quad (3.29)$$

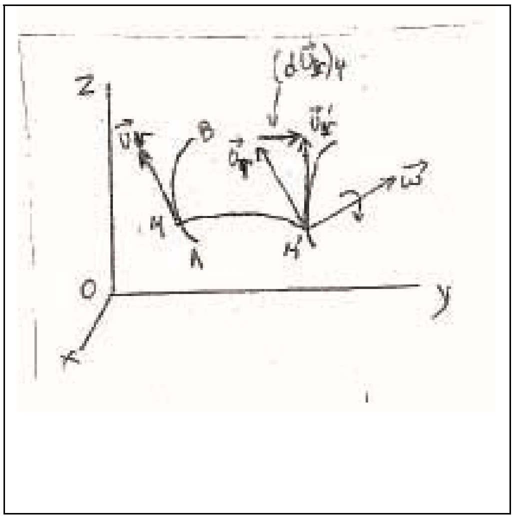
Η επιτάχυνση αυτή είναι το άθροισμα της σχετικής επιτάχυνσης που οφείλεται μόνο στη μετοχική κίνηση και της μετοχικής επιτάχυνσης που οφείλεται μόνο στη σχετική κίνηση,

$$\vec{a}_{\mathrm{c}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} . \quad (3.30)$$

Το φαινόμενομο Coriolis εμφανίζεται όταν έχομε περιστροφή ενός συστήματος και σχετική ταχύτητα υλικού σημείου ως προς αυτό.

Θα υπολογίσουμε την $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}}$ με χρήση του Σχ. 3.12. O*xyz* είναι το απόλυτο σύστημα αξόνων.

Δεν σχεδιάσαμε τους κινούμενους άξονες αλλά τις θέσεις της τροχιάς του σημείου Μ δύο χρονικές στιγμές *t* και *t* + d*t* ως προς αυτούς. Αυτές οι θέσεις της τροχιάς είναι οι καμπύλες ΑΒ και $\mathrm{A_1B_1}$. Το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ της σχετικής ταχύτητας του σημείου Μ είναι εφαπτόμενο στην τροχιά στο σημείο Μ τη χρονική στιγμή *t.* Τη χρονική στιγμή *t* + d*t* το διάνυσμα $\vec{\upsilon}'_{\mathrm{r}}$ της σχετικής ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά $\mathrm{A_1B_1}$ στο σημείο Μ' που είναι η θέση του κινητού στη σχετική τροχιά. ΄Εχουμε «παγώσει» τη σχετική κίνηση και έχουμε μόνο τη μετοχική κίνηση. Για να βρούμε το $(\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{t}}$ φέρουμε στο



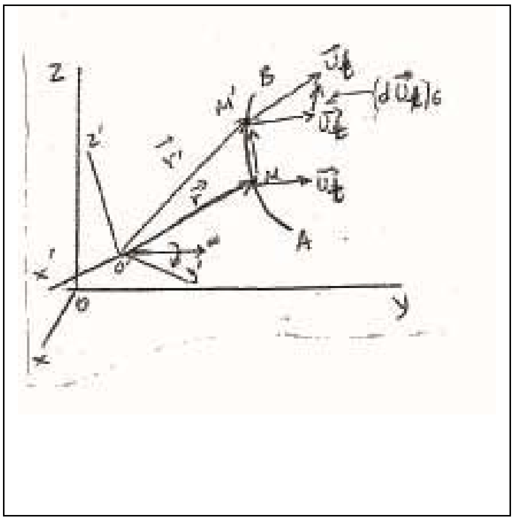
Σχήμα 3.12

σημείο Μ' διάνυσμα παράλληλο με το $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ όπως φαίνεται στο Σχ. 3.12. Τα μέτρα των $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ και $\vec{\upsilon}'_{\mathrm{r}}$ είναι τα ίδια αφού έχουμε παγώσει τη σχετική κίνηση όπως ήταν τη χρονική στιγμή *t*. Ισχύει λοιπόν για την παράγωγο,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} \quad (3.31)$$

κατά τα γνωστά για σταθερού μέτρου διάνυσμα. $\vec{\omega}$ είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα της μετοχικής κίνησης δηλαδή των κινούμενων αξόνων ως προς τους απόλυτους. Για τον υπολογισμό της $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}}$ χρησιμοποιούμε το Σχ. 3.13.

Ξαναθυμίζομε ότι η μετοχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}$ είναι ίση με την ταχύτητα εκείνου του σημείου που συμπαρασύρεται με τους κινούμενους άξονες O'*x*'*y*'*z*' και το οποίο



Σχήμα 3.13

συμπίπτει με το σημείο Μ που εξετάζουμε, τη δεδομένη χρονική στιγμή *t*. Κατά τα γνωστά για στερεό σώμα, αν πάρουμε ως πόλο το σημείο Ο′ θα έχουμε,

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{O'}} + \vec{\omega}\times\vec{r} \,. \quad (3.32)$$

Το κινητό Μ κατά τη σχετική κίνησή του (έχουμε «παγώσει» τη μετοχική κίνηση) θα βρεθεί μετά από χρόνο d*t* στη θέση Μ' όπου το Μ' έχει μετοχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_{\mathrm{t}}$ και θα έχουμε,

$$\vec{\upsilon}'_{\mathrm{t}} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{O'}} + \vec{\omega}\times\vec{r}' \,. \quad (3.33)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις βρίσκομε,

$$(\mathrm{d}\vec{\upsilon})_{\mathrm{r}} = \vec{\omega}\times(\vec{r}'-\vec{r}) = \vec{\omega}\times\left(\overline{\mathrm{MM'}}\right) = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}\mathrm{d}t \,. \quad (3.34)$$

Τελικώς

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} \,. \quad (3.35)$$

Δηλαδή βρίσκουμε το ίδιο όπως και για το $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}}$, επομένως

$$\vec{a}_{\mathrm{c}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{t}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{r}} = 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}) \,. \quad (3.36)$$

Έχουμε λοιπόν ότι,

$$\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm r} + \vec{a}_{\rm t} + \vec{a}_{\rm c} \quad (3.37)$$

$$\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm r} + \vec{a}_{\rm t} + 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\rm r}) . \quad (3.38)$$

Αν η σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\rm r} = 0$ οπότε το κινητό συμπαρασύρεται με το κινούμενο σύστημα, τότε η επιτάχυνση ένεκα του φαινομένου Coriolis είναι μηδέν. Η επιτάχυνση Coriolis επίσης μηδενίζεται αν η $\vec{\upsilon}_{\rm r}$ είναι παράλληλη προς την $\vec{\omega}$. Φυσικά η άλλη περίπτωση μηδενισμού της είναι όταν δεν έχουμε περιστροφή αλλά μόνο μεταφορική κίνηση, τότε $\vec{\omega} = 0$. Μόνο για αυτές τις περιπτώσεις έχουμε $\vec{a}_{\rm c} = 0$ και τότε ισχύει για τις επιταχύνσεις ό,τι ισχύει πάντα για τις ταχύτητες, δηλαδή τότε μόνο έχομε ότι $\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm r} + \vec{a}_{\rm t}$. Για την $\vec{a}_{\rm t}$ ισχύει ό,τι ισχύει για τα σημεία του στερεού που συμπαρασύρεται με το κινούμενο σύστημα. Έχουμε επομένως (Σχ. 3.13),

$$\vec{a}_{\rm t} = \vec{a}_{\rm O'} + \frac{{\rm d}\vec{\omega}}{{\rm d}t}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \quad (3.39)$$

οπότε

$$\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm r} + \left(\vec{a}_{\rm O'} + \frac{{\rm d}\vec{\omega}}{{\rm d}t}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right) + 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\rm r}) \quad (3.40)$$

και

$$\vec{\upsilon}_{\rm a} = \vec{\upsilon}_{\rm r} + (\vec{\upsilon}_{\rm O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}') \quad (3.41)$$

Η ποσότητα $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση. Ο όρος $\frac{{\rm d}\vec{\omega}}{{\rm d}t}\times\vec{r}'$ υπάρχει αν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται ως διάνυσμα με το χρόνο.

3.15 Συστήματα αναφοράς

Ο πρώτος και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ισχύουν για συστήματα αναφοράς που τα λέμε αδρανειακά συστήματα ή συστήματα του Γαλιλαίου. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς. Για ένα υλικό σημείο μάζας *m* μπορούμε να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησής του, δηλαδή τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a}\,.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται ως προς το προηγούμενο. Ας παραστήσουμε την επιτάχυνση ως προς το αδρανειακό σύστημα, με $\vec{a}_{\mathrm{a}}$ (απόλυτη επιτάχυνση) και με $\vec{a}_{\mathrm{r}}$ την επιτάχυνση του υλικού σημείου ως προς το κινούμενο σύστημα (σχετική επιτάχυνση). Έχουμε δείξει ότι,

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{c}} \quad \text{ή} \quad \vec{a}_{\mathrm{r}} = \vec{a}_{\mathrm{a}} - \vec{a}_{\mathrm{t}} - \vec{a}_{\mathrm{c}}\,. \; (3.42)$$

Επομένως έχουμε ως προς το αδρανειακό σύστημα για τον 2ο νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\mathrm{r}} + m\vec{a}_{\mathrm{t}} + m\vec{a}_{\mathrm{c}} \quad \text{και} \quad \vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{t}} - m\vec{a}_{\mathrm{c}} = m\vec{a}_{\mathrm{r}}\,. (3.43)$$

Αν γράψουμε $\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{t}} - m\vec{a}_{\mathrm{c}}$ έχουμε:

$$\vec{F}' = m\vec{a}_{\mathrm{r}}\,. (3.44)$$

Η τελευταία εξίσωση μοιάζει με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και αναφέρεται στη σχετική κίνηση του υλικού σημείου, δηλαδή στην κίνησή του ως προς το κινούμενο σύστημα. Η $\vec{F}'$ είναι ίση με την πραγματική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται από άλλα σώματα ή πεδία στο υλικό σημείο συν τις ποσότητες $-m\vec{a}_{\mathrm{t}}$ και $-m\vec{a}_{\mathrm{c}}$ που είναι οι λεγόμενες ψευδοδυνάμεις (ή υποθετικές δυνάμεις) και σχετίζονται με το γεγονός ότι το σύστημα είναι επιταχυνόμενο ως προς αδρανειακό σύστημα. Η ουσιώδης διαφορά είναι ότι οι πραγματικές δυνάμεις, όπως η $\vec{F}$ εξαρτώνται και από τις θέσεις και τις κινήσεις άλλων σωμάτων που τις ασκούν στο σώμα του οποίου εξετάζουμε την κίνηση, ενώ οι υποθετικές δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από την κίνηση του επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς. Οι δεύτερες υπάρχουν ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή όχι αλληλεπιδρώντων σωμάτων ή πεδίων με το υπό εξέταση σώμα, ενώ οι πραγματικές δυνάμεις υπάρχουν μόνο αν υπάρχουν αλληλεπιδρώντα σώματα ή πεδία. Ακόμη μπορούμε να προσθέσουμε ότι στις πραγματικές δυνάμεις υπεισέρχονται ποσότητες (αποστάσεις, ταχύτητες) που αναφέρονται στη θέση και κίνηση του ενός σώματος ως προς το άλλο που αλληλεπιδρούν, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνομε ότι,

$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \vec{a}_{\mathrm{O}'} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'), \quad (3.45)$$

$$\vec{a}_{\mathrm{c}} = 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}. \qquad (3.46)$$

Ισχύει για τη δύναμη $\vec{F}'$,

$$\begin{aligned}\vec{F}' &= \vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{t}} - m\vec{a}_{\mathrm{c}} \\ &= \vec{F} + \left(-m\vec{a}_{\mathrm{O}'} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m2(\vec{\omega}\times\vec{a}_{\mathrm{r}})\right).\end{aligned} \quad (3.47)$$

Ο πρώτος όρος της παρένθεσης οφείλεται στην επιτάχυνση της αρχής των αξόνων του επιταχυνόμενου συστήματος, ο δεύτερος όρος οφείλεται στη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας με το χρόνο, ο τρίτος όρος οφείλεται στην περιστροφή του κινούμενου συστήματος και λέγεται φυγόκεντρος δύναμη, $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ είναι η φυγόκεντρος επιτάχυνση) και ο τέταρτος όρος οφείλεται στη γωνιακή ταχύτητα του επιταχυνόμενου συστήματος και στη σχετική ταχύτητα (ταχύτητα ως προς το επιταχυνόμενο σύστημα) του υλικού σημείου.

3.16 Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς

Αν υποθέσουμε ότι το κινούμενο επιταχυνόμενο σύστημα είναι σύστημα που εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς το απόλυτο σύστημα το οποίο υποθέσαμε ότι είναι αδρανειακό (σύστημα Γαλιλαίου) τότε $\vec{\omega} = 0$, $\mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t = 0$, άρα όλες οι εικονικές δυνάμεις είναι μηδέν εκτός της $m\vec{a}_{\mathrm{O}'}$. Έχουμε επομένως στο κινούμενο σύστημα,

$$\vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{O}'} = \vec{F}' = m\vec{a}_{\mathrm{r}}. (3.48)$$

Δηλαδή όταν το κινούμενο σύστημα εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς το απόλυτο αδρανειακό σύστημα, τότε η εικονική δύναμη είναι η $m\vec{a}_{\mathrm{O}'}$. Η $\vec{a}_{\mathrm{O}'}$ είναι η επιτάχυνση οποιουδήποτε σημείου του κινούμενου συστήματος (θεωρουμένου κατά τα γνωστά ως στερεού), αφού αυτή είναι η ίδια για όλα τα σημεία κατά τη μεταφορική κίνηση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το κινούμενο σύστημα κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς ως προς το απόλυτο, τότε $\vec{a}_{\mathrm{O}'} = 0$, άρα έχουμε $\vec{F} = \vec{F}' = m\vec{a}_{\mathrm{r}} = m\vec{a}_{\mathrm{a}}$. Δηλαδή, για ένα σύστημα που κινείται με αυτό τον τρόπο ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, η εξίσωση κίνησης υλικού σημείου περιέχει μόνο τις πραγματικές δυνάμεις, άρα ο

δεύτερος (και ο πρώτος) νόμος του Νεύτωνα ισχύει όπως ακριβώς για το αρχικό σύστημα. Δηλαδή το σύστημα αυτό είναι αδρανειακό ή σύστημα του Γαλιλαίου. Προφανώς $\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{r}}$ (Μετασχηματισμός επιτάχυνσης μεταξύ αδρανειακών συστημάτων). Αν δηλαδή ένα σύστημα είναι αδρανειακό τότε κάθε σύστημα που κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς ως προς αυτό είναι επίσης αδρανειακό.

Εφαρμογές των ανωτέρω έχομε στο εκκρεμές του Foucault, στην κίνηση των κυκλώνων και αντικυκλώνων κτλ.

4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Η έννοια του κέντρου μάζας για σύστημα υλικών σημείων προφανώς είναι η ίδια στην περίπτωση που τα υλικά σημεία αποτελούν στερεό σώμα. Επίσης η κίνηση του κέντρου μάζας στερεού ακολουθεί το γνωστό νόμο κίνησης του κέντρου μάζας συστήματος υλικών σημείων.

4.1 Ροπή αδράνειας σώματος περί άξονα

Για το χαρακτηρισμό της κατανομής της μάζας ενός στερεού, εκτός από τη θέση του κέντρου μάζας μπορεί να χρησιμοποιούμε και την έννοια της ροπής αδράνειας περί άξονα. Για ένα υλικό σημείο ορίζουμε ως ροπή αδράνειάς του ως προς (περί άξονα), την ποσότητα $m_i r_i^2$, όπου m_i η μάζα του υλικού σημείου και r_i η απόστασή του από τον άξονα.

Ως ροπή αδράνειας στερεού περί δοθέντα άξονα ορίζουμε το άθροισμα των ροπών

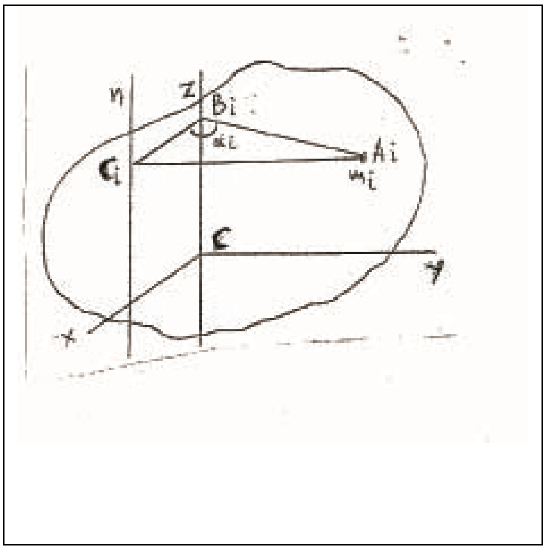
αδράνειας όλων των σημείων του περί τον αυτό άξονα. Αν ο άξονας είναι ο On έχουμε, $I_{\mathrm{n}} = \sum_i m_i r_i^2$. Αν έχουμε συνεχή κατανομή μάζας θα έχουμε, $I_{\mathrm{n}} = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V$ για κατανομή όγκου πυκνότητας ρ. Η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στον όγκο του στερεού. Αν έχουμε επιφανειακές κατανομές ή γραμμικές κατανομές μάζας έχουμε τις αυτονόητες σχέσεις,

$$I_{\mathrm{n}} = \int_S r^2 \sigma \mathrm{d}S \;, \quad I_{\mathrm{n}} = \int_L r^2 \lambda \mathrm{d}l \; (4.1)$$

Συνήθως μιλούμε για την ακτίνα αδράνειας ή ακτίνα περιφοράς K, η οποία ορίζεται αν ξέρουμε για το δεδομένο άξονα την I_{n} και τη συνολική μάζα M του σώματος, $I_{\mathrm{n}} = M K^2$. Το φυσικό νόημα της K είναι ευνόητο.

