

2. Οι νόμοι της κίνησης, οι δυνάμεις και οι εξισώσεις κίνησης

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholtz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998). Κεφ. 2, 3.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. (Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985). Κεφ. 1, 2, 3.

Κ. Χριστοδουλίδης, *Μαθηματικό Συμπλήρωμα για τα Εισαγωγικά Μαθήματα Φυσικής*. (Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., 2003): *Διανύσματα - Το αόριστο ολοκλήρωμα - Το ορισμένο ολοκλήρωμα - Λύση απλών διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων κίνησης*.

2.1 Οι νόμοι της κίνησης

Οι τρεις νόμοι της κίνησης, του Νεύτωνα:

1. Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (ή ηρεμεί) όταν δεν ασκείται πάνω του καμιά εξωτερική δύναμη:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$\vec{\mathbf{F}}$ = δύναμη, $\vec{\mathbf{a}}$ = επιτάχυνση.

2. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\vec{\mathbf{p}} = M \vec{\mathbf{v}}$ ενός σώματος ως προς τον χρόνο είναι ίσος με τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}(M\vec{\mathbf{v}}). \quad (2.2)$$

3. Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, είναι: $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$, (2.3)

όπου $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ = η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα 1 από το σώμα 2,

και $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ = η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα 2 από το σώμα 1.

2.2 Δυνάμεις και εξισώσεις κίνησης

Εξίσωση κίνησης ενός σώματος ονομάζεται η διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$M \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \quad \text{ή} \quad M \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}} \quad (2.4)$$

όταν αντικατασταθεί σε αυτήν η μαθηματική έκφραση για τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα.

Η δύναμη μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσης του σώματος, του χρόνου, της ταχύτητας του σώματος κλπ

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}, t, \dots).$$

Λύση της εξίσωσης κίνησης ονομάζεται η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δεδομένες αρχικές ή άλλες συνθήκες του προβλήματος. Αυτή είναι συνήθως η συνάρτηση $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ που δίνει τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Ενδιάμεση λύση μπορεί να είναι η $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(t)$ που δίνει την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Όπου αυτές οι λύσεις δεν είναι εφικτές, είναι μερικές φορές επιθυμητό να βρεθεί η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$.

2.3 Οι θεμελιώδεις δυνάμεις της κλασικής Μηχανικής

Η βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m από τη μάζα M είναι

$$\vec{F}_{mM} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (2.5)$$

όπου r είναι η απόσταση των δύο μαζών, και \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα από την M στην m . Το αρνητικό πρόσημο υπάρχει γιατί η δύναμη είναι ελκτική.

Ορίζοντας την ένταση του βαρυτικού πεδίου (επιτάχυνση της βαρύτητας),

$$\vec{g}_M \equiv \frac{\vec{F}_{mM}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}, \quad (2.6)$$

η δύναμη είναι

$$\vec{F}_{mM} = m\vec{g}_M. \quad (2.7)$$

Η δύναμη Coulomb που ασκείται πάνω στο φορτίο q από το φορτίο Q είναι

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (2.8)$$

όπου r είναι η απόσταση των δύο φορτίων, και \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα από το Q στο q .

Η δύναμη είναι αρνητική ή θετική, αν είναι ελκτική ή απωστική, αντίστοιχα.

Ορίζοντας την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{E}_Q \equiv \frac{\vec{F}_{qQ}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad (2.9)$$

η δύναμη είναι $\vec{F}_{qQ} = q\vec{E}_Q$. (2.10)

Η βαρυτική δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών και η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων είναι της μορφής

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}, \quad (2.11)$$

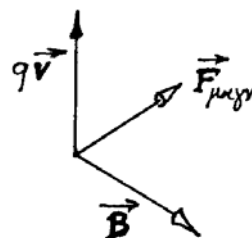
δηλαδή είναι *κεντρικές δυνάμεις*.

