

## 8. Κύματα

### Εγκάρσια κυματική κίνηση

#### Βιβλιογραφία

F. S. Crawford Jr. 'Κυματική'.

(Σειρά Μαθημάτων Φυσικής Berkeley, Τόμος 3. Αθήνα 1979). Κεφ. 2, 4, 5.

H. J. Pain. 'Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων'.

(Εκδόσεις Συμμετρία, 1990). Κεφ. 4, 9.

Κ. Χριστοδουλίδης, *Μαθηματικό Συμπλήρωμα για τα Εισαγωγικά Μαθήματα Φυσικής*. (Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., 2003): *Σειρές Τέηλορ και Μακλώριν - Η μερική παράγωγος - Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*.

#### 8.1 Εισαγωγή

Θα εξετάσουμε την κυματική κίνηση σε ένα απλό μονοδιάστατο σύστημα που αποτελείται από μία ομοιόμορφη τεντωμένη χορδή η οποία εκτείνεται κατά μήκος του άξονα των  $x$ . Αν σε κάποιο σημείο της χορδής επιβάλουμε μία εγκάρσια κίνηση η κίνηση θα διαδοθεί στη χορδή. Στη χορδή αναπτύσσεται ένα κύμα που οδεύει κατά μήκος της χορδής, έχουμε ένα *οδεύον κύμα*. Η κίνηση κάθε στοιχείου της χορδής είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, τα κύματα είναι *εγκάρσια οδεύοντα κύματα*. Αν κατά τη διάδοση του κύματος κάθε στοιχείο της χορδής εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τότε έχουμε *ημιτονοειδές οδεύον κύμα*. Όταν οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις των στοιχείων του μέσου είναι παράλληλες στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος τότε έχουμε *διαμήκη κύματα* (όπως τα ηχητικά κύματα στον αέρα).

Αν το μέσο είναι περιορισμένο σε έκταση, όπως η χορδή με τα σταθερά άκρα στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα οδεύοντα κύματα ανακλώνται στα άκρα και στο περιορισμένο μέσο αναπτύσσονται *στάσιμα κύματα* από την υπέρθεση των οδευόντων προς αντίθετες κατευθύνσεις κυμάτων.

#### 8.2 Η κυματική εξίσωση

Υποθέτουμε ότι η χορδή της προηγούμενης παραγράφου είναι ομογενής με γραμμική πυκνότητα  $\rho$  (μάζα ανά μονάδα μήκους) και ότι είναι τεντωμένη με σταθερή τάση  $T$  (βλ. Σχήμα). Θα θεωρήσουμε ότι οι μετατοπίσεις των στοιχείων της χορδής περιορίζονται στο επίπεδο  $xy$  και είναι μικρές. Εξετάζουμε την κίνηση ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής το οποίο στη θέση ισορροπίας (από  $x$  έως  $x + dx$ ) έχει μήκος  $dx$  και τη χρονική στιγμή  $t$  έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα και μήκος  $ds$ .  $y(x, t)$  είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του στοιχειώδους τμήματος τη χρονική στιγμή  $t$ . Η βαρύτητα αγνοείται.

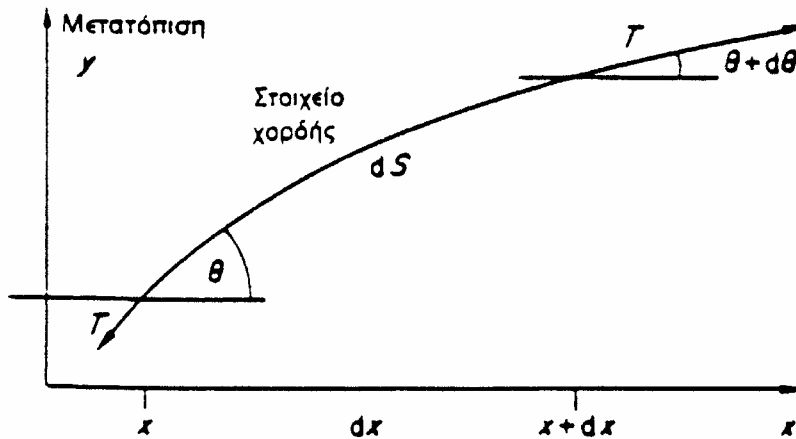
Για μικρές ταλαντώσεις, η γωνία  $\theta$  είναι μικρή και τα

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.1)$$

είναι επίσης μικρά, οπότε

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \approx dx \quad (8.2)$$

Μάζα του στοιχείου:  $dm = \rho ds = \rho dx$ . Επιτάχυνση:  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .



Μετατοπισμένο στοιχείο χορδής μήκους  $ds \approx dx$  με τάση  $T$  που ενεργεί κατά μια γωνία  $\theta$  στο  $x$  και  $\theta + d\theta$  στο  $x + dx$ .

Η κατακόρυφη δύναμη που ασκείται πάνω στο στοιχείο προς τα θετικά  $y$  είναι

$$dF_y = T \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta \quad (8.3)$$

Η Εξ. (8.3), λόγω της Εξ. (8.1), γίνεται:  $dF_y = T \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right]$ .

Το ανάπτυγμα του  $\frac{\partial y}{\partial x}$  κατά Taylor είναι

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x + dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_x + \frac{dx^2}{2!} \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_x + \dots$$

από το οποίο προκύπτει, για μικρά  $dx$ , η προσέγγιση  $\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \approx dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_x$

και έτσι έχουμε

$$dF_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (8.4)$$

Η εξίσωση κίνησης του στοιχείου της χορδής είναι τότε:  $dF_y = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

η οποία μπορεί να γραφεί ως  $\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$ , και τελικά:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8.5)$$

ή  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (8.6)$

η οποία είναι η *κυματική εξίσωση*. Το μέγεθος  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  έχει διαστάσεις ταχύτητας και όπως θα δούμε είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο μέσον ή η *κυματική ταχύτητα*.

Η Εξ. (8.6) περιγράφει την εγκάρσια κυματική κίνηση στη χορδή. Είναι ίδια με την Εξ. (7.45) η οποία προέκυψε ως οριακή περίπτωση της κίνησης χορδής με εντοπισμένες μάζες (σφαιρίδια) και είναι γενικά η εξίσωση κύματος σε μία διάσταση την  $x$ .

### 8.3 Λύση της κυματικής εξίσωσης

Οι λύσεις της Εξ. (8.6) είναι της μορφής  $f_1(ct-x)$  ή  $f_2(ct+x)$ . Η πλήρης λύση είναι:  $y = f_1(ct-x) + f_2(ct+x)$ , όπου  $f_1$  και  $f_2$  οποιεσδήποτε συναρτήσεις.

Απόδειξη για την  $f_1(ct-x)$ :

$$\text{Έστω } u = ct - x. \text{ Τότε } \frac{\partial u}{\partial x} = -1 \text{ και } \frac{\partial u}{\partial t} = c$$

$$\text{οπότε } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = -f_1'(ct-x)$$

$$\text{και } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -f_1'(ct-x) \right] = -\frac{d}{du} f_1' \frac{\partial u}{\partial x} = f_1''(ct-x) \quad (8.7)$$

$$\text{Επίσης } \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{df_1}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = cf_1'(ct-x)$$

$$\text{και } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ cf_1'(ct-x) \right] = c \frac{d}{du} f_1' \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 f_1''(ct-x) \quad (8.8)$$

Από τις εξισώσεις (8.7) και (8.8) προκύπτει για,  $y = f_1(ct-x)$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

Ομοίως επαληθεύεται για την  $f_2(ct+x)$  και για το άθροισμα  $f_1 + f_2$ .