4.2 Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Θεωρούμε το σώμα του Σχ. 4.1. Σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων C*xyz* που η αρχή του C είναι το κέντρο μάζας του σώματος. Έστω ότι ο άξονας n είναι παράλληλος προς τον C*z* και περνά από το σημείο $x = l$ του άξονα C*x*. Έστω σωμάτιο μάζας m_i στο σημείο A_i του στερεού. Η A_iB_i είναι κάθετος στον άξονα C*z*. Η B_iC_i είναι η απόσταση μεταξύ των αξόνων C*z* και n . Η C_iA_i είναι η απόσταση του A_i από τον άξονα n. Το τρίγωνο $B_iA_iC_i$ είναι πάνω σε παράλληλο



Σχήμα 4.1

επίπεδο προς το *x*C*y*. Έχουμε για τη ροπή αδράνειας του m_i περί τον άξονα n την παράσταση $m_i(A_iC_i)^2$. Η ροπή αδράνειας του σώματος περί τον άξονα αυτόν θα είναι,

$$I_{\mathrm{n}} = \sum_i m_i (\mathrm{A}_i \mathrm{C}_i)^2 \,. \, (4.2)$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{B}_i\mathrm{A}_i\mathrm{C}_i$ βρισκομε

$$(\mathrm{A}_i\mathrm{C}_i)^2 = (\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^2 + l^2 - 2(\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i) l \cos\alpha_i \,,$$

επομένως

$$I_{\mathrm{n}} = \sum_i m_i (\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^2 + l^2 \sum_i m_i - 2l \sum_i (\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i) \cos\alpha_i \,. (4.3)$$

Όμως $(\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)\cos\alpha_i = x_i$ (δηλαδή η συντεταγμένη x_i του σημείου A_i). Επειδή ο C *z* περνά από το κέντρο μάζας, από τον ορισμό του κέντρου μάζας έχουμε ότι $\sum_i (\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)\cos\alpha_i = \sum_i x_i = 0$ άρα αφού $\sum_i m_i = M$ (μάζα του σώματος) και $I_{\mathrm{c}} = \sum_i m_i (\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^2$ είναι η ροπή αδράνειας περί τον άξονα C *z*, άρα $I_{\mathrm{n}} = I_{\mathrm{c}} + Ml^2$. Δηλαδή, η ροπή αδράνειας περί άξονα n είναι ίση με τη ροπή αδράνειας περί παράλληλο προς αυτόν άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού συν την ποσότητα Ml^2, όπου M είναι η ολική μάζα του σώματος και l η απόσταση μεταξύ των εν λόγω αξόνων (θεώρημα του Steiner ή των παράλληλων αξόνων). Είναι προφανές ότι η ροπή αδράνειας είναι ελάχιστη μεταξύ των ροπών αδράνειας παράλληλων μεταξύ τους αξόνων αν ο άξονας περνά από το κέντρο μάζας.

4.3 Κινητική ενέργεια στερεού

Στην παράγραφο 1.13 δείξαμε ότι για σύστημα υλικών σημείων έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \upsilon_{\mathrm{c}i}^2 .$$

όπου M η συνολική μάζα και $\upsilon_{\mathrm{c}i}$ η ταχύτητα του υλικού σημείου i ως προς το κέντρο μάζας, V_{cm} είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Κάνομε χρήση των όσων είπαμε στην παράγραφο 3.10 και θεωρούμε ως πόλο της κίνησης το κέντρο μάζας του στερεού, οπότε βρίσκομε ότι,

$$\vec{\upsilon}_{ci} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{ci} \ (4.4)$$

όπου $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ως προς στιγμιαίο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η $\vec{\omega}$ είναι ανεξάρτητη από τον πόλο που διαλέγουμε. Είναι ευνόητο ότι $\upsilon_{ci} = \omega R_i$ όπου R_i είναι η απόσταση του σημείου *i* από το στιγμιαίο άξονα περιστροφής (που εδώ έχει ληφθεί να περνά από το κέντρο μάζας). ΄Αρα,

$$T = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2 \ . \quad (4.5)$$

΄Ομως, αν παραστήσουμε με I_{c} τη ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κατά τη διεύθυνση του $\vec{\omega}$ ισχύει,

$$I_{\mathrm{c}} = \sum_i m_i R_i^2 \quad (4.6)$$

επομένως,

$$T = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{c}} \omega^2 \ .(4.7)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο όρος που θα είχαμε αν το σώμα εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας και ο δεύτερος όρος είναι αυτός που θα είχαμε αν το σώμα εκτελούσε μόνο περιστροφική κίνηση περί κατάλληλον άξονα που διέρχεται δια του κέντρου

μάζας. Είναι ευνόητο ότι το θεώρημα που διατυπώσαμε για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας συστήματος υλικών σημείων μεταφέρεται και στην περίπτωση στερεού. Εύκολα αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση, του στερεού, οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα (μάλιστα βρίσκονται πάνω στον ίδιο φορέα) και παράγουν συνολικό έργο που είναι ίσο με μηδέν. ΄Αρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στερεού ισούται με το έργο μόνο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό.

4.4 Στροφορμή Στερεού που έχει ένα σταθερό σημείο

Η στροφορμή του στερεού περί το σταθερό του σημείο, έστω Ο, είναι,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i \ . (4.8)$$

Ξέρουμε όμως ότι η ταχύτητα σημείου στερεού με ένα σταθερό σημείο είναι, $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, αφού η κίνηση του στερεού είναι περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ κατά τη διεύθυνση του στιγμιαίου άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο. Έχουμε λοιπόν,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \ . (4.9)$$

Θεωρούμε το σύστημα καρτεσιανών αξόνων Οx, Οy, Οz και αναλύουμε το $\vec{\omega}$ και το $\vec{r}_i$ σε συνιστώσες πάνω σε αυτούς τους άξονες. Θα έχουμε,

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z \\ \vec{\omega} &= \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Επομένως ,

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

ή

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{e}_x (\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \vec{e}_y (\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \vec{e}_z (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \ . (4.12)$$

Τελικώς βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned}\vec{L} = \vec{e}_x &\left(\omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \right) \\ +\vec{e}_y &\left(\omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i - \omega_x \sum_i m_i y_i x_i \right) \quad (4.13) \\ +\vec{e}_z &\left(\omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i \right)\end{aligned}$$

$\sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_x = I_{xx}$ είναι η ροπή αδράνειας περί τον άξονα *x*. Το $-\sum_i m_i x_i y_i = I_{xy}$ ορίζεται ως το γινόμενο αδράνειας του στερεού για τα επίπεδα O*yz* και O*xz*. (Μερικές φορές ορίζεται ως η παράσταση με το αντίθετο πρόσημο).

Αντιστοίχως έχουμε τις ροπές αδράνειας περί τους άξονες *y* και *z* δηλαδή τα I_{yy} και I_{zz} αντίστοιχα και τα γινόμενα αδράνειας για τους άλλους συνδυασμούς επιπέδων των αξόνων O*xyz,* τα εξής: $I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{xz}, I_{zy}$. Είναι ευνόητο από τους ορισμούς ότι $I_{ij} = I_{ji}$.

Ισχύει,

$$\vec{L} = \vec{e}_x L_x + \vec{e}_y L_y + \vec{e}_z L_z \text{, } (4.14)$$

όπου τα L_x, L_y, L_z είναι οι στροφορμές (προβολές του $\vec{L}$) περί τους άξονες O*x,* O*y,* O*z* αντιστοίχως. Ισχύουν σύμφωνα με τα ανωτέρω,

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \quad (4.15) \\ L_x &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z . \end{aligned}$$

Μπορεί να δειχτεί ότι για κάθε σημείο O στερεού μπορούν να εκλεγούν οι σταθεροί ως προς το στερεό άξονες O*xyz,* έτσι που τα γινόμενα αδράνειας να γίνονται μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα για περιπτώσεις αξόνων σε συμμετρικά σχήματα όμως είναι γενικότερο θεώρημα για κάθε σημείο και κάθε στερεό. Αυτοί οι άξονες λέγονται κύριοι άξονες του στερεού σώματος στο σημείο που εξετάζουμε. Σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί τα γινόμενα αδράνειας να είναι μηδέν για άξονες που δεν είναι σταθεροί ως προς το στερεό. Για τέτοιους άξονες έχουμε,

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x \\ L_y &= I_{yy}\omega_y \quad (4.16) \\ L_z &= I_{zz}\omega_z, \end{aligned}$$

και

$$\vec{L} = I_{xx}\omega_x\vec{e}_x + I_{yy}\omega_y\vec{e}_y + I_{zz}\omega_z\vec{e}_z . \quad (4.17)$$

Αγνοώντας τους διπλούς δείκτες καταλήγομε στη σχέση,

$$\vec{L} = I_x\omega_x\vec{e}_x + I_y\omega_y\vec{e}_y + I_z\omega_z\vec{e}_z . \ (4.18)$$

Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι ενώ στη γενική περίπτωση τα διανύσματα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ δεν έχουν την ίδια διεύθυνση στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται γύρω από έναν κύριο άξονα (για παράδειγμα τον O*x)* τότε τα διανύσματα αυτά έχουν την ίδια διεύθυνση και φυσικά και φορά. Αυτό βγαίνει εύκολα αν για παράδειγμα πάρουμε τον άξονα O*x* ως άξονα περιστροφής, οπότε $\omega_y = \omega_z = 0,\ \omega_x = \omega \neq 0,\ \vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x = \omega\vec{e}_x$. Τότε από την παραπάνω σχέση βρίσκομε ότι, $\vec{L} = I_x\omega\vec{e}_x = I_x\vec{\omega}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο O είναι η αρχή ενός αδρανειακού συστήματος. Τότε ως προς το αδρανειακό αυτό σύστημα ισχύει προφανώς η σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}$ (νόμος της στροφικής κίνησης) και το $\vec{L}$ υπολογίζεται ως προς αυτό το αδρανειακό σύστημα, δηλαδή οι ταχύτητες είναι ως προς το αδρανειακό σύστημα, η δε $\vec{N}$ είναι η συνολική ροπή μόνο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο στερεό. Στην περίπτωση αυτή που οι άξονες είναι άξονες του αδρανειακού συστήματος οι ροπές αδράνειας και τα γινόμενα αδράνειας για στερεό τυχαίου σχήματος, γενικώς, εξαρτώνται από το χρόνο. Τότε η εφαρμογή του νόμου της στροφικής κίνησης είναι δύσκολη. Αυτός είναι ο λόγος που είναι καλό στη γενική περίπτωση να διαλέξουμε άξονες ακίνητους ως προς το στερεό, δηλαδή συμπαρασυρόμενους με το στερεό. Τότε τα ως άνω μεγέθη είναι ανεξάρτητα του χρόνου και η μελέτη της κίνησης γίνεται πιο εύκολη. Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, υπάρχουν και περιπτώσεις κατανομής της μάζας στερεού τέτοιες που να μπορούμε να κάνομε επιλογή συστήματος αξόνων που δεν είναι στερεά συνδεδεμένο με το στερεό και όμως οδηγεί σε ροπές και γινόμενα αδράνειας ανεξάρτητα του χρόνου. Ας υποθέσομε ότι διαλέγομε άξονες που έχουν αρχή το O είναι κύριοι άξονες (ή γενικότερα τα γινόμενα αδράνειας είναι μηδέν) και οι ροπές αδράνειας ως προς αυτούς είναι ανεξάρτητες του χρόνου, τότε θα έχουμε :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + I_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + I_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z + I_x\omega_x \frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} + I_y\omega_y \frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} + I_z\omega_z \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} .(4.19)$$

Σύμφωνα με τη σχέση για την περιστροφή διανύσματος σταθερού μέτρου είναι προφανές

ότι :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{e}_x, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{e}_y, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{e}_z. (4.20)$$

Μετά την εκτέλεση αρκετών πράξεων καταλήγουμε στις σχέσεις,

$$\begin{aligned} I_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z &= N_x \\ I_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x &= N_y \quad (4.21) \\ I_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y &= N_z . \end{aligned}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης του Euler για στερεό με ένα σταθερό σημείο.

4.5 Κινητική ενέργεια στερεού με ένα σταθερό σημείο ως συνάρτηση των ροπών αδράνειας και γινομένων αδράνειας

Για τυχαίο σημείο *i* μάζας m_i του στερού έχομε $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$. Επομένως,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 \ .(4.22)$$

Έχομε την Εξ. (4.12), δηλαδή,

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i = \vec{e}_x(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \vec{e}_y(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \vec{e}_z(\omega_x y_i - \omega_y x_i)\,.(4.23)$$

΄Οπου θεωρούμε τις προβολές των διανυσμάτων πάνω στους ορθογώνιους άξονες Oxyz οι οποίοι συμπαρασύρονται με το στερεό ή γενικώς είναι τέτοιοι που οι ροπές και τα γινόμενα αδράνειας είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι,

$$T = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + \frac{1}{2}I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yz}\omega_y\omega_z\,.(4.24)$$

Αν υποθέσουμε ότι οι άξονες είναι κύριοι άξονες που περνούν από το σημείο O ή γενικώς τέτοιοι που $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, έχομε

$$T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2\,.(4.25)$$

4.6 Κινητική ενέργεια στερεού κατά τη γενική κίνησή του

Έχομε την Εξ.(1.62) για σύστημα υλικών σημείων. Για στερεό θα έχουμε σύμφωνα και με τα ανωτέρω,

$$T = \frac{1}{2}MV_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + \frac{1}{2}I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yz}\omega_y\omega_z\,,(4.26)$$

όπου M είναι η μάζα του στερεού, V_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του. Οι ροπές αδράνειας και γινόμενα αδράνειας θεωρούνται ανεξάρτητα του χρόνου, δηλαδή αναφέρονται σε σύστημα αξόνων που περνά από το κέντρο μάζας και είναι στερεά συνδεδεμένο με το σώμα ή απλώς πληροί τη συνθήκη αυτή. Ο πρώτος όρος της κινητικής ενέργειας οφείλεται στη μεταφορική κίνηση του στερεού με πόλο το κέντρο μάζας και οι άλλοι όροι αναφέρονται στην περιστροφική κίνηση περί άξονα διερχόμενο δια του κέντρου μάζας. Αν ως άξονες δια του κέντρου μάζας εκλεγούν άξονες τέτοιοι που τα γινόμενα αδράνειας να είναι μηδέν, όπως για παράδειγμα οι κύριοι άξονες αδράνειας, η σχέση απλοποιείται σε,

$$T = \frac{1}{2}MV_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 . \quad (4.27)$$

Οι κύριοι άξονες που έχουν αρχή το κέντρο μάζας λέγονται κεντρικοί κύριοι άξονες αδράνειας. Οι κύριοι άξονες μερικές φορές λέγονται και πρωτεύοντες άξονες.

4.7 Θεώρημα μεταβολής της ολικής στροφορμής ως προς κινούμενο σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο μάζας

Έχομε ότι για σύστημα υλικών σημείων την Εξ.(1.55), αυτή θα ισχύει και για στερεό σώμα, άρα θα έχουμε,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}, \quad (4.28)$$

όπου $\vec{L}_{\mathrm{c}}$ είναι η ολική στροφορμή του συστήματος των σωματίων του στερεού περί το κέντρο μάζας του και $\vec{N}$ είναι το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων περί το κέντρο μάζας. Το κέντρο μάζας μπορεί ακόμη και να επιταχύνεται, δηλαδή μπορεί να κάνει οποιαδήποτε κίνηση. Τα διανύσματα ταχυτήτων που υπεισέρχονται αναφέρονται σε σύστημα αξόνων για τους οποίους ισχύουν ο πρώτος και δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, δηλαδή πρόκειται για αδρανειακό σύστημα.

Ας υποθέσουμε όμως ότι έχουμε το σύστημα αξόνων που εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς τους άξονες του αδρανειακού συστήματος και η κορυφή του είναι το κατά γενικό τρόπο κινούμενο κέντρο μάζας. Είναι προφανές ότι αν φανταστούμε άξονες Kx',Ky',Kz' αυτού του συστήματος, αυτοί κατά την κίνησή τους θα παραμένουν παράλληλοι προς εαυτούς και αυτούς του αδρανειακού συστήματος. Αν θεωρήσουμε ότι το αδρανειακό σύστημα είναι το απόλυτο σύστημα και το συμπαρασυρόμενο με το κέντρο μάζας με μεταφορική κίνηση είναι το κινούμενο σύστημα ως προς το οποίο τα διάφορα υλικά σημεία έχουν σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}i}$ έχουμε,

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{a}i} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{r}i} + \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}i} \quad (4.29)$$

όπου $\vec{\upsilon}_{ti}$ είναι η μετοχική ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο του κινούμενου

συστήματος μια δεδομένη χρονική στιγμή όταν συμπίπτει με το υλικό σημείο *i*. Όμως αφού έχουμε μεταφορική κίνηση ισχύει $\vec{\upsilon}_{ti} = \vec{\upsilon}_{c}$ δηλαδή όλα τα σημεία του συστήματος

κινούνται με την ίδια ταχύτητα που είναι η στιγμιαία ταχύτητα του κέντρου μάζας. Άρα

$$\vec{\upsilon}_{ai} = \vec{\upsilon}_{ri} + \vec{\upsilon}_{c}\,,\ \ \vec{\upsilon}_{ri} = \vec{\upsilon}_{ai} - \vec{\upsilon}_{c}\,.$$

Για τα διανύσματα θέσεων ισχύει

$$\vec{r}_{ri} = \vec{r}_{ai} - \vec{r}_{c}\,,$$

όπου $\vec{r}_{c}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς την αρχή του αδρανειακού συστήματος. $\vec{r}_{ai}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου *i* στο ως προς το ίδιο σημείο και $\vec{r}_{ri}$ ως προς την αρχή του κινούμενου συστήματοστο. Προκύπτει λοιπόν από τα ανωτέρω ότι η σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}$$

ισχύει όχι μόνο για κάποιο αδρανειακό σύστημα αλλά ακόμη και για μη αδρανειακό σύστημα αρκεί τα $\vec{L}$ και $\vec{N}$ να λαμβάνονται περί την αρχή των αξόνων του σύστηματος και το σύστημα να έχει ως αρχή του το κέντρο μάζας του συστήματος υλικών σημείων (ή στερεού) που εξετάζουμε και οι άξονες να έχουν μεταφορική κίνηση ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα.

