

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Θόρυβος σε φυσικά συστήματα και μετρητικές διατάξεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετασθούν τα φυσικά όρια στην ευαισθησία μετρητικών διατάξεων. Το φαινόμενο της κίνησης Brown θα εξετασθεί αρχικά, και στη συνέχεια άλλα συγγενικά φαινόμενα.

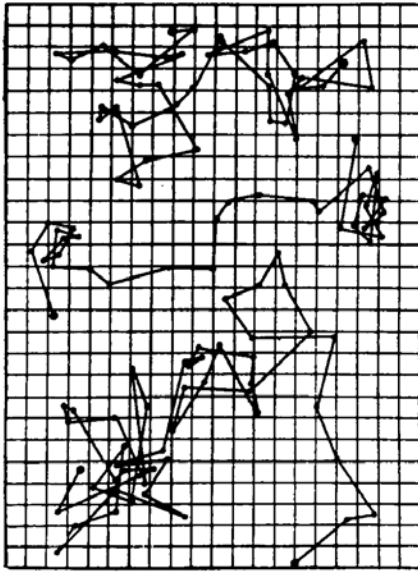
#### 1.1 Το φαινόμενο Brown

Παραθέτουμε την ιστορική εισαγωγή από το άρθρο επισκόπησης των Bowling Barnes και Silverman για τα όρια που θέτει η κίνηση Brown στην ευαισθησία των μετρητικών διατάξεων<sup>1</sup>:

"Το 1827, ο φυσιοδίφης και ιατρός Robert Brown, ενώ εξέταζε αιωρήματα διαφόρων μορφών γύρης με τη βοήθεια ενός μικροσκοπίου με έναν από τους καινούργιους αχρωματικούς αντικειμενικούς φακούς, ανακάλυψε ότι τα μεμονωμένα σωματίδια ήταν σε μια κατάσταση διαρκούς και έντονης κίνησης. Μετά την ανακοίνωσή του αυτού του γεγονότος, ακολούθησε ένας τεράστιος αριθμός πειραμάτων και θεωριών που επεδίωκαν να φθάσουν στην ακριβή φύση και τα αίτια της κίνησης αυτής. Αρχικά έγινε προσπάθεια εύρεσης ερμηνείας του φαινομένου στο ενδεχόμενο τα σωματίδια να ήταν ζωντανά. Αυτή η θεωρία όμως σύντομα απερρίφθη, γιατί όπως τα σωματίδια γύρης του Brown βρέθηκαν να συμπεριφέρονται και κόκκοι γυαλιού, ορυκτών, απολιθωμένου ξύλου, γύρις που ήταν γνωστής ηλικίας μεγαλύτερης από εκατό χρόνια, και ακόμη και σκόνη από μια πέτρα της Αιγυπτιακής Σφίγγας. Ερευνήθηκαν προσεκτικά δυνατότητες όπως τα ρεύματα μεταφοράς στο διάλυμα, η εσωτερική κίνηση λόγω ανομοιογενούς εξάτμισης, τα υγροσκοπικά ή τα τριχοειδή φαινόμενα, οι αμοιβαίες δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων, ο σχηματισμός μικρών φυσαλίδων αερίου, οι θερμοκρασιακές διαφορές λόγω του φωτισμού, κ.λπ. Κανένα από αυτά δεν βρέθηκε να είναι η πραγματική αιτία του φαινομένου, και η έρευνα συνεχίστηκε. Το 1863, ο Wiener δημοσίευσε ένα εκτενές άρθρο, στο οποίο πρότεινε ότι αιτία της ακανόνιστης κίνησης ίσως ήταν η μοριακή δομή του διαλύματος. Διερευνήθηκε το ενδεχόμενο ρευμάτων μεταφοράς των οποίων οι εγκάρσιες διατομές είναι μικρές σε σύγκριση με το μέγεθος των σωματιδίων. Ο Cantoni οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι οι ειδικές θερμότητες των σωματιδίων και των διαλυμάτων συνδέονταν με το φαινόμενο, ενώ ο Jevons πίστευε ότι το αίτιο ήταν ηλεκτρικής φύσεως. Το 1877, ο Delsaulx δημοσίευσε μια εργασία στην οποία προτάθηκε για πρώτη φορά μια ερμηνεία που θεωρείται ακόμη ότι είναι η ορθή. Στην εργασία αυτή έδειξε ότι, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, οι ωθήσεις που θα δεχόταν ένα σωματίδιο από τα μόρια του περιβάλλοντος υγρού δεν θα ήταν συνεχώς ίσες προς όλες τις κατευθύνσεις, αλλά πολύ συχνά θα είχαν μια συνιστώσα σε κάποια κατεύθυνση. Υποκείμενο σε αυτές τις συνισταμένες ωθήσεις, το σωματίδιο θα εκινήτο σε μια τυχαία τεθλασμένη τροχιά. Το 1880, ο Thirion επεσήμανε ότι ο Carbonelle είχε ήδη το 1874 διατυπώσει την ίδια θεωρία, και έτσι ο Carbonelle θεωρείται ότι έχει προτεραιότητα στην ερμηνεία της κίνησης Brown. Στον Gouy ανήκει όμως η τιμή ότι έχει πραγματικά προετοιμάσει το δρόμο για τη σύγχρονή μας κατανόηση του φαινομένου, γιατί τα πειράματά του απέδειξαν χωρίς αμφιβολία ότι η πηγή των ωθήσεων πράγματι είναι τα μόρια του περιβάλλοντος υγρού και όχι εσωτερική των

---

<sup>1</sup> R. Bowling Barnes και S. Silverman, 'Brownian motion as a natural limit to all measuring processes,' *Reviews of Modern Physics*, **6**, 162-192, (1934).



ιδίων των σωματιδίων. Παρ' όλες αυτές τις εργασίες, όμως, πολλοί ερευνητές διαφωνούσαν με αυτήν την άποψη και απέδιδαν το φαινόμενο σε άλλα αίτια. Μόνο μετά τις εργασίες των Einstein, v. Smoluchowski και Perrin φάνηκε ότι το θέμα έχει τελικά διευθετηθεί."

**Σχήμα 1.1.** Κίνηση Brown τριών κόκκων γύρης πάνω στο νερό. Οι θέσεις τους δίνονται όπως σχεδιάστηκαν από τον J. Perrin σε διαδοχικές χρονικές στιγμές που διέφεραν μεταξύ τους κατά 30 δευτερόλεπτα. Η διάμετρος των κόκκων ήταν 0,21  $\mu\text{m}$ . Οι μεγαλύτερες μετατοπίσεις που φαίνονται στο σχήμα είναι της τάξης των 10  $\mu\text{m}$ .

Η μαθηματική ανάλυση του φαινομένου έχει αρκετό θεωρητικό ενδιαφέρον<sup>1</sup>. Πρώτος ο Αϊνστάιν<sup>2</sup>, το 1905, έδειξε ότι στη θερμοκρασία  $T$ , η κίνηση μικρών σφαιρών ακτίνας  $a$  μέσα σε ένα υγρό με συντελεστή ιξώδους  $\eta$ , περιγράφεται ως μια κίνηση διάχυσης, με συντελεστή διάχυσης  $D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$ , όπου  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann.

Έτσι, αν ένα σωματίδιο ξεκίνησε από το σημείο  $(0,0,0)$  τη χρονική στιγμή  $t=0$ , η πιθανότητα να βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t$  σε θέση που απέχει από το  $(0,0,0)$  απόσταση μεταξύ  $x$  και  $x+dx$  κατά μήκος του άξονα των  $x$  είναι ίση με

$$f(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} dx. \quad (1.1)$$

Επομένως, η πιθανότητα να βρίσκεται στον όγκο  $d\tau = dx dy dz$  γύρω από το σημείο  $(x, y, z)$  είναι

$$f(x, y, z, t) d\tau = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)/4Dt} dx dy dz, \quad (1.2)$$

και η πιθανότητα να βρίσκεται μεταξύ των αποστάσεων  $r$  και  $r+dr$  από την αρχή είναι

$$f(r,t) dr = \frac{4\pi r^2}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-r^2/4Dt} dr. \quad (1.3)$$

Το φαινόμενο ανάγεται έτσι σε μια διεργασία διάχυσης. Ο Αϊνστάιν πρότεινε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος για τον προσδιορισμό της σταθεράς  $k$  και επομένως την εύρεση μιας ακριβούς τιμής για τη σταθερά του Avogadro  $N_A = R/k$ , όπου  $R$  είναι η

<sup>1</sup> Βλ. για παράδειγμα το κλασικό άρθρο επισκόπησης του S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in Physics and Astronomy," *Review of Modern Physics*, **15**, (1), 1- 89, (1943). Στο βιβλίο N. Wax (editor) "*Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*," Dover Publications, Inc., New York, 1954, αναδημοσιεύεται το άρθρο αυτό μαζί με άλλα σημαντικά άρθρα για την κίνηση Brown και τις στοχαστικές διεργασίες.