Αν  $y = f_1(ct-x)$ , η μετατόπιση  $y$  έχει στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$  την τιμή που είχε στη θέση  $x' = x - \Delta x$  τη στιγμή  $t' = t - \frac{\Delta x}{c}$ , αφού

$$f_1(ct' - x') = f_1\left(ct - c \frac{\Delta x}{c} - x + \Delta x\right) = f_1(ct - x).$$

Για αυτό το λόγο η  $y = f_1(ct-x)$  παριστάνει μία μεταβολή που οδεύει κατά τα θετικά  $x$  με ταχύτητα  $c$ . Ομοίως αποδεικνύεται ότι η  $f_2(ct+x)$  παριστάνει μία μεταβολή που οδεύει κατά τα αρνητικά  $x$  με ταχύτητα επίσης  $c$ .

### Κύμα ημιτονικής μορφής

Αν η κίνηση του στοιχείου στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$  είναι μία αρμονική ταλάντωση τότε η μετατόπιση θα είναι μία ημιτονική ή συνημιτονική συνάρτηση. Για να ισχύει αυτό πρέπει η μεταβλητή  $(ct-x)$  στη συνάρτηση  $f_1(ct-x)$  που έχει διαστάσεις μήκους να πολλαπλασιασθεί με έναν παράγοντα  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , όπου το  $\lambda$  είναι ένα μήκος, ώστε το όρισμα να είναι αδιάστατο μέγεθος (ακτίνια). Έχουμε για τη μετατόπιση μία συνάρτηση της μορφής:

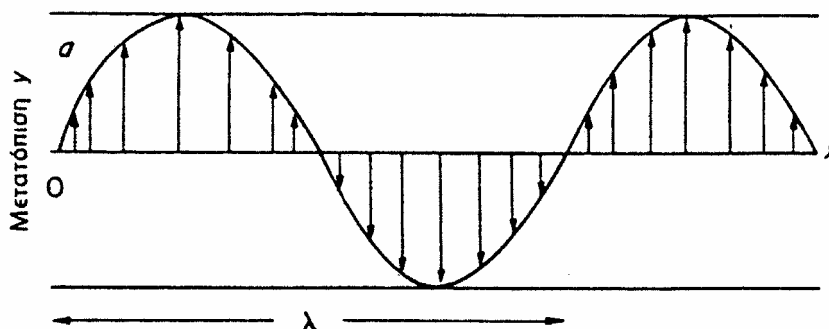
$$y = a \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct-x) \right] \quad (8.9)$$

(όπου  $a$  =σταθ.) η οποία είναι λύση της κυματικής εξίσωσης ως συνάρτηση του  $(ct-x)$ .

Η Εξ. (8.9) είναι της μορφής

$$y = a \sin(\omega t - \phi) = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \quad (8.10)$$

αν  $2\pi \frac{c}{\lambda} = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  και  $\phi = 2\pi \frac{x}{\lambda}$ .



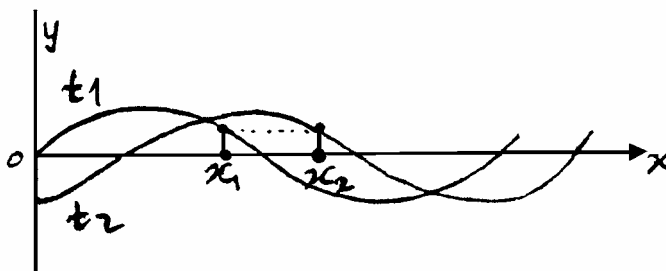
Γεωμετρικός τόπος των μετατοπίσεων των ταλαντωτών όταν διεγείρονται από ένα κύμα που οδεύει κατά τη θετική διεύθυνση  $x$ . Το μήκος κύματος  $\lambda$  ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε ταλαντωτών που έχουν διαφορά φάσης  $2\pi$  ακτίνια.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε μία δεδομένη στιγμή υπάρχει περιοδικότητα στο χώρο με διάστημα  $\lambda$ , το μήκος κύματος. Σε μία δεδομένη θέση (έστω  $x = x_1$ ),

$$y_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x_1}{\lambda}\right), \text{ δηλαδή απλή αρμονική κίνηση του σημείου } x_1 \text{ με περίοδο } T \text{ και}$$

συχνότητα  $\nu$  όπου  $T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu}$ .

Σε δύο διαδοχικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$  οι μορφές του κύματος είναι:



Αν το σημείο  $x_2$  έχει την ίδια φάση  $\Phi$  τη στιγμή  $t_2$  με αυτήν που είχε το σημείο  $x_1$  τη στιγμή  $t_1$ , δηλαδή

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(ct_1 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(ct_2 - x_2)$$

τότε  $ct_1 - x_1 = ct_2 - x_2$  και  $c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$  (ταχύτητα).

Επειδή η  $c$  είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ή το κύμα από σημείο σε σημείο στη χορδή, ονομάζεται *φασική ταχύτητα* ή *κυματική ταχύτητα*.

Το κύμα  $a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$ , όπως γενικότερα η  $f_1(ct - x)$ , κινείται (οδεύει) προς τα θετικά  $x$  με ταχύτητα  $c$  και το κύμα  $a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct + x)$ , όπως γενικότερα η  $f_2(ct + x)$ , οδεύει προς τα αρνητικά  $x$  με ταχύτητα επίσης  $c$ .

### Ισοδύναμες μορφές ημιτονικού οδεύοντος κύματος

Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες εκφράσεις για την περιγραφή ενός ημιτονικού οδεύοντος κύματος:

$$\begin{aligned}
 y &= a \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x) \right] \\
 y &= a \sin \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right], & y &= a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right], \\
 y &= a \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right], & y &= a \sin(\omega t - kx)
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

όπου  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  και ονομάζεται *κυματικός αριθμός*.

Αντίστοιχες εκφράσεις ισχύουν για συνημιτονικό κύμα. Κάθε μία από αυτές τις εκφράσεις είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Επίσης, λύσεις της κυματικής εξίσωσης είναι και οι συναρτήσεις

$$y = ae^{i(\omega t - kx)} = a[\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)] \tag{8.12}$$

και γενικότερα η  
με  $\underline{A} = A_1 + iA_2$ .

$$y = \underline{A}e^{i(\omega t - kx)} \tag{8.13}$$

### Ταχύτητες στην κυματική κίνηση

Σε ένα ημιτονικό ή συνημιτονικό οδεύον κύμα, τα κινούμενα μέρη δεν οδεύουν μέσα στο μέσον, αλλά εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας τους.

**Κυματική ή φασική ταχύτητα:**  $c = \frac{\partial x}{\partial t}$  (από  $c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ )

είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαταραχή κινείται κατά μήκος της χορδής.