4.8 Μεταβολή στροφορμής περί άξονα

Αν ισχύει η σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}$ για κάποιο σύστημα αξόνων και περί κάποιο σημείο Α,

μπορούμε να πάρουμε τις προβολές των $\vec{L}$ και $\vec{N}$ πάνω σε κάποιο σταθερό άξονα που διέρχεται δια του Α και έχουμε,

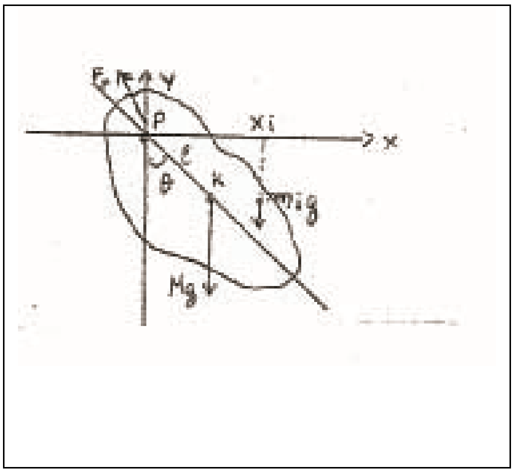
$$\frac{\mathrm{d}L_{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}t} = N_{\mathrm{n}} \qquad (4.30)$$

όπου τα L_{n} και N_{n} είναι στροφορμή και ροπή περί τον άξονα $\mathrm{A_n}$.

Παράδειγμα 1

Φυσικό εκκρεμές

Θεωρούμε το Σχ.4.2. Το τυχαίας μορφής σώμα μάζας M μπορεί να κινείται στο επίπεδο του σχήματος περί άξονα κάθετο στο επίπεδο πουδιέρχεται δια του Ρ. Το κέντρο μάζας είναι στη θέση C. Να γραφεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης του σώματος και να βρεθεί η περίοδος T της κίνησης αν περιοριστούμε στην περίπτωση που έχουμε μικρές



Σχήμα 4.2

γωνίες απόκλισης θ. Σε μια τυχαία θέση έχουμε για τις ροπές όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως προς τον άξονα Ρ,

$$N = -\sum_{i} m_i g x_i \ ,(4.31)$$

όπου η ροπή της αντίδρασης $\vec{F}_{\mathrm{P}}$ το άξονα είναι μηδέν. ΄Αρα,

$$N = -g\sum_{i} m_i x_i \ (4.32)$$

και από τον ορισμό του κέντρου μάζας έχουμε,

$$\sum_i m_i x_i = M x_{\mathrm{c}} \ (4.33)$$

επομένως αφού $x_{\mathrm{c}} = l \sin\theta$ προκύπτει,

$$N = -gMl\sin\theta \ .(4.34)$$

΄Εχουμε τη διαφορική εξίσωση για την κίνηση περί τον άξονα,

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}, \ \ L = I_{\mathrm{P}}\omega = I_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \ .(4.35)$$

Το θεώρημα του Steiner δίνει $I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{c}} + Ml^2$, άρα

$$L = (I_{\mathrm{c}} + Ml^2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \ ,(4.36)$$

επομένως έχομε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης

$$-gMl\sin\theta = (I_{\mathrm{c}} + Ml^2)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \ .$$

Το I_{c} μπορεί να υπολογιστεί αν ξέρουμε το σχήμα του σώματος και την κατανομή της μάζας σε αυτό, δηλαδή την πυκνότητα σε κάθε σημεί. Αν $\theta << 1$ τότε $\sin\theta \approx \theta$ (σε ακτίνια), οπότε καταλήγομε στη σχέση

$$(I_{\mathrm{c}} + Ml^2)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + gMl\theta = 0 \ .(4.37)$$

Κατά τα γνωστά η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι,

$$\theta = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{gMl}{I_c + Ml^2}}, \ (4.38)$$

ω είναι η κυκλική συχνότητα της περιοδικής κίνησης που προκύπτει.

Ισχύει , $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, όπου T είναι η περίοδος της κίνησης. Τελικώς

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + Ml^2}{gMl}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{I_c}{Ml^2} + 1\right)}{g/l}}. (4.39)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρήστε οι δυνάμεις, επιταχύνσεις, ταχύτητες είναι πάνω σε μια ευθεία, άξονας x. Α) Υποθέτομε ότι σε υλικό σημείο μάζας m ασκείται δύναμη F_1 η οποία εξαρτάται από την επιτάχυνση του υλικού σημείου, δηλαδή $F_1 = F_1(\ddot{x}_1)$. Έχομε από το νόμο του Νεύτωνα, $F_1(\ddot{x}_1) = m\ddot{x}_1$. Β) Στη συνέχεια στο ίδιο σωμάτιο ασκείται δύναμη η οποία υποθέτομε ότι είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη, η οποία επίσης εξαρτάται από την επιτάχυνση, έχομε τελικώς $F_2(\ddot{x}_2) = m\ddot{x}_2$. Γ) Στο σωμάτιο ασκούνται και οι δυο παραπάνω ανεξάρτητες δυνάμεις, επομένως από την αρχή της επαλληλίας οπότε τώρα η επιτάχυνση θα είναι το άθροισμα των δυο προηγούμενων, δηλαδή $\ddot{x}_3 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$ και η δύναμη θα είναι το άθροισμα των δυο παραπάνω δυνάμεων $F_3 = F_1 + F_2$. Θα ισχύει $F_3 = F_3(\ddot{x}_3)$ και $F_1 + F_2 = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)$.

Δείξτε ότι, με τις προϋποθέσεις που θέσαμε, αυτές οι διαδικασίες οδηγούν σε άτοπο, δηλαδή οι δυο δυνάμεις δεν είναι ανεξάρτητες όπως υποθέσαμε.

Αυτά σημαίνουν ότι δε μπορεί μια δύναμη που ασκείται σε σωμάτιο να εξαρτάται από την επιτάχυνση του σωματίου.

Βλέπε το βιβλίο Μηχανικής του L. A. Pars.

2. Υπολογίστε, σε πρώτη προσέγγιση, τη βαρυτική ιδιοενέργεια σφαιρικού σώματος δεδομένης ακτίνας και ομοιόμορφης πυκνότητας. Βρείτε τις τιμές της ιδιοενέργειας

U_s, της Γης και του Ήλιου σε J (joule, τζουλ), βρείτε τη μάζα $M_s = \frac{U_s}{c^2}$ στην οποία αντιστοιχεί. Η ιδιοενέργεια συμβάλλει στη μάζα του σώματος, δηλαδή η διορθωμένη μάζα M_c είναι $M_c = M + M_s$, όπου M η συνήθης μάζα ως άθροισμα των μαζών των επιμέρους σωματίων που την αποτελούν. Πόση θα έπρεπε να είναι η πυκνότητα της Γης, αν είχε την ακτίνα που έχει τώρα, ώστε η διορθωμένη μάζα της M_c να είναι $0{,}999 \times M$; Ο Ήλιος ακτινοβολεί ισχύ περίπου 4×10^{26} W, σε πόσα χρόνια χρειάζονται για να ακτινοβοληθεί η βαρυτική του ιδιοενέργεια;

3. Στο έργο Από τη Γη στη Σελήνη ο Ιούλιος Βερν αναφέρει τα εξής περιστατικά:

Οι ταξιδιώτες ήταν μέσα σε ένα βλήμα που είχε εκτοξευτεί από ένα τεράστιο κανόνι και ταξίδευαν προς το φεγγάρι. Ενώ βρίσκονταν στο διάστημα ψόφησε ένας σκύλος τους και τον έβγαλαν και τον άφησαν έξω από το όχημά τους. Με έκπληξή τους είδαν τον σκύλο από το παράθυρό τους να ακολουθεί το βλήμα. Ακόμη αναφέρει ότι όταν το βλήμα έφτασε σε ένα σημείο που η βαρυτική δύναμη της Γης έγινε ίση κατά μέτρο με τη βαρυτική δύναμη του Φεγγαριού τότε οι επιβαίνοντες έπεσαν προς το ταβάνι του βλήματος το οποίο έγινε στη συνέχεια το «πάτωμά τους». Σχολιάστε τα δυο περιστατικά.

4. Για την εκπαίδευση των αστροναυτών δημιουργούν συνθήκες έλλειψης βαρύτητας βάζοντάς τους μέσα σε αεροπλάνο το οποίο για μικρά χρονικά διαστήματα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι μια άλλη πιο απλή δυνατότητα είναι να εξισορροπηθεί το βάρος ενός αστροναύτη με εκμετάλλευση της αρχής του Αρχιμήδη (άνωση), δηλαδή να βυθιστεί ο αστροναύτης με κατάλληλο εξοπλισμό μέσα σε νερό έτσι που η άνωση να είναι ακριβώς ίση με το βάρος του. Σχολιάστε τα παραπάνω.

5. Δείξτε ότι το (διανυσματικό) άθροισμα των ροπών περί σημείο δυο αντίθετων (ίσου μέτρου) δυνάμεων που ασκούνται σε δυο διαφορετικά σημεία στο χώρο, είναι ανεξάρτητο από το σημείο περί το οποίο λαμβάνονται οι ροπές. Αυτή είναι η ροπή ζεύγους δυνάμεων.

6. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα επίπεδης γεωμετρίας. Λεπτός ομογενής κύλινδρος (δίσκος) βρίσκεται πάνω σε οριζόντια σανίδα η οποία επιταχύνεται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση, ως προς το έδαφος το οποίο να θεωρηθεί ότι είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ο κύλινδρος κινείται ως προς τη σανίδα χωρίς ολίσθηση. Ποια είναι η επιτάχυνση του κέντρου του κυλίνδρου; Ποια είναι η

γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου; Ποια είναι η δύναμη τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σανίδας; Να λυθεί με τρεις τρόπους, α) ως προς σύστημα αναφοράς το έδαφος και στροφορμή περί το κέντρο μάζας, β) ως προς το έδαφος αλλά με στροφορμή περί το σημείο επαφής του κυλίνδρου με τη σανίδα και γ) ως προς σύστημα αναφοράς επιταχυνόμενο με τη σανίδα και με στροφορμή περί το ένα από τα ανωτέρω σημεία.

7. Θεωρήστε οριζόντια άμαζη ράβδο η οποία μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο. Στα άκρα της υπάρχουν δυο διαφορετικές σημειακές μάζες που οι αποστάσεις τους από τον άξονα περιστροφής είναι γενικώς διαφορετικές. Κάποια χρονική στιγμή το σύστημα αφήνεται χωρίς αρχική κίνηση μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη ράβδο αυτή τη στιγμή.

8. Βρείτε τη σχέση για την περίοδο απλού εκκρεμούς που εκτελεί αιωρήσεις μικρού πλάτους όταν η (παθητική) βαρυτική μάζα του είναι διαφορετική από την αδρανειακή μάζα του.

9. Δυο υλικά σημεία είναι στερεωμένα στα άκρα άμαζης ράβδου. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Η ράβδος ακουμπά σε ένα στήριγμα και είναι στερεωμένη έτσι που υπό την επίδραση των δυο δυνάμεων βαρύτητας πάνω στα υλικά σημεία, της αντίδρασης του σημείου στήριξης που είναι δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω, να ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο στήριξης, δηλαδή σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα επιταχύνεται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση κάθετη στη ράβδο. Υπολογίστε τη ροπή που ασκείται στο σύστημα τη συγκεκριμένη στιγμή αν οι (παθητικές) βαρυτικές μάζες και οι αντίστοιχες αδρανειακές είναι διαφορετικές.

10. Σε λεπτό ομογενή κύλινδρο (δίσκο), με μάζα m και ακτίνα R, είναι τυλιγμένο άμαζο σχοινί του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο ταβάνι. Το σχοινί είναι αρχικά κατακόρυφο. Ο κύλινδρος αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να κινηθεί προς τα κάτω ενώ το σχοινί ξετυλίγεται. Βρείτε την επιτάχυνση του κέντρου του δίσκου και τη μηχανική τάση του σχοινιού. Δικαιολογήστε γιατί το σχοινί θα παραμείνει κατακόρυφο, παρόλο που το κέντρο μάζας του δίσκου δεν βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφο του σχοινιού. Όλα γίνονται σε κατακόρυφο επίπεδο.

11. Ας θεωρήσομε μια λεπτή ψηλή καμινάδα η οποία αρχίζει να γέρνει και να «πέφτει». Έχει παρατηρηθεί ότι τέτοιες καμινάδες καθώς πέφτουν σπάζουν σε ύψος

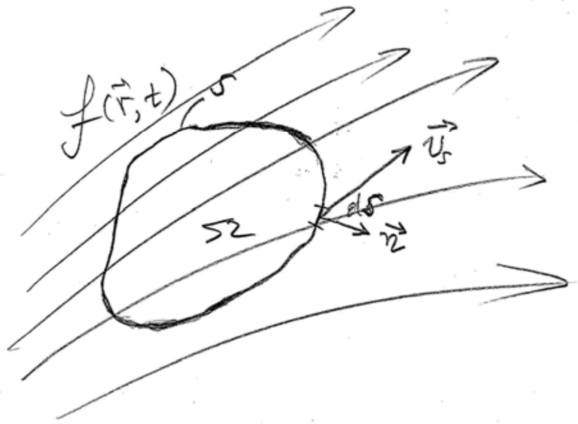
(περίπου) 1/3 του συνολικού ύψους τους. Να θεωρήσετε ότι είναι λεπτή ομογενής ράβδος ώστε κατά προσέγγιση η γνωστή ροπή αδράνειάς της περί το κέντρο μάζας της δίνεται από το γνωστό τύπο $\frac{1}{12}ml^2$. Βρείτε την διαμήκη δύναμη, την εγκάρσια δύναμη και τη ροπή που ασκεί το άνω τμήμα της καμινάδας στο κάτω τμήμα της μήκους r, στη μικρή διατομή στη θέση r από το κάτω άκρο της, ως συναρτήσεις της γωνίας θ της καμινάδας με την κατακόρυφο. Στο κάτω άκρο της ασκείται μόνο δύναμη και αυτό το άκρο δεν κινείται. Η καμινάδα αρχίζει να «πέφτει» από την κατακόρυφη θέση της χωρίς αρχικές ταχύτητες. Δικαιολογήστε από τις σχέσεις που θα βρείτε γιατί οι καμινάδες σπάζουν στο σημείο που αναφέραμε.

5. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Σε αυτή την παράγραφο θα ξεφύγομε από αυτό που είπαμε στην παράγραφο 1.4 και ακολουθήσαμε στα προηγούμενα, τώρα θα εξετάσομε την περίπτωση συστημάτων τα οποία μπορεί να ανταλλάσσουν μάζα με το περιβάλλον τους. Εννοείται ότι σε όσα ακολουθούν μπορεί να υπάρχει εκροή ή εισροή μάζας στο σύστημα που εξετάζομε ή να γίνονται και τα δυο. Όταν δεν αναφέρεται κάτι άλλο, το σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, οπότε τα διάφορα φυσικά μεγέθη αναφέρονται ως προς αυτό. Δεν πρέπει να συγχέομε την περίπτωση που η ορμή υλικού σημείου είναι η σχετικιστική ορμή της Ειδικής Σχετικότητας. Αυτή δεν είναι περίπτωση μεταβλητής μάζας. Σημειώνομε ότι μπορεί να υπάρξει μεταβολή της μάζας ένεκα θέρμανσης ή ψύξης του υλικού με κατάλληλο τρόπο έτσι ώστε να μην υπάρχει ανταλλαγή ύλης και ορμής. Σε αυτή την περίπτωση η θερμοδυναμική ενέργεια μεταβάλλεται και έτσι μεταβάλλεται η μάζα του σώματος (ισοδυναμία μάζας ενέργειας).

5.1 Ρυθμός μεταβολής της ορμής μη σχετικιστικού συστήματος μεταβλητής μάζας

Θα ξεκινήσομε με τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής της ορμής και τα σχετικά και θα εξετάζομε φαινόμενα μη σχετικιστικής Μηχανικής, οπότε δεν περιλαβάνεται ανταλλαγή σωματίων με μηδενική μάζα όπως είναι τα φωτόνια. Αυτό σημαίνει ότι δεν περιλαμβάνεται η περίπτωση ανταλλαγής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.



Σχήμα 5.1

Το θέμα μπορεί να αντιμετωπιστεί με πολλούς τρόπους. Θα το εξετάσομε ως ένα συνεχές σύστημα. Θα χρησιμοποιήσομε το θεώρημα του Leibnitz που αναφέρεται στην διαφόριση (παραγώγιση) ολοκληρώματος όγκου. Δεν θα ασχοληθούμε με την αυστηρή μαθηματική διατύπωση της μεθοδολογίας για την περίπτωση που μπορεί να υπάρχουν ασυνέχειες. Ίσως απλοϊκά μπορεί να υποτεθεί ότι η μετάβαση από τη μια περιοχή στην άλλη γίνεται ομαλά οπότε δεν υπάρχει πρόβλημα με παραγωγίσεις κτλ. Ένας άλλος πιθανός τρόπος είναι να θεωρηθεί ότι το σύστημα αποτελείται από επιμέρους τμήματα το καθένα χωρίς ασυνέχειες και στη συνέχεια να προχωρήσει στη «συνένωσή» τους.

Το θεώρημα Leibnitz εκφράζεται με τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} f(\vec{r},t)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_{S} f(\vec{r},t)\vec{\upsilon}_S \cdot \vec{n}\mathrm{d}S \qquad (5.1)$$

και ισχύει το Σχήμα 5.1. Εξετάζομε τι γίνεται μέσα σε μεταβλητό με το χρόνο όγκο Ω ο οποίος περιβάλλεται από αντίστοιχη μεταβλητή με το χρόνο επιφάνεια S ενώ διαμέσου της επιφάνειας μπορεί να έχομε ροή μάζας και κατά συνέπεια ορμής και ενέργειας. Η ροή παριστάνεται με τα βέλη στο Σχήμα 5.1. Για τον όγκο και την επιφάνεια χρησιμοποιούνται οι όροι όγκος ελέγχου, σύστημα ελέγχου και επιφάνεια ελέγχου. $\vec{n}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια στη θέση του $\mathrm{d}S$ με κατεύθυνση προς τα έξω. $\vec{\upsilon}_S = \vec{\upsilon}_S(\vec{r},t)$ είναι η τοπική ταχύτητα της επιφάνειας στην ίδια θέση. $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης και t είναι ο χρόνος. Παρόλο τον απλοϊκό συμβολισμό μας για το $f(\vec{r},t)$, αυτό μπορεί να είναι μια βαθμωτή συνάρτηση των $\vec{r},t$ δηλαδή ένα βαθμωτό πεδίο, ένα διανυσματικό ή γενικώς ένα τανυστικό πεδίο. Θα χρησιμοποιήσομε το θεώρημα Leibnitz για βαθμωτό και για διανυσματικό πεδίο. Αν η επιφάνεια ελέγχου και επομένως ο όγκος ελέγχου (δηλαδή ο όγκος του συστήματος) είναι σταθερά, τότε $\vec{\upsilon}_S = 0$.