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω στο φορτίο q όταν αυτό κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα στο μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι

$$\vec{F}_{\text{μαγν.}} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.12)$$

Αν υπάρχει και ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , η ολική δύναμη (δύναμη Lorentz) είναι:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.13)$$



2.4 Λύσεις της εξίσωσης κίνησης

Σε προβλήματα κίνησης σε τρεις διαστάσεις, οι εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή αναλύονται σε τρεις διαφορικές εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Έτσι, αν η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.14)$$

η λύση βρίσκεται συνήθως αφού αυτή αναλυθεί στις τρεις εξισώσεις:

$$M \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad M \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad M \frac{dv_z}{dt} = F_z. \quad (2.15)$$

2.4.1 Μηδενική δύναμη

Εξίσωση κίνησης:
$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Λύση:
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{σταθ.} = \vec{v}_0, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t. \quad (2.17)$$

όπου \vec{r}_0 = η αρχική θέση του σώματος, \vec{v}_0 = η αρχική ταχύτητα του σώματος.

Σε συνιστώσες:
$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t, \quad z = z_0 + v_{0z}t. \quad (2.18)$$

2.4.2 Σταθερή δύναμη

Εξίσωση κίνησης:
$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = \text{σταθ.} \quad (2.19)$$

Λύση:
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{M}t, \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{M}t^2. \quad (2.20)$$

όπου \vec{r}_0 = η αρχική θέση του σώματος, \vec{v}_0 = η αρχική ταχύτητα του σώματος.

Σε συνιστώσες:
$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{F_x}{M}t, \quad v_y(t) = v_{0y} + \frac{F_y}{M}t, \quad v_z(t) = v_{0z} + \frac{F_z}{M}t, \quad (2.21)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{F_x}{M}t^2, \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} \frac{F_y}{M}t^2, \quad z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{F_z}{M}t^2. \quad (2.22)$$

Ειδική περίπτωση: Βολή σε ομογενές βαρυντικό πεδίο

Η αρχική ταχύτητα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια κατεύθυνση. Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xy . Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{y} \right) = -mg \hat{y}, \quad \text{ή} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (2.23)$$

Λύση:
$$x = x_0 + (v_0 \cos \theta)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.24)$$

Εξίσωση της τροχιάς:

$$y - \left(y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \right) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \left[x - \left(x_0 + \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right) \right]^2. \quad (2.25)$$

2.4.3 Κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

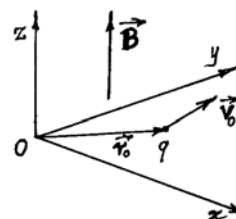
Επιλέγουμε τους άξονες ώστε: μαγνητικό πεδίο: $\vec{B} = B \hat{z}$ και αρχική ταχύτητα: $\vec{v}_0 = v_1 \hat{y} + v_2 \hat{z}$.

Η αρχική θέση είναι: $\vec{r}_0 = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y} + z_0 \hat{z}$.

Εξίσωση κίνησης:

$$M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = M \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.26)$$

Σε συνιστώσες:



$$\dot{v}_x = \frac{qB}{M}v_y \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{M}v_x \quad \dot{v}_z = 0. \quad (2.27)$$

Λύση:

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega t \quad v_y(t) = v_1 \cos \omega t \quad v_z = \text{σταθ.} \quad (2.28)$$

$$x = x_0 + r_c(1 - \cos \omega t) \quad y = y_0 + r_c \sin \omega t \quad z = z_0 + v_z t \quad (2.29)$$

όπου $\omega = \frac{qB}{M} \equiv \omega_c$ η κυκλοτρονική συχνότητα, $r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mv_1}{qB}$ η κυκλοτρονική ακτίνα.

2.4.4 Κίνηση με δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας

Δύναμη τριβής: $\vec{F}_{\text{tr}} = -\beta \vec{v}$. Αρχική ταχύτητα: \vec{v}_0 . Αρχική θέση: $(0, 0, 0)$.

Εξίσωση κίνησης: $M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta \vec{v}$. (2.30)

Αν $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$, η εξίσωση κίνησης είναι $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau}$, όπου $\tau = \frac{M}{\beta}$ σταθερά χρόνου.

Λύση: $v_x(t) = v_0 e^{-t/\tau}$, $x(t) = \frac{Mv_0}{\beta}(1 - e^{-t/\tau})$. (2.31)

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. "Μηχανική": Κεφ. 3 Ασκ. 3, 11, 14, 15.

