1. Κινηματική

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998). Κεφ. 2.

Κ. Χριστοδουλίδης, *Μαθηματικό Συμπλήρωμα για τα Εισαγωγικά Μαθήματα Φυσικής*. (Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., 2003): *Παράγωγος - Σειρές Τέηλορ και Μακλώριν – Διανύσματα - Παραγώγιση διανυσμάτων*.

1.1 Η διαφορική μορφή των νόμων της Φυσικής

Ο σπουδαστής της Φυσικής θα διαπιστώσει, καθώς εμβαθύνει στην αυστηρή μαθηματική διατύπωση των νόμων της, ότι οι νόμοι αυτοί αποκτούν αυξημένη γενικότητα όταν διατυπώνονται στη λεγόμενη *διαφορική μορφή* τους. Αυτή η μορφή συνδέει τα φυσικά μεγέθη και τις διάφορες παραγώγους των (χωρικές, χρονικές, ή άλλες) μέσω εξισώσεων οι οποίες ισχύουν για κάθε τιμή του χρόνου και σε κάθε σημείο μιας περιοχής.

Για παράδειγμα, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, στη μορφή $F = ma$, προσφέρει περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής. Αν όμως γίνει κατανοητό ότι ο νόμος ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή, με τις αντίστοιχες στιγμιαίες τιμές των φυσικών μεγεθών, και ότι η επιτάχυνση είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο, η εξίσωση παίρνει μια γενικότερη μορφή. Έτσι, για κίνηση πάνω στον άξονα των x,

η ταχύτητα είναι
$$\upsilon_x = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

και η επιτάχυνση
$$a_x = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \upsilon_x}{\delta t} = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \ . \tag{1.2}$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x \qquad \text{ή} \qquad m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \tag{1.3}$$

όπου F_x είναι η συνιστώσα x της δύναμης που ασκείται πάνω στη μάζα m.

Το πλεονέκτημα αυτής της μαθηματικής διατύπωσης είναι ότι διαθέτουμε τις μαθηματικές μεθόδους για να λύσουμε την εξίσωση για την ταχύτητα $\upsilon_x(t)$ ή τη θέση $x(t)$ της μάζας ακόμη και όταν η δύναμη δεν είναι σταθερή, αλλά είναι συνάρτηση της θέσης, του χρόνου, της ταχύτητας κλπ.

Παράδειγμα 1.1

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση:
$$x(t) = 4 + 3t^2 - 2\sin 5t$$
(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του.

Η ταχύτητα του σημείου είναι: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 0 + 3\cdot 2t - 2\cdot 5\cos 5t = 6t - 10\cos 5t$ m/s .

Η επιτάχυνσή του είναι: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 6 - (-10\cdot 5\sin 5t) = 6 + 50\sin 5t$ m/s^2 .

Παράδειγμα 1.2

Οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 4\sin 5t \qquad y(t) = 4\cos 5t$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν: (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου. (β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$\upsilon_x(t) = 20\cos 5t \qquad \upsilon_y(t) = -20\sin 5t \quad \text{m/s}$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$a_x(t) = -100\sin 5t \qquad a_y(t) = -100\cos 5t \quad \text{m/s}^2$$

(β) Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(20\cos 5t)^2 + (-20\sin 5t)^2} = 20 \quad \text{m/s}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-100\sin 5t)^2 + (-100\cos 5t)^2} = 100 \quad \text{m/s}^2$$

(γ) Από τις δύο σχέσεις για τις συντεταγμένες του σημείου, απαλείφουμε το t υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας:

$$x^2 + y^2 = (4\sin 5t)^2 + (4\cos 5t)^2 = 4^2 \ \text{m}^2 .$$

Το σωματίδιο κινείται πάνω στον κύκλο (0, 4 m), με ταχύτητα και επιτάχυνση των οποίων τα μέτρα είναι σταθερά.

Προβλήματα

1.1 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

1.2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν: (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

1.2 Διάνυσμα θέσης, διανυσματική ταχύτητα και επιτάχυνση

Αν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες ενός κινούμενου σημείου P και t ο χρόνος, τότε το σημείο P έχει:

διάνυσμα θέσης
$$\vec{\mathbf{r}} \equiv x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \tag{1.4}$$

διανυσματική ταχύτητα
$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} \tag{1.5}$$

επιτάχυνση
$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}} \,. \tag{1.6}$$

Το διάνυσμα θέσης είναι ένα *δέσμιο διάνυσμα*, που έχει την αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος θέσης κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την *τροχιά* του σημείου P. Μπορεί να αποδειχθεί γεωμετρικά ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ είναι εφαπτομενικό της τροχιάς σε κάθε της σημείο.

Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση ενός σώματος με σταθερή μάζα m διατυπώνεται διανυσματικά στις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \tag{1.7}$$

όπου $\vec{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα θέσης, $\vec{\mathbf{v}}$ η ταχύτητα και $\vec{\mathbf{a}}$ η επιτάχυνση του σώματος, και $\vec{\mathbf{F}}$ η *εξωτερική δύναμη* που ασκείται πάνω στο σώμα. Για να συμπεριληφθεί και το ενδεχόμενο της μεταβολής της μάζας με τον χρόνο, ο νόμος διατυπώνεται στη γενικότερη μορφή

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}\ , \tag{1.8}$$

όπου $\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}}$ είναι η *ορμή* του σώματος. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει όταν μια συγκεκριμένη συνάρτηση αντικατασταθεί για τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$, ονομάζεται *εξίσωση κίνησης* του σώματος. Η $\vec{\mathbf{F}}$ μπορεί να είναι σταθερή, ή συνάρτηση της θέσης, του χρόνου ή ακόμη και της ταχύτητας του σώματος.

Πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι κάθε μια από τις διανυσματικές αυτές εξισώσεις εμπεριέχει τρεις εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Έτσι, επειδή

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\,, \quad \vec{\mathbf{v}} = \upsilon_x\,\hat{\mathbf{x}} + \upsilon_y\,\hat{\mathbf{y}} + \upsilon_z\,\hat{\mathbf{z}}\,, \quad \vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{x}} + a_y\,\hat{\mathbf{y}} + a_z\,\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{1.9}$$

$$\vec{\mathbf{p}} = p_x\,\hat{\mathbf{x}} + p_y\,\hat{\mathbf{y}} + p_z\,\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}\,, \tag{1.10}$$

οι διανυσματικές αυτές εξισώσεις μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$	$m\dfrac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$	$m\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}$	$\dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$
$ma_x = F_x$	$m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = F_x$	$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x$	$\dfrac{dp_x}{dt} = F_x$
$ma_y = F_y$	$m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = F_y$	$m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y$	$\dfrac{dp_y}{dt} = F_y$
$ma_z = F_z$	$m\dfrac{d\upsilon_z}{dt} = F_z$	$m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z$	$\dfrac{dp_z}{dt} = F_z$

Αναφέρουμε επίσης τη χρήση στη Φυσική και του *συμβολισμού του Νεύτωνα*, σύμφωνα με τον οποίο μια τελεία πάνω από ένα σύμβολο υποδηλώνει παραγώγιση ως προς τον χρόνο:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}\,, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\,, \quad \dot{\vec{\mathbf{r}}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\,. \tag{1.11}$$

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. "Μηχανική": Κεφ. 2, Ασκ. 5, 6, 12, 13, 20.

1.3 Αν $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3+t)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 2e^{-2t}\,\hat{\mathbf{z}}$, να βρεθούν τα $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ και $\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \dfrac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές ($t = 0$) $\vec{\mathbf{r}}(0)$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ και $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

1.4 Οι συντεταγμένες μιας σημειακής μάζας m είναι

$$x = 3a\sin\omega t \qquad y = 4a\sin\omega t \qquad z = 5a\cos\omega t$$

όπου t είναι ο χρόνος και τα a και ω είναι θετικές σταθερές.

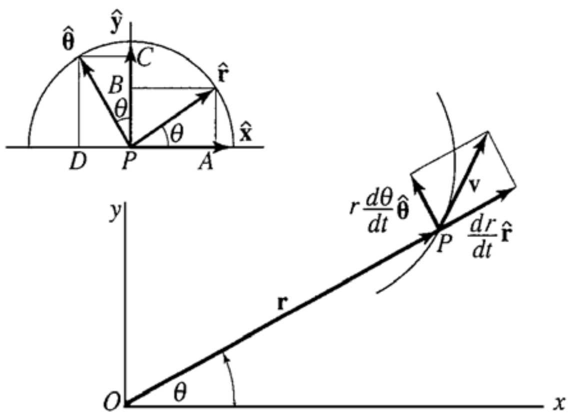
(α) Να βρεθούν: το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της μάζας.
(β) Να βρεθούν τα μέτρα των τριών διανυσμάτων του (α).
(γ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι είναι της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0,0,0) και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται *κεντρική*.
(δ) Δείξτε ότι η μάζα κινείται πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο και ότι η τροχιά της είναι κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0,0) και ακτίνα ίση με $5a$. Σχεδιάστε την τροχιά στο χώρο.
(ε) Δείξτε ότι η *στροφορμή* της μάζας $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ ως προς το σημείο (0,0,0) (όπου $\vec{\mathbf{v}}$ είναι η ταχύτητα της μάζας) είναι σταθερή και ίση με $\vec{\mathbf{L}} = ma^2\omega(-20\hat{\mathbf{x}} + 15\hat{\mathbf{y}}) = ma\upsilon\left(-\frac{4}{5}\hat{\mathbf{x}} + \frac{3}{5}\hat{\mathbf{y}}\right)$, ή $\vec{\mathbf{L}} = ma\upsilon\hat{\mathbf{L}}$. Αυτή είναι ιδιότητα όλων των σωμάτων που κινούνται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης.