<sup>2</sup> A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17**, 549-560, (1905).

παγκόσμια σταθερά των αερίων. Τα μεγέθη των μορίων θα μπορούσαν έτσι να προσδιοριστούν πειραματικά. Τα αποτελέσματα της κινητικής θεωρίας θα μπορούσαν να επιβεβαιωθούν, καθώς επίσης και να εδραιωθεί η θεωρία της ύπαρξης των μορίων και των ατόμων, τα οποία βρίσκονταν ακόμη υπό αμφισβήτηση από πολλούς επιστήμονες<sup>1</sup>. Ο Perrin και οι συνεργάτες του, σε μια σειρά πειραμάτων, επιβεβαίωσαν τις προβλέψεις του Άινσταϊν.

Αν ένας πολύ μεγάλος αριθμός σωματιδίων,  $N$ , ελευθερωθεί τη χρονική στιγμή  $t=0$ , από το σημείο  $(0,0,0)$ , η κατανομή τους τη χρονική στιγμή  $t$  θα δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x,y,z,t)N$  (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου). Η μέση τιμή του τετραγώνου των συντεταγμένων των σωματιδίων μετά από χρόνο  $t$  βρίσκεται ότι είναι

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = 2Dt = \frac{kT}{3\pi\eta a} t \quad (1.4)$$

και η μέση τιμή του τετραγώνου της απόστασης από την αρχή είναι

$$\overline{r^2} = 6Dt = \frac{kT}{\pi\eta a} t \quad (1.5)$$

Η διασπορά των σωματιδίων στο χώρο δίνεται από τη γκαουσιανή κατανομή (1.3), με διαστάσεις που αυξάνονται με το χρόνο όπως η ρίζα του μέσου τετραγώνου της απόστασης,

$$r_{rms} = \sqrt{\overline{r^2}} = \sqrt{6Dt} = \sqrt{\frac{kT}{\pi\eta a} t} \propto \sqrt{t} \quad (1.6)$$

η οποία φαίνεται ότι είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του χρόνου.

Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν αν αντί της μετατόπισης εξετασθεί η περιστροφή των σωματιδίων. Έτσι, το μέσο τετράγωνο της γωνίας περιστροφής είναι

$$\overline{\theta^2} = \theta_{rms}^2 = \frac{kT}{4\pi\eta a^3} t \quad (1.7)$$

σχέση η οποία επιβεβαιώθηκε από τον Perrin.

Η συζήτηση έως εδώ περιορίστηκε σε ελεύθερα σωματίδια. Αν ένα σωματίδιο υφίσταται και μια δύναμη επαναφοράς προς κάποιο σταθερό σημείο, η κίνησή του θα είναι μια τυχαία ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας του. Η συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων, στα οποία συγκαταλέγονται και τα όργανα μέτρησης διαφόρων μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών, θα μας απασχολήσει πιο κάτω.

## 1.2 Η θερμοδυναμική και στατιστική θεώρηση της κίνησης Brown

Όπως όλα τα φυσικά συστήματα, έτσι και τα μετρητικά συστήματα υπακούουν στους νόμους της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τις τιμές τόσων συντεταγμένων  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  όσος είναι και ο αριθμός,  $N$ , των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, και από άλλες τόσες τιμές των συζυγών ορμών,  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ . Αν το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του στη θερμοκρασία  $T$ , και οι συντεταγμένες έχουν

<sup>1</sup> G. Holton, *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science*, δεύτερη έκδοση, αναθεωρημένη και με νέο υλικό από τον S. G. Brush, Princeton University Press, 1985, Κεφάλαιο 22. Υπό έκδοση στα ελληνικά από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2002.

επιλεγεί έτσι ώστε η κινητική ενέργεια του συστήματος να δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$K(p_i) = \sum p_i^2 / 2m_i \quad (1.8)$$

με τετραγωνικούς μόνον όρους, η μέση τιμή του κάθε όρου είναι, σύμφωνα με την αρχή της ισοκατανομής της ενέργειας,

$$\overline{p_i^2} / 2m_i = \frac{1}{2} kT . \quad (1.9)$$

Έτσι, η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας σε κάθε συντεταγμένη είναι  $\frac{1}{2} kT$ . Το ίδιο ισχύει και για τη δυναμική ενέργεια, για κάθε τετραγωνικό όρο της μορφής  $\frac{1}{2} K_i q_i^2$ .

Οι διακυμάνσεις στην κίνηση Brown αντιστοιχούν σε μέση ενέργεια  $\frac{1}{2} kT$  για κάθε βαθμό ελευθερίας. Η κατανομή της ενέργειας αυτής, π.χ. ως προς τη συχνότητα κ.λπ., εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συστήματος.

Η Στατιστική Μηχανική μας δίνει την πιθανότητα η κανονικά κατανομημένη μεταβλητή  $x$  η οποία έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 0$ , να έχει τιμή μεταξύ  $x$  και  $x + dx$ , ως

$$W(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx , \quad (1.10)$$

όπου η τιμή του  $\sigma = \sqrt{x^2}$  προσδιορίζεται από τη μέση ενέργεια  $\frac{1}{2} kT$  στη μεταβλητή αυτή και τα χαρακτηριστικά του συστήματος. Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $W(|x| \geq \alpha\sigma)$  μια τιμή  $|x|$  μεγαλύτερη από  $\alpha\sqrt{x^2} = \alpha\sigma$  να μην είναι πραγματικό σήμα αλλά να οφείλεται σε διακυμάνσεις του θερμικού θορύβου. Ο Πίνακας 1.1 δίνει τις τιμές για  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ .

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1**

$a$	Τιμή της μεταβλητής $ x $	Αντίστοιχη ενέργεια στη μεταβλητή	Πιθανότητα $W( x  \geq \alpha\sigma)$
1	$ x  \geq 1\sigma$	$\geq 1(\frac{1}{2} kT)$	0,317
2	$ x  \geq 2\sigma$	$\geq 4(\frac{1}{2} kT)$	0,045
3	$ x  \geq 3\sigma$	$\geq 9(\frac{1}{2} kT)$	0,003
4	$ x  \geq 4\sigma$	$\geq 16(\frac{1}{2} kT)$	0,00006

Η πιθανότητα, π.χ. η ενέργεια στη μεταβλητή  $x$  να είναι μεγαλύτερη από  $2kT$  λόγω θερμικού θορύβου είναι 4,5 %.

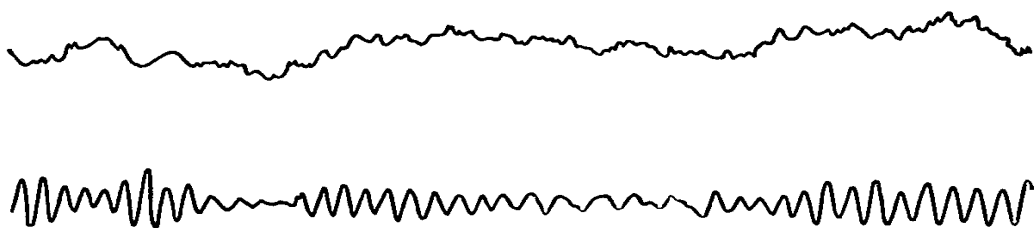
Ένα παράδειγμα πειραματικής παρατήρησης του θερμικού θορύβου δίνεται αμέσως παρακάτω. Οι Moll και Burger κατέγραψαν, το 1925, την απόκλιση συναρτήσεως του χρόνου ενός γαλβανομέτρου με μηδενικό σήμα εισόδου. Κατάλληλη διάταξη μεγέθυνσης χρησιμοποιήθηκε για να είναι ανιχνεύσιμη η απόκλιση του λόγω του θερμικού θορύβου (Σχ. 1.2). Το πλάτος του θορύβου που καταγράφηκε ήταν της τάξης του 1 nV.



**Σχήμα 1.2.** Καταγραφή της απόκλισης ενός γαλβανομέτρου, στην οποία φαίνεται ο θερμικός θόρυβος. Για βαθμονόμηση, φαίνονται και οι αποκλίσεις για σήματα ίσα με 100 και 10 nV.

Κατάλληλη προάσπιση από ηλεκτρικά, μαγνητικά και σεισμικά σήματα ήταν απαραίτητη για να γίνει ορατό το σήμα του θερμικού θορύβου. Ο G. Ising ανέλυσε τα στατιστικά χαρακτηριστικά του σήματος και βρήκε ότι συμφωνούσαν με τις προβλέψεις της θεωρίας της κίνησης Brown όπως αυτές διατυπώθηκαν για τέτοια συστήματα από τον von Smoluchowski. Έγιναν έτσι κατανοητά τα φαινόμενα θορύβου που είχαν παρατηρηθεί πολλές φορές στο παρελθόν σε πολύ ευαίσθητα συστήματα.

