9. Σχετικιστική δυναμική

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 12, 13.

9.1 Διατήρηση της ορμής, σχετικιστική ορμή, σχετικιστική μάζα

Αν παρατηρήσουμε μια κρούση δύο σωμάτων σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, S, στο οποίο η ορμή διατηρείται, και μετασχηματίσουμε τις ταχύτητες μέσω του μετασχηματισμού του Lorentz για να δούμε πώς εξελίσσεται το ίδιο φαινόμενο σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' που κινείται ως προς το σύστημα S με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}} = V\hat{\mathbf{x}}$, θα διαπιστώσουμε ότι η ορμή δεν διατηρείται στο σύστημα αναφοράς S'. Για να αποκαταστήσουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής, χρειάζεται να ορίσουμε την ορμή ενός κινούμενου σώματος με διαφορετικό τρόπο. Για να το επιτύχουμε αυτό, προκύπτει ότι, αν ένα σώμα, το οποίο όταν είναι ακίνητο έχει μάζα M, κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς, η ορμή του σώματος αυτού στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς πρέπει να οριστεί ως

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{M\,\vec{\boldsymbol{\upsilon}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma M\,\vec{\boldsymbol{\upsilon}}\ , \tag{9.1}$$

όπου

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} \qquad \text{και} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\ . \tag{9.2}$$

Να προσεχθεί ότι τα μεγέθη β και γ ορίζονται για την ταχύτητα υ του σώματος μέσα στο σύστημα αναφοράς στο οποίο ορίζεται και η ορμή του (διαφέρουν δηλαδή από τα β και γ του μετασχηματισμού του Lorentz, τα οποία υπολογίζονται για τη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων αναφοράς, V).

Η σχετικιστική ορμή ορίζεται και ως

$$\vec{\mathbf{p}} = M(\upsilon)\,\vec{\boldsymbol{\upsilon}}\,, \tag{9.3}$$

όπου

$$M(\upsilon) = \gamma M = \frac{M}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{9.4}$$

είναι ένα μέγεθος που ονομάζεται *σχετικιστική μάζα*. Υπό αυτήν την έννοια, το μέγεθος M, το οποίο είναι $M = M(0)$, ονομάζεται *μάζα ηρεμίας*, και είναι η μάζα του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

9.2 Σχετικιστική ενέργεια

Διατηρούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μορφή

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \tag{9.5}$$

με τον σχετικιστικό ορισμό της ορμής.

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια δύναμη

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{M\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right), \tag{9.6}$$

όταν επιταχύνει μια μάζα από μηδενική ταχύτητα σε τελική ταχύτητα υ, και να το εξισώσουμε με την κινητική ενέργεια του σώματος σε αυτήν την ταχύτητα. Βρίσκουμε έτσι την κινητική ενέργεια του σώματος ίση με

$$K = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - Mc^2 . \tag{9.7}$$

Το μέγεθος

$$E = Mc^2\gamma , \quad ή \quad E = M(\upsilon)\,c^2 \quad ή \quad E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} , \tag{9.8}$$

έχει διαστάσεις ενέργειας. Είναι δε

$$E(0) = Mc^2 . \tag{9.9}$$

Αν ονομάσουμε την E *ολική σχετικιστική ενέργεια*, το μέγεθος Mc^2 είναι η τιμή της E όταν το σώμα ηρεμεί ($\upsilon = 0$), και ονομάζεται *ενέργεια ηρεμίας* του σώματος. Η κινητική ενέργεια του σώματος εκφράζεται τώρα ως

$$K = E - Mc^2 . \tag{9.10}$$

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι, με αυτούς τους ορισμούς, η ολική σχετικιστική ενέργεια είναι

$$E = Mc^2 + K , \tag{9.11}$$

ίση δηλαδή με το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας του σώματος και της κινητικής του ενέργειας. Εδώ ο όρος ολική ενέργεια δεν περιλαμβάνει τη δυναμική ενέργεια.