**Σωματιδιακή ή απλή αρμονική ταχύτητα:**

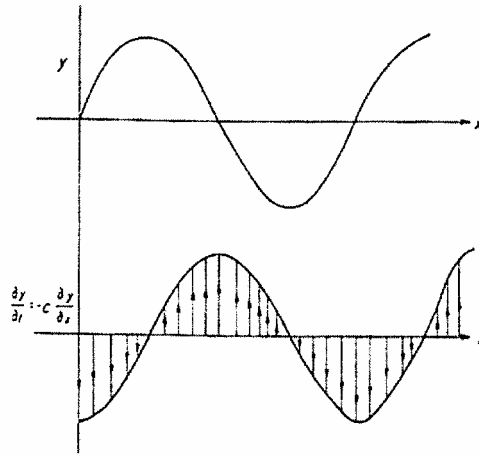
είναι η τοπική ταχύτητα του κάθε ταλαντωτή  $\frac{\partial y}{\partial t}$  (βλέπε σχήμα).

$$\text{Αν } y = a \sin(\omega t - kx) \tag{8.14}$$

$$\text{τότε } \frac{\partial y}{\partial t} = \omega a \cos(\omega t - kx) \tag{8.15}$$

$$\text{και } \frac{\partial y}{\partial x} = -ka \cos(\omega t - kx) \tag{8.16}$$

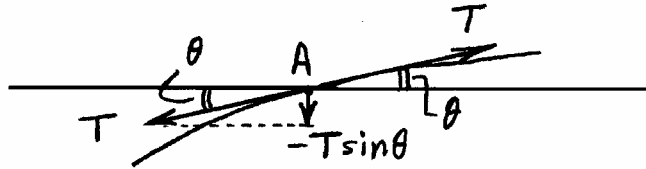
$$\text{οπότε } \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\omega}{k} \frac{\partial y}{\partial x} = -c \frac{\partial y}{\partial x} \quad \left( = -\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \tag{8.17}$$



Το μέγεθος και η διεύθυνση της σωματιδιακής ταχύτητας  $\partial y/\partial t = -c(\partial y/\partial x)$  σε κάθε σημείο  $x$  υποδεικνύονται με ένα βέλος στο ημιτονικό κύμα του σχήματος που οδεύει προς τα δεξιά.

### Εγκάρσια δύναμη που μεταδίδεται στη χορδή

Η εγκάρσια δύναμη που μεταδίδεται προς τα δεξιά σε ένα σημείο A είναι η εγκάρσια συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το αριστερά του A τμήμα της χορδής πάνω στο δεξιά του A τμήμα. Στο σημείο A η εγκάρσια αυτή συνιστώσα είναι



$$-T \sin \theta \approx -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

### 8.4 Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση χορδής

(Η χορδή ως εξαναγκασμένος ταλαντωτής).

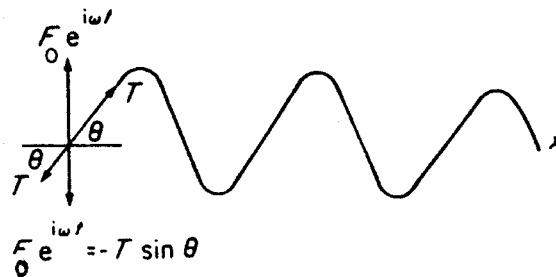
Κάθε μέσο στο οποίο μεταδίδονται κύματα παρουσιάζει μία σύνθετη αντίσταση σε αυτά τα κύματα.

Ως σύνθετη αντίσταση χορδής σε οδεύοντα εγκάρσια κύματα (εγκάρσια σύνθετη αντίσταση) ορίζεται το μέγεθος

$$Z = \frac{\text{εγκάρσια δύναμη}}{\text{εγκάρσια ταχύτητα}} = \frac{F_{\text{εγκ}}}{v_{\text{εγκ}}} \quad (8.18)$$

Αν στο άκρο της χορδής του σχήματος ασκείται εγκάρσια δύναμη  $F_y$  και η τάση της χορδής είναι  $T$ , στο άκρο της χορδής πρέπει να έχουμε για μικρό  $\theta$

$$F_{\text{εγκ}} = F_y = -T \sin \theta \approx -T \tan \theta = -T \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.19)$$



Η χορδή ως εξαναγκασμένος ταλαντωτής που διεγείρεται στο ένα της άκρο από την εγκάρσια δύναμη  $F_0 e^{i\omega t}$

οπότε, μέσω και της Εξ. (8.17), προκύπτει

$$Z = \frac{-T \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}} = \frac{-T \frac{\partial y}{\partial x}}{-c \frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{T}{c} \quad (8.20)$$

Επομένως, η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της χορδής σε εγκάρσια οδεύοντα κύματα είναι

$$Z = \frac{T}{c} = \rho c \quad (\text{αφού } T = \rho c^2) \quad (8.21)$$

Είναι πραγματική επειδή δεν πήραμε υπόψη μας κάποιο μηχανισμό απωλειών. Η σύνθετη αντίσταση όπως και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθορίζονται από την αδράνεια ( $\rho$ : μάζα ανά μονάδα μήκους) και την ελαστικότητα (τάση  $T$ ) του μέσου.

Η εγκάρσια δύναμη που η χορδή ασκεί στο φορέα της εξωτερικής δύναμης (αντίδραση) είναι

$$-F_y = T \frac{\partial y}{\partial x} = -Z \frac{\partial y}{\partial t} = -Zv \quad (8.22)$$

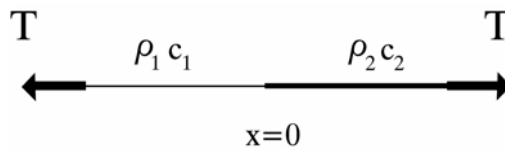
δηλαδή, μία δύναμη ανάλογη της ταχύτητας με συντελεστή αναλογίας τη σύνθετη αντίσταση  $Z$ .

### 8.5 Ανάκλαση και μετάδοση κυμάτων χορδής σε ένα σύνορο.

Εξετάζουμε πώς συμπεριφέρονται τα κύματα όταν φθάνουν σε σημείο όπου παρουσιάζεται αλλαγή στη σύνθετη αντίσταση  $Z = \rho c$ .

Έστω χορδή με δύο τμήματα, με γραμμικές πυκνότητες  $\rho_1$  και  $\rho_2$ . Επομένως

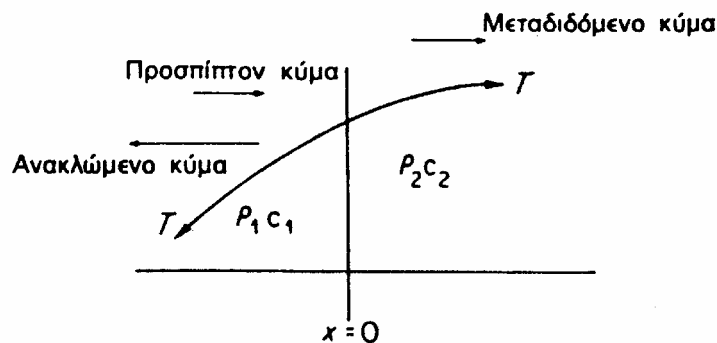
$$c_1^2 = \frac{T}{\rho_1} \quad \text{και} \quad c_2^2 = \frac{T}{\rho_2} \quad (8.23)$$



Οι σύνθετες αντιστάσεις στα δύο μέρη είναι

$$Z_1 = \rho_1 c_1 \quad \text{και} \quad Z_2 = \rho_2 c_2 \quad (8.24)$$

Στη θέση  $x=0$ , όπου αλλάζει η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση, ένα μέρος του οδεύοντος κύματος θα ανακλαστεί και ένα μέρος θα διαδοθεί (βλέπε σχήμα)



Κύματα σε μια χορδή με σύνθετη αντίσταση  $\rho_1 c_1$  που ανακλώνται και μεταδίδονται στο σύνορο όπου η σύνθετη αντίσταση της χορδής αλλάζει και γίνεται  $\rho_2 c_2$ .