Η παγκοσμιότητα των νόμων της Θερμοδυναμικής μάς εμποδίζει να μειώσουμε τις διακυμάνσεις στην κίνηση Brown ενός γαλβανομέτρου. Εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον, ο θερμικός θόρυβος είναι αναπόφευκτος. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι θα μειώσουμε το θόρυβο βάζοντας ένα γαλβανόμετρο σε πολύ υψηλό κενό ώστε να μειώσουμε την επίδραση των συγκρούσεων των μορίων του αέρα με το μετρητικό σύστημα. Κατ' αρχάς πρέπει να έχουμε υπόψη ότι και στο καλύτερο κενό που μπορούμε να πετύχουμε, η πυκνότητα των μορίων που απομένουν στο χώρο είναι τεράστιος. Εκτός αυτού όμως, καθώς οι συγκρούσεις των μορίων του αέρα με το γαλβανόμετρο γίνονται λιγότερο συχνές, το σύστημα τείνει μεν να συμπεριφερθεί σαν ένα απομονωμένο σύστημα, το οποίο ταλαντώνεται στη δική του συχνότητα, αλλά το πλάτος των ταλαντώσεων διατηρεί την ίδια τιμή της ρίζας του μέσου τετραγώνου. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχ. 1.3. Η άνω καμπύλη δείχνει τις ταλαντώσεις ενός γαλβανομέτρου σε ατμοσφαιρική πίεση, ενώ η κάτω καμπύλη σε μια πίεση της τάξης του  $10^{-4}$  mm Hg.



**Σχήμα 1.3.** Οι θερμικές ταλαντώσεις ενός γαλβανομέτρου. Η άνω καμπύλη δείχνει τις ταλαντώσεις όταν το γαλβανόμετρο βρίσκεται σε ατμοσφαιρική πίεση, ενώ η κάτω καμπύλη σε μια πίεση της τάξης του  $10^{-4}$  mm Hg.

Ακόμη όμως και αν ήταν δυνατό να αφαιρεθούν τελείως τα μόρια του αέρα, το σύστημα θα παραμένει σε θερμική ισορροπία με το πεδίο της θερμικής ακτινοβολίας του περιβάλλοντος. Τα φωτόνια αυτού του πεδίου, στην ενεργειακή κατανομή που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος (ακτινοβολία μέλανος σώματος), θα

βομβαρδίζουν το σύστημα, ανταλλάσσοντας ενέργεια, ορμή και στροφορμή με το μηχανικό σύστημα του γαλβανόμετρου, και συντηρώντας την κίνηση Brown του συστήματος.

Η μείωση της θερμοκρασίας θα είχε ως αποτέλεσμα τη μείωση της κίνησης Brown, εάν, σύμφωνα με όσα μόλις αναφέρθηκαν, αυτή εκτείνεται σε όλο τον περιβάλλοντα το όργανο χώρο, συμπεριλαμβανομένων και των επιφανειών με τις οποίες το σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια στη μορφή θερμικής ακτινοβολίας. Και πάλι όμως το πρόβλημα θα παρέμενε. Το γαλβανόμετρο θα παραμένει συνδεδεμένο ηλεκτρικά με κάποιο εξωτερικό κύκλωμα. Όπως θα δούμε παρακάτω, στο κύκλωμα αυτό θα υπάρχει ηλεκτρικός θόρυβος θερμικής προέλευσης, που θα αντιστοιχεί στη θερμοκρασία  $T$  του κυκλώματος. Το εξωτερικό κύκλωμα θα τροφοδοτεί το γαλβανόμετρο, ηλεκτρικά, με ενέργεια, η οποία θα εκδηλώνεται ως κίνηση Brown.

### 1.3 Οι περιορισμοί στην ευαισθησία ενός οργάνου λόγω του θερμικού θορύβου

Αν η ευαισθησία ενός μετρητικού οργάνου ορισθεί ως  $\sigma = \delta x / \delta q$ , όπου  $\delta q$  είναι η μεταβολή στην ένδειξη του οργάνου για μεταβολή  $\delta x$  στο μετρούμενο μέγεθος, μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma = \frac{\delta x}{\delta q} = \frac{B}{A} \quad (1.11)$$

με  $A$  την κατευθύνουσα δύναμη η οποία εξαρτάται από το κινούμενο σύστημα του οργάνου, και  $B$  ένας παράγοντας που προσδιορίζει την απόκλιση. Θέτοντας  $\varepsilon = \frac{1}{2} kT$  και  $\varepsilon = \frac{1}{2} A \overline{x^2}$ , έχουμε το ισοδύναμο σήμα  $\delta x$  που θα προκαλούσε απόκλιση στο όργανο ίση με αυτήν που οφείλεται σε θόρυβο ίσο με τη ρίζα του μέσου τετραγώνου,  $(\delta x)_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}}$ , του μετρούμενου μεγέθους. Έτσι,

$$\delta x = (\delta x)_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{A}}, \quad (1.12)$$

και η αντίστοιχη ένδειξη του οργάνου είναι

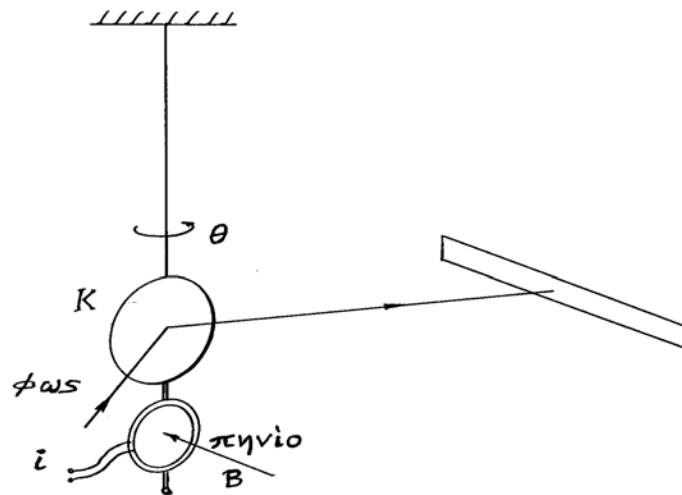
$$\delta q = (\delta q)_{rms} = \frac{A}{B} (\delta x)_{rms} = \frac{\sqrt{2\varepsilon A}}{B} = \frac{\sqrt{kT A}}{B}. \quad (1.13)$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το μέσο σφάλμα σε μία μέτρηση του μεγέθους  $q$ . Η σχέση μεταξύ των  $A$  και  $B$  είναι χαρακτηριστική της μετρητικής διάταξης.

Οι έννοιες αυτές θα αναπτυχθούν λεπτομερέστερα παρακάτω. Ως κύριο παράδειγμα για τη συζήτηση θα χρησιμοποιηθεί το γαλβανόμετρο D' Arsonval. Το όργανο αυτό, μολονότι σε περιορισμένη πια χρήση, είναι κατάλληλο για τη μελέτη αυτών των φαινομένων, γιατί έχει μηχανικά και ηλεκτρικά χαρακτηριστικά τα οποία είναι εύκολα κατανοητά και τα οποία είναι αντιπροσωπευτικά μιας μεγάλης ποικιλίας μετρητικών διατάξεων. Για τον λόγο αυτό θα εξετάσουμε με ιδιαίτερη λεπτομέρεια το φαινόμενο του θορύβου στο όργανο αυτό.

### 1.3.1 Γαλβανόμετρο D' Arsonval

Το σύστημα ανίχνευσης ενός γαλβανομέτρου D' Arsonval αποτελείται από ένα μικρό κάτοπτρο αναρτημένο πάνω σε μια πολύ λεπτή ίνα, συχνά από χαλαζία, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4. Το μετρούμενο ρεύμα, διαρρέει ένα πηνίο το οποίο βρίσκεται στερεωμένο στο κάτω άκρο της ίνας, μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο. Μια ροπή ασκείται έτσι, η οποία τείνει να περιστρέψει το κάτω άκρο της ίνας, και μαζί και το κάτοπτρο. Μια δέσμη φωτός που ανακλάται από το κάτοπτρο προβάλλει μια φωτεινή κηλίδα πάνω σε μια κλίμακα, της οποίας η θέση εξαρτάται από τη γωνία περιστροφής του κατόπτρου, και επομένως και από το ρεύμα. Απόσβεση παρέχεται στο σύστημα είτε με ηλεκτρομαγνητικά μέσα είτε από τον αέρα.



Σχήμα 1.4. Σχηματική παράσταση γαλβανομέτρου.