Έστω ότι το $f(\vec{r},t)$ είναι η πυκνότητα μάζας, δηλαδή το $\rho(\vec{r},t)$ ρευστού που κινείται. Η μάζα M του ρευστού που είναι μέσα στον όγκο Ω τη στιγμή t (στιγμιαία μάζα) είναι

$$M = \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\Omega . \quad (5.2)$$

Με χρήση της (5.1) καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_{S} \rho(\vec{\upsilon}_S \cdot \vec{n})\mathrm{d}S \; . \qquad (5.3)$$

Έστω ότι $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r},t)$ είναι η (στιγμιαία) ταχύτητα του ρευστού στη θέση $\vec{r}$ τη στιγμή t. Το θεώρημα της απόκλισης για το ρεύμα μάζας (ροή μάζας) $\rho\vec{u}$, δίνει

$$\int_{S} \rho\vec{u} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u})\mathrm{d}\Omega . \qquad (5.4)$$

Από τις (5.3) και (5.4) καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{S} \rho(\vec{\upsilon}_S - \vec{u}) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S . \quad (5.5)$$

Από τη διατήρηση της μάζας, σε κάθε σημείο, έχομε ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})=0 . \quad (5.6)$$

Το ότι πράγματι ισχύει αυτή η σχέση διατήρησης προκύπτει από την (5.5) ως εξής, θεωρούμε ότι $\vec{\upsilon}_S = \vec{u}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας, έτσι το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση δεν ανταλλάσσεται μάζα με το περιβάλλον οπότε η μάζα είναι σταθερή άρα $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0$. Έτσι η (5.5) μας οδηγεί στο ότι το ολοκλήρωμα όγκου είναι μηδέν. Επειδή ο όγκος ελέγχου μπορεί να ληφθεί αυθαίρετα, μπορούμε να φανταστούμε ότι είναι αρκούντως μικρός (όλες οι διαστάσεις του μικρές) έτσι που η υπό ολοκλήρωση ποσότητα, η οποία θεωρείται συνεχής συνάρτηση της θέσης, να μην αλλάζει πρόσημο μέσα στον όγκο. Αυτό σημαίνει ότι η υπό ολοκλήρωση ποσότητα πρέπει να είναι μηδεν, δηλαδή ισχύει η σχέση (5.6). Αυτό όμως είναι ένα γενικό αποτέλεσμα διότι στο ολοκλήρωμα όγκου και στη σχέση (5.6) δεν υπάρχει η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_S$ της επιφάνειας, οπότε η σχέση (5.6) ισχύει και όταν $\vec{\upsilon}_S \neq \vec{u}$ στην επιφάνεια.

Επομένως η (5.5) γίνεται

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_S \rho(\vec{\upsilon}_S - \vec{u}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S . \quad (5.7)$$

Αν η επιφάνεια ελέγχου είναι ακίνητη τότε $\vec{\upsilon}_S = 0$, οπότε

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\int_S \rho\vec{u} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S . \quad (5.8)$$

Αν $\vec{\upsilon}_S = \vec{u}$ στην επιφάνεια τότε από την (5.7) συνάγεται ότι η μάζα παραμένει στο εσωτερικό της επιφάνειας ελέγχου οπότε $M =$ σταθ.

Η ορμή του ρευστού που τη στιγμή t είναι μέσα στην επιφάνεια S, ισούται με

$$\vec{P} = \int_\Omega \rho\vec{u} \mathrm{d}\Omega . \quad (5.9)$$

Χρησιμοποιούμε την (5.1) θέτοντας όπου f το $\rho\vec{u}$ και βρίσκομε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\vec{u} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho\vec{u}(\vec{\upsilon}_S \cdot \vec{n})\mathrm{d}S . \quad (5.10)$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να εισαγάγομε τον τανυστή $\rho\vec{u}\vec{u}$ ροής της ορμής, να κάμομε χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και του θεωρήματος Leibnitz για την περίπτωση τανυστή και να βρούμε το τελικό αποτέλεσμα. Θα ακολουθήσομε πιο απλή μέθοδο χωρίς τανυστές αλλά με περισσότερα βήματα.

Επικεντρώνομε την προσοχή μας στην υπό ολοκλήρωση έκφραση του πρώτου ολοκληρώματος στο τελευταίο μέλος της (5.10). Χρησιμοποιούμε και τη σχέση της συνέχειας (5.6), δηλαδή της διατήρησης της μάζας, οπότε βρίσκομε

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) . \quad (5.11)$$

Για την καρτεσιανή συνιστώσα $u_x = u_x(\vec{r},t)$ έχομε τη σχέση

$$\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u_x . \quad (5.12)$$

Ανάλογα ισχύουν για τις καρτεσιανές συνιστώσες u_y, u_z.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,, \qquad (5.13)$$

θέτομε $\psi = u_x, \vec{a} = \rho\vec{u}$, οπότε για την καρτεσιανή συνιστώσα x της (5.11) έχομε τη σχέση

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} = \rho\dot{u}_x - \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}u_x - u_x\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \rho\dot{u}_x - \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}u_x\right)\,. \quad (5.14)$$

Με χρήση της (5.14) και των αντίστοιχων σχέσεων για τις καρτεσιανές συνιστώσες y και z και της (5.10), βρίσκομε τη διανυσματική σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega}\rho\dot{\vec{u}}\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\rho\vec{u}\left((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \qquad (5.15)$$

Για το διάνυσμα της επιτάχυνσης του ρευστού $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r},t)$ που είναι ένα διανυσματικό πεδίο, ισχύει

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\left(= \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right).$$

Επομένως η (5.15) γίνεται

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega}\rho\vec{a}\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\rho\vec{u}\left((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \quad (5.16)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από το $\vec{\upsilon}_S$, αν θεωρήσομε ότι στα σημεία της επιφάνειας $\vec{\upsilon}_S = \vec{u}$, τότε έχομε σύστημα σταθερής μάζας οπότε ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής δίνει

$$\vec{F} = \int_{\Omega}\rho\vec{a}\mathrm{d}\Omega\,. \quad (5.17)$$

$\vec{F}$ είναι η συνισταμένη μόνο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στη σταθερή μάζα του συστήματος, αυτό είναι σωστό διότι υποθέτομε ότι ισχύει η αρχή δράσης αντίδρασης για τις εσωτερικές δυνάμεις. Επομένως αφού το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.17) δεν εξαρτάται από την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_S$ της επιφάνειας, θα ισχύει και όταν $\vec{\upsilon}_S \neq \vec{u}$, επομένως από την (5.16) καταλήγομε στις γενικές σχέσεις

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \int_S \rho\vec{u}\left((\vec{u} - \vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S \qquad (5.18)$$
$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} - \vec{\Phi}\ .$$

$\vec{\Phi} = \int_S \rho\vec{u}\left((\vec{u} - \vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S$ είναι η ροή (το ρεύμα) της ορμής δια μέσου της επιφάνειας ελέγχου, η ροή θεωρείται θετική όταν εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου. Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα για τη ροή ορμής, οι τιμές των μεγεθών $\rho, \vec{u}, \vec{\upsilon}_S$ είναι αυτές που έχουν τα αντίστοιχα μεγέθη στην επιφάνεια στο σημείο που η κάθετος είναι $\vec{n}$. Μπορούμε να πούμε ότι αυτή είναι η γενική διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της δυναμικής για συστήματα τα οποία ανταλλάσουν μάζα με το περιβάλλον τους.

Το συμέρασμα είναι ότι η συνολική εξωτερική δύναμη η οποία ασκείται στη μάζα που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής μέσα στον όγκο μείον τη ροή ορμής διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου προς τα έξω.

Η ισχύς της (5.17) μπορεί να κατανοηθεί επίσης, αν σκεφτούμε ότι το ολοκλήρωμα όγκου της (5.16) είναι άθροισμα της μορφής $\sum_i \Delta m_i \vec{a}_i$ και προφανώς ισχύει $\vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$, όπου $\vec{f}_i$ είναι η συνολική δύναμη πάνω στο Δm_i (εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις). Με την άθροιση θα έχομε προφανώς συμβολή μόνο των εξωτερικών δυνάμεων, άρα $\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i$, δηλαδή βρίσκομε την (5.17). Όταν $\vec{u} = \vec{\upsilon}_S$ στην επιφάνεια, παίρνομε το γνωστό αποτέλεσμα

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \qquad (5.19)$$

Όμως πρέπει να σημειώσομε ότι αφού $\vec{u} = \vec{\upsilon}_S$ στην επιφάνεια, η σχέση (5.19) δεν είναι τόσο γενική όσο φαίνεται αλλά ισχύει μόνο για σύστημα με σταθερή μάζα.

Αν η επιφάνεια ελέγχου είναι ακίνητη, τότε $\vec{\upsilon}_S = 0$ οπότε η (5.18) γίνεται

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \int_S \rho\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\ . \qquad (5.20)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι από τις γενικές σχέσεις (5.10) και (5.18) βρίσκομε

$$\vec{F} = \int_\Omega \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S\ . \qquad (5.21)$$

Αυτή η σχέση είναι γενική και ισχύει για κάθε $\vec{\upsilon}_S, \vec{u}$. Η φαινομενική απλούστευση είναι παραπλανητική, η εφαρμογή της στην πράξη είναι πιο πολύπλοκη από ότι η εφαρμογή της (5.16), ουσιαστικά η (5.21) πρακτικά, θα οδηγήσει πίσω στην (5.16)..

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο κέντρο μάζας. Η θέση του κέντρου μάζας $\vec{R}_c$ ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{R}_c = \frac{\int_\Omega \rho \vec{r} \mathrm{d}\Omega}{M}. \quad (5.22)$$

M είναι η μάζα που υπάρχει τη δεδομένη στιγμή στον όγκο ελέγχου Ω.

Παραγωγίζομε ως προς το χρόνο οπότε βρίσκομε

$$\vec{V}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_c}{\mathrm{d}t}, \quad M\vec{V}_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho \vec{r} \mathrm{d}\Omega - \vec{R}_c \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}. \qquad (5.23)$$

Από την (5.1) θέτοντας όπου f το $\rho\vec{r}$ βρίσκομε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho \vec{r} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{\partial(\rho\vec{r})}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho\vec{r}(\vec{\upsilon}_S \cdot \vec{n})\mathrm{d}S. \quad (5.24)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσομε το θεώρημα της απόκλισης για τον τανυστή ροής της ροπής της πυκνότητας μάζας, που είναι ο $\rho\vec{r}\vec{u}$. Προτιμούμε και σε αυτή την περίπτωση να ακολουθήσομε διαδικασία χωρίς τανυστές, η οποία είναι εννοιολογικά απλούστερη. Η «ροπή» της (πυκνότητας) μάζας είναι $\rho\vec{r}$. Θα εφαρμόσομε το θεώρημα της απόκλισης για σταθερή επιφάνεια την οποία θεωρούμε ότι συμπίπτει στιγμιαία με την επιφάνεια ελέγχου και τον αντίστοιχο όγκο ελέγχου μια χρονική στιγμή, η επιφάνεια είναι σταθερή, ακίνητη, «παγωμένη». Η στοιχειώδης ροή αυτού του διανυσματικού πεδίου από τη στοιχειώδη επιφάνεια $\mathrm{d}S$ στη θέση που το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα είναι $\vec{n}$, ισούται με $\rho\vec{r}(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S$. Δηλαδή, η ροή μέσα από την ακίνητη επιφάνεια ελέγχου είναι

$$\int_S \rho\vec{r}(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S \quad . \quad (5.25)$$

Η συνιστώσα της ροής κατά την κατεύθυνση του καρτεσιανού άξονα συντεταγμένων x, είναι

$$\int_S \rho x(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S. \quad (5.26)$$

Εισάγομε τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{f}_x = \rho x \vec{u}$ για τον άξονα x και εφαρμόζομε το θεώρημα της απόκλισης το οποίο ισύει κάθε (παγωμένη) στιγμή, οπότε έχομε

$$\int_S \rho x(\vec{u}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S = \int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{f}_x \mathrm{d}\Omega\,. \quad (5.27)$$

Η (5.24) για την καρτεσιανή συνιστώσα x δίνει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho x \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{\partial(\rho x)}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho x(\vec{\upsilon}_S\cdot\vec{n})\mathrm{d}S\,. \quad (5.28)$$

Συνδυάζομε κατάλληλα τις (5.27), (5.28) και βρίσκομε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho x \mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \left(\frac{\partial(\rho x)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{f}_x\right)\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho x\big((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\big)\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}x + \rho\frac{\partial x}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{f}_x\right)\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho x\big((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\big)\mathrm{d}S\;. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} \\ \rho\dot{x} &= \rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\partial x}{\partial t} + \rho\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)x\;. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Χρησιμοποιούμε την (5.6) και σε συνδυασμό με τις (5.29), (5.30) βρίσκομε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho x \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left(\rho\dot{x} - \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})x - x\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{f}_x\right)\mathrm{d}\Omega + \int_S \rho x\left(\vec{\upsilon}_S - \vec{u}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\,. \quad (5.31)$$

Χρησιμοποιούμε την (5.13) θέτοντας $\vec{a} = \rho\vec{u},\ \psi = x$, οπότε βρίσκομε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_x = \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}x + x\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\,. \quad (5.32)$$

Αντικαθιστούμε στην (5.31). Στη συνέχεια είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})x = \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}x$. Ανάλογη διαδικασία ισχύει και για τους καρτεσιανούς άξονες y, z. Δίνομε το τελικό αποτέλεσμα για τον άξονα x και τη διανυσματική μορφή του τελικού αποτελέσματος

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho x \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega}\rho\dot{x}\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\rho x\left(\vec{\upsilon}_S - \vec{u}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\vec{r}\mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega}\rho\vec{u}\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\rho\vec{r}\left(\vec{\upsilon}_S - \vec{u}\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \quad .
\end{aligned} \qquad (5.33)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της διανυσματικής σχέσης είναι η ορμή $\vec{P}$ του ρευστού το οποίο τη στιγμή t καταλαμβάνει τον όγκο Ω, επομένως

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\vec{r}\mathrm{d}\Omega = \vec{P} + \int_{S}\rho\vec{r}\left((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \quad (5.34)$$

Χρησιμοποιούμε τις (5.7), (5.34) και τη δεύτερη από τις σχέσεις (5.23) και καταλήγομε στη σχέση

$$M\vec{V}_{\mathrm{c}} = \vec{P} + \int_{S}\rho(\vec{r} - \vec{R}_{\mathrm{c}})\left((\vec{\upsilon}_S - \vec{u})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \quad (5.35)$$

Από αυτήν βρίσκομε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(M\vec{V}_{\mathrm{c}})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S}\rho(\vec{r} - \vec{R}_{\mathrm{c}})\left((\vec{u} - \vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \quad (5.36)$$

Αν $\vec{u} = \vec{\upsilon}_S$ στην επιφάνεια, τότε η μάζα είναι σταθερή και έχομε

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(M\vec{V}_{\mathrm{c}})}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\vec{V}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = M\vec{A}_{\mathrm{c}} \quad . \quad (5.37)$$

$\vec{A}_{\mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

Με χρήση της (5.36) και της πρώτης από τις (5.18) καταλήγομε στην (5.38) η οποία αντιπροσωπεύει τη θεμελιώδης σχέση της δυναμικής για συνεχές σύστημα με μεταβλητή μάζα συναρτήσει της κίνησης του κέντρου μάζας.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(M\vec{V}_{\mathrm{c}})}{\mathrm{d}t} + \int_{S}\rho\vec{u}\left((\vec{u} - \vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S}\rho(\vec{r} - \vec{R}_{\mathrm{c}})\left((\vec{u} - \vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\,. \quad (5.38)$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκομε ότι αν $\vec{u} = \vec{\upsilon}_S$ στην επιφάνεια, πράγμα που σημαίνει ότι η μάζα είναι σταθερή, τότε ισχύει η σχέση

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(M\vec{V}_{\mathrm{c}})}{\mathrm{d}t}\,. \quad (5.39)$$

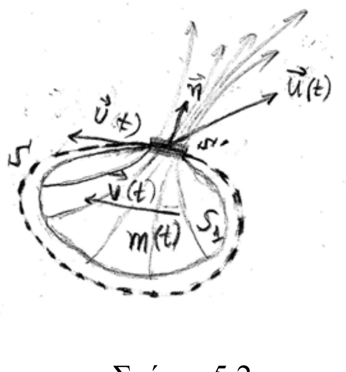
Χρειάζεται να τονίσομε ότι αυτή η σχέση ισχύει μόνο για $M =$σταθ. , οπότε ουσιαστικά σημαίνει ότι είναι ίδια με την

$$\vec{F} = M\vec{A}_{\mathrm{c}} . \quad (5.40)$$

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν η επιφάνεια ελέγχου είναι ακίνητη, τότε $\vec{\upsilon}_S = 0$ και βρίσκομε τη σχέση

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(M\vec{V}_{\mathrm{c}})}{\mathrm{d}t} + \int_S \rho\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \rho(\vec{r} - \vec{R}_{\mathrm{c}})\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S . \quad (5.41)$$

Στη συνέχεια θα γράψομε τις εξισώσεις για μιαν απλή περίπτωση που συνήθως απαντά στη βιβλιογραφία με ικανοποιητικές απλοποιημένες προσεγγίσεις. Θα αλλάξομε λίγο τον συμβολισμό ώστε να συμφωνεί με αυτόν που συνήθως χρησιμοποιείται διεθνώς για αυτή την περίπτωση. Θα περιοριστούμε σε απλές περιπτώσεις προβλημάτων, βλέπε Σχήμα 5.2, όπου όλα τα σωμάτια της μάζας $m = m(t)$ τα οποία βρίσκονται (στιγμιαία) στο εσωτερικό της επιφάνειας ελέγχου S ενώ μπορεί να καταλαμβάνουν μικρότερο όγκο δηλαδή μπορεί να είναι μέσα στην επιφάνεια S_1, κινούνται με την ίδια (στιγμιαία) διανυσματική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ ή σωστότερα, ότι αυτό ισχύει για το μεγαλύτερο μέρος του όγκου ελέγχου εκτός από μια περιοχή κοντά στην επιφάνεια S' από όπου μπορεί να ανταλλάσσεται μάζα. Δηλαδή έχομε μια κυρίαρχη ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$.