Οι απομακρύνσεις των κυμάτων θα είναι (Εξ. (8.12))

προσπίπτον κύμα:  $y_i = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} \rightarrow$  (8.25)

ανακλώμενο κύμα:  $y_r = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} \leftarrow$  (8.26)

μεταδιδόμενο κύμα:  $y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \rightarrow$  (8.27)

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$ , για κάθε  $t$**

Για κάθε  $t$ :

(1) (απομάκρυνση στα αριστερά του  $x=0$ ) = (απομάκρυνση στα δεξιά του  $x=0$ )

(2) (εγκάρσια δύναμη στα αριστερά του  $x=0$ ) = (εγκάρσια δύναμη στα δεξιά του  $x=0$ )

Δηλαδή:

(1) συνέχεια στην απομάκρυνση  $y$ , και

(2) συνέχεια στην εγκάρσια δύναμη  $T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)$  στο  $x=0$ .

H (1) δίνει:  $\Rightarrow y_i = y_r + y_t$  (8.28)

και με τις Εξ. (8.25) ως (8.27):

$$\Rightarrow A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad (8.29)$$

η οποία στο  $x=0$  γίνεται

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (8.30)$$

H (2) δίνει:  $\Rightarrow T \frac{\partial}{\partial x} (y_i + y_r) = T \frac{\partial y_t}{\partial x}$  (8.31)

η οποία στο  $x=0$  για κάθε  $t$  γίνεται

$$-k_1 T A_1 + k_1 T B_1 = -k_2 T A_2 \quad (8.32)$$

και επειδή  $k = \frac{\omega}{c}$ ,

$$-\frac{T A_1}{c_1} + \frac{T B_1}{c_1} = -\frac{T A_2}{c_2} \quad (8.33)$$

Λόγω των Εξ. (8.23) και (8.24) έχουμε

$$Z_1 (A_1 - B_1) = Z_2 A_2 \quad (8.34)$$

Από τις Εξ. (8.30) και (8.34) μπορούμε να πάρουμε:

συντελεστής ανάκλασης πλάτους:  $\frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$  (8.35)

συντελεστής μετάδοσης πλάτους:  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$  (8.36)

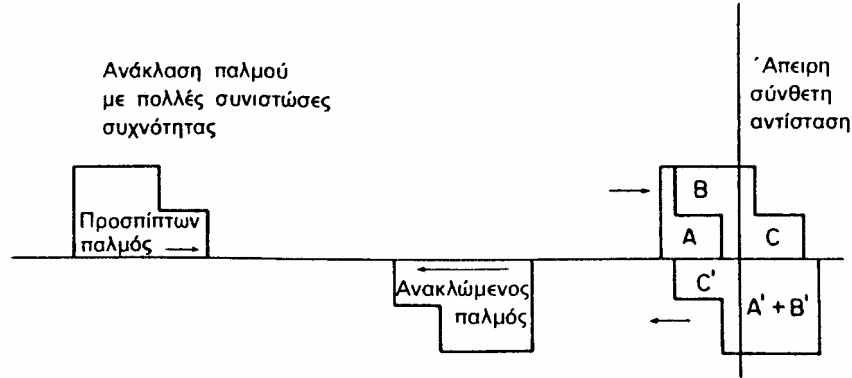
Οι συντελεστές είναι ανεξάρτητοι της συχνότητας. Είναι πραγματικοί και επομένως δεν υπάρχουν αλλαγές φάσης εκτός από αυτήν των  $\pi$  rad αν  $Z_2 > Z_1$  οπότε αλλάζει το πρόσημο στην ανάκλαση. Εξαρτώνται μόνον από τις σύνθετες αντιστάσεις.

Αν έχουμε σταθερό άκρο χορδής στο  $x=0$ , τότε  $Z_2 = \infty$ . Στην περίπτωση αυτή  $\frac{B_1}{A_1} = -1$ ,

δηλαδή έχουμε πλήρη ανάκλαση με αλλαγή φάσης  $\pi$  rad (αλλαγή προσήμου). Μία ομάδα κυμάτων (παλμός με πολλές συνιστώσες συχνότητας) διατηρεί το σχήμα της αλλά αναστρέφεται (βλέπε σχήμα).



Αν έχουμε ελεύθερο άκρο χορδής στο  $x=0$  (ελεύθερη εγκάρσια κίνησή του χωρίς τριβές), τότε  $Z_2 = 0$ . Στην περίπτωση αυτή  $\frac{B_1}{A_1} = 1$  και  $\frac{A_2}{A_1} = 2$ .



Ένας παλμός ή ένα κυματοπακέτο που αποτελείται από πολλές συνιστώσες συχνότητες ανακλάται σε μια άπειρη σύνθετη αντίσταση. Κάθε συνιστώσα ανακλάται τελείως με αλλαγή φάσης  $\pi$  ακτίνια και επομένως ο ανακλώμενος παλμός έχει το ανεστραμμένο σχήμα της αρχικής κυματομορφής. Στο σχήμα, ο παλμός κατά την ανάκλαση διαιρείται σε τρία τμήματα A, B και C. Τη στιγμή της παρατήρησης, το τμήμα C έχει κιόλας ανακλαστεί και υποστεί αναστροφή για να γίνει το C'. Το πραγματικό σχήμα του παλμού που παρατηρείται τη στιγμή αυτή είναι το A από το  $A+B+C'$ , όπου  $B=-C'$ . Η μετατόπιση στο σημείο της ανάκλασης πρέπει να είναι μηδέν. Το αντεστραμμένο τμήμα  $A'+B'$  αντιστοιχεί στο τμήμα  $A+B$  που δεν έχει ανακλαστεί και θα προχωρήσει κατά την αρνητική κατεύθυνση  $x$ , πέρα από το σύνορο, καθώς τα A και B ανακλώνται.

