8. Ο μετασχηματισμός του Lorentz

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 10, 11.

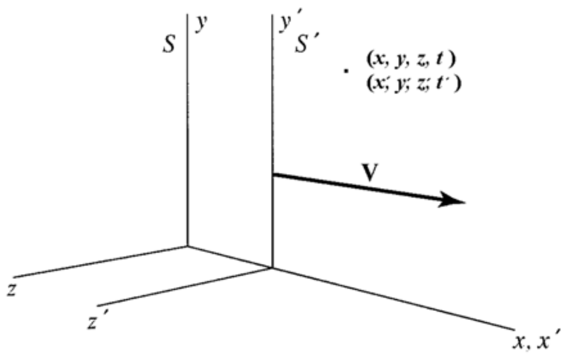
8.1 Οι βασικές παραδοχές του Άινστάιν για την ειδική θεωρία της σχετικότητας

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας βασίζεται στις εξής δύο παραδοχές:

1. Ο χώρος είναι ισότροπος και ομοιόμορφος. Οι θεμελιώδεις νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι για δύο οποιουσδήποτε παρατηρητές που βρίσκονται σε ομοιόμορφη σχετική κίνηση.
2. Η ταχύτητα της διάδοσης του φωτός στο κενό είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της πηγής ή του δέκτη.

8.2 Ο μετασχηματισμός του Lorentz

Η απαίτηση η ταχύτητα του φωτός στο κενό να είναι η ίδια σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς οδηγεί στον μετασχηματισμό του Lorentz.



Έστω δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, S και S', των οποίων οι (καρτεσιανοί) άξονες συντεταγμένων, x, y, z και x', y', z', συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$. Το σύστημα S' κινείται ως προς το σύστημα S με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}} = V\hat{\mathbf{x}}$.

Αν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ εκπεμφθεί από το σημείο στο οποίο βρίσκονται οι αρχές των αξόνων των δύο συστημάτων αναφοράς ένας φωτεινός παλμός, οι εξισώσεις του μετώπου κύματος στο κενό στα δύο συστήματα, σε κατοπινές στιγμές, θα είναι

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad \text{και} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{8.1}$$

όπου πρέπει να προσεχθεί η χρήση της ίδιας τιμής c για την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Για να είναι συμβατές οι δύο Εξ. (8.1), και υποθέτοντας γραμμικούς μετασχηματισμούς

$$x' = \alpha x + \varepsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t \tag{8.2}$$

μεταξύ των συντεταγμένων στα δύο συστήματα, καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right), \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \tag{8.3}$$

όπου

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \qquad \text{και} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{8.4}$$

Αντιστρόφως,

$$x = \gamma\left(x' + Vt\right), \quad y = y'\,, \quad z = z'\,, \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \tag{8.5}$$

Αυτός είναι ο *μετασχηματισμός του Lorentz*. Συνδέει τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ενός συμβάντος στο σύστημα S, με τις συντεταγμένες (x', y', z', t') του ιδίου συμβάντος στο σύστημα S'.

8.3 Η συστολή του μήκους

Έστω ότι μια ράβδος βρίσκεται ακίνητη, παράλληλη προς τον άξονα των *x*, στο σύστημα αναφοράς S, στο οποίο το μήκος της μετράται ίσο με L_0. Στο σύστημα S', το οποίο κινείται ως με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S, το μήκος της ράβδου βρίσκεται ίσο με

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{8.6}$$

Η ράβδος, η οποία στο σύστημα S' κινείται με ταχύτητα *V* στην κατεύθυνση του μήκους της, έχει μήκος μικρότερο κατά ένα παράγοντα $1/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$.

Το μεγαλύτερο μήκος για τη ράβδο είναι το *μήκος ηρεμίας* της, L_0, και μερτάται στο σύστημα αναφοράς στο οποίο η ράβδος είναι ακίνητη. Σε όλα τα άλλα συστήματα αναφοράς, η μέτρηση του μήκους της ράβδου δίνει μικρότερο αποτέλεσμα.