Σχήμα 5.2

Επίσης η (στιγμιαία) ταχύτητα με την οποία κινείται όλη η επιφάνεια ελέγχου ή τουλάχιστο η παραπάνω περιοχή S', έχει μια μοναδική τιμή ίση με την κυρίαρχη ταχύτητα, δηλαδή ισούται με $\vec{\upsilon}(t)$. Υποθέτομε ότι σχετικά κοντά στην περιοχή ανταλλαγής μάζας (μέσα και έξω από την επιφάνεια), η ταχύτητα των σωματίων της μάζας (δηλαδή του «ρευστού») είναι ίδια και ίση με $\vec{u}(t)$ η οποία γενικώς είναι διαφορετική από την κυρίαρχη ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$. Η ανταλλαγή μάζας οδηγεί σε ρυθμό μεταβολής της μάζας $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Οι (5.33) μας λένε ότι $\vec{P}=\int_{\Omega}\rho\vec{\upsilon}\mathrm{d}\Omega$. Υποθέτομε ότι ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε να ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\upsilon}\int_{\Omega}\rho\mathrm{d}\Omega\right)=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}. \quad (5.42)$$

Το ολοκλήρωμα ροής από τις (5.18) περιορίζεται στην περιοχή S' της επιφάνειας από όπου γίνεται ανταλλαγή μάζας, οπότε γίνεται

$$\int_{S'}\rho\vec{u}\left((\vec{u}-\vec{\upsilon})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S. \quad (5.43)$$

Για ευκολία η S' μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη και το ρ το ίδιο παντού κοντά στην S'. Διαπιστώνεται σχετικά εύκολα ότι η έκφραση $\left((\vec{u}-\vec{\upsilon})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S$ δίνει το ρυθμό «ανταλλαγής» όγκου, οποτε ο πολλαπλασιασμός επί ρ δίνει το ρυθμό ανταλλαγής μάζας, άρα τελικώς

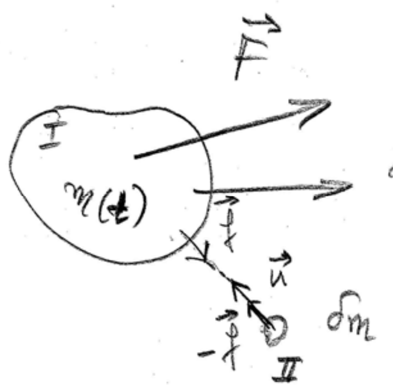
$$\int_{S'}\rho\vec{u}\left((\vec{u}-\vec{\upsilon})\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S=-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \quad (5.44)$$

Επομένως η (5.18) γίνεται

$$\begin{aligned}
&\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\
&\text{ή } \vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{u}-\vec{\upsilon})\ =m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} \qquad (5.45)\\
&\text{ή } \dot{\vec{P}}=\vec{F}-\vec{\Phi}.
\end{aligned}$$

$\vec{u}-\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ είναι η σχετική ταχύτητα ως προς την επιφάνεια της ανταλασσόμενης μάζας. Για τη ροή ορμής σχύει $\vec{\Phi}=-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$.

Σε αυτή την ειδική περίπτωση, οι σχέσεις (5.45) μπορεί να δειχτούν με πολύ απλούστερο τρόπο από αυτόν που ακολουθήσαμε στα προηγούμενα, συγκεκριμένα, μπορεί να δειχτούν με απλή εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα. Θεωρούμε το Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3

Έχομε ένα σύστημα που αποτελείται από δυο σώματα τα Ι και ΙΙ. Το σώμα Ι έχει μάζα $m = m(t)$ που πριν ενωθεί με το σώμα ΙΙ έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$. Αυτό αντιστοιχεί σε εισροή μάζας στο μεγάλο σύστημα Ι, όμως μπορεί να δειχτεί ότι οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για εκροή μάζας από το σύστημα Ι. Χαρακτηρίζομε ως εξωτερική τη δύναμη που ασκείται από σώματα εκτός των Ι και ΙΙ. Η εξωτερική δύναμη που ασκείται κάθε στιγμή στο σώμα Ι είναι $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Το μικρό σώμα ΙΙ έχει μάζα δm και ταχύτητα $\vec{u}(t)$ πριν ενωθεί (συγκρουστεί) με το Ι, πάνω του ασκείται εξωτερική δύναμη $\delta\vec{F}$ η οποία τείνει στο μηδέν αν το $\delta m \to 0$ έτσι που και σε αυτό το όριο η επιτάχυνση να είναι πεπερασμένη. Οι δυνάμεις $\vec{f}, \ -\vec{f}$ είναι οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο κατά την ενσωμάτωσή τους (κρούση τους) που διαρκεί πολύ λίγο, είναι εσωτερικές δυνάμεις. Έχομε δεχτεί ότι ισχύει η αρχή δράση-αντίδραση. Γράφομε το θεώρημα της ορμής για το σύστημα Ι+ΙΙ λίγο μετά και λίγο πριν από την κρούση. Λίγο μετά την κρούση η μάζα του συστήματος Ι+ΙΙ είναι $m(t) + \delta m(t)$ και αυτό κινείται με (ενιαία) ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t + \delta t)$. Η συνολική εξωτερική δύναμη πάνω στο σύστημα Ι+ΙΙ είναι λίγο μετά την κρούση $\vec{F}(t + \delta t) = \vec{F}(t) + \delta\vec{F}(t)$. Μπορούμε να πούμε ότι μετά την κρούση το μικρό σώμα δεν υπάρχει αφού ενσωματώθηκε με το άλλο. Λίγο πριν την κρούση το σώμα Ι έχει μάζα $m(t)$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ ενώ το σώμα ΙΙ έχει μάζα δm και ταχύτητα $\vec{u}(t)$ ενώ η δύναμη πάνω του είναι $\delta\vec{F}$. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος Ι+ΙΙ μετά και πριν την κρούση, δηλαδή στο μικρό χρονικό διάστημα δt, είναι

$$\delta\vec{P} = \left[\left(m(t)+\delta m(t)\right)\vec{\upsilon}(t + \delta t)\right] - \left[m(t)\vec{\upsilon}(t)+\delta m(t)\vec{u}(t)\right]. \quad (5.46)$$

Η ώθηση των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{t_1}^{t_1+\delta t} \vec{F}'\mathrm{d}t = \vec{F}'\delta t$. Η $\vec{F}'$ είναι συνολική δύναμη στο σύστημα I+II. Αυτή θα έχει τιμές μεταξύ $\vec{F}(t) + \delta\vec{F}(t)$ και $\vec{F}(t+\delta t) + \delta\vec{F}(t+\delta t)$. Αυτές οι εξωτερικές δυνάμεις δεν είναι κρουστικές άρα είναι πεπερασμένες. Επίσης είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου και $\delta\vec{F} \to 0$ όταν $\delta m \to 0$, άρα

$$\vec{F}' \approx \vec{F}(t+\delta t) + \delta\vec{F}(t+\delta t) \approx \vec{F}(t) + \delta\vec{F}(t) \approx \vec{F}(t). \quad (5.47)$$

Τελικώς παραλείποντας διαφορικά ανώτερης τάξης, διαιρόντας δια δt, στο όριο που $\delta t \to 0$, βρίσκομε ότι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + (\vec{u} - \vec{\upsilon})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\ . \end{aligned} \qquad (5.48)$$

Δηλαδή ξαναβρίσκομε τις εξισώσεις (5.45). Η έκφραση $\vec{F}_{\mathrm{th}} = (\vec{u} - \vec{\upsilon})\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ συνηθίζεται να λέγεται προωθητική δύναμη ή δύναμη προώθησης ή απλώς προώθηση (thrust). Με τη χρήση της έννοιας της (δύναμης) προώθησης η πρώτη από τις (5.48) γίνεται

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{th}} \\ \vec{F}_{\mathrm{th}} &= (\vec{u} - \vec{\upsilon})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\ . \end{aligned} \qquad (5.49)$$

Μπορούμε να πούμε ακόμη, ότι αυτή η σχέση ορίζει την $\vec{F}_{\mathrm{th}}$. Αυτή είναι μια χρήσιμη έννοια στην επιστήμη των πυραύλων.

Πολλές φορές ένα σύστημα μεταβλητής μάζας μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα υλικό σημείο, σωμάτιο.

5.2 Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής μη σχετικιστικού συστήματος μεταβλητής μάζας

Θα δώσομε τη σχέση που ισχύει για την περίπτωση περιστροφής συστήματος μεταβλητής μάζας χωρίς απόδειξη. Η διαδικασία είναι ανάλογη της διαδικασίας της Παρ. 5.1 . Για την ορμή έχομε την (5.18), δηλαδή

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \int_S \rho\vec{u}\left((\vec{u}-\vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S$$
$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} - \vec{\Phi}\ . \quad (5.50)$$

Τα σύμβολα έχουν το νόημα που αναφέραμε στην εν λόγω παράμετρο.

Έστω ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο στο αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο αδρανειακό σύστημα περιγράφεται η κίνηση. Παριστάνομε με $\vec{N}$ τη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα υλικά σημεία του συστήματος που εξετάζομε περί το ανωτέρω σταθερό σημείο. Υποθέτομε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος ακολουθούν την ισχυρή αρχή δράσης αντίδρασης, δηλαδή η δράση και αντίδραση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία που ενώνει τα δυο σωμάτια που αλληλεπιδρούν. $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης σε σχέση με το παραπάνω σταθερό σημείο. Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος περί το εν λόγω σημείο, τη χρονική στιγμή t είναι

$$\vec{L} = \int_\Omega \rho(\vec{r}\times\vec{u})\mathrm{d}\Omega\ . \quad (5.51)$$

Είναι προφανής η σημασία των $\vec{u},\vec{\upsilon}_S$. Ενοείται ότι το σταθερό σημείο μπορεί να είναι η αρχή των αξόνων του αδρανειακού συστήματος. Η ροή (το ρεύμα) στροφορμής $\vec{\Psi}$ δια μέσου της επιφάνειας ένεκα ανταλλαγής μάζας με το περιβάλλον είναι

$$\vec{\Psi} = \int_S \rho(\vec{r}\times\vec{u})\left((\vec{u}-\vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S\ . \quad (5.52)$$

Μπορούμε να γράψομε για τη σχετική ταχύτητα εκροής, κατά τα γνωστά, $\vec{\upsilon}_\mathrm{r} = \vec{u}-\vec{\upsilon}_S$. Τελικώς, χωρίς απόδειξη, δίνομε την εξίσωση για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής η οποία είναι

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \int_S \rho(\vec{r}\times\vec{u})\left((\vec{u}-\vec{\upsilon}_S)\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S$$
$$\dot{\vec{L}} = \vec{N} - \vec{\Psi}\ . \quad (5.53)$$

Στην περίπτωση που στην επιφάνεια έχομε $\vec{u} = \vec{\upsilon}_S$, τότε δεν γίνετα ανταλλαγή μάζας, το σύστημα έχει σταθερή μάζα οπότε καταλήγομε στη γνωστή σχέση

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}$$

μεταξύ της ολικής στροφορμής του συστήματος και της ολικής εξωτερικής ροπής που ασκείται στο σύστημα.

5.3 Εισαγωγή στα σχετικιστικά συστήματα μεταβλητής μάζας

Στη συνέχεια θα πούμε δυο λόγια για τη δυναμική σχετικιστικών συστημάτων μεταβλητής μάζας. Αναφερόμαστε στην Ειδική Σχετικότητα. Αυτή η περίπτωση χρειάζεται προσοχή διότι η μάζα ενός συστήματος δεν είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των επιμέρους τμημάτων του συστήματος, πράγμα που συμβαίνει στη μη σχετικιστική Μηχανική. Η σωστή μελέτη γίνεται εφαρμόζοντας τις αρχές της σχετικότητας για τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Τα αποτελέσματα συμπίπτουν με αυτά της μη σχετικιστικής περίπτωσης για αρκούντως μικρές ταχύτητες, δηλαδή πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Θα χειριστούμε σύστημα μεταβλητής μάζας όμοιο με αυτό για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις (5.48), (5.45).

Υποθέτομε ότι μελετούμε την κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σύστημα Lorentz. Θα εξετάσομε την περίπτωση που έχομε εισροή μάζας σε ένα σύστημα, όμως εύκολα δείχνεται ότι οι σχέσεις είναι ίδιες και για την περίπτωση εκροής μάζας από το σύστημα. Έστω ότι έχομε ένα υλικό σύστημα που για ευκολία θα υποθέσομε ότι είναι αμελητέων διαστάσεων (σωμάτιο). Αυτό το σωμάτιο έχει στιγμιαία μάζα m και κινείται με στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Η (σχετικιστική) ορμή του είναι $\gamma m\vec{\upsilon}$ και η (σχετικιστική) ενέργειά του είναι γmc^2, κατά τα γνωστά $\gamma = \left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{-1/2}$. Υποθέτομε ότι ένα (εξωτερικό σε σχέση με το προηγούμενο) σωμάτιο έχει μικρή μάζα $\mathrm{d}m_u$, κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ και ενσωματώνεται μετά από σύγκρουση με το προηγούμενο οπότε αποτελούν ένα συσσωμάτωμα. Η ορμή που το δεύτερο σωμάτιο μεταφέρει στο συσσωμάτωμα, είναι $\mathrm{d}m_u\gamma_u\vec{u}$ ενώ η ενέργεια που μεταφέρει στο συσσωμάτωμα είναι $\mathrm{d}m_u\gamma_u c^2$, ισχύει $\gamma_u = \left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}$. Η (εξωτερική) δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι $\vec{F}$. Οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των δυο σωματίων ακολουθούν την ισχυρή μορφή του νόμου δράσης αντίδρασης οπότε με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στην αντίστοιχη μη σχετικιστική περίπτωση καταλήγομε ότι στην σχέση που θα προκύψει δεν υπεισέρχονται αυτές οι εσωτερικές δυνάμεις αλλά μόνον η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$. Το θεώρημα ώθησης - ορμής (δηλαδή το θεώρημα μεταβολής της ορμής) και η αρχή διατήρησης της (σχετικιστικής) ενέργειας δίνουν για το πρώτο σωμάτιο, αντιστοίχως τις δυο σχέσεις

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\left(\gamma m\vec{\upsilon}\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}\gamma_u \vec{u}\\ \frac{\mathrm{d}\left(\gamma m c^2\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} + \frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}\gamma_u c^2 \ .\end{aligned} \qquad (5.54)$$

Από τις (5.54) και εφόσον ισχύει $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\gamma^3 \upsilon}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$, καταλήγομε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\gamma\left(1-\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}/c^2\right)} = \frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t}\gamma_u . \quad (5.55)$$

Από τις (5.54), (5.55) βρίσκομε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\left(\gamma m\vec{\upsilon}\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}}{\gamma\left(1-\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}/c^2\right)}\\ \frac{\mathrm{d}\left(\gamma m\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}/c^2 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\gamma\left(1-\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}/c^2\right)} \ .\end{aligned} \qquad (5.56)$$

Η προώθηση καθορίζεται από την ανάλογη της (5.49) η οποία στη σχετικιστική περίπτωση είναι

$$m\frac{\mathrm{d}(\gamma\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{th}} . \quad (5.57)$$

Μπορεί να δειχτεί ότι η προώθηση ισούται με

$$\vec{F}_{\mathrm{th}} = \frac{dm}{dt}\frac{1}{\gamma\left(1-\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}/c^2\right)}\left[\vec{u}-\vec{\upsilon}+\frac{\gamma^2\vec{\upsilon}}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot(\vec{u}-\vec{\upsilon})\right)\right]. \quad (5.58)$$

Έστω $\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}$ η ταχύτητα του σωματίου $\mathrm{d}m_u$ ως προς το σύστημα ηρεμίας του συστήματος μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς το σύστημα αδρανείας. Η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα του $\mathrm{d}m_u$ ως προς το σύστημα αδρανείας. Η σχετικιστική σχέση για την «πρόσθεση» ταχυτήτων είναι

$$\vec{u} = \frac{\gamma\vec{\upsilon} + \left(\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\upsilon}\,/\,\upsilon^2\right)\vec{\upsilon}\left(\gamma-1\right)+\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}}{\gamma\left(1+\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\upsilon}\,/\,c^2\right)}. \quad (5.59)$$

Από την πρώτη εκ των σχέσεων (5.56) και την (5.59) καταλήγομε στην

$$m\frac{\mathrm{d}\left(\gamma\vec{\upsilon}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} + \frac{\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\vec{\upsilon}(\gamma-1)\right]. \quad (5.60)\backslash$$

Επίσης για την προωθητική δύναμη μπορούμε να γράψομε

$$\vec{F}_{\mathrm{th}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}} + \frac{\vec{\upsilon}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\vec{\upsilon}\left(\gamma-1\right)\right]. \quad (5.61)$$

Για $\upsilon \ll c$ η πρώτη από τις (5.56) γίνεται ίδια με τη δεύτερη από τις (5.48) και η (5.58) γίνεται ίδια με τη δεύτερη από τις (5.49), δηλαδή έχομε τη μη σχετικιστική προσέγγιση.

Μπορούμε να βρούμε διάφορες άλλες μορφές των ανωτέρω εξισώσεων αλλά περιοριζόμαστε μόνο στις παραπάνω.