2.1 Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο xy υπό την επίδραση δύναμης $\mathbf{F} = -C\mathbf{r}$, όπου C μια θετική σταθερά και \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Ζητούνται:

- Να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x και y .
- Ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι περιφέρεια κύκλου και ποια είναι τότε η περιόδος της κίνησης;
- Ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι ευθεία με κλίση 45° ως προς τον άξονα x ;

2.2 Ένα σώμα έχει μάζα m , βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y = 0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y , η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{v}$, όπου \vec{v} η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

- Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, v , ως συνάρτηση του χρόνου.
- Δείξτε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια οριστική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.
- Να βρεθεί η θέση του σώματος, y , ως συνάρτηση του χρόνου.
- Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $v(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t .

2.3 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy . Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(0, 0)$ και έχει ταχύτητα \vec{v}_0 η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x . Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mkv_y \hat{y}$, ανάλογη της συνιστώσας v_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

- Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;
- Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Μετά πόσο χρόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της γίνεται $v_0/2$;
- Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy ;

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

2.4 Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο $(0, 0)$ με αρχική ταχύτητα \bar{v}_0 που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x , ο οποίος είναι οριζόντιος. Ο άξονας y είναι κατακόρυφος. Η σφαίρα κινείται στο επίπεδο xy . Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\bar{v}$ από την ατμόσφαιρα, όπου \bar{v} είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $v_x(t)$ και $v_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας.

(γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε.

(δ) Δείξτε ότι για $\tau \gg m/b$ ο χρόνος αυτός είναι $\tau \approx \frac{hb}{mg} + \frac{v_0}{g} \sin \theta$.

2.5 Μια βάρκα κινείται με ταχύτητα $\bar{v}_0 = v_0 \hat{x}$ ($v_0 > 0$) και βρίσκεται στη θέση $x=0$ όταν τη χρονική στιγμή $t=0$ σβήνεται η μηχανή της. Η αντίσταση του νερού είναι τέτοια ώστε η δύναμη τριβής που ασκείται πάνω στη βάρκα να είναι ίση με $-be^{av}$, όπου v είναι το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας και a και b είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα της βάρκας, v , ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(β) Να βρεθεί η θέση της βάρκας, x , ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(γ) Πόσος χρόνος, τ , θα απαιτηθεί για να σταματήσει η βάρκα; Σε ποια τιμή τείνει ο τ για πολύ μεγάλες τιμές της v_0 ;

$$\left(\int \ln(1+ct) dt = \frac{1}{c}(1+ct) [\ln(1+ct) - 1] \right)$$

2.6 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{y}$ ($V > 0$) κατά μήκος του άξονα των y , η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y=0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\bar{v}$, όπου \bar{v} η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$ δείξτε ότι τα v και y ικανοποιούν τη

σχέση
$$y = \frac{V-v}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \left(\frac{1+kV/g}{1+kv/g} \right).$$

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα.

(δ) Αν $v = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y=0$, δείξτε ότι:

$$\left(1 - \frac{kU}{g} \right) e^{kU/g} = \left(1 + \frac{kV}{g} \right) e^{-kV/g}.$$

2.7 Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία θ που σχηματίζει το επίπεδο με την οριζόντια κατεύθυνση είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται πολύ αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Τότε η γωνία διατηρείται σταθερή. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ_s και μ_k αντίστοιχα ($\mu_s > \mu_k$), να βρεθούν ως συναρτήσεις του χρόνου: (α) Η ταχύτητα της μάζας, και (β) Η θέση της.

2.8 Ένα σώμα έχει μάζα m , βρίσκεται αρχικά ακίνητο στο σημείο $y=0$, και τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y , η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα κάτω). Κατά την κίνηση του σώματος στο πεδίο βαρύτητας, το οποίο θεωρούμε ομογενές, η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος, και ίση με $-av^2$, όπου v η ταχύτητα του σώματος και a μια θετική σταθερά.

- (α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, $v(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.
 - (β) Δείξτε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια οριστική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.
 - (γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, $y(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.
-