Παρατηρούμε ότι το μέγεθος Mc^2 (όπου M είναι η μάζα ηρεμίας) είναι το ίδιο σε όλα τα συστήματα αναφοράς, δηλαδή είναι *αναλλοίωτο*. Από τη σχέση $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, με πολλαπλασιασμό κάθε όρου επί M^2c^4, έχουμε

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 . \tag{9.12}$$

Έχουμε έτσι και τη σχέση

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 \tag{9.13}$$

που συνδέει την ολική ενέργεια ενός σώματος με τη μάζα ηρεμίας του και την ορμή του.

Για σωματίδια μηδενικής μάζας ηρεμίας, προκύπτει ότι είναι

$$E = pc .$$

9.3 Η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας

Από τη σχέση (9.8), $E = Mc^2\gamma$, βλέπουμε ότι μια μεταβολή στη μάζα ενός σώματος ίση με ΔM ισοδυναμεί σε μεταβολή της ολικής του ενέργειας ίση με

$$\Delta E = \Delta M\ c^2 \tag{9.14}$$

Αυτή η *ισοδυναμία μάζας-ενέργειας* επαληθεύεται πειραματικώς σε φαινόμενα όπως η εξαΰλωση ύλης-αντιύλης ($\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \to 2\gamma$), η δίδυμη γένεση ηλεκτρονίου ποζιτρονίου από φωτόνιο ($\gamma \to \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+$), η πυρηνική σχάση και η πυρηνική σύντηξη.

9.4 Η διατήρηση της ορμής και της ενέργειας

Η αρχή της διατήρησης της ορμής, την οποία φροντίσαμε να περισώσουμε ορίζοντας διαφορετικά την ορμή ενός σώματος στη σχετικότητα, έχει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{p}}_i = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{9.15}$$

με τον σχετικιστικό ορισμό της Εξ. (9.1) για την ορμή.

Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{9.16}$$

με τον σχετικιστικό ορισμό της Εξ. (9.8) για την ολική ενέργεια. Είναι ίσως ορθότερο να μιλάμε για διατήρηση της μάζας - ενέργειας.

9.5 Ο μετασχηματισμός ορμής και ενέργειας

Ο μετασχηματισμός Lorentz για την ορμή και την ενέργεια ενός σώματος είναι:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right), \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z, \qquad E' = \gamma\left(E - c\beta\, p_x\right). \tag{9.17}$$

Τα μεγέθη p_x, p_y, p_z και E/c^2 μετασχηματίζονται όπως τα μεγέθη x, y, z και t αντίστοιχα.

Προβλήματα

9.1 Φωτόνιο ενέργειας E_γ συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, που έχει μάζα ηρεμίας m_0. Μετά τη σκέδαση, το φωτόνιο κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από την αρχική. Να βρεθούν:
(α) Το κλάσμα της ενέργειας E_γ που δόθηκε στο ηλεκτρόνιο σαν κινητική ενέργεια.
(β) Η μεταβολή του μήκους κύματος του φωτονίου κατά τη σκέδαση (φαινόμενο Compton).

9.2 Ένα σωματίδιο K^0 έχει μάζα ηρεμίας ισοδύναμη με $m_K\, c^2 = 498$ MeV και διασπάται σε δύο μεσόνια, π^+ και π^-, που έχουν ίσες μάζες ηρεμίας, m_π. Στο σύστημα ηρεμίας του K^0 τα μεσόνια κινούνται με ταχύτητα $0{,}83c$ το καθένα.
(α) Να βρεθεί ο λόγος των μαζών ηρεμίας m_π / m_K. Απ.: $m_\pi / m_K = 0{,}28$
(β) Έστω ότι στο σύστημα του εργαστηρίου το K^0 κινείται με ταχύτητα $0{,}83c$ και τα δύο μεσόνια κινούνται πάνω στην αρχική ευθεία κίνησης του K^0. Να βρεθούν οι κινητικές ενέργειες των μεσονίων στο σύστημα του εργαστηρίου. Απ.: 0 και 616 MeV