8.4 Η διαστολή του χρόνου

Έστω ότι ένα ρολόι που βρίσκεται ακίνητο στο σύστημα αναφοράς S μετρά ένα χρονικό διάστημα $\tau = t_2 - t_1$ ανάμεσα σε δύο γεγονότα που συμβαίνουν στο ίδιο σταθερό σημείο του συστήματος S. Στο σύστημα S', το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S, το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα ίδια γεγονότα το μήκος της ράβδου βρίσκεται ίσο με

$$\Delta t = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{8.7}$$

Ένα ρολόι που κινείται με ταχύτητα *V*, φαίνεται να προχωρά πιο αργά από ένα πανομοιότυπο ρολόι που είναι ακίνητο, κατά ένα παράγοντα $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Το μικρότερο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων, ο *χρόνος ηρεμίας*, μετράται από ένα ρολόι στο σύστημα αναφοράς του οποίου τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο. Σε όλα τα άλλα συστήματα αναφοράς, η μέτρηση του χρονικού διαστήματος μεταξύ των γεγονότων θα δώσει μεγαλύτερη τιμή.

Προβλήματα

8.1 Δείξετε ότι, για ένα συμβάν, η ποσότητα $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ είναι αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό Lorentz (έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, με την προϋπόθεση ότι οι άξονές τους συμπίπτουν για $t = t' = 0$).

8.2 Οι συντεταγμένες δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς S είναι οι εξής:

Γεγονός 1: $x_1 = x_0,\ t_1 = x_0/c\ \ (y_1 = 0,\ z_1 = 0)$.

Γεγονός 2: $x_2 = 2x_0,\ t_2 = x_0/2c\ \ (y_2 = 0,\ z_2 = 0)$.

(α) Υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς S΄, στο οποίο τα δύο αυτά γεγονότα συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή. Βρείτε την ταχύτητα του συστήματος αυτού ως προς το S. Υποθέτουμε ότι οι άξονες των συστημάτων S και S΄ συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$.

Απ.: $V = -c/2$

(β) Σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνουν τα δύο αυτά γεγονότα στο σύστημα S΄;

Απ.: $t_1' = t_2' = \sqrt{3}\,t_1$

8.3 Ο μέσος χρόνος ζωής των σωματιδίων μ στο δικό τους σύστημα αναφοράς είναι ίσος με $\tau = 2\times 10^{-6}$ s. Μια δέσμη σωματιδίων μ παράγεται σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα. Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}99\, c$.

(α) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο παράγονται τα σωματίδια, αν ένα ποσοστό 1 % αυτών επιζούν και
φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.
[Στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων, ο αριθμός των επιζώντων σωματιδίων στη χρονική στιγμή t είναι $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, όπου N_0 είναι ο αριθμός των σωματιδίων όταν $t = 0$ και τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής των σωματιδίων στο σύστημα αυτό.] Απ.: 19 km

(β) Πόσο είναι το μήκος αυτής της διαδρομής, όπως το βλέπουν τα σωματίδια; Απ.: 2,7 km

8.4 Ένα ρολόι ταξιδεύει με την ταχύτητα του ήχου (332 m/s) μια φορά γύρω από τη Γη. Σύμφωνα με την *ειδική* θεωρία της σχετικότητας, κατά πόσο θα υστερεί ως προς ένα ρολόι που έμεινε ακίνητο στη Γη; Η ακτίνα της Γης είναι 6370 km. Απ.: 74 ns

---

8.5 Ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων

Έστω ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y, z, t) στο σύστημα S, το οποίο κινείται με συνιστώσες ταχύτητας

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt},$$

στο σύστημα S. Στο σύστημα S', το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S, οι συνιστώσες της ταχύτητας του ίδιου σημείου βρίσκονται, με παραγώγιση των εξισώσεων (8.3) ως προς t', να είναι ίσες με