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι η μεταβολή της μάζας του πρώτου συστήματος με μάζα m και ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ γίνονταν ένεκα εκροής ή εισροής υλικών σωματίων, δηλαδή σωματίων με μάζα, έτσι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για τέτοιες περιπτώσεις. Τώρα θα δούμε πως θα γράψομε σχέσεις που ισχύουν ακόμη και για την περίπτωση που ανταλλάσσεται ακτινοβολία, δηλαδή σωματίδια χωρίς μάζα, όπως φωτόνια. Αυτές είναι πιο γενικές σχέσεις και ισχύουν και για την περίπτωση ανταλλαγής σωματίων με μάζα. Για αυτό το σκοπό παριστάνομε με $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$ το ρυθμό ανταλλαγής ορμής και με $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}$ το ρυθμό ανταλλαγής ενέργειας. Τότε οι αντίστοιχες των εξισώσεων (5.54) είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\left(\gamma m\vec{\upsilon}\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}\left(\gamma m\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}/c^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} \; .
\end{aligned} \qquad (5.62)$$

Απαλείφοντας την $\vec{F}$ μεταξύ των (5.62) καταλήγομε στην πρώτη από τις σχέσεις (5.63). Επίσης από τις (5.62) βρίσκομε τη δεύτερη από τις (5.63).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\gamma}{c^2}\left[\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} - \vec{\upsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right] \\
m\frac{\mathrm{d}\left(\gamma\vec{\upsilon}\right)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} + \left[\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma^2\vec{\upsilon}}{c^2}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\vec{\upsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\upsilon} \; .
\end{aligned} \qquad (5.63)$$

Η προώθηση παίρνει την πιο γενική μορφή

$$\vec{F}_{\mathrm{th}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma^2 \vec{\upsilon}}{c^2}\left(\vec{\upsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\gamma^2 \vec{\upsilon}}{c^2}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}t}. \quad (5.64)$$

Για την ειδική περίπτωση ροής φωτονίων κατά μήκος παράλληλων διαδρομών, ισχύει η σχέση

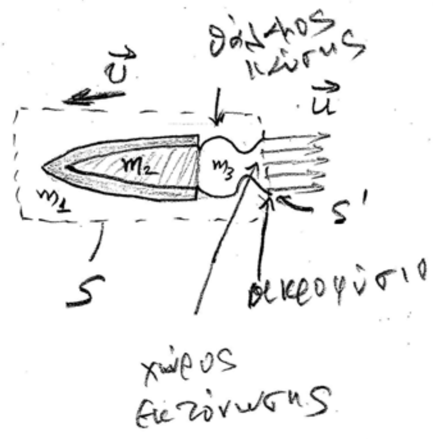
$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\left(\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right). \quad (5.65)$$

Αν θεωρήσομε ανταλλαγή σωματίων που έχουν ταχύτητα $\vec{u}$ τότε ισχύει η σχέση

$\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{e}} = \vec{u}\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}/c^2$ και εύκολα από τις γενικές σχέσεις μπορούμε να καταλήξομε σε αυτές που ισχύουν όταν ανταλλάσσονται σωματίδια με μάζα. Χρειάζεται κάποια προσοχή στην εφαρμογή των ανωτέρω διότι οι ρυθμοί ανταλλαγής όπως και οι ποσότητες ενέργειας και ορμής, μετασχηματίζονται σχετικιστικά από ένα σύστημα αναφοράς σε άλλο. Τα $\vec{p}_{\mathrm{e}}, E_{\mathrm{e}}$ και οι ρυθμοί ανταλλαγής τους αναφέρονται στο επιλεγμένο ως ακίνητο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, μπορεί να χρειάζεται να γίνει μετασχηματισμός σε άλλο σύστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 1

Θα μελετήσομε το γνωστό πρόβλημα του πυραύλου, Σχήμα 1. Υποθέτομε ότι ο πύραυλος κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας και κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του. S είναι η επιφάνεια ελέγχου σταθερού σχήματος και μέρος αυτής είναι η S' η οποία είναι η επιφάνεια του ακροφύσιου από όπου εξέρχονται τα αέρια προώθησης. m_1 είναι το αμετάβλητο μέρος του πυραύλου, δηλαδή το κυρίως σώμα του, $m_2 = m_2(t)$ είναι το καύσιμο το οποίο καίγεται και με το χρόνο εξαντλείται και m_3 είναι το αέριο που παράγεται κατά την καύση μέσα στο θάλαμο καύσης, βρίσκεται υπό μεγάλη πίεση, εκτονώνεται αδιαβατικά και αποκτά μεγάλη ταχύτητα ενώ εξέρχεται από το ακροφύσιο, δημιουργώντας την προωθητική δύναμη, την προώθηση. Ο χώρος 3 αποτελείται από τον θάλαμο καύσης το θάλαμο εκτόνωσης μέσα στον οποίο το αέριο εκτονώνεται αδιαβατικά και αποκτά μεγάλες ταχύτητες, ο οποίος καταλήγει στο ακροφύσιο.



Σχήμα 1

Λύση

Η ταχύτητα (κυρίαρχη ταχύτητα) του πυραύλου είναι η $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$. Η επιφάνεια ελέγχου S και προφανώς η S', κινούνται με την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Η μάζα m_1 είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Η μάζα καυσίμου $m_2 = m_2(t)$ μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, όμως όλα τα σημεία της μπορούμε να πούμε ότι έχουν κάθε στιγμή μιαν «ενεργό» ταχύτητα ίση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, παρόλο που στην πραγματικότητα μπορεί να κινούνται μέσα σε σωληνώσεις κατά πολύπλοκο τρόπο. Ακόμη και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος των μαζών m_1, m_2, m_3 μπορεί να θεωρηθεί πρακτικώς ίση με $\vec{\upsilon}$, διότι η σχετικές ταχύτητες του καυσίμου (και άλλων μικρών εξαρτημάτων) ως προς τον πύραυλο μπορεί να αγνοηθούν για διάφορους λόγους.

Στον χώρο 3 γίνεται συνεχώς εισροή μάζας καυσίμου το οποίο με την καύση γίνεται αέριο. Από το ακροφύσιο εκρέει αέρια μάζα προς τα έξω και στη μόνιμη κατάσταση ο ρυθμός εκροής μάζας ισούται με το ρυθμό εισροής μάζας. Αυτό σημαίνει ότι η στιγμιαία μάζα στο χώρο 3, m_3, είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου. Η ταχύτητα ως προς το ακίνητο αδρανειακό σύστημα, ενός σωματίου στο χώρο 3 είναι $\vec{\upsilon}_{3j} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{rel}j} + \vec{\upsilon}$, όπου $\vec{\upsilon}_{\mathrm{rel}j}$ είναι η σχετική ταχύτητα ως προς το κύριο σώμα του πυραύλου και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του πυραύλου. Για την ορμή έχομε $\vec{P}_{3j} = m_j \vec{\upsilon}_{\mathrm{rel}j} + m_j \vec{\upsilon}$ και η συνολική ορμή του σταθερού πλήθους N σωματίων είναι $\vec{P}_{3\mathrm{t}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{P}_{3j} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\upsilon}_{\mathrm{rel}j} + \vec{\upsilon} \sum_{j=1}^{N} m_j = \vec{P}_{3\mathrm{rel}} + \vec{P}_3$. Στη μόνιμη κατάσταση ο όρος που δίνει τη σχετική ορμή ως προς τον κινούμενο πύραυλο, $\vec{P}_{3\mathrm{rel}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\upsilon}_{\mathrm{rel}j}$, είναι ανεξάρτητος του χρόνου, ενώ ο όρος $\vec{P}_3 = m_3\vec{\upsilon}$ εξαρτάται από το χρόνο μέσω της ταχύτητας $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ του πυραύλου. Ο όγκος 3 κινείται με την ταχύτητα του πυραύλου και μπορούμε να πούμε ότι το κέντρο μάζας του κινείται με την ταχύτητα του πυραύλου. Τονίζομε ξανά ότι αυτή η μάζα δεν αποτελείται από τα ίδια υλικά σημεία, μάζα εισέρχεται από το καύσιμο m_2 και μάζα εξέρχεται από το ακροφύσιο, υπάρχει μια δυναμική ισορροπία. Η μάζα του συνολικού καυσίμου είναι $m_1 + m_2$, m_1 είναι το άκαυτο καύσιμο και m_2 αυτό που έχει γίνει αέριο μετά την καύση. Η συνολική μάζα μέσα στην επιφάνεια ελέγχου, ουσιαστικά η μάζα του πυραύλου, είναι $m(t) = m_1 + m_2(t) + m_3$, αυτό σημαίνει ότι στο μόνιμο φαινόμενο ισχύει $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$, επίσης μπορούμε αν χρειαστεί να ισχυριστούμε ότι για την αέρια μάζα m_3 ισχύει $m_3 \ll m$. Στη συνέχεια εφαρμόζομε κάτι από τα προηγούμενα, έστω τις σχέσεις (5.43) έως (5.45). Ας ξεκινήσομε από την

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \quad (1)$$

Έχομε

$$\begin{aligned} &\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_{3\mathrm{t}} \\ &\vec{P}_1 = m_1\vec{\upsilon}(t),\ \vec{P}_2 = m_2(t)\vec{\upsilon}(t),\ \vec{P}_3 = \vec{P}_{3\mathrm{rel}} + m_3\vec{\upsilon}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Επομένως

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}\vec{\upsilon} + m_3\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}. \quad (3)$$

Περιοριζόμαστε σε κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας (άξονα) με θετική φορά προς τη φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ που είναι ουσιαστικά η ταχύτητα του πυραύλου, η επιτάχυνση του πυραύλου κατά τη «λειτουργία του» έχει την ίδια φορά. Η προβολή της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ σε αυτόν τον άξονα είναι η $\upsilon \geq 0$. Η ταχύτητα των αερίων προώθησης $\vec{u}$ έχει αντίθετη φορά από την $\vec{\upsilon}$ οπότε η προβολή της στον εν λόγω άξονα είναι $-u \leq 0$. Κατά συνέπεια, η προβολή της (3) και της (1) πάνω σε αυτόν τον άξονα οδηγεί στις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}\upsilon + m_3\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},\ \ \upsilon \geq 0,\ \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \geq 0 \\ &F = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},\ \ u \geq 0\ . \end{aligned} \quad (4)$$

Η εκροή μάζας από την επιφάνεια S' του ακροφυσίου είναι προφανώς

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = -\rho S'(u+\upsilon) = -\rho S'\upsilon_{\mathrm{r}} . \quad (5)$$

$\upsilon_{\mathrm{r}} = u + \upsilon \geq 0$ είναι η απόλυτη τιμή της σχετικής ταχύτητας εκροής των αερίων προώθησης ως προς τον κινούμενο πύραυλο.

Επομένως από τις (4), (5) βρίσκομε

$$(m_1 + m_2 + m_3)\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = F + \rho S'\upsilon_{\mathrm{r}}^2$$

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = F + F_{\mathrm{th}} \qquad (6)$$

$$F_{\mathrm{th}} = \rho S'\upsilon_{\mathrm{r}}^2 .$$

Η F_{th} είναι η δύναμη προώθησης.

Θα πούμε λίγα λόγια για την εξωτερική δύναμη. Αυτή μπορεί να οφείλεται στη βαρύτητα (δηλαδή το βάρος της μάζας m), σε τριβές με τον αέρα και σε δυνάμεις ένεκα πίεσης των εκτονούμενων αερίων και του αέρα μέσα στον οποίο κινείται ο πύραυλος δηλαδή στην ατμοσφαιρική πίεση. Ας εξετάσομε τις δυνάμεις πιέσεως. Τα αέρια που εκτονώνονται στη θέση του ακροφύσιου έχουν κάποια πίεση p. Αυτό σημαίνει ότι στα εξερχόμενα αέρια ασκείται από το σύστημα του πυραύλου δύναμη πίεσης pS'. Σύμφωνα με την αρχή δράση-αντίδραση τα αέρια ασκούν δύναμη πίεσης στον πύραυλο, στην επιφάνεια S', προς την κατεύθυνση κίνησής του, που έχει ίδια απόλυτη τιμή, pS'. Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι αφού ο πύραυλος κινείται μέσα στον αέρα, ασκείται πάνω του δύναμη πίεσης από τον περιβάλλοντα αέρα. Αυτή η δύναμη είναι ίση με τις επιμέρους δυνάμεις που ασκούνται στα διάφορα σημεία του πυραύλου, σε όλη την περιβάλλουσα επιφάνειά του εκτός από την S' και έχει φορά αντίθετη από την φορά κίνησης του πυραύλου. Από την υδροστατική συμπεραίνομε ότι αυτή η δύναμη είναι $p_{\mathrm{a}}S'$ όπου p_{a} η ατμοσφαιρική πίεση. Επομένως αν δεν υπάρχει βαρύτητα και τριβές, υπάρχει μόνο η δύναμη πιέσεων $F_p = (p - p_{\mathrm{a}})S'$, οπότε για την εξωτερική δύναμη ισχύει

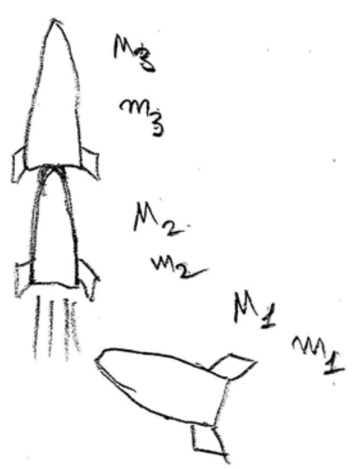
$$F = F_p = (p - p_{\mathrm{a}})S' . \qquad (7)$$

Θα νόμιζε κάποιος ότι πρέπει η δύναμη πιέσεων των εξερχόμενων αερίων να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη για να αποκτήσει ο πύραυλος μεγάλη επιτάχυνση. Αυτό δεν είναι σωστό διότι αν η πίεση των αερίων κατά την έξοδό τους από το ακροφύσιο είναι μεγάλη τότε από τη μελέτη της θερμοδυναμικής, κατά την εκτόνωσή τους προκύπτει ότι η ταχύτητα εξόδου τους είναι μικρή. Μια καλή αποδεκτή λύση είναι να γίνεται έτσι η αδιαβατική εκτόνωση ώστε $p = p_{\mathrm{a}}$, οπότε $F_{\mathrm{p}} = 0$. Αυτό είναι ένα τεχνολογικά δύσκολο πρόβλημα διότι η ατμοσφαιρική πίεση ελατώνεται με το ύψος από την επιφάνεια της Γης. Ακόμη και όταν $F_{\mathrm{p}} \neq 0$, πολλές φορές η δύναμη πιέσεως είναι πολύ μικρότερη από τη δύναμη προώθησης ($F_p \ll F_{\mathrm{th}}$) και τότε η F_p μπορεί να αγνοηθεί.

Παράδειγμα 2

Θα μελετήσομε πύραυλο πολλαπλών σταδίων.

Μπορεί να δειχτεί ότι αν ένας πύραυλος κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας σε ευθεία γραμμή κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του, χωρίς τριβές και αν μπορεί να αγνοηθεί η δύναμη πίεσης, τότε ισχύει η σχέση $\upsilon_{\mathrm{b}} - \upsilon_{\mathrm{a}} = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{b}}}$, η οποία λέγεται εξίσωση του πυραύλου. υ_{a} είναι η (αρχική) ταχύτητα όταν η αντίστοιχη (αρχική) μάζα είναι m_{a}, υ_{b} είναι η (τελική) ταχύτητα όταν η αντίστοιχη (τελική) μάζα είναι m_{b}. υ_{r} είναι η σταθερή σχετική ως προς τον κινούμενο πύραυλο ταχύτητα των εξερχόμενων αερίων. Η μείωση της μάζας οφείλεται στην έξοδο των αερίων προώθησης. Αν θέλομε ο πύραυλος να αποκτήσει μεγάλη ταχύτητα θα δούμε ότι κατά διαστήματα πρέπει να μειώνεται η μάζα του πυραύλου η οποία αντιστοιχεί στα δομικά στοιχεία του. Αυτό είναι κατανοητό γιατί έτσι μειώνεται η μάζα του πυραύλου που πρέπει να κινηθεί από την προωθητική δύναμη. Στην πράξη αυτό γίνεται με σύνδεση σε «σειρά» πολλών (σταδίων) πυραύλων. Στην αρχή ενεργοποιείται το πρώτο στάδιο και όταν το καύσιμό του εξαντληθεί ολόκληρο το στάδιο αυτό απορρίπτεται και ενεργοποιείται ο επόμενος πύραυλος (στάδιο) κ.ο.κ.



Σχήμα 1

Λύση

Το Σχήμα 1 δείχνει πύραυλο πολλαπλών σταδίων, συγκεκριμένα 3 σταδίων. Με κεφαλαία M_i παριστάνομε τη μάζα της δομής του κάθε ενός πυραύλου (δηλαδή κάθε ενός σταδίου) και με πεζά m_i τη μάζα του αντίστοιχου καυσίμου.

Υποθέτομε ότι το υ_{r} είναι το ίδιο για όλα τα στάδια και ότι ο πύραυλος ξεκινά από την ηρεμία. Αν θεωρήσομε ότι μετά την εξάντληση του καυσίμου του κάθε ενός σταδίου δεν απορρίπτεται το αντίστοιχο δομικό τμήμα, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\begin{aligned} &\upsilon_{\mathrm{b}} - \upsilon_{\mathrm{a}} = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{b}}} = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \mu \\ &\mu = \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{b}}}, \end{aligned} \qquad (1)$$

μπορούμε να βρούμε την τελική ταχύτητα υ_{f}, για πύραυλο με N στάδια. μ είναι ο λόγος μάζας, δηλαδή ο λόγος της συνολικής μάζας πριν την έναρξη της καύσης δια της συνολικής μάζας μετά την εξάντληση του καυσίμου. Συγκεκριμένα,

$$\upsilon_{\mathrm{f}} = \upsilon_{\mathrm{f}} - 0 = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \frac{(M_1 + m_1) + (M_2 + m_2) + \ldots + (M_N + m_N)}{M_1 + M_2 + \ldots + M_N}. \quad (2)$$

Προφανώς ισχύει η σχέση για πύραυλο ενός σταδίου.