## 8.6 Ανάκλαση και μετάδοση ενέργειας

Τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια. Αν θεωρήσουμε κάθε στοιχείο μήκους  $\delta x$  της χορδής, με μάζα  $\rho \delta x$ , ως απλό αρμονικό ταλαντωτή με πλάτος  $A$  και γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , τότε η ενέργειά του είναι  $\delta E = \frac{1}{2} \rho \delta x \omega^2 A^2$  και η ενέργεια ανά μονάδα μήκους,

(κινητική + δυναμική) είναι

$$\frac{\delta E}{\delta x} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (8.37)$$

Το κύμα οδεύει με ταχύτητα  $c$  και, καθώς κάθε μονάδα μήκους της χορδής διεγείρεται σε ταλάντωση με τη διέλευση του κύματος, ο ρυθμός με τον οποίο μεταδίδεται η ενέργεια κατά μήκος της χορδής θα είναι ίσος με το γινόμενο της ενέργειας ανά μονάδα μήκους επί την ταχύτητα, δηλαδή

$$\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 c \quad (8.38)$$

Στο σημείο  $x=0$  όπου υπάρχει μεταβολή από  $Z_1 = \rho_1 c_1$  σε  $Z_2 = \rho_2 c_2$ , η ενέργεια φθάνει με ρυθμό

$$\frac{1}{2} \rho_1 c_1 \omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_1^2 \quad (8.39)$$

και απομακρύνεται με ρυθμό

$$\frac{1}{2} \rho_1 c_1 \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \omega^2 A_2^2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_2^2 \quad (8.40)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (8.35) και (8.36) έχουμε για το ρυθμό απομάκρυνσης,

$$\frac{1}{2}\omega^2 A_1^2 \frac{Z_1(Z_1 - Z_2)^2 + 4Z_1^2 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_1^2 \quad (8.41)$$

Δηλαδή, η ενέργεια φεύγει από το σύνορο με τον ίδιο ρυθμό με τον οποίο φθάνει (διατήρηση της ενέργειας, αφού δεν υποθέσαμε την ύπαρξη κάποιου μηχανισμού απωλειών).

### 8.7 Οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης ισχύος (έντασης)

$$\frac{\text{Ανακλωμενη Ισχυς}}{\text{Προσπιπτουσα Ισχυς}} = \frac{\frac{1}{2}Z_1\omega^2 B_1^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_1^2} = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad (8.42)$$

$$\frac{\text{Μεταδιδομενη Ισχυς}}{\text{Προσπιπτουσα Ισχυς}} = \frac{\frac{1}{2}Z_2\omega^2 A_2^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2 A_1^2} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (8.43)$$

Αν  $Z_1 = Z_2$ , δεν υπάρχει ανάκλαση και οι σύνθετες αντιστάσεις είναι προσαρμοσμένες.

### 8.8 Στάσιμα κύματα σε χορδή σταθερού μήκους

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά κυμάτων σε ομογενή χορδή μήκους  $l$  με σταθερά άκρα (όπως στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου). Όπως είδαμε, το οδεύον κύμα ανακλάται σε σταθερό άκρο (άπειρη σύνθετη αντίσταση,  $Z = \infty$ ), με συντελεστή  $-1$ . Περιοριζόμαστε σε κύμα μίας γωνιακής συχνότητας  $\omega$  το οποίο περιλαμβάνει μία συνιστώσα με πλάτος  $a$  που οδεύει κατά τα θετικά  $x$  και μία συνιστώσα με πλάτος  $b$  που οδεύει κατά τα αρνητικά  $x$ . Η μετατόπιση της χορδής στο σημείο  $x$  στη στιγμή  $t$  θα είναι

$$y = ae^{i(\omega t - kx)} + be^{i(\omega t + kx)} \quad (8.44)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$y = 0$  στα  $x = 0$  και  $x = l$  για κάθε  $t$ .

Για  $x = 0$  είναι:  $0 = (a + b)e^{i\omega t}$  για κάθε  $t$ ,  
 άρα  $a = -b$  (8.45)

Δηλαδή πλήρης ανάκλαση με αλλαγή φάσης  $\pi$  rad.

Επομένως:  $y = ae^{i\omega t}(e^{-ikx} - e^{ikx})$  (8.46)

αλλά  $\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$  (8.47)

οπότε  $y = -2iae^{i\omega t} \sin kx$  (8.48)

Δηλαδή, οι μετατοπίσεις όλων των σημείων της χορδής έχουν την ίδια χρονική εξάρτηση (ταλαντώνονται σε φάση), το πλάτος της ταλάντωσής τους όμως εξαρτάται από τη θέση  $x$ . Στη χορδή αναπτύσσεται *στάσιμο κύμα*.

Για  $x = l$ , είναι:  $0 = -2iae^{i\omega t} \sin kl$  (8.49)

επομένως  $\sin kl = \sin \frac{\omega l}{c} = 0$  (8.50)

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \frac{\omega l}{c} = n\pi \quad (8.51)$$

Συνεπώς οι επιτρεπόμενες τιμές γωνιακών συχνοτήτων είναι

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l} \quad (8.52)$$

συχνοτήτων

$$v_n = \frac{nc}{2l} = \frac{c}{\lambda_n} \quad (8.53)$$

και μηκών κύματος

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (8.54)$$

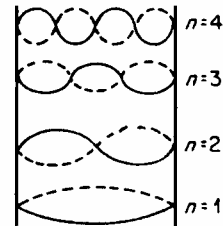
$$\text{και} \quad \sin \frac{\omega_n x}{c} = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.55)$$

Οι  $v_n$  είναι οι κανονικές συχρότητες, δηλαδή είναι οι συχρότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της χορδής (ή οι ιδιοσυχρότητές της).

Το σχήμα δείχνει τις μετατοπίσεις της χορδής για τις τέσσερις πρώτες αρμονικές συχρότητες ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). Για  $n = 1$

έχουμε τη θεμελιώδη συχρότητα.

Οι τέσσερις πρώτες αρμονικές  $n = 1, 2, 3, 4$  των στάσιμων κυμάτων που επιτρέπονται μεταξύ των δύο σταθερών άκρων μιας χορδής.



Όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης μπορούν να υπάρχουν ταυτόχρονα, ο καθένας με το πλάτος του.

Όταν μόνο ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης (ο  $n$ -στος) είναι διεγερμένος, τα σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα βρίσκονται εκεί όπου

$$\sin \frac{\omega_n x}{c} = \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad (8.56)$$

$$\text{δηλαδή} \quad \frac{n\pi x}{l} = r\pi \quad \text{και} \quad x_r = \frac{l}{n}r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (8.57)$$

Τα σημεία μηδενικής απομάκρυνσης ονομάζονται δεσμοί ή δεσμικά σημεία. Προκύπτουν όταν στα άκρα έχουμε πλήρη ανάκλαση. Τότε έχουμε και ισότητα των ενεργειών που μεταφέρονται προς τις δύο κατευθύνσεις, δηλαδή ροή ενέργειας ίση με μηδέν.

Η απομάκρυνση της  $n$ -στής αρμονικής είναι [Εξ. (8.48)]:

$$y_n = 2a(-i)(\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.58)$$

Οι εκφράσεις

$$\text{Re}[y_n] = 2a \sin \omega_n t \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.59)$$

$$\text{Im}[y_n] = -2a \cos \omega_n t \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.60)$$

είναι αποδεκτές εκφράσεις για τη μετατόπιση [η πρώτη αντιστοιχεί στο πραγματικό,  $\text{Re}[y]$ , και η δεύτερη στο φανταστικό μέρος,  $\text{Im}[y]$ , της Εξ. (8.54)].