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}. \tag{8.8}$$

Συνδυαζόμενες, αυτές οι εξισώσεις δίνουν τη σχέση ανάμεσα στα μέτρα υ και υ' της ολικής ταχύτητας του σημείου στα δύο συστήματα αναφοράς S και S', αντιστοίχως, ως

$$\upsilon' = c\sqrt{1 - \frac{\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{V\upsilon_x}{c^2}\right)^2}}\,. \tag{8.9}$$

Επειδή για $V < c$ και $\upsilon < c$ το κλάσμα έχει θετική τιμή, προκύπτει ότι $\upsilon' < c$. Δηλαδή, αν ένα σώμα έχει ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, έχει ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Για το φωτόνιο, για το οποίο είναι $\upsilon = c$, θα είναι $\upsilon' = c$ σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς. Αυτή εξάλλου ήταν και η συνθήκη για την εξαγωγή του μετασχηματισμού του Lorentz. Για όλα τα κινούμενα σώματα προκύπτει επομένως ότι είναι

$$\beta \equiv \frac{V}{c} < 1 \qquad \text{και} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1. \tag{8.10}$$

Προβλήματα

8.5 Ένα διαστημόπλοιο, Α, αναχωρεί από τη Γη και κατευθύνεται προς το άστρο α του Κενταύρου, με σταθερή ταχύτητα. Η απόσταση του άστρου από τη Γη είναι 4 έτη φωτός.

(1 έτος φωτός = η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος = $1\,\ell.\mathrm{y.} = 9{,}45\times10^{15}$ m).

(α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, ώστε για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο το ταξίδι αυτό να διαρκέσει 4 έτη;

Απ.: $\beta = \sqrt{2}/2, \quad \gamma = \sqrt{2}$

(β) Πόσο διαρκεί το ταξίδι για έναν παρατηρητή στη Γη; Απ.: 5,7 έτη

(γ) Υποθέτουμε ότι ένα δεύτερο διαστημόπλοιο Β επιστρέφει από τον α του Κενταύρου με ταχύτητα $c/\sqrt{2}$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Απ.: $-(2\sqrt{2}/3)c$

(δ) Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $\ell_0 = 48$ m, ποιο είναι το μήκος του όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Απ.: 16 m

8.6 Τρεις γαλαξίες, Α, Β και Γ, βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Ως προς τον Α, που βρίσκεται ανάμεσα στους Β και Γ, αυτοί κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσες με $0{,}7c$. Η ταχύτητα με την οποία οι Β και Γ απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, όπως την μετρά ο Α, είναι επομένως $1{,}4c$. Πόση είναι η ταχύτητα αυτή όπως την μετρούν οι Β και Γ;

Απ.: 0,94 c

8.7 Το σύστημα αναφοράς S΄ κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S. Στο S΄, ένα φωτόνιο έχει συνιστώσες ταχύτητας $\upsilon_x = c\cos\theta$ και $\upsilon_y = c\sin\theta$. Βρείτε τις τιμές των συνιστωσών στο σύστημα S και δείξετε ότι η ταχύτητα του φωτονίου στο S είναι ίση με c.

8.6 Το φαινόμενο Doppler

Έστω ότι μια πηγή φωτός (ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γενικότερα) απομακρύνεται από ένα παρατηρητή με ταχύτητα $V = \beta c$. Αν η πηγή εκπέμπει φως συχνότητας ν, το φως που φθάνει στον παρατηρητή θα έχει συχνότητα

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \; . \tag{8.11}$$

Αυτό είναι το *διάμηκες φαινόμενο Doppler*.

Αν η ταχύτητα της κινουμένης πηγής είναι κάθετη στην ευθεία που την ενώνει με τον παρατηρητή, το φως που φθάνει στον παρατηρητή θα έχει συχνότητα

$$\nu' = \nu\sqrt{1-\beta^2} \; . \tag{8.12}$$

Αυτό είναι το *εγκάρσιο φαινόμενο Doppler*.