Οι τυχαίες συγκρούσεις των μορίων του αέρα με το σύστημα προκαλούν μικρές αποκλίσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για κίνηση Brown του γαλβανομέτρου, με τη διαφορά ότι, σε αντίθεση από την περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, εδώ έχουμε μια επαναφέρουσα ροπή που τείνει να διατηρήσει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του.

Αν η ροπή αδρανείας του περιστρεφόμενου συστήματος είναι  $I$  και η αναπτυσσόμενη από την ίνα ροπή επαναφοράς ανά μονάδα γωνίας περιστροφής είναι  $K$ , για περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι  $\frac{1}{2} K \theta^2$  και η κινητική του ενέργεια είναι  $\frac{1}{2} I \omega^2$ , όπου  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος. Από τη γενική θεωρία που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 1.2, η θερμική κίνηση του συστήματος χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη

$$\frac{1}{2} I \overline{\omega^2} = \frac{1}{2} kT \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} K \overline{\theta^2} = \frac{1}{2} kT . \quad (1.14)$$

Θα παρατηρείται λόγω θορύβου μια γωνιακή απόκλιση με ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής ίσης με

$$\theta_{rms} = \sqrt{\overline{\theta^2}} = \sqrt{\frac{kT}{K}} . \quad (1.15)$$

Για μια πολύ λεπτή ίνα χαλαζία,  $K \approx 10^{-13}$  m N/rad. Έτσι, στη θερμοκρασία δωματίου, 293 K, έχουμε

$$\theta_{rms} = \sqrt{\frac{kT}{K}} = \sqrt{\frac{1,38 \times 10^{-23} \times 293}{10^{-13}}} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 0,012^\circ \approx 0,7' .$$

Αν η φωτεινή κηλίδα προβάλλεται σε μια κλίμακα που απέχει 1 m = 1000 mm από το κάτοπτρο, το αντίστοιχο πλάτος ταλάντωσης της κηλίδας θα είναι  $2 \times (1000 \times 2 \times 10^{-4})$  mm, ή 0,4 mm. Με τέτοιες μετρήσεις, ο Kappler προσδιόρισε την τιμή της σταθεράς του Avogadro ως  $N_A = (6,06 \pm 0,06) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Δεδομένης της τιμής της  $\theta_{rms}$ , ποια είναι η αντίστοιχη τιμή του ρεύματος,  $i_{rms}$ , στο γαλβανόμετρο, που θα προκαλούσε την ίδια απόκλιση; Αυτή η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο του μικρότερου ρεύματος που θα μπορούσε να μετρηθεί από το γαλβανόμετρο, ως μόλις ανιχνεύσιμο πάνω από τον θόρυβο (στην πράξη, ως ελάχιστο μετρήσιμο ρεύμα λαμβάνεται ένα πολλαπλάσιο αυτού, π.χ.  $4i_{rms}$ , γιατί η τιμή αυτή έχει πιθανότητα μόλις 1/16000 να εμφανιστεί τυχαία ως θόρυβος στο γαλβανόμετρο). Για να βρούμε την τιμή του  $i_{rms}$ , πρέπει να λάβουμε υπόψη τα χαρακτηριστικά του οργάνου.

Αν το πηνίο του γαλβανομέτρου έχει  $N$  σπείρες εμβαδού  $A$  η καθεμιά, και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $B$  που είναι κάθετο στο επίπεδο του πηνίου, όταν το γαλβανόμετρο διαρρέεται από ρεύμα  $i$ , η ροπή που θα ασκείται στο πηνίο θα είναι

$$M_B = NiAB = (N\Phi)i ,$$

όπου  $\Phi = AB$  είναι η ροή του μαγνητικού πεδίου μέσα από μια σπείρα του πηνίου. Η ροπή επαναφοράς που ασκεί η ίνα του γαλβανομέτρου είναι

$$M_E = K\theta ,$$

όπου είναι η γωνία απόκλισης του γαλβανομέτρου. Εξισώνοντας,

$$\theta = \frac{N\Phi}{K} i . \quad (1.16)$$

Στην τιμή  $\theta_{rms}$  της ρίζας του μέσου τετραγώνου της απόκλισης λόγω κίνησης Brown, αντιστοιχεί τιμή ρεύματος ίση με

$$i_{rms} = \frac{K}{N\Phi} \theta_{rms} \quad (1.17)$$

Για βέλτιστη απόκριση, τόσο σε ταχύτητα όσο και σε πλάτος, στο γαλβανόμετρο χρησιμοποιείται κρίσιμη απόσβεση, με σύνδεση σε σειρά ηλεκτρικής αντίστασης η οποία βρίσκεται ίση με

$$R_c = \frac{N^2 \Phi^2 \tau_0}{4\pi I} , \quad (1.18)$$

όπου 
$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \quad (1.19)$$

είναι η περίοδος των ελεύθερων ταλαντώσεων του γαλβανομέτρου.

Έτσι,

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{\pi kT}{R_c \tau_0}} \quad (1.20)$$



και η αντίστοιχη τάση στα άκρα του γαλβανομέτρου.,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{\pi kTR_c}{\tau_0}}. \quad (1.21)$$

Αντικαθιστώντας, για 293 K,

$$i_{rms} = 1,12 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{1}{R_c \tau_0}} \text{ ampere}, \quad \text{και} \quad v_{rms} = 1,12 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{R_c}{\tau_0}} \text{ volt}. \quad (1.22)$$

Παίρνοντας τα τετραπλάσια αυτών των τιμών ως τα ελάχιστα μετρήσιμα μεγέθη,  $i_{min} = 4i_{rms}$  και  $v_{min} = 4v_{rms}$ , αντίστοιχα, έχουμε:

$$i_{min} = 4,5 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{1}{R_c \tau_0}} \text{ ampere}, \quad \text{και} \quad v_{min} = 4,5 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{R_c}{\tau_0}} \text{ volt}. \quad (1.23)$$

Για παράδειγμα, για ένα γαλβανόμετρο με  $\tau_0 = 16 \text{ s}$  και  $R_c = 100 \Omega$ , το ελάχιστο μετρήσιμο ρεύμα είναι  $i_{min} \approx 10^{-11} \text{ A} \approx 10 \text{ pA}$ , και η ελάχιστη μετρήσιμη διαφορά δυναμικού  $v_{min} \approx 10^{-9} \text{ V} \approx 1 \text{ nV}$ .

Το σημαντικότερο συμπέρασμα που προκύπτει από τις εξισώσεις 1.20 και 21, είναι ότι μπορούμε να αυξήσουμε την ευαισθησία ενός γαλβανομέτρου (ή και κάθε παρόμοιου οργάνου) αυξάνοντας την περίοδο  $\tau_0$  του οργάνου. Η βελτίωση εξαρτάται από την τετραγωνική ρίζα  $\sqrt{\tau_0}$ . Η βελτίωση προκύπτει γιατί ουσιαστικά το όργανο ολοκληρώνει ως προς τον χρόνο τόσο τον θόρυβο όσο και το σήμα για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Το μεν σήμα θεωρείται ότι παραμένει σταθερό και δεν επηρεάζεται από την ολοκλήρωση, ενώ ο θόρυβος, ο οποίος παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές, αυτοαναιρείται μερικώς (αλλά όχι πλήρως φυσικά). Υπενθυμίζουμε ότι παίρνοντας  $n$  μετρήσεις ενός μεγέθους<sup>1</sup>, με περιορισμένη ακρίβεια, μειώνουμε την αβεβαιότητα της μέσης τιμής του μεγέθους κατά ένα παράγοντα  $\sqrt{n}$ . Η αναλογία δεν είναι καθόλου τυχαία, και ισχύει για κάθε μετρητική διάταξη. Η αύξηση του χρόνου απόκρισης του συστήματος, βελτιώνει μεν την ευαισθησία του οργάνου, αλλά θέτει αυξημένες απαιτήσεις στη μηχανική αντοχή του οργάνου (στην περίπτωση του γαλβανομέτρου, στην αντοχή της ίνας) και στην υπομονή του παρατηρητή!