Η γενική έκφραση για την  $y_n$  είναι της μορφής

$$y_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.61)$$

που είναι γραμμικός συνδυασμός των Εξ. (8.59) και (8.60). Το πλάτος της ταλάντωσης στη θέση  $x$  είναι:

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.62)$$

Η γενική λύση για την κίνηση της χορδής είναι ο γραμμικός συνδυασμός όλων των κανονικών ταλαντώσεων,  $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ . Αυτή είναι η απομάκρυνση ενός σημείου της χορδής.

### 8.8 Ενέργεια ταλαντώνομενης χορδής

Η ταλαντώνομενη χορδή έχει κινητική και δυναμική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια ενός στοιχείου της χορδής μήκους  $dx$  και γραμμικής πυκνότητας μάζας  $\rho$  είναι  $dE_{κιν} = \frac{1}{2} \rho dx \dot{y}^2$ . Για ολόκληρη τη χορδή:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{y}^2 dx \quad (8.63)$$

Η δυναμική ενέργεια του στοιχείου αυτού, είναι ίση με το έργο που παράγει η τάση  $T$  εκτείνοντας το στοιχείο από μήκος  $dx$  σε μήκος  $ds$ , κατά την ταλάντωση, δηλαδή  $dE_{δυν} = T(ds - dx)$ .

$$\text{Αλλά, για μικρά } \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ είναι } T(ds - dx) = T \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx - dx \right\} \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Για ολόκληρη τη χορδή:

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} T \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8.64)$$

### 9. Ενέργεια των κανονικών τρόπων ταλάντωσης χορδής

Για τον  $n$ -στό τρόπο ταλάντωσης η απομάκρυνση είναι [Εξ. (8.51)]:

$$y_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

$$\text{ή } y_n = a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.65)$$

$$\text{όπου } a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{A_n}{B_n} \quad (8.66)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (8.63) και (8.64) για τον  $n$ -στό τρόπο ταλάντωσης, επειδή

$$\dot{y}_n = \frac{\partial y_n}{\partial t} = \omega_n a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.67)$$

$$\text{και } \frac{\partial y_n}{\partial x} = \frac{\omega_n a_n}{c} \sin(\omega_n t + \varphi_n) \cos \frac{\omega_n x}{c} \quad (8.68)$$

έχουμε 
$$E_{n(\kappa\nu)} = \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 a_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} dx \quad (8.69)$$

και 
$$E_{n(\delta\nu)} = \frac{1}{2} T \frac{\omega_n^2 a_n^2}{c^2} \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \int_0^l \cos^2 \frac{\omega_n x}{c} dx \quad (8.70)$$

Αλλά 
$$\int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\omega_n x}{c} dx = \frac{l}{2} \quad (8.71)$$

και  $\rho l = m$  η μάζα της χορδής ενώ  $c^2 = T / \rho$ , οπότε

$$E_{n(\kappa\nu)} = \frac{1}{2} \rho l \omega_n^2 a_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) = \frac{1}{4} m \omega_n^2 a_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \quad (8.72)$$

$$E_{n(\delta\nu)} = \frac{1}{2} \rho l \omega_n^2 a_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) = \frac{1}{4} m \omega_n^2 a_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \quad (8.73)$$

Συνεπώς η ολική ενέργεια του  $n$ -στού τρόπου ταλάντωσης είναι

$$E_{n(\kappa\nu+\delta\nu)} = \frac{1}{4} m \omega_n^2 a_n^2 = \frac{1}{4} m \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \quad (8.74)$$

Για την όλη κίνηση της χορδής, ισχύει βεβαίως:  $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ,  $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ .

### 8.10 Κυματομάδες και ομαδική ταχύτητα

Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά μιας ομάδας συνιστωσών συχνοτήτων.

*Επαλληλία δύο κυμάτων σχεδόν ίσων συχνοτήτων*

Έστω ότι

$$y_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad (8.75)$$

και 
$$y_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (8.76)$$

Η επαλληλία των δύο δίνει

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \quad (8.77)$$

δηλαδή ένα κυματικό σύστημα με συχνότητα  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  και μέγιστο πλάτος  $2a$  διαμορφωμένο

στο χώρο και στο χρόνο από μια περιβάλλουσα συχνότητα  $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|$  και κυματικό αριθμό

$\frac{k_1 - k_2}{2}$  (στο σχήμα φαίνεται η μορφή για κάποιο  $x$ ).

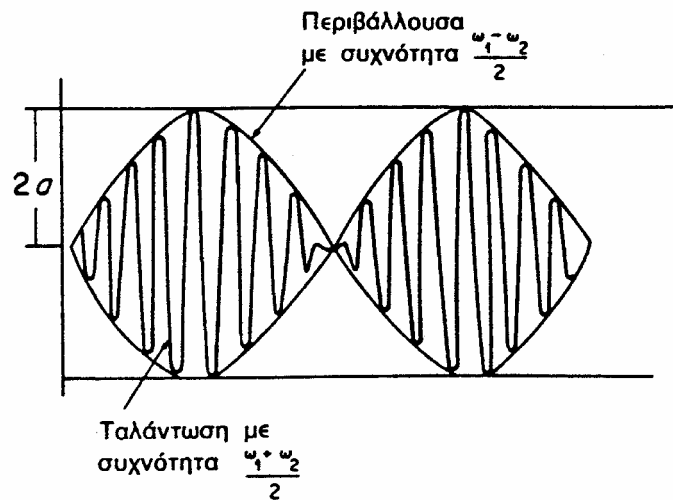
Η περιβάλλουσα  $A(t) \equiv 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$  κινείται στο χώρο με ταχύτητα  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$ .

Αυτή είναι η ταχύτητα του διαμορφωμένου κύματος και ονομάζεται *ομαδική ταχύτητα* των δύο κυμάτων.

Αν οι φασικές ταχύτητες των δύο κυμάτων είναι ίσες δηλαδή  $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$  τότε

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{c k_1 - c k_2}{k_1 - k_2} = c \quad (8.78)$$

οπότε συνιστώσες και ομάδα κινούνται με την ίδια ταχύτητα και η μορφή παραμένει σταθερή.



Η επαλληλία δύο κυμάτων με ελάχιστα διαφορετικές συχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  σχηματίζει μια ομάδα. Η γρήγορη ταλάντωση γίνεται με τη μέση συχνότητα των δύο συνιστωσών  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  και η περιβάλλουσα της ομάδας που μεταβάλλεται αργά έχει συχνότητα  $(\omega_1 - \omega_2)/2$ , την ημιδιαφορά των συνιστωσών.

Στην περίπτωση των ηχητικών κυμάτων, η ένταση γίνεται μέγιστη δύο φορές σε κάθε περίοδο της διαμόρφωσης δηλαδή με μια συχνότητα  $\nu_1 - \nu_2$ . Έχουμε τότε *διακροτήματα* συχνότητας  $\nu_1 - \nu_2$ . Όταν τα πλάτη των συνιστωσών δεν είναι ίσα τότε η εικόνα είναι διαφορετική. Γενικά, ένα κύμα διαμορφωμένο κατά πλάτος (Amplitude Modulation, AM) παριστάνεται ως

$$y = A \cos(\omega t - kx) \quad (8.79)$$

με πλάτος διαμόρφωσης

$$A = a + b \cos \omega' t \quad (8.80)$$

Αυτό δίνει

$$y = a \cos(\omega t - kx) + \frac{b}{2} \{ \cos[(\omega + \omega')t - kx] + \cos[(\omega - \omega')t - kx] \} \quad (8.81)$$

Δηλαδή, η διαμόρφωση πλάτους εισάγει δύο νέες συχνότητες  $\omega \pm \omega'$ , τις πλευρικές ζώνες ή τόνους συνδυασμού.