9.3 Σωματίδιο π, που ηρεμεί στο σύστημα του εργαστηρίου, διασπάται σε $\pi \to \mu + \nu$. Να δειχθεί ότι η ολική ενέργεια του μ είναι $E_\mu = \dfrac{c^2}{2\,m_\pi}\left(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2\right)$, όπου m_π, m_μ και m_ν είναι οι μάζες ηρεμίας των τριών σωματιδίων. Ποια είναι η ολική ενέργεια του ν; Ποια μορφή παίρνουν τα αποτελέσματα αυτά αν το νετρίνο ν έχει $m_\nu = 0$;

9.4 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 $\left(m_1\, c^2 = 1\,\text{GeV}\right)$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}8\,c$ και συγκρούεται με ένα άλλο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2 $\left(m_2\, c^2 = 10\,\text{GeV}\right)$ που είναι ακίνητο. Μετά την κρούση, τα δύο σωματίδια σχηματίζουν ένα σώμα με μάζα ηρεμίας M. Να βρεθούν:
(α) Η ολική ενέργεια του συστήματος, σε GeV. (β) Η ολική ορμή του συστήματος, σε GeV/c.
(γ) Η μάζα M, σε GeV/c^2. Απ.: (α) 11,67 GeV, (β) 4/3 GeV/c, (γ) 11,59 GeV/c^2

9.5 Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα είναι αδύνατο να συμβούν:

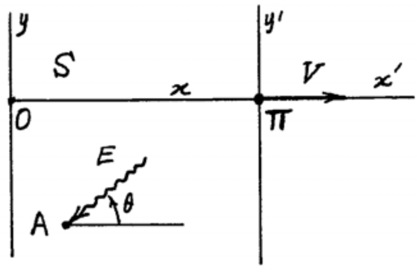
(α) Ένα φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, και του δίνει όλη του την ενέργεια.
(β) Ένα μεμονωμένο φωτόνιο μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.
(γ) Ένα κινούμενο ποζιτρόνιο συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, και τα δύο εξαϋλώνονται παράγοντας ένα μόνο φωτόνιο. (Το ποζιτρόνιο είναι το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου.)

9.6 (*Διάμηκες και εγκάρσιο φαινόμενο Doppler*). Πηγή φωτός Π κινείται με σταθερή ταχύτητα V κατά μήκος του άξονα των x στο σύστημα αναφοράς S. Η πηγή εκπέμπει, προς όλες τις κατευθύνσεις, φωτόνια τα οποία έχουν ενέργεια E_0 στο σύστημα αναφοράς S΄ της πηγής (και επομένως συχνότητα $\nu_0 = E_0 / h$, και ορμή $p_0 = E_0 / c$, στο ίδιο σύστημα). Στο επίπεδο xy βρίσκεται παρατηρητής A, ακίνητος στο σύστημα S. Ο παρατηρητής βλέπει σε μια χρονική στιγμή φωτόνια από την πηγή να κινούνται προς αυτόν, πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x, και τα οποία έχουν ενέργεια E $(\nu = E/h,\ p = E/c)$ στο σύστημα S.

(α) Να βρεθούν, στο S, οι συνιστώσες της ορμής των φωτονίων συναρτήσει των E και θ.

Απ.: $p_x = -\dfrac{E}{c}\cos\theta,\quad p_y = -\dfrac{E}{c}\sin\theta,\quad p_z = 0$

(β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ορμής και ενέργειας, δείξετε ότι ο λόγος των συχνοτήτων στα δύο συστήματα είναι ίσος με:



$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\ \cos\theta} \qquad \left(\beta = \frac{V}{c}\right)$$

(γ) Συζητήστε σε συντομία τις ειδικές περιπτώσεις για θ=0, 90°, 180°.

(δ) Για ποια τιμή του θ είναι $\nu = \nu_0$;
Πώς εξηγείται αυτό;