### 1.3.2 Ζυγοί

*Ζυγός ελατηρίου (Δυναμόμετρο).* Ο ζυγός αποτελείται από ένα ελατήριο σταθεράς  $K$ , στην κάτω άκρη του οποίου εξαρτάται η μάζα της οποίας το βάρος θα μετρηθεί. Λόγω της κίνησης Brown, το μήκος  $x$  του ελατηρίου μεταβάλλεται έτσι ώστε η επιμήκυνση του ελατηρίου να έχει μια ρίζα μέσης τετραγωνικής τιμής  $\sqrt{(\delta x)^2}$  τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2} K \overline{(\delta x)^2} = \frac{1}{2} kT. \quad (1.24)$$

Επομένως,

<sup>1</sup> Βλ., για παράδειγμα, Τομέας Φυσικής, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε.Μ.Π., *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, 1994 κ.ε., "Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων."

$$\sqrt{(\delta x)^2} = \sqrt{\frac{kT}{K}} \quad (1.25)$$

είναι η ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής της επιμήκυνσης του ελατηρίου λόγω του θερμικού θορύβου. Η ευαισθησία του ζυγού είναι  $\sigma = \frac{\delta x}{\delta m} = \frac{g}{K}$  όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Έτσι, η μάζα που θα προκαλούσε επιμήκυνση ίση με  $\sqrt{(\delta x)^2}$  είναι

$$\overline{\delta m} = \frac{\sqrt{kTK}}{g} . \quad (1.26)$$

Αν στο άκρο του ελατηρίου η ολική συνδεδεμένη μάζα είναι  $M + m$  όπου  $m$  είναι η μάζα προς μέτρηση, τότε η περίοδος ταλαντώσεων του συστήματος, χωρίς απόσβεση, θα είναι

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{K}} \quad (1.27)$$

και επομένως

$$\overline{\delta m} = 2\pi \frac{\sqrt{kT(M + m)}}{g \tau_0} . \quad (1.28)$$

Αριθμητικά, στους 293 K,

$$\overline{\delta m} = 0,9 \times 10^{-9} \frac{\sqrt{M + m}}{\tau_0} \text{ γραμμάρια.} \quad (1.29)$$

*Αναλυτικός (χημικός) ζυγός.* Με παρόμοια επιχειρήματα, βρίσκεται ότι το όριο στην ευαισθησία ενός αναλυτικού ζυγού λόγω της κίνησης Brown δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{\delta m} = 2\pi \frac{\sqrt{kT(M + 2m)}}{g \tau_0} . \quad (1.28)$$

Στους 293 K,

$$\overline{\delta m} = 0,9 \times 10^{-9} \frac{\sqrt{M + 2m}}{\tau_0} \text{ γραμμάρια.} \quad (1.29)$$

Τα μεγέθη αυτά δεν παρουσιάζουν καμιά πρακτική δυσκολία στη διαδικασία της ζύγισης γιατί είναι τουλάχιστο 1000 φορές μικρότερα από την ευαισθησία των καλύτερων ζυγών που κατασκευάζονται σήμερα..

*Έως τώρα εξετάσαμε τον θόρυβο στα ίδια τα μετρητικά συστήματα. Παρακάτω θα αναφερθούμε στις διακυμάνσεις που παρουσιάζονται στο μετρούμενο μέγεθος λόγω του θερμικού θορύβου.*

#### 1.4 Στοχαστικός ηλεκτρικός θόρυβος

Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε αρχικά από τον Schottky σε θερμοϊονικές λυχνίες. Ονομάστηκε από αυτόν *Schrot effect* ή *shot effect* (small shots = σκάγια), λόγω της ακουστικής του ομοιότητας με τον θόρυβο που κάνουν τα σκάγια όταν πέφτουν τυχαία πάνω σε μια επιφάνεια, σε μεγάλους αριθμούς

Η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος σε μια λυχνία δεν είναι συνεχής αλλά υπόκειται σε διακυμάνσεις λόγω της τυχαίας φύσης της εκπομπής των ηλεκτρονίων από την κάθοδο. Αν ο μέσος ρυθμός εκπομπής ηλεκτρονίων ανά μονάδα χρόνου από την κάθοδο είναι  $r$ , σε μια μέτρηση που διαρκεί χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ο μέσος αναμενόμενος αριθμός ηλεκτρονίων θα είναι  $n = r\Delta t$ . Η διαδικασία υπακούει στατιστική Poisson. Έτσι, η τυπική απόκλιση από τον αναμενόμενο στη μέτρηση αριθμό ηλεκτρονίων θα είναι

$$(\delta n)_{rms} = \sqrt{(\delta n)^2} = \sqrt{n} = \sqrt{r\Delta t} . \quad (1.30)$$

Το μέσο μετρούμενο ρεύμα θα είναι ίσο με  $i = en / \Delta t = er$ , όπου  $e$  το φορτίο του ηλεκτρονίου. Η τιμή του ρεύματος που αντιστοιχεί στη διακύμανση  $(\delta n)_{rms}$  στον αριθμό των ηλεκτρονίων είναι

$$(\delta i)_{rms} = e\sqrt{n} = e\sqrt{r\Delta t} \quad (1.31)$$

και επομένως

$$(\delta i)_{rms} = \sqrt{\frac{ei}{\Delta t}} . \quad (1.32)$$

Λόγω της διακριτότητας του ηλεκτρικού φορτίου, η μέτρηση ενός ρεύματος καθόδου ίσου με  $i$  θα εμφανίζει διακυμάνσεις της τάξης του  $(\delta i)_{rms}$ . Η σχέση (1.32) χρησιμοποιήθηκε από τους Hull και Williams για τον προσδιορισμό του ηλεκτρονικού φορτίου, με αποτέλεσμα  $e = -1,585 \times 10^{-19}$  C, σε ικανοποιητική συμφωνία με τη σημερινή αποδεκτή τιμή.

Το φαινόμενο είναι δευτερεύουσας σημασίας συγκρινόμενο με τον θόρυβο Johnson που εξετάζεται παρακάτω. Σε μερικά όργανα όμως, όπως π.χ. ο φωτοπολλαπλασιαστής, παίζει καθοριστικό ρόλο.

## 1.5 Θόρυβος Johnson

Πρώτος ο Άινστάιν<sup>1</sup>, το 1906, διατύπωσε την άποψη ότι η κίνηση Brown των ηλεκτρονίων σε έναν αγωγό (μιας ηλεκτρικής αντίστασης) θα οδηγούσε στην εμφάνιση κυμαινόμενης διαφοράς δυναμικού στα άκρα του. Το φαινόμενο παρατηρήθηκε πειραματικά από τον Johnson<sup>2</sup> το 1928, και το φάσμα συχνοτήτων του θορύβου εξηγήθηκε θεωρητικά από τον Nyquist<sup>3</sup>.

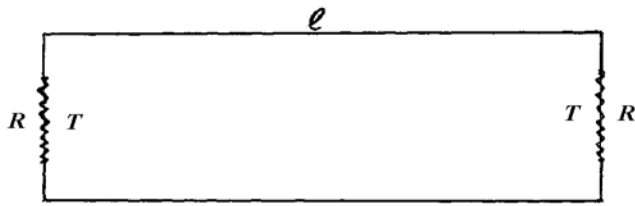
Παραθέτουμε την εξαγωγή της σχέσης που δίνει την ισχύ που παρέχει μια αντίσταση λόγω θερμικού θορύβου, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον Nyquist. Θεωρούμε μια γραμμή μεταφοράς, χωρίς απώλειες, η οποία έχει μήκος  $\ell$  και χαρακτηριστική αντίσταση  $\sqrt{L/C}$ , όπου  $L$  και  $C$  είναι η αυτεπαγωγή και η χωρητικότητα της γραμμής ανά μονάδα μήκους, αντίστοιχα. Σε κάθε άκρο της γραμμής υπάρχει συνδεδεμένη ωμική αντίσταση ίση με  $R = \sqrt{L/C}$ . Λόγω αυτών των αντιστάσεων, τα οδεύοντα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που φθάνουν στα δύο άκρα απορροφούνται πλήρως.

Οι δύο αντιστάσεις βρίσκονται στην ίδια απόλυτη θερμοκρασία,  $T$ . Λόγω των διακυμάνσεων των θέσεων των φορτίων εντός των αντιστάσεων, κάθε μια από αυτές δρα σαν μια γεννήτρια εναλλασσομένων ηλεκτρικών σημάτων, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς, με ταχύτητα  $v = 1/\sqrt{LC}$ , και απορροφούνται

<sup>1</sup> A. Einstein, *Ann. Phys.* **19**, 289, 371, (1906).

<sup>2</sup> J. B. Johnson, *Phys. Rev.* **32**, 97, (1928).

<sup>3</sup> H. Nyquist, *Phys. Rev.* **32**, 110, (1928).



**Σχήμα 1.5.**

Γραμμή μεταφοράς, για τον υπολογισμό του θερμικού θορύβου από ηλεκτρική αντίσταση.

πλήρως από την άλλη αντίσταση. Για να διατηρηθεί η θερμοδυναμική ισορροπία, οι δύο αντιστάσεις πρέπει να παρέχουν ενέργεια στη γραμμή με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό δε πρέπει να συμβαίνει σε οποιαδήποτε περιοχή συχνοτήτων, διαφορετικά θα μπορούσαμε, με χρήση κατάλληλων ηλεκτρικών φίλτρων, να επιτύχουμε τη μεταφορά περισσότερης ενέργειας από τη μια των αντιστάσεων στην άλλη, παραβιάζοντας έτσι το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα. Το φάσμα συχνοτήτων του θορύβου από την κάθε αντίσταση θα είναι επομένως η ίδια συνάρτηση της συχνότητας,  $f$ , και των  $R$  και  $T$ .