*Κυματομάδες και ομαδική ταχύτητα*

Αν οι δύο συνιστώσες έχουν διαφορετικές ταχύτητες,  $\frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2}$ , η ταχύτητα του μέγιστου πλάτους της ομάδας είναι

$$\text{ομαδική ταχύτητα:} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_g \quad (8.82)$$

η οποία τώρα είναι διαφορετική από τις ταχύτητες των συνιστωσών.

Συνεπώς το *σχήμα της ομάδας αλλάζει με το χρόνο*. Ένα μέσον στο οποίο η φασική ταχύτητα δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από τη συχνότητα, δηλαδή  $v = v(\nu)$ , ονομάζεται *διασκορπιστικό μέσο*.

Η σχέση που εκφράζει την εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  από τον κυματικό αριθμό  $k$ ,  $\omega(k)$ , ονομάζεται *σχέση διασποράς*.

Για μια ομάδα κυμάτων με πολλές συνιστώσες συχνοτήτων που είναι σχεδόν ίσες, η ομαδική ταχύτητα γίνεται

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_g \quad (8.83)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα του μέγιστου πλάτους. Είναι και η ταχύτητα μετάδοσης ενέργειας. Αφού  $\omega = kv$  ( $v$  = φασική ταχύτητα), η ομαδική ταχύτητα είναι

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv) = v + k \frac{dv}{dk} \quad (8.84)$$

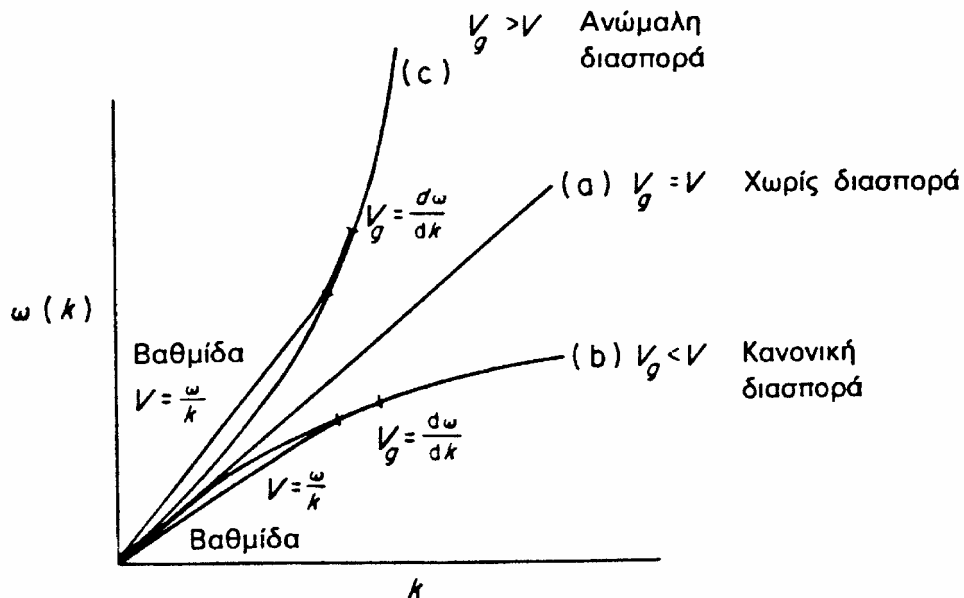
ή 
$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (8.85)$$

όπου  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , ο κυματικός αριθμός.

Συνήθως  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ , οπότε  $v_g < v$ . Αυτό ονομάζεται κανονική διασπορά.

Αν  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ , τότε  $v_g > v$ , που ονομάζεται ανώμαλη διασπορά.

Στο σχήμα οι τρεις καμπύλες παριστάνουν τη συμπεριφορά των τριών διαφορετικών τύπων διασποράς.



Καμπύλες που απεικονίζουν σχέσεις διασποράς: (a) μια ευθεία γραμμή που παριστάνει ένα μη διασκορπιστικό μέσο,  $v = v_g$ ; (b) μια σχέση κανονικής διασποράς, όπου η παράγωγος  $v_g = d\omega/dk < v = \omega/k$ ; (c) μια σχέση ανώμαλης διασποράς, όπου  $v < v_g$ .

## Προβλήματα

**8.1** Σε μια τεντωμένη χορδή μήκους  $L$ , η οποία έχει ακίνητα τα δύο της άκρα στα σημεία  $x=0$  και  $x=L$ , έχουν διεγερθεί δύο μόνο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ο 1ος και ο 3ος), έτσι ώστε η εγκάρσια μετατόπιση να δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,t) = \alpha_1 \sin\left(\pi \frac{c}{L} t + \phi_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \alpha_3 \sin\left(3\pi \frac{c}{L} t + \phi_3\right) \sin\left(3 \frac{\pi}{L} x\right)$$

όπου  $\alpha_1, \alpha_3, \phi_1$  και  $\phi_3$  είναι σταθερές.

- (α) Βρείτε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια της χορδής.  
(β) Βρείτε την ολική ενέργεια της χορδής και δείξτε ότι αποτελείται από δύο ανεξάρτητους σταθερούς όρους, που αντιστοιχούν στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

**8.2** Χορδή τεντωμένη με δύναμη  $T$  έχει ακίνητο το άκρο της στο σημείο  $x=L$ , ενώ το άλλο της άκρο, στο σημείο  $x=0$  εξαναγκάζεται να ταλαντώνεται εγκάρσιως σύμφωνα με τη σχέση  $y(0,t) = A \sin \omega t$ . Στη μόνιμη κατάσταση, η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής δίνεται από τη

γενική λύση:

$$y(x,t) = \alpha \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \theta\right) \sin(\omega t + \phi)$$

- (α) Χρησιμοποιήστε τις οριακές συνθήκες για να προσδιορίσετε το  $\alpha$  και τις σταθερές φάσης  $\theta$  και  $\phi$ , και να βρείτε έτσι την κίνηση που εκτελεί η χορδή.  
(β) Σχεδιάστε το μέγιστο πλάτος των στάσιμων κυμάτων,  $\alpha$ , συναρτήσει της διεγείρουσας συχνότητας  $\omega$ . Σχολιάστε.