Στη συνέχεια ας υποθέσομε ότι μετά την εξάντληση του καυσίμου m_j του σταδίου j πριν την έναρξη καύσης του επόμενου σταδίου απορρίπτεται η μάζα M_j. Είναι ευνόητο ότι κάθε φορά η αρχική ταχύτητα για το υπόλοιπο σύστημα είναι ίση με την τελική ταχύτητα τη στιγμή που εξαντλείται το αντίστοιχο καύσιμο. Επίσης η αρχική μάζα είναι ίση με την τελική μάζα μετά την απόρριψη. Σημειώνομε ότι η απόρριψη γίνεται κατά τρόπο που να μην επηρεάζει την ταχύτητα του υπόλοιπου συστήματος.. Έχομε τη γενική σχέση για κάθε στάδιο

$$\upsilon_j - \upsilon_{j-1} = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_{0j}}{m_{tj}} = \upsilon_{\mathrm{r}} \ln \mu_j, \;\; \mu_j = \frac{m_{0j}}{m_{tj}}, \quad (3)$$

όπου μ_j ο λόγος μάζας του σταδίου j. Ισχύει $\upsilon_0 = 0$. Αφού καταναλωθεί το καύσιμο του τελευταίου σταδίου η τελική μάζα του πυραύλου είναι M_N η οποία δεν απορρίπτεται γιατί δεν υπάρχει άλλο σταδιο. Εφαρμόζομε διαδοχικά την εξίσωση του πυραύλου για κάθε στάδιο, δηλαδή για $j = 1, 2, \ldots, N$

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_1-\upsilon_0=\upsilon_1=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\mu_1,\ \ \mu_1=\frac{m_{01}}{m_{\mathrm{t}1}}=\frac{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_1+m_2+\ldots+m_N}{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_2+m_3+\ldots+m_N}\\
&\upsilon_2-\upsilon_1=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\mu_2,\ \ \mu_2=\frac{m_{02}}{m_{\mathrm{t}2}}=\frac{M_2+M_3+\ldots+M_N+m_2+m_3+\ldots+m_N}{M_2+M_3+\ldots+M_N+m_3+m_4+\ldots+m_N}\\
&\upsilon_3-\upsilon_2=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\mu_3,\ \ \mu_3=\frac{m_{03}}{m_{\mathrm{t}3}}=\frac{M_3+M_4+\ldots+M_N+m_3+m_4+\ldots+m_N}{M_3+M_4+\ldots+M_N+m_4+m_5+\ldots+m_N}\\
&\qquad\vdots\\
&\upsilon_{\mathrm{f}}=\upsilon_N-\upsilon_{N-1}=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\mu_N,\ \ \mu_N=\frac{m_{0N}}{m_{\mathrm{t}N}}=\frac{M_N+m_N}{M_N}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Αθροίζομε αυτές τις σχέσεις κατά μέλη και βρίσκομε τη σχέση που ισχύει για κάθε μ_j,

$$\upsilon_{\mathrm{f}}=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\left(\mu_1\mu_2\ldots\mu_N\right). \tag{5}$$

Στην περίπτωσή μας τα μ_j δίνονται από τις σχέσεις (4).

Η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί όπως οι (4), (5) στη μορφή

$$
\begin{aligned}
&\upsilon'_{\mathrm{f}}=\upsilon_{\mathrm{r}}\ln\left(\mu'_1\mu'_2\ldots\mu'_N\right)\\
&\mu'_1=\mu_1=\frac{m'_{01}}{m'_{\mathrm{t}1}}=\frac{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_1+m_2+\ldots+m_N}{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_2+m_3+\ldots+m_N}\\
&\mu'_2=\frac{m'_{02}}{m'_{\mathrm{t}2}}=\frac{M_1+M_2\ldots+M_N+m_2+m_3+\ldots+m_N}{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_3+m_4+\ldots+m_N}\\
&\mu'_3=\frac{m'_{03}}{m'_{\mathrm{t}3}}=\frac{M_1+M_2\ldots+M_N+m_3+m_4+\ldots+m_N}{M_1+M_2+\ldots+M_N+m_4+m_5+\ldots+m_N}\\
&\qquad\vdots\\
&\mu'_N=\frac{m'_{0N}}{m'_{\mathrm{t}N}}=\frac{M_1+M_2\ldots+M_N+m_N}{M_1+M_2+\ldots+M_N}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Η σύγκριση της (5) με την πρώτη από τις (6) δείχνει ότι για πύραυλο με στάδια περισσότερα του ενός ισχύει $\upsilon_{\mathrm{f}} > \upsilon'_{\mathrm{f}}$, για πύραυλο με ένα στάδιο $\upsilon_{\mathrm{f}} = \upsilon'_{\mathrm{f}}$ Αυτό δείχνεται εύκολα αν συγκριθούν οι αντίστοιχοι λόγοι μαζών, οπότε θα δούμε ότι $\mu'_j > \mu_j$ για κάθε $j \neq 1$ ενώ $\mu'_1 = \mu_1$. Για την απόδειξη χρειάζεται να ληφθεί υπόψη ότι $\mu_j, \mu'_j > 1$ και όλες οι μάζες είναι θετικές ποσότητες.

Μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τις παραπάνω σχέσεις, να θέσει στόχους για το τι θέλει να πετύχει με τον πύραυλο πολλαπλών σταδίων και να κάνει βελτιστοποίηση του σχεδιασμού των τμημάτων του πυραύλου.

Παράδειγμα 3

Ένας πύραυλος είναι στερεωμένος σε οριζόντια θέση. Ο πύραυλος πυροδοτείται και για να μείνει οριζόντιος ασκείται πάνω του εξωτερική οριζόντια δύναμη F_{h}. Να βρεθεί η απόλυτη τιμή F_{h} αν η διατομή του ακροφύσιου του πυραύλου είναι $S' = 400\ \mathrm{cm}^2$, ο ρυθμός εκροής μάζας έχει απόλυτη τιμή $\left|\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| = 10\ \mathrm{kg/s}$. Η ταχύτητα των εξερχόμενων αερίων καύσης (προώθησης), ως προς τον πύραυλο είναι $u = 1500\ \mathrm{m/s}$ και η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{\mathrm{a}} = 100\ \mathrm{kPa}$.

Λύση

Σύμφωνα με όσα έχομε πει στην ισορροπία, για τις απόλυτες τιμές ισχύει, $F_{\mathrm{h}} = (p - p_{\mathrm{a}})S' + F_{\mathrm{th}}$, ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος είναι η δύναμη πιέσεων και ο δεύτερος η προωθητική δύναμη, $F_{\mathrm{th}} = \left|\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| u$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των δεδομένων βρίσκομε για τη δύναμη πιέσεων

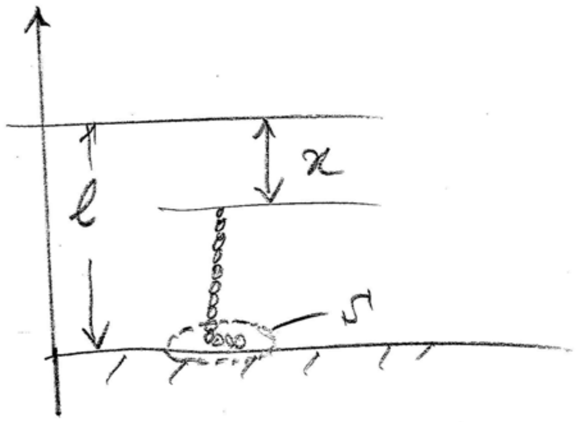
$$(p - p_{\mathrm{a}})S' = \left(150 - 100\right) \times 10^3 \times 400 \times 10^{-4}\ \mathrm{N} = 2000\ \mathrm{N}\ ,$$

για την προώθηση βρίσκομε $F_{\mathrm{th}} = 10 \times 1500\ \mathrm{N} = 15\ 000\ \mathrm{N}$

επομένως $F_{\mathrm{h}} = 17\ 000\ \mathrm{N}$. Παρατηρούμε ότι η δύναμη προώθησης είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη δύναμη πιέσεων.

Παράδειγμα 4

Θεωρούμε αλυσίδα μήκους l με ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα μάζας λ, σταθερή. Η αλυσίδα στην αρχή κρατιέται ακίνητη σε κατακόρυφη θέση έτσι που μόλις να ακουμπά στο έδαφος που είναι γραμμοσκιασμένο στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Κάποια (αρχική) στιγμή αφήνεται να πέφτει προς τα κάτω και να μαζεύεται στην επιφάνεια του εδάφους, όπου έχει μηδέν ταχύτητα. Υποθέτομε ότι το άνω άκρο του σωρού της αλυσίδας είναι στην επιφάνεια του εδάφους και το πίπτον τμήμα της αλυσίδας είναι συνεχώς κατακόρυφο. Να βρεθεί η δύναμη N που ασκεί το έδαφος στην αλυσίδα και σύμφωνα με την αρχή δράση αντίδραση η δύναμη που ασκεί η αλυσίδα στο έδαφος.

Λύση

Αντί για τη διανυσματική σχέση, θα γράψομε την προβολή της στον κατακόρυφο άξονα που φαίνεται στο Σχήμα 1 που έχει κατεύθυνση προς τα πάνω. Θεωρούμε ως σταθερή επιφάνεια ελέγχου S τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που περιέχει την ακίνητη αλυσίδα στο Σχήμα 1. Για την ακρίβεια η επιφάνεια αυτή περιλαμβάνει ένα πάρα πολύ μικρό μέρος της πίπτουσας αλυσίδας διότι θέλομε να αποφύγομε την ασυνέχεια στην ταχύτητα του τμήματος της πίπτουσας αλυσίδας στο σημείο της επαφής με το έδαφος πράγμα που οδηγεί σε κρουστική δύναμη ασκούμενη στο πίπτον τμήμα. Για το εσωτερικό της επιφάνειας ελέγχου ισχύει κατά τα γνωστά η σχέση

$$\dot{P} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = F - \Phi \ . \quad (1)$$

Θυμίζομε ότι P είναι η ορμή της μάζας που είναι στο εσωτερικό της S για την οποία ισχύει $P = P_\mathrm{c} + 0 \approx 0$. Η ορμή P_c είναι η ορμή του πολύ μικρού τμήματος της κινούμενης αλυσίδας, η ορμή που είναι πολύ μικρή $P_\mathrm{c} \approx 0$ (σε σχέση με άλλες ορμές που υπεισέρχονται στο πρόβλημα, π.χ. η ορμή του υπόλοιπου μέρους της πίπτουσας αλυσίδας), αφού αυτό το τμήμα μπορούμε να το κάνομε όσο μικρό θέλομε (υποτίθεται το μέγεθος ενός κρίκου είναι αμελητέο σε σχέση με το l), αυτό σημαίνει ότι $\dot{P} = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx 0$. $F = W + N$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στη μάζα που είναι μέσα στην S και ισούται με το βάρος $W = -\lambda g x, x > 0$ της μάζας που είναι μέσα στην επιφάνεια συν τη δύναμη του εδάφους $N > 0$. Οι κατερχόμενοι κρίκοι βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση οπότε δεν ασκούν (κρουστική) δύναμη στο περιεχόμενο της S. Φ είναι ο ρυθμός ροής της ορμής δια μέσου της S. Να σημειωθεί ότι η ροή είναι θετική όταν βγαίνει έξω από την επιφάνεια. Για την απόλυτη τιμή της ταχύτητας u κάθε σημείου της αλυσίδας σε ελεύθερη πτώση, έχομε

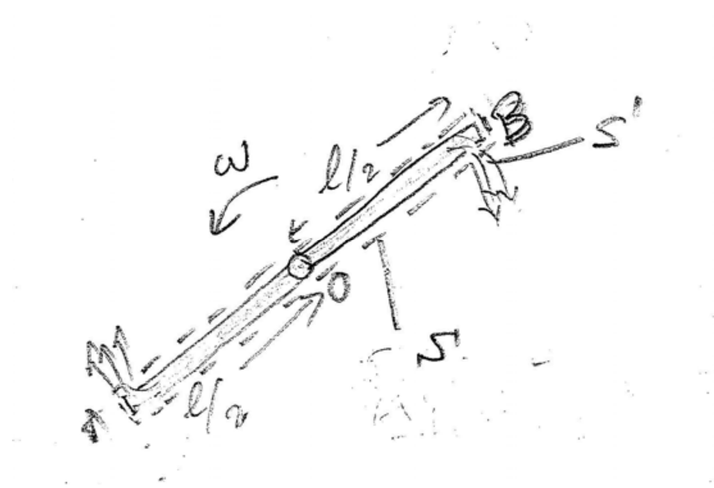
$$u^2 = 2gx. \quad (2)$$

Η μεταβολή της μάζας στο εσωτερικό της S σε χρόνο $\mathrm{d}t$ είναι $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \lambda u \mathrm{d}t$ άρα ο ρυθμός ροής της ορμής είναι $\Phi = u\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = u\lambda u = \lambda u^2 = 2\lambda g x$. Το ότι το $\Phi > 0$ γίνεται κατανοητό από το γεγονός ότι ο άξονας είναι θετικός προς τα πάνω. Αυτό σημαίνει ότι εφόσον η κίνηση της αλυσίδας είναι προς τα κάτω, η ορμή της είναι αρνητική και έτσι ο ρυθμός ροής της ορμής που εισέρχεται στην S είναι αρνητικός, πράγμα που ισοδυναμεί με θετικό ρυθμό εξερχόμενης ροής που είναι το Φ, δηλαδή πράγματι $\Phi = 2\lambda g x > 0$. Τελικώς η σχέση (1) δίνει

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda g x + N - 2\lambda g x \\ N &= 3\lambda g x \,. \end{aligned} \quad (3)$$

Παράδειγμα 5

Θα μελετήσομε την κίνηση (περιστροφή) της διάταξης του Σχήματος 1. Η διάταξη είναι ένα είδος ποτιστικού κήπου. Η περιστροφή γίνεται οριζόντια, περί το σταθερό σημείο Ο. Το νερό εξέρχεται από τις δυο οπές κάθετα προς την κατεύθυνση της ευθείας (σωλήνας) ΑΒ. Η διάμετρος του περιστρεφόμενου σωλήνα είναι αρκούντως μικρή και οι οπές στα Α, Β είναι επίσης αρκούντως μικρές. Να αγνοηθεί η βαρύτητα. Υποθέστε ότι υπάρχει γνωστή ροπή τριβής απόλυτης τιμής M_f περί το Ο. Δίνεται η απόλυτην τιμή της σχετικής ταχύτητας εκροής υ_r, ως προς το κινούμενο στόμιο (οπή) του στρεφόμενου σωλήνα. Το μήκος l του σωλήνα είναι γνωστό και επίσης είναι γνωστή η παροχή όγκου Q (απόλυτη τιμή) από την κάθε οπή, ίδια και για τις δυο οπές. Επίσης είναι δεδομένη η πυκνότητα ρ του νερού. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω, κατά το μόνιμο φαινόμενο. Η ροή του νερού είναι μόνιμη, δηλαδή η ταχύτητα σε κάθε σημείο του σωλήνα δεν εξαρτάται από το χρόνο.



Σχήμα 1

Λύση

Θεωρούμε την περιστρεφόμενη με τον οριζόντιο σωλήνα επιφάνεια ελέγχου S που φαίνεται στο Σχήμα 1. Η S είναι πολύ κοντά στην επιφάνεια του σωλήνα. Η επιφάνεια της κάθε μιας οπής είναι S'. Μπορούμε να εφαρμόσομε τις σχέσεις (5.51)-(5.53). Η στροφορμή της μάζας νερού που περιστρέφεται είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου. Αυτό συμβαίνει διότι στο μόνιμο φαινόμενο έχομε μόνιμη ροή και ο ρυθμός εισροής μάζας ισούται με το ρυθμό εκροής, επίσης τα υλικά σημεία που απέχουν από το κέντρο περιστροφής ίδια απόσταση έχουν την ίδια διανυσματική ταχύτητα ανεξάρτητα από τη γωνία περιστροφής τους. Δηλαδή $\vec{L} = \text{σταθ.}$ και $L = \text{σταθ.}$

Στο Σχήμα 1 θεωρούμε τις ροπές και γωνιακές ταχύτητες θετικές αν τείνουν να περιστρέψουν τη διάταξη αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού, ανάλογα ισχύους για τις γραμμικές ταχύτητες. Αυτό σημαίνει ότι $\omega > 0$, ενώ η εξωτερική ροπή τριβής έχει τιμή $-M_{\mathrm{f}} < 0$. Σύμφωνα με τη σχέση (5.53) ρυθμός ανταλλαγής στροφορμής Ψ στις δυο περιοχές των οπών μαζύ, είναι

$$\Psi = 2\frac{l}{2}\rho u \upsilon_{\mathrm{r}} S', \quad (1)$$

όπου u είναι η απόλυτη ταχύτητα του νερού κατά την εκροή του (δηλαδή ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που είναι το έδαφος). Ισχύει

$$\upsilon = \omega\frac{l}{2} - \upsilon_{\mathrm{r}}, \quad (2)$$

Διότι η θετική ταχύτητα ένεκα περιστροφής $\omega \frac{l}{2}$ (μετοχική ταχύτητα) είναι αντίθετη από την υ_{r}, επίσης ισχύει $Q = \upsilon_{\mathrm{r}} S'$, επομένως

$$\Psi = 2\frac{l}{2}\rho u \upsilon_{\mathrm{r}} S' = l\rho Q\omega \frac{l}{2} - l\rho Q\upsilon_{\mathrm{r}} . \quad (3)$$

Έτσι από τις (5.53) έχομε

$$\begin{aligned} &\dot{L} = 0 = -M_{\mathrm{f}} - \Psi \\ &-M_{\mathrm{f}} = \Psi = l\rho Q\omega \frac{l}{2} - l\rho Q\upsilon_{\mathrm{r}} \qquad (4) \\ &\omega = -\frac{2M_{\mathrm{f}}}{l^2 \rho Q} - \frac{2\upsilon_{\mathrm{r}}}{l} \ . \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί πόση δύναμη στήριξης χρειάζεται για να κρατηθεί πύραυλος ακίνητος αν το προωθητικό (εκτοξευόμενο υλικό) είναι σωμάτια το καθένα με μάζα, m_{p}. Ο ρυθμός εκροής σωματιδίων είναι $n_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ (δηλαδή το πλήθος σωματιδίων που εκτοξεύονται ανά μονάδα χρόνου). Η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου είναι u και είναι σχετικιστική. Εξετάζομε τον πύραυλο ως ένα υλικό σημείο, δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις, εκτός από τη δύναμη στήριξης.