Σε κάποια χρονική στιγμή, αφού έχει αποκατασταθεί ισορροπία στη μόνιμη κατάσταση, οι δύο αντιστάσεις αφαιρούνται, και τα δύο άκρα της γραμμής μεταφοράς είτε αφήνονται ανοικτά, είτε βραχυκυκλώνονται. Τα κύματα που διαδίδονται τώρα κατά μήκος της γραμμής είναι παγιδευμένα σε αυτήν, ανακλώμενα πλήρως στα δύο άκρα. Η μικρότερη συχνότητα στη γραμμή είναι  $f_0 = v/2\ell$ . Τα άλλα στάσιμα κύματα θα έχουν συχνότητες  $2f_0, 3f_0, \dots, nf_0$ , όπου  $n$  κάποιος ακέραιος. Καθένα από αυτά τα στάσιμα κύματα είναι μια κανονική ταλάντωση σε ένα από τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, και σε αυτόν αντιστοιχεί μέση ενέργεια  $kT$  ( $\frac{1}{2}kT$  για την ηλεκτρική ενέργεια και  $\frac{1}{2}kT$  για τη μαγνητική ενέργεια).

Ας εξετάσουμε τώρα την περιοχή συχνοτήτων μεταξύ  $f_1 = n_1 f_0$  και  $f_2 = n_2 f_0$ , όπου  $n_1$  και  $n_2$  είναι ακέραιοι, με  $n_2 > n_1$ . Ο αριθμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στη περιοχή αυτή των συχνοτήτων είναι  $N = n_2 - n_1$ . Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας στα δεξιά με  $f_0$  έχουμε:

$$N = \frac{n_2 f_0 - n_1 f_0}{f_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}. \quad (1.33)$$

Αφού ο κάθε τρόπος έχει μέση ενέργεια  $kT$ , η μέση ολική ενέργεια στην περιοχή των συχνοτήτων  $\Delta f = f_2 - f_1$  είναι

$$W = NkT = \frac{kT}{f_0} \Delta f. \quad (1.34)$$

Αφού τα κύματα διαδίδονται στη γραμμή με ταχύτητα  $v$ , αυτή η ενέργεια θα πρέπει να ισούται με την ενέργεια με την οποία οι δύο αντιστάσεις τροφοδοτούσαν τη γραμμή σε χρόνο ίσο με  $\ell/v$ , τον χρόνο που απαιτείται για να διανύσει το κάθε κύμα το πλήρες μήκος της γραμμής. Επομένως, η παρεχόμενη από την κάθε αντίσταση ισχύς στη συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων είναι

$$P = \frac{1}{2} \frac{W}{\ell/v} = \frac{kTv}{2f_0 \ell} \Delta f = kT \Delta f. \quad (1.35)$$

Η ισχύς εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και από το εύρος συχνοτήτων που ανιχνεύεται. Δεν εξαρτάται από τις τιμές των συγκεκριμένων συχνοτήτων. Η ισχύς ανά

μονάδα περιοχής συχνοτήτων είναι επομένως σταθερή σε μια θερμοκρασία. Έχουμε δηλαδή ένα λευκό φάσμα, ή λευκό θόρυβο, όπως αποκαλείται ο θόρυβος Johnson.

Το ισοδύναμο μέσο τετράγωνο του ρεύματος στο κύκλωμα βρίσκεται από τη σχέση  $\overline{P} = Ri^2$  και είναι

$$\overline{i^2} = \frac{kT}{R} \Delta f, \quad (1.36)$$

ενώ η το μέσο τετράγωνο της ηλεκτρεγερτικής δύναμης στα άκρα της αντίστασης βρίσκεται από τη σχέση  $\overline{P} = E^2 / 4R$  [βλ. π.χ. Εξ. (2.5)] και είναι ίσο με

$$\overline{E^2} = 4kTR\Delta f. \quad (1.37)$$

Για παράδειγμα, μιας αντίσταση 100 kΩ που βρίσκεται σε θερμοκρασία 300 K, αναπτύσσει στα άκρα της, στην ακουστική περιοχή συχνοτήτων, 20 - 20000 Hz, μια ηλεκτρεγερτική δύναμη της οποίας η ρίζα του μέσου τετραγώνου της είναι ίση με

$$E_{rms} = \sqrt{\overline{E^2}} = \sqrt{4kTR\Delta f} = \sqrt{4 \times 10^5 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300 \times (20000 - 20)} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ volt} \approx 6 \mu\text{V}.$$

Αναφέρεται επίσης ενδεικτικά ότι η μέση ισχύς που παρέχεται από την αντίσταση αυτή κάτω από τις ίδιες συνθήκες είναι

$$\overline{P} = \overline{E^2} / 4R = (5,8 \times 10^{-6})^2 / (4 \times 10^5) = 8,3 \times 10^{-17} \text{ W}.$$

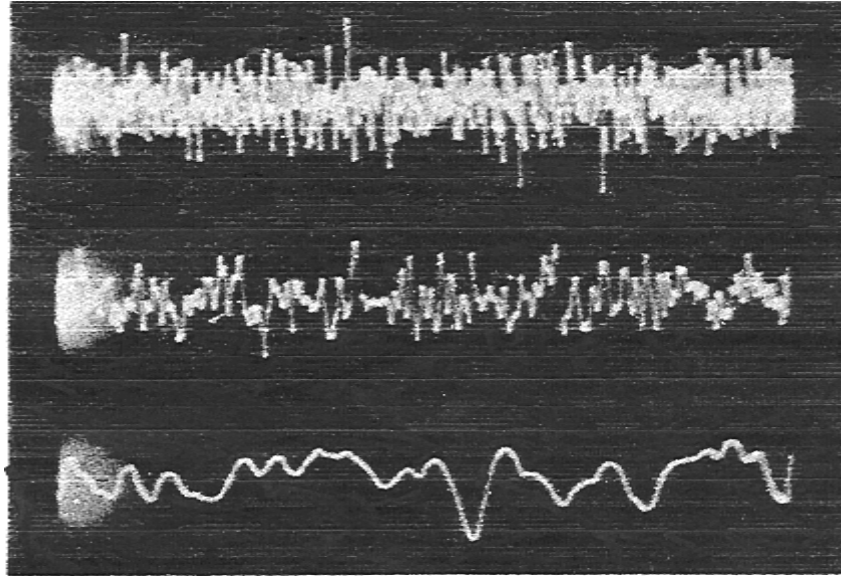
Η ισχύς αυτή μπορεί βεβαίως να απορροφηθεί πλήρως από μια άλλη ίση αντίσταση, συνδεδεμένη στα άκρα της αντίστασης των 100 kΩ που θεωρείται ως η πηγή του θερμικού θορύβου.

Βεβαίως η σχέση (1.37) θα οδηγούσε στην παροχή άπειρης ισχύος για ολόκληρο το φάσμα των συχνοτήτων. Η διόρθωση που θα πρέπει να γίνει είναι να τεθεί η μέση ενέργεια στον κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης ίση όχι με  $kT$ , αλλά με

$$\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

όπως υπαγορεύεται από τη Στατιστική Θερμοδυναμική. Η ενέργεια αυτή είναι πολύ κοντά στην  $kT$  για συχνότητες  $f \ll kT/h$ , όπου  $h$  είναι η σταθερά του Planck. Για 300 K, είναι  $kT/h = 6,3 \times 10^{12} \text{ Hz} \approx 6 \text{ GHz}$ . Για όλους σχεδόν τους πρακτικούς σκοπούς η σχέση (1.37) είναι επομένως ικανοποιητική.

Ο θερμικός θόρυβος Johnson εικονίζεται στο Σχ. 1.6. Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα μιας ηλεκτρικής αντίστασης καταγράφεται με παλμογράφο, συναρτήσει του χρόνου. Το φάσμα του θορύβου δεν είναι λευκό γιατί το όργανο λειτουργεί και σαν φίλτρο αποκοπής των πολύ μεγάλων συχνοτήτων (όπως είναι εμφανές στην κατώτερη και πιο γρήγορη καταγραφή).



**Σχήμα 1.6.** Καταγραφή, με παλμογράφο, του σήματος θερμικού θορύβου από μια ηλεκτρική αντίσταση. Η μεσαία σάρωση έχει χρονική διάρκεια 4 φορές μικρότερη από την πρώτη (πάνω), και η τρίτη (κάτω) 20 φορές.