**8.3** Η γενική λύση για την εγκάρσια κίνηση μιας χορδής με ακίνητα τα άκρα της που βρίσκεται στα σημεία  $x=0$  και  $x=L$ , και η οποία είναι αρχικά ακίνητη, είναι:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t\right).$$

Σε μια τέτοια χορδή η αρχική εγκάρσια μετατόπιση αυξάνει γραμμικά από το 0 μέχρι την τιμή  $\alpha$  μεταξύ των σημείων  $x=0$  και  $x=L/2$ , και μειώνεται γραμμικά από την τιμή  $\alpha$  στο 0 μεταξύ των σημείων  $x=L/2$  και  $x=L$ , δηλαδή:

$$y(x,0) = \frac{2\alpha x}{L} \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \text{και} \quad y(x,0) = \frac{2\alpha(L-x)}{L} \quad \text{για } \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

Με τη μέθοδο της ανάλυσης Fourier βρίσκεται ότι η αρχική μετατόπιση δίνεται επίσης, για  $x$  μεταξύ  $x=0$  και  $x=L$ , και από τη σειρά:

$$y(x,0) = \frac{8\alpha}{\pi^2} \left\{ \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) - \frac{1}{3^2} \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{5^2} \sin\left(5\pi \frac{x}{L}\right) - \frac{1}{7^2} \sin\left(7\pi \frac{x}{L}\right) + \dots \right\}$$

- (α) Προσδιορίστε τους συντελεστές  $A_n$  και έτσι βρείτε την κίνηση της χορδής για  $t \geq 0$ .  
(β) Βρείτε τη σωματιδιακή ταχύτητα  $v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}$  στη χορδή. Πότε μηδενίζεται αυτή σε κάθε σημείο της χορδής;  
(γ) Σχεδιάστε πρόχειρα το σχήμα της χορδής στις χρονικές στιγμές  $t=0$ ,  $\frac{T_1}{4}$  και  $\frac{T_1}{2}$ , όπου

$$T_1 = \frac{c}{2L}.$$

**8.4** Σε χορδή τεντωμένη με τάση  $T$  διαδίδεται το εγκάρσιο κύμα  $y(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$ . Σε κάθε σημείο της χορδής, η χορδή που βρίσκεται στα αριστερά του σημείου ασκεί εγκάρσια δύ-



ναμη  $F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x}$  πάνω στη χορδή που βρίσκεται στα δεξιά του σημείου (μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη).

- (α) Υπολογίστε τη σωματιδιακή ταχύτητα  $\frac{\partial y}{\partial t}$  και τη μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη  $F_y$  σε κάθε σημείο της χορδής.  
 (β) Βρείτε το ρυθμό παραγωγής έργου,  $P(t)$ , από τη μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη σε κάποιο σημείο της χορδής.  
 (γ) Δείξτε ότι η μέση τιμή του  $P(t)$  ως προς το χρόνο, ισούται με το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας κατά μήκος της χορδής, δηλαδή με το γινόμενο της πυκνότητας ενέργειας ανά μονάδα μήκους της χορδής,  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ , επί την ταχύτητα διάδοσης του κύματος  $c$ .

**8.5** Μια χορδή έχει μήκος  $L$ , ολική μάζα  $m$ , βρίσκεται υπό τάση  $T$  και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Το ένα άκρο της χορδής, στο σημείο  $x = 0$ , είναι ακίνητο, ενώ στο άλλο της άκρο, στο σημείο  $x = L$ , η χορδή είναι συνδεδεμένη με σημειακή μάζα  $M$  η οποία μπορεί να κινείται μόνο εγκαρσίως, χωρίς τριβή. Υποθέστε λύσεις της μορφής  $y(x, t) = A \sin(kx + \theta) \sin(\omega t + \phi)$  για τη μετατόπιση της χορδής και, χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες στα δύο άκρα της χορδής, δείξτε ότι οι κανονικές συχνότητες της χορδής δίνονται από τις λύσεις της υπερβατικής εξίσωσης

$$\left( \frac{\omega L}{c} \right) \tan \left( \frac{\omega L}{c} \right) = \frac{m}{M}.$$

(Υπόδειξη: Οι οριακές συνθήκες στο άκρο  $x = L$  είναι οι εξής: η μετατόπιση, η ταχύτητα και επομένως και η επιτάχυνση της μάζας  $M$  είναι ίδιες με τα αντίστοιχα μεγέθη του σημείου  $x = L$  της χορδής, η δε κίνηση της μάζας  $M$  καθορίζεται από την εγκάρσια δύναμη που ασκεί σε αυτήν η χορδή, δηλαδή την  $F_y(L, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=L}$ , που είναι και η μόνη δύναμη την οποία υφίσταται).

**8.6** Χορδή είναι τεντωμένη με τάση  $T$  και αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα  $x < 0$  στο οποίο η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων να είναι ίση με  $c_1$ , και το τμήμα  $x > 0$  στο οποίο η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι ίση με  $c_2$ . Στη χορδή κινείται προς τα δεξιά το κύμα  $y_i = A \sin(\omega t - k_1 x)$  το οποίο προσπίπτει από τα αριστερά στο σημείο  $x = 0$ . Υποθέστε ότι παρατηρείται μερική ανάκλαση του κύματος, και ότι στη χορδή υπάρχουν, εκτός από το προσπίπτον κύμα,

και το ανακλώμενο κύμα, (που κινείται προς τα αριστερά):

$$y_r = B \sin(\omega t + k_1 x) + C \cos(\omega t + k_1 x), \quad x \leq 0, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

καθώς και το μεταδιδόμενο κύμα, (που κινείται προς τα δεξιά):

$$y_t = D \sin(\omega t - k_2 x) + E \cos(\omega t - k_2 x), \quad x \geq 0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

όπου  $B, C, D$  και  $E$  είναι σταθερές. Η εγκάρσια μετατόπιση στο τμήμα  $x < 0$  της χορδής είναι, επομένως,  $y_1 = y_i + y_r$ , και στο τμήμα  $x > 0$  είναι  $y_2 = y_t$ .

Χρησιμοποιήστε τις οριακές συνθήκες στο σημείο  $x = 0$  για να βρείτε:

τον (συντελεστή ανάκλασης πλάτους) = (πλάτος ανακλώμενου κύματος) /  $A$ , και  
 τον (συντελεστή μετάδοσης πλάτους) = (πλάτος μεταδιδόμενου κύματος) /  $A$ .

Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συναρτήσει των χαρακτηριστικών αντιστάσεων

$$Z_1 = \rho_1 c_1 = T / c_1 = k_1 T / \omega \quad \text{και} \quad Z_2 = \rho_2 c_2 = T / c_2 = k_2 T / \omega$$

των δύο τμημάτων της χορδής.

(Υπόδειξη: οι οριακές συνθήκες στο σημείο  $x=0$  είναι:

(i) συνέχεια της εγκάρσιας μετατόπισης,  $y_1(0, t) = y_2(0, t)$

(ii) συνέχεια της μεταδιδόμενης εγκάρσιας δύναμης,  $\left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_{x=0}$  για κάθε  $t$ ).

**8.7** Αν στην εγκάρσια κίνηση της τεντωμένης χορδής συμπεριληφθεί και μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας της χορδής σε κάθε σημείο, η κυματική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t}$$

όπου  $b$  είναι μια σταθερά.

Δείξτε πως, αν αγνοηθούν όροι που εξαρτώνται από το  $b^2$  ή ανώτερες δυνάμεις του  $b$ , συναρτήσεις της μορφής

$$(α) \quad y(x, t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t - kx) \quad \text{και} \quad (β) \quad y(x, t) = Ae^{-\alpha x/c} \sin(\omega t - kx)$$

είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης και βρείτε την τιμή της σταθεράς  $\alpha$ .

---