Λύση

Πρόκειται για σχετικά απλή εφαρμογή των ανωτέρω διότι η ταχύτητα του συστήματος που εδώ είναι ο πύραυλος είναι συνεχώς μηδέν, $\upsilon = 0$. Θα χρησιμοποιήσομε την πρώτη από τις (5.56), για $\upsilon = 0$ έχομε για την εξωτερική δύναμη η οποία είναι η δύναμη στήριξης που ζητείται

$$F = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} u . \quad (1)$$

Η σχέση (5.55) δίνει

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m_u}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} . \quad (2)$$

Από τα δεδομένα βρίσκομε ότι

$$\frac{dm_u}{dt} = n_{\rm p} m_{\rm p}$$

$$\frac{{\rm d}m}{{\rm d}t} = \frac{n_{\rm p}}{c^2}\frac{m_{\rm p}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = n_{\rm p}\frac{E_{\rm p}}{c^2} \; . \quad (3)$$

Τελικώς έχομε

$$F = -n_{\rm p}\frac{E_{\rm p}}{c^2}u \, . \quad (4)$$

Αν $E_{\rm p} \gg m_{\rm p}c^2$, τότε $u \approx c$ οπότε

$$F \approx -n_{\rm p}\frac{E_{\rm p}}{c} . \quad (5)$$

Ας δούμε μια εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος. Ας υποθέσομε ότι ένας περίεργος πύραυλος έχει μάζα $m = 1$ kg, είναι ακίνητος και εκτοξεύει ως προωθητικό υλικό τόσα πρωτόνια όσα κινούνται μέσα στο ένα δακτυλίδι του επιταχυντή LHC (Large Hadron Collider, Μεγάλος Συγκρουστής Αδρονίων) του CERN. Το πλήθος των πρωτονίων στον έναν δακτύλιο είναι $N_{\rm p} = 3{,}23 \times 10^{14}$. Ο χρόνος που διαρκεί η εκτόξευση Δt είναι ίσος με το χρόνο που χρειάζεται να «εκφορτιστούν» τα πρωτόνια από τη δέσμη του επιταχυντή, $\Delta t = l/u$. Υποθέτομε ότι τα πρωτόνια είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του δακτυλίου $l = 26{,}7$ km. Η ενέργεια του κάθε πρωτονίου είναι $E_{\rm p} = 7$ TeV $\gg m_{\rm p}c^2 (\approx 1$ GeV$)$, οπότε $u \approx c = 3 \times 10^8$ m/s. 1 TeV $= 1{,}6 \times 10^{-7}$ J. $m_{\rm p} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

Από τη σχέση (5) βρίσκομε ότι η ώθηση της δύναμης πρώθησης είναι

$$F\Delta t = -n_{\rm p}\frac{E_{\rm p}}{c}\Delta t = -\frac{N_{\rm p}}{\Delta t}\frac{E_{\rm p}}{c}\Delta t = -N_{\rm p}\frac{E_{\rm p}}{c} . \quad (6)$$

Επομένως

$$F\Delta t = -1{,}2 \text{ Ns} \, . \quad (7)$$

Η μάζα του πυραύλου είναι $m = 1$ kg και μάζα των πρωτονίων που εκτοξεύονται είναι $N_{\rm p}m_{\rm p} = 5{,}39 \times 10^{-13}$ kg, δηλαδή η m είναι σταθερή. Αν δεχτούμε ότι ο πύραυλος μπορεί να κινηθεί θα δούμε ότι η ταχύτητά του είναι πολύ μικρή οπότε ισχύουν μη σχετικιστικοί νόμοι. Εφόσον ξεκινά από την ηρεμία η μεταβολή της ορμής του πυραύλου θα είναι $m\upsilon = F\Delta t$, άρα $\upsilon = -(F\Delta t)/m$.

Άρα $\upsilon = -1{,}2\ m/s$. Ο χρόνος $\Delta t = l/c = 26{,}7\times10^{3} / (3\times10^{8})\ \mathrm{s} = 8{,}9\times10^{-5}\ \mathrm{s}$. Η προωθητική δύναμη είναι $F = -N_\mathrm{p}E_\mathrm{p} / l = -1{,}35\times10^{4}\ \mathrm{N}$ και η επιτάχυνση που δίνει στη μάζα του πυραύλου είναι $a = -1{,}35\times10^{4}\ \mathrm{m/s^2}$. Η επιτάχυνση είναι μεγάλη αλλά διαρκεί πολύ λίγο οπότε η ταχύτητα που δίνει είναι πολύ μικρή. Το παράδειγμα αυτό είναι ένα εξωπραγματικό παράδειγμα, ο επιταχυντής LHC έχει διαστάσεις πολλών χιλιομέτρων και τεράστια μάζα. Δεν μπορεί να παρέχει συνεχώς δέσμη πρωτονίων, για να παραχθούν τα πρωτόνια και να φτάσουν την ενέργεια των 7 TeV απαιτείται χρόνος περίπου 24,5 min. Δηλαδή κάθε 24,5 min μπορούμε να έχομε μια ριπή πρωτονίων.

Ένα πιο ρεαλιστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω που είναι κάτι μέσα στα όρια κατασκευών της Υπηρεσίας του Διαστήματος των ΗΠΑ (NASA, National Aeronautics and Space Administration).

Θα υπολογίσομε τη δύναμη προώθησης που ασκεί σε ακίνητο πύραυλο η εκτόξευση αερίων τα οποία είναι αρχικώς επιταχυνθέντα ιόντα του ευγενούς αερίου Xe τα οποία τελικώς εξουδετερώνονται και εκτοξεύονται ως ουδέτερα άτομα. Τα άτομα εκτοξεύονται με ταχύτητα (απόλυτη τιμή) $u = 30\ \mathrm{km/s}$. Η ισχύς που μεταφέρεται από αυτά ως κινητική ενέργεια είναι $E_\mathrm{k} = 2{,}3\ \mathrm{kW}$. Αν ο πύραυλος είναι ακίνητος, να βρεθεί η δύναμη που χρειάζεται για να αντισταθμιστεί η δύναμη από την εκτόξευση των ατόμων.
Η ταχύτητα εκροής είναι μη σχετικιστική $u \ll c$. Θα χρησιμοποιήσομε τις σχέσεις (5.48) ή (5.49). Αφού $\upsilon = 0$ ισχύει για τη δύναμη

$$F = -u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \quad (8)$$

Επειδή το φαινόμενο είναι μη σχετικιστικό, ο ρυθμός μεταβολής της μάζας ισούται με το ρυθμό της μάζας Xe που αποβάλλεται. Αν m_X είναι η μάζα ενός ατόμου Xe και σε χρόνο $\mathrm{d}t$ αποβάλλονται $\mathrm{d}N_\mathrm{X}$ άτομα, έχομε

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}N_\mathrm{X} m_\mathrm{X} \quad (9)$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u = -\frac{2}{u}\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}m_\mathrm{X}u^2 = -\frac{2}{u}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t}. \quad (10)$$

Τελικώς βρίσκομε

$$F \approx -150\ \mathrm{mN}. \quad (11)$$

Η δύναμη είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη δύναμη που ασκείται σε πυραύλους που κινούνται με εκροή αερίων που εκτονώνονται θερμικά, αλλά αυτή η μικρή δύναμη ασκείται για μεγάλα χρονικά διαστήματα σε αντίθεση με την περίπτωση της θερμικής εκτόνωσης.

Παράδειγμα 7

Να μελετηθεί η περίπτωση πυραύλου που για την προώθησή του χρησιμοποιείται εκροή φωτονίων, φωτονικός πύραυλος. Συγκεκριμένα, να βρεθεί η προώθηση που ασκείται στον πύραυλο αν ο πύραυλος κινείται με ταχύτητα υ, ενώ ο ρυθμός εκροής των φωτονίων γίνεται προς μια μοναδική κατεύθυνση που είναι η αντίθετη της υ. Ο ρυθμός εκροής είναι $n_\upsilon = \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\tau}$ μετρούμενος ως προς το σύστημα ηρεμίας του πυραύλου. Για ευκολία υποθέτομε ότι τα όλα φωτόνια έχουν την ίδια ενέργεια E_υ και αντίστοιχη συχνότητα, ν_υ, $E_\upsilon = h\nu$ μετρούμενα στο σύστημα ηρεμίας του πυραύλου. Η κίνηση γίνεται σε ευθεία γραμμή.

Λύση

Θα κάνομε χρήση των σχέσεων (5.64) και (5.65) και σχέσεων μετασχηματισμών της Ειδικής Σχετικότητας. Θεωρούμε θετική την κατεύθυνση κίνησης του πυραύλου οπότε αν p_e είναι η απόλυτη τιμή της ροής της ορμής των φωτονίων ως προς το αδρανειακό σύστημα, τότε οι (5.64), (5.65) δίνουν

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right) \\ F_\mathrm{th} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}\right)\left[1+\gamma^2\beta^2+\gamma^2\beta\right]. \end{aligned} \qquad (1)$$

$\mathrm{d}E_\mathrm{e}$ είναι η ενέργεια $\mathrm{d}N$ φωτονίων που εκρέουν σε χρόνο $\mathrm{d}t$ από τον πύραυλο, όπου ο χρόνος μετριέται ως προς το αδρανειακό σύστημα. Η ενέργεια του κάθε φωτονίου ως προς το ίδιο σύστημα είναι E_p. Ο μετασχηματισμός της ενέργειας E_p του κάθε φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του πυραύλου δηλαδή στην E_υ είναι

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= E_\upsilon \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} \\ \beta &= \frac{\upsilon}{c}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Έχομε τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p}} . \quad (3)$$

Για τον ιδιόχρονο (το χρόνο ως προς το σύστημα ηρεμίας) του πυραύλου ισχύει

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t / \gamma \quad (4)$$

Ο συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων οδηγεί στη σχέση

$$F_{\mathrm{th}} = -\frac{n_{\upsilon} E_{\upsilon}}{c} \frac{1+\beta}{1-\beta} = -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}E_{\upsilon\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\tau} \frac{1+\beta}{1-\beta} . \quad (5)$$

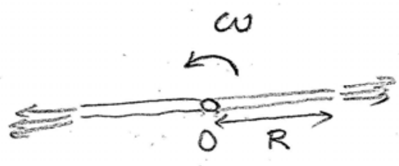
Προφανώς $n_{\upsilon} E_{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}E_{\upsilon\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\tau}$ είναι ο ρυθμός εκροής ενέργειας φωτονίων όπου όλα τα μεγέθη μετριούνται ως προς το σύστημα ηρεμίας του πυραύλου. Αν η ταχύτητα του πυραύλου είναι μη σχετικιστική τότε έχομε

$$F_{\mathrm{th}} \approx -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} . \quad (6)$$

Αν υποθέσομε ότι ένας φωτονικός πύραυλος κινείται μη σχετικιστικά και εκτοξεύει φωτόνια με ισχύ ακτινοβολίας $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = 300\,000\ \mathrm{kW}$ η σχέση (6) μας οδηγεί σε δύναμη προώθησης $F_{\mathrm{th}} = -1\ \mathrm{N}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρείστε το Σχήμα 1. Ο ευθύγραμμος σωλήνας περιστρέφεται με σταθερή δεδομένη γωνιακή ταχύτητα ω. Από τα δυο συμμετρικά άκρα του (ακροφύσια) εκρέει νερό με (σχετική) ταχύτητα ως προς το αντίστοιχο ακροφύσιο υ_{r}, δεδομένη. Ο ρυθμός εκροής, δηλαδή η παροχή όγκου είναι ίδια για το κάθε ακροφύσιο και ίση με Q, δεδομένη. Η πυκνότητα του νερού είναι γνωστή, ρ. Ο σωλήνας έχει δεδομένο μήκος $2R$. Υποτίθεται ότι η διάμετρος του σωλήνα είναι αρκούντως μικρή όπως φυσικά και η διάμετρος των ακροφύσιων. Να υπολογιστεί η ροπή που χρειάζεται για να πραγματοποιείται αυτή η κίνηση, πρόκειται για το μόνιμο φαινόμενο. Η ροή του νερού είναι μόνιμη.



Σχήμα 1

2. Δείξτε την εξίσωση του πυραύλου $\upsilon_{\rm b} - \upsilon_{\rm a} = \upsilon_{\rm r} \ln \dfrac{m_{\rm a}}{m_{\rm b}}$. $\upsilon_{\rm b}$ είναι η τελική ταχύτητα του πυραύλου, $\upsilon_{\rm a}$ η αρχική ταχύτητά του, $\upsilon_{\rm r}$ η σχετική ως προς τον πύραυλο ταχύτητα των αερίων προώθησης, $m_{\rm b}$ η τελική μάζα του πυραύλου και $m_{\rm a}$ η αρχική. Υποτίθεται ότι οι δυνάμεις πίεσης είναι αμελητέες, δεν υπάρχει βαρύτητα ούτε τριβές και η κίνηση είναι ευθύγραμμη κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του πυραύλου.

3. Υποθέτομε ότι κάποιος πύραυλος κινείται εκτοξεύοντας παράλληλη δέσμη φωτονίων, όλα έχουν την ίδια κατεύθυνση. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της τετραορμής της Ειδικής Σχετικότητας, δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{\left(\dfrac{m_{\rm a}}{m_{\rm b}}\right) - 1}{\left(\dfrac{m_{\rm a}}{m_{\rm b}}\right) + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{\rm a}}{m_{\rm b}} + \frac{m_{\rm b}}{m_{\rm a}}\right).$$

Ο πύραυλος ξεκινά να λειτουργεί με (αρχική) ταχύτητα μηδέν. υ είναι η τελική ταχύτητα του πυραύλου, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, $m_{\rm a}$, $m_{\rm b}$ η αρχική και τελική μάζα του πυραύλου. Η μείωση της μάζας οφείλεται στην εκπομπή φωτονίων που ενώ δεν έχουν μάζα μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Η κίνηση γίνεται σε ευθεία γραμμή κατά μήκος του άξονα του πυραύλου, χωρίς να ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στον πύραυλο.

4. Βρείτε την ταχύτητα υ και τη θέση x, συναρτήσει του χρόνου, σωματίου το οποίο ξεκινά από την ηρεμία και πάνω του ασκείται σταθερή δύναμη F. Η μάζα του σωματίου είναι m. Η αρχική θέση του είναι $x = 0$. Η θέση, οι ταχύτητες και η δύναμη αναφέρονται ως προς δεδομένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Δείξτε ότι ισχύει $\upsilon < c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δείξτε ότι για αρκούντως μικρούς χρόνους ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις της μη σχετικιστικής μηχανικής.

5. Ας υποθέσομε ότι έχομε ένα υλικό σώμα (υλικό σημείο) στο οποίο πέφτει μια παράλληλη δέσμη φωτονίων. Τα φωτίνια απορροφώνται από το σώμα. Ο ρυθμός ροής ενέργειας των φωτονίων ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (το έδαφος) είναι δεδομένος, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. Το σώμα κινείται κάποια στιγμή με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης των φωτονίων και της $\vec{\upsilon}$ είναι θ. Εξετάστε το φαινόμενο σχετικιστικά. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής μάζας του υλικού σημείου. Τι περιμένετε αν το φαινόμενο ήταν μη σχετικιο; Υπολογίστε τη δύναμη προώθησης σχετικιστικά και συγκρίνετε με αυτό που ισχύει μη σχετικιστικά.

Βιβλιογραφία

1. Mechanics, by Keith R. Symon, Addison-Wesley, 1971.
2. Introduction to the Principles of Mechanics, by Walter Hauser, Addison-Wesley, 1965.
3. Classical Mechanics, by Walter Greiner, Springer, 2003.
4. Analytical Mechanics, by Grant R. Fowles, Holt, Rinehart and Winston, 1962.
5. Theoretical Mechanics, by S.Targ, Peace Publishers.
6. Classical Mechanics, by Herbert Goldsein, Charles Poole, John Safko, Addison-Wesley, 2002.
7. Classical Dynamics of Particles and Systems, by Jerry B. Marion, Academic Press, 1970.
8. Classical Mechanics, by T. W. B. Kibble, McGraw-Hill.
9. Classical Mechanics, by V. Barger, M. Olsson, McGraw-Hill, 1973.
10. Μηχανική I, II, του Κ. Π. Παπαϊωάννου, Εκδόσεις Καραβία, 1952.
11. Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής, των Π. Ιωάννου, Θ. Αποστολάτου, Leader Books, 2004.
12. Θεωρητική Μηχανική, των Δ. Ε. Παναγιωτουνάκου, Γ.Α. Παπαδόπουλου, Εκδόσεις Γρηγ. Φούντας.
13. Μηχανική I, II, του Κ. Μ. Μυλωνά, Εκδόσεις Offset, 1978.
14. Δυναμική Στερεού Σώματος, των Γ. Α. Παπαδόπουλου, Β. Γ. Βαδαλούκα, Εκδόσεις NK, 2010.
15. James F. Thorpe, On the Momentum Theorem for a Continuous System of Variable mass, Am. J. Phys. 30,637 (1962).
16. Martin S. Tiersen, Force, Momentum Charge, and Motion, Am. J. Phys. 37, 82 (1969).

17. Stan Siegel, More about Variable Mass Systems, Am. J. Phys. 40, 183 (1972).

18. K. S. Krane, The falling raindrop: Variations on a theme of Newton, Am. J. Phys. 49, 113 (1981).

19. Celia A. de Sousa, Vitor H. Rodrigues, Mass redistribution in variable mass systems, arXiv :physics/0211075v2 [physics.ed-ph] 23 Sep 2003.

20. Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, by J. W. Cornelissde, H. F. R. Schoeyer, K. F. Wakker, Pitman, 1979.

21. Applied Mechanics Dynamics, by G. W. Housner & D. E. Hudson, Printed in the USA, 1991.

22. Introduction to Space Dynamics, by W. T. Thomson, Dover Publications, 1986.

23. W. L. Bade, Relativistic Rocket Theory, Am. J. Phys. 21, 310 (1953).

24. Kalman B. Pomeranz, The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with a Variable Rest Mass, Am. J. Phys. 32, 955 (1964).

25. Kalman B. Pomeranz, The Relativistic Rocket, Am. J. Phys. 34, 565 (1966).

26. Kalman B. Pomeranz, Some Relativistic Effects in Systems with a Variable Rest Mass, Am. J. Phys. 37, 741 (1969).

27. Erratum: “Some Relativistic Effects in Systems with a Variable Rest Mass” [Amer. J. Phys. 37, 741 (1969)] Am. J. Phys. 38, 119 (1970).

28. J. Henry, C. Barrabes, Covariant Equations for the Motion of a Point Body with Variable Rest Mass, Am. J. Phys. 40, 724 (1972).