### 1.5.1 Θόρυβος Johnson σε ηλεκτρικά κυκλώματα.

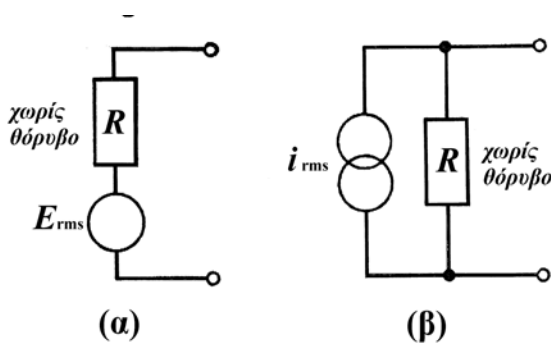
Κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα που περιέχει ωμικές αντιστάσεις, διαρρέεται, σύμφωνα με τα παραπάνω, από ρεύμα που οφείλεται στον θερμικό θόρυβο των αντιστάσεων. Για τους σκοπούς της ανάλυσης του θορύβου σε ηλεκτρικά κυκλώματα, μια ωμική αντίσταση  $R$  πρέπει να θεωρείται ως μια πηγή ηλεκτρεγερτικής τάσης σε σειρά με την  $R$ . Η πηγή θεωρείται ως πηγή εναλλασσόμενης τάσης, της οποίας η ρίζα του μέσου τετραγώνου  $E_{rms}$  δίνεται από την Εξ. (1.37) ως

$$E_{rms} = \sqrt{E^2} = \sqrt{4kTR\Delta f} . \quad (1.38)$$

Το Σχ. 1.7(α) δείχνει αυτή την εικόνα. Εναλλακτικά, μια πηγή ρεύματος

$$i_{rms} = \sqrt{i^2} = E_{rms} / R = \sqrt{4kT\Delta f / R} \quad (1.39)$$

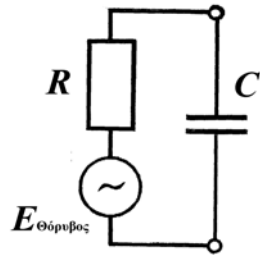
μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι συνδεδεμένη παράλληλα με την αντίσταση, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.7(β). Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις μιας αντίστασης και του θορύβου που αυτή παράγει, είναι ισοδύναμες.



**Σχήμα 1.7** Ισοδύναμα κυκλώματα για την περιγραφή του θερμικού θορύβου μιας ηλεκτρικής αντίστασης. (α) Γεννήτρια τάσης  $E_{rms} = \sqrt{4kTR\Delta f}$  συνδεδεμένη σε σειρά με την αντίσταση. (β) Γεννήτρια ρεύματος  $i_{rms} = \sqrt{4kT\Delta f / R}$  συνδεδεμένη παράλληλα με την αντίσταση.

### Θόρυβος Johnson σε κύκλωμα RC

Το πιο απλό κύκλωμα στο οποίο μπορούμε να μελετήσουμε τον θόρυβο είναι μια αντίσταση  $R$  σε σειρά με έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ . Στην πραγματικότητα έτσι πρέπει να θεωρείται μια απλή αντίσταση, αφού κάθε αγωγός, εκτός από ηλεκτρική αντίσταση, έχει και κάποια χωρητικότητα παράλληλη προς αυτόν μεταξύ των άκρων του, και, κυρίως για μεγάλες συχνότητες, και κάποια αυτεπαγωγή σε σειρά. Το κύκλωμα του Σχ.1.8 δείχνει την αντίσταση συνδεδεμένη με τον πυκνωτή. Σε σειρά με την αντίσταση θεωρείται ότι υπάρχει η πηγή του θερμικού θορύβου.



**Σχήμα 1.8**  
Θόρυβος σε κύκλωμα RC

Το κύκλωμα λειτουργεί ως διαιρέτης τάσεως ανάμεσα στην αντίσταση και τον πυκνωτή. Αν η πηγή παράγει ηλεκτρεγερτική δύναμη  $E$ , η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα του πυκνωτή θα είναι

$$E_C = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} E \quad (1.40)$$

όπου  $Z_C = 1/j\omega C$  και  $Z_R = R$ , ( $j = \sqrt{-1}$ ), είναι οι σύνθετες αντιστάσεις του πυκνωτή και της αντίστασης, αντιστοίχως. Η σχέση ανάμεσα στα τετράγωνα των τάσεων θα είναι

$$E_C^2 = \left| \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \right|^2 E^2 = \left| \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \right|^2 E^2 = \left| \frac{1}{1 + j\omega CR} \right|^2 E^2 = \frac{E^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (1.41)$$

Έτσι, αν στην περιοχή συχνοτήτων  $df$  η πηγή του θορύβου παράγει σήμα του οποίου η συνεισφορά στην τιμή του μέσου τετραγώνου της τάσης είναι

$$d\overline{E^2} = 4kTR df, \quad (1.42)$$

η αντίστοιχη τιμή στα άκρα του πυκνωτή θα είναι

$$d\overline{E_C^2} = \frac{4kTR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} df. \quad (1.43)$$

Για ολόκληρη την περιοχή των συχνοτήτων

$$\overline{E_C^2} = \int_0^\infty \frac{4kTR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} df. \quad (1.44)$$

Επειδή  $\omega = 2\pi f$ , και θέτοντας  $x = \omega CR = 2\pi CR f$ , οπότε και  $df = dx/2\pi CR$ , έχουμε

$$\overline{E_C^2} = \frac{4kTR}{2\pi CR} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2kT}{\pi C} \frac{\pi}{2} = \frac{kT}{C}. \quad (1.45)$$

Βλέπουμε ότι η μέση ενέργεια στον πυκνωτή είναι

$$W_C = \frac{1}{2} C \overline{E_C^2} = \frac{1}{2} kT, \quad (1.46)$$

όπως και αναμέναμε.

## 1.6 Θόρυβος 1/f

Ο θόρυβος αυτός είναι λιγότερο κατανοητός από τον θόρυβο Johnson και οφείλεται σε μια πληθώρα αιτιών. Σε λυχνίες, για παράδειγμα, οφείλεται σε μεταβολές στην κατάσταση της επιφάνειας της καθόδου. Στους ημιαγωγούς, σε διακυμάνσεις της αντίστασης που οφείλεται μερικές φορές σε μεταβολές στην κατάσταση και τις συνθήκες των επιφανειών. Ο θόρυβος αυτός εμφανίζεται όταν η ροή του ρεύματος ελέγχεται από κάποια επιφάνεια. Για παράδειγμα, σε μια λυχνία, το ρεύμα εξαρτάται από την ικανότητα εκπομπής ηλεκτρονίων από την κάθοδο. Σε μια ημιαγωγική διάταξη, η ροή των φορτίων ρυθμίζεται από κάποια ενδοεπιφάνεια. Σε μια αντίσταση γραφίτη, οι επιφάνειες ανάμεσα στους κόκκους επηρεάζουν τη ροή του ρεύματος. Η γενική συμπεριφορά του θορύβου 1/f θα μπορούσε να περιγραφεί με την υπόθεση ότι το κύκλωμα περιλαμβάνει μια τυχαίως κυμαινόμενη ηλεκτρική αντίσταση.

Το φάσμα της ισχύος του θορύβου αυτού δεν είναι λευκό, αλλά ακολουθεί μια κατανομή 1/f, από την οποία προκύπτει και το όνομά του. Ο θόρυβος μπορεί να εκφραστεί ως ποσοστό του ρεύματος από τη σχέση

$$\frac{(\delta I)^2}{I^2} = A \frac{\delta f}{f}, \quad (1.47)$$

όπου το μέγεθος του συντελεστή  $A$  είναι γενικά της τάξης του  $10^{-12}$ , και εξαρτάται από το είδος της διάταξης που παρουσιάζει τον θόρυβο και την κατασκευή της. Η Εξ. (1.47) δίνει τη διακύμανση  $\delta I$  που παρατηρείται στο ρεύμα  $I$ , στην περιοχή συχνοτήτων με εύρος  $\delta f$  γύρω από τη συχνότητα  $f$ . Προφανώς ο θόρυβος αυτός θα είναι σημαντικός πάντοτε στις χαμηλές συχνότητες, της τάξης του kHz και χαμηλότερες.