1.5 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο (0,0,0) μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, ορίζεται ως $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0,0,0) και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας διατηρείται σταθερή.

[*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το χρόνο είναι $d\vec{\mathbf{L}}/dt = 0$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $m\,d\vec{\mathbf{v}}/dt = \vec{\mathbf{F}}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittel κ.ά., *Μηχανική*, σελ. 197-8.]

1.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες

Σε μερικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, είναι πιο βολική η χρήση πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο, (r, θ). Χρειαζόμαστε επομένως εκφράσεις για τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες. Για να εκφράσουμε διανύσματα στο σύστημα αυτό, ορίζουμε μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, στις κατευθύνσεις αυξανόμενου $\vec{\mathbf{r}}$ και θ, αντίστοιχα. Αυτές οι κατευθύνσεις είναι μεταβλητές καθώς το $\vec{\mathbf{r}}$ μεταβάλλεται, αλλά τα δύο μοναδιαία διανύσματα παραμένουν κάθετα μεταξύ τους. Όπως φαίνεται στο Σχήμα, (για απόδειξη βλ. *Μηχανική*, σελ. 38) τα μοναδιαία διανύσματα συνδέονται με τα αντίστοιχα $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$ μέσω των σχέσεων:



$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Σε αντίθεση με τα $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$, τα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\theta}$ μεταβάλλονται με το χρόνο, ως συναρτήσεις του θ. Βρίσκουμε ότι,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}=-\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{και} \qquad \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}=\hat{\theta}\,\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\hat{\mathbf{r}}\,\frac{d\theta}{dt} \ . \tag{1.13}$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των εκφράσεων για την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες, παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς το χρόνο το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{\mathbf{r}}=r\,\hat{\mathbf{r}} \ . \tag{1.14}$$

Βρίσκουμε, για την ταχύτητα:

$$\vec{\mathbf{v}}=\upsilon_r\,\hat{\mathbf{r}}+\upsilon_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}=\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \text{ή} \qquad \vec{\mathbf{v}}=\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}}+r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.15}$$

και για την επιτάχυνση:

$$\vec{\mathbf{a}}=a_r\,\hat{\mathbf{r}}+a_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}=\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}}+\left[r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.16}$$

ή

$$\vec{\mathbf{a}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} \ . \tag{1.17}$$

Η γωνιακή συνιστώσα της επιτάχυνσης μπορεί να γραφτεί και ως

$$a_\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\right] \tag{1.18}$$

η οποία είναι μια σχέση που θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις στις οποίες η στροφορμή του σώματος διατηρείται, οπότε και είναι

$$a_\theta=0, \qquad r^2\,\frac{d\theta}{dt}=\text{σταθερό}. \tag{1.19}$$

Προβλήματα

1.5 Δύο σωματίδια με μάζες *m* και *2m,* κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1=(3t+2t^2)\hat{\mathbf{x}}+(4+4t^2)\hat{\mathbf{y}}+(5+2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2=(20-t-t^2)\hat{\mathbf{x}}+(10+9t-2t^2)\hat{\mathbf{y}}+(1+4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό.

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα;

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι;

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

1.7 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\vec{\mathbf{r}}=bt\hat{\mathbf{x}}-ct^2\hat{\mathbf{y}}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c θετικές σταθερές. Να βρεθούν:

(α) Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(β) Η ταχύτητα του σωματιδίου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνσή του $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$, καθώς και τα μέτρα τους.

(γ) Η γωνία μεταξύ των $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(δ) Η το μήκος της διαδρομής που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t=0$ και $t=\tau=b/2c$. Δίνεται: $\int_0^1\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

1.8 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x=3a\sin\omega t$, $y=4a\sin\omega t$, $z=5a\cos\omega t$, όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθούν τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη. (*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι τα διανύσματα θέσης σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 είναι συνεπίπεδα).

1.9 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$, η ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνση $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{c}} = z\hat{\mathbf{z}} = bt^2\hat{\mathbf{z}}$, και $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{c}}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\mathbf{R}}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση z.

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z.