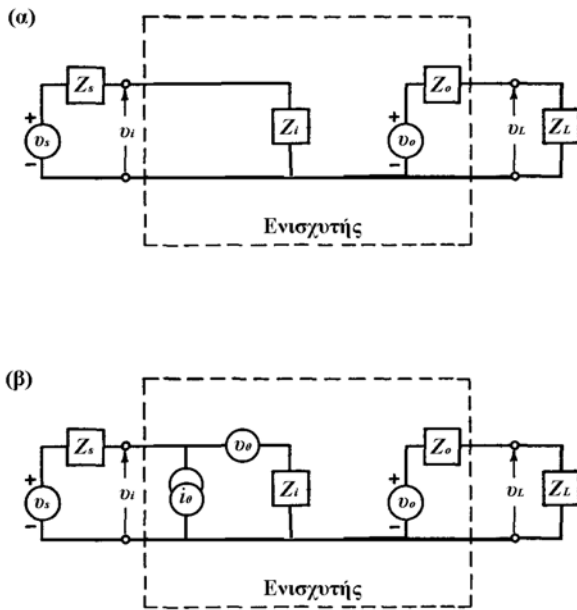
Ο θόρυβος 1/f μπορεί να περιοριστεί με κατάλληλη επιλογή των αντιστάσεων, ημιαγωγικών διατάξεων, και των άλλων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν. Οι μεταλλικές αντιστάσεις, για παράδειγμα, δεν παρουσιάζουν θόρυβο 1/f. Επίσης, επιλέγοντας μια αντίσταση μεγάλης ισχύος (αντοχής), μειώνει αναλογικά τον θόρυβο 1/f. Μια σημαντική παράμετρος για ένα στοιχείο κυκλώματος είναι η συχνότητα στην οποία ο θόρυβος 1/f είναι ίσος με τον θόρυβο Johnson. Στις ημιαγωγικές διατάξεις, αυτό συμβαίνει περίπου στο 1 kHz. Εν πάση περιπτώσει, με τη χρήση κατάλληλου φίλτρου αποκοπής χαμηλών συχνοτήτων, ο θόρυβος 1/f μπορεί να μειωθεί στις περισσότερες περιπτώσεις. Σε εφαρμογές όμως όπου το μετρούμενο σήμα είναι χαμηλών συχνοτήτων (π.χ. συσκευή λήψης ηλεκτροκαρδιογραφήματος), ειδική μέριμνα πρέπει να ληφθεί να χρησιμοποιηθούν στο κύκλωμα στοιχεία με χαμηλό θόρυβο 1/f. Πολύ συχνά, αξίζει τον κόπο να ελέγξει κανείς τα στοιχεία που θα χρησιμοποιήσει, επιλέγοντας αυτά που, λόγω κατασκευής, παρουσιάζουν χαμηλό θόρυβο 1/f.



## 1.7 Θόρυβος σε ενισχυτές

Κάθε ενισχυτής, θα παρουσιάζει στην έξοδο του ένα σήμα θορύβου, αφού αποτελείται από στοιχεία που τα ίδια παρουσιάζουν θόρυβο από διάφορες πηγές. Αυτός ο θόρυβος θα είναι παρών και όταν δεν υπάρχει σήμα στην είσοδο του ενισχυτή, και γενικά θα προστίθεται γραμμικά (για γραμμικούς ενισχυτές) στο σήμα εξόδου του ενισχυτή. Ο περιορισμός του θορύβου σε ενισχυτές, όπως και σε άλλες διατάξεις, είναι εξαιρετικά σημαντικός και λαμβάνεται υπόψη σε κάθε σχεδιασμό ενισχυτών.

Τα χαρακτηριστικά του θορύβου Johnson σε ένα ενισχυτή περιγράφονται μέσω της ενσωμάτωσης στο ισοδύναμο κύκλωμα του ενισχυτή, πηγών θορύβου. Στο Σχ.1.9(α)



**Σχήμα 1.9** Το ισοδύναμο κύκλωμα ενός ενισχυτή, (α) χωρίς θόρυβο, και (β) με θόρυβο.

τάσης  $v_\theta$  σε σειρά με την  $Z_i$ . Τα σήματα αυτά συνδυάζονται με το σήμα  $v_i$ , και αφού ενισχυθούν, εμφανίζονται στην έξοδο του ενισχυτή, μαζί με το σήμα εξόδου  $v_o$ .

Από το ισοδύναμο κύκλωμα του Σχ. 1.9(β), είναι προφανές ότι το σήμα που μετράται στην έξοδο του ενισχυτή όταν η είσοδος του βραχυκυκλωθεί, οφείλεται μόνο στην πηγή θορύβου  $v_\theta$  σε σειρά με την  $Z_i$ . Όταν η είσοδος του ενισχυτή είναι ανοικτή (χωρίς πηγή στην είσοδο), ο θόρυβος οφείλεται και στις δύο πηγές  $v_\theta$  και  $i_\theta$  συνδεδεμένες σε σειρά με την αντίσταση εισόδου  $Z_i$ . Ισοδυναμούν με μια πηγή τάσης της οποίας η μέση τετραγωνική τιμή είναι  $v_{rms}^2 = (v_\theta)_{rms}^2 + |Z_i|^2 (i_\theta)_{rms}^2$ . Με τις δύο αυτές μετρήσεις είναι δυνατό να προσδιοριστούν τα μεγέθη των  $(v_\theta)_{rms}$  και  $(i_\theta)_{rms}$ .

Στο σχεδιασμό ενός ενισχυτή, ακολουθούνται ορισμένοι βασικοί κανόνες για τον περιορισμό του θορύβου: Καμιά περιττή αντίσταση δεν συνδέεται στο κύκλωμα εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση ενός διαιρέτη τάσεως αποτελούμενου από αντιστάσεις, πάντοτε αυξάνει το θόρυβο. Το πρώτο τρανζίστορ που δέχεται το σήμα στην είσοδο είναι το σημαντικότερο στοιχείο, και πρέπει να επιλεγεί με προσοχή. Τα τρανζίστορ FET έχουν τον χαμηλότερο θόρυβο, και χρησιμοποιούνται γι' αυτόν τον σκοπό. Το πρώτο στάδιο ενίσχυσης είναι το σημαντικότερο, γιατί ο λόγος σήμα προς

φαίνεται το ισοδύναμο κύκλωμα ενός ενισχυτή χωρίς θόρυβο. Το τετράπλευρο με διακεκομμένη παριστάνει τον ενισχυτή. Η πηγή παρέχει τάση  $v_s$  μέσα από μια σύνθετη αντίσταση εξόδου  $Z_s$ . Ο ενισχυτής δέχεται τάση εισόδου  $v_i$  στα άκρα μιας σύνθετης αντίστασης εισόδου  $Z_i$ . Μετά την ενίσχυση, ο ενισχυτής δίνει τάση εξόδου  $v_o$  μέσα από μια σύνθετη αντίσταση εξόδου  $Z_o$ . Το φορτίο  $Z_L$  βλέπει μια τάση  $v_L$  στην έξοδο του ενισχυτή. Στο Σχ.1.9(β) φαίνεται το ισοδύναμο κύκλωμα του ενισχυτή με θόρυβο. Ο συνολικός θόρυβος που οφείλεται στον ενισχυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από μια γεννήτρια ρεύματος  $i_\theta$  συνδεδεμένη παράλληλα με την αντίσταση εισόδου  $Z_i$  και μια γεννήτρια

θόρυβο έχει τη μικρότερή του τιμή εκεί. Θα πρέπει λοιπόν ο θόρυβος σ' αυτό το στάδιο να είναι όσο το δυνατό μικρότερος. Αφού ενισχυθεί το σήμα στο πρώτο στάδιο, το μέγεθός του είναι κανονικά αρκετά μεγάλο ώστε οποιοσδήποτε θόρυβος προστεθεί στα επόμενα στάδια επεξεργασίας του σήματος να είναι συγκριτικά ασήμαντος. Για τον ίδιο λόγο, η ενίσχυση του σήματος από μια πηγή γίνεται σε πρώτο στάδιο με χρήση ενός *προενισχυτή χαμηλού θορύβου*, που βρίσκεται όσο το δυνατό πιο κοντά στην πηγή. Σε ένα φωτοπολλαπλασιαστή, για παράδειγμα, ο προενισχυτής βρίσκεται συνήθως στη βάση του φωτοπολλαπλασιαστή, που λειτουργεί και ως τροφοδοτικό τάσης για τη λειτουργία του οργάνου. Αποφεύγεται έτσι και η πρόσληψη θορύβου από άλλες πηγές, καθώς και η χρήση καλωδίου με μεγάλη χωρητικότητα στην έξοδο του φωτοπολλαπλασιαστή, κάτι που δεν είναι επιθυμητό γιατί τροποποιεί τη σταθερά χρόνου στο κύκλωμα επεξεργασίας των παλμών από τον φωτοπολλαπλασιαστή.

Οι κύριες μορφές ενδογενούς θορύβου σε ημιαγωγικές διατάξεις είναι ο στοχαστικός θόρυβος, ο θόρυβος Johnson, και ο θόρυβος  $1/f$ . Ενισχυτές χαμηλού θορύβου είναι διαθέσιμοι στην αγορά (operational amplifiers), με τιμές του  $v_{\theta}$  (rms) μεταξύ 1 και 10 nV /  $\sqrt{Hz}$ , και  $i_{\theta}$  (rms) μεταξύ 0,2 και 1 pA /  $\sqrt{Hz}$  [βλ. Σχ. 1.9].