

6. Αρμονικός ταλαντωτής

Βιβλιογραφία

- C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 7.
- F. S. Crawford Jr., *Κυματική*. Σειρά Μαθημάτων Φυσικής Berkeley, Τόμος 3. Αθήνα 1979. Κεφ. 1.
- H. J. Pain., *Φυσική των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1990. Κεφ. 1, 2.
- M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 4.
- K. R. Symon, *Mechanics*. Addison - Wesley Publishing Company, 1974. Κεφ. 2.
- {Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M11* Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις}

Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ένα σημαντικό παράδειγμα περιοδικής κίνησης ή μεταβολής γιατί χρησιμεύει ως ακριβές ή κατά προσέγγιση πρότυπο σε πολλά προβλήματα. Όπως θα δούμε, ο αρμονικός ταλαντωτής μπορεί να περιγράψει τη συμπεριφορά ενός συστήματος που έχει μετατοπιστεί ελαφρώς από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας του.

6.1 Μάζα δεμένη σε ελατήριο

Για ένα ιδανικό ελατήριο (που ακολουθεί το νόμο του Hooke) η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της μεταβολής του μήκους του ως προς το μήκος ηρεμίας του ελατηρίου. Μια σημειακή μάζα M στερεωμένη στο ελεύθερο άκρο ενός τέτοιου ελατηρίου, υποθέτοντας ότι η μάζα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή, κατά μήκος του άξονα x , υφίσταται τη δύναμη επαναφοράς:

$$\vec{F} = -Cx\hat{x} \quad (6.1)$$

όπου το x παριστάνει την μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας $x = 0$, η οποία αντιστοιχεί στο μήκος ηρεμίας ή φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \quad \text{ή} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{C}{M}x. \quad (6.2)$$

Πρόκειται για μια εξίσωση της μορφής:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}, \quad (6.3)$$

γνωστή ως η εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή. (Για τη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης βλ. *Μαθηματικό Συμπλήρωμα M11*.) Η γενική λύση είναι της μορφής:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (6.4)$$

και περιγράφει μια απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας $x = 0$.

Η $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}$ είναι η γωνιακή ή κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης. Η συχνότητα f_0 και η περίοδος T της κίνησης δίνονται από τις σχέσεις:

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{M}}, \quad T = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{C}} \quad (6.5)$$

Τα μεγέθη A και ϕ ονομάζονται πλάτος και σταθερά φάσης της κίνησης.

Από τις αρχικές συνθήκες: για $t=0$, $x=x_0=A\sin\phi$ (αρχική μετατόπιση) και $dx/dt=v_0=\omega_0 A\cos\phi$ (αρχική ταχύτητα) μπορούν να προσδιοριστούν τα A και ϕ ,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{και} \quad \phi = \arcsin \frac{x_0}{A}. \quad (6.6)$$

Για τη λύση του προβλήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι διατηρητική δύναμη [της μορφής $\vec{F} = f(r)\hat{r}$]:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Cx^2 = E \quad (6.7)$$

Παίρνοντας τη μετατόπιση ίση με το πλάτος (μέγιστη) όταν η ταχύτητα μηδενίζεται $\left(\frac{dx}{dt}=0\right)$,

$$\text{τότε} \quad E = \frac{1}{2}CA^2 \quad (6.8)$$

$$\text{και} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{C}{M}}\sqrt{A^2 - x^2}. \quad (6.9)$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{C}{M}}t + \phi\right) \quad (6.10)$$

που είναι ίδια με την λύση που μας έδωσε η πρώτη μέθοδος ανάλυσης του προβλήματος.

Η σημασία του αρνητικού προσήμου στην εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή

Αν η δύναμη του προβλήματος δεν είναι μια δύναμη επαναφοράς αλλά μια απωστική δύναμη, τότε, αντί της μορφής που δίνει η Εξ. (6.1), η έκφραση για τη δύναμη θα είναι $\vec{F} = Cx\hat{x}$ και η εξίσωση κίνησης θα είναι τελικά

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x, \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δεν είναι της μορφής της Εξ. (6.4), αλλά γενικά ένα άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων του χρόνου. Για το λόγο αυτό η μετατόπιση δεν παριστάνει κίνηση αρμονικής ταλάντωσης αλλά μια συνεχώς αυξανόμενη με τον χρόνο απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας.

6.2 Απλό εκκρεμές

Το απλό (ή μαθηματικό) εκκρεμές αποτελείται από μια σημειακή μάζα M , η οποία είναι αναρτημένη μέσω μιας ράβδου αμελητέας μάζας ή ενός νήματος μήκους L από σταθερό σημείο P . Θεωρώντας ότι η μάζα μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα, χωρίς τριβές σε ένα κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το σημείο P , γύρω από την κατακόρυφο που περνάει από το σημείο P , μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση του εκκρεμούς με διαφορετικούς και ισοδύναμους τρόπους.

(α) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης

Αν $s = L\theta$ είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει τη μάζα, μετρώντας το από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας και θ η αντίστοιχη γωνιακή απόκλισή της από την κατακόρυφο, τότε για την ταχύτητα και την επιτάχυνση της μάζας ισχύει:

$$v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2} = L\ddot{\theta} \quad (6.11)$$

Η δύναμη η οποία υπεισέρχεται στην εξίσωση κίνησης είναι η εφαπτομενική στην τροχιά συνιστώσα του βάρους της μάζας, οπότε:

$$ML \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg \sin \theta . \quad (6.12)$$

Αν περιοριστούμε σε μικρές γωνιακές αποκλίσεις από την κατακόρυφο, μπορούμε να πάρουμε $\sin \theta \approx \theta$ οπότε η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta . \quad (6.13)$$

Πρόκειται για την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή και η λύση της θα έχει τη μορφή:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (6.14)$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{και} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (6.15)$$

η γωνιακή συχνότητα και η συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του εκκρεμούς. Το πλάτος (η μέγιστη τιμή) της γωνιακής απόκλισης θ είναι θ_0 .

Η προσέγγιση των μικρών ταλαντώσεων που μας οδήγησε στην εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης καθορίζει μέσα σε ποια όρια μέγιστης εκτροπής (πλάτους) ισχύει η περιγραφή αυτή (βλ. αντίστοιχους πίνακες, *Μηχανική*, Κεφ.7).

(β) Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας

Όταν η ράβδος αποκλίνει κατά γωνία θ , η μάζα M ανυψώνεται σε ύψος

$$h = L - L \cos \theta . \quad (6.16)$$

Η δυναμική ενέργεια της μάζας στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης είναι

$$U(h) = Mgh = MgL(1 - \cos \theta) \quad (6.17)$$

με $U(h=0) = 0$ (δηλαδή όταν το εκκρεμές βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση).

Η κινητική ενέργεια του εκκρεμούς είναι

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \quad (6.18)$$

Οπότε η ολική ενέργεια θα είναι

$$E = KE + \Delta E = K + U = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos \theta) \quad (6.19)$$

και $E = \text{σταθ.}$

Για μικρές αποκλίσεις, δηλ. για $\theta \ll 1 \text{ rad}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (6.20)$$

οπότε για την ενέργεια θα έχουμε

$$E = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M g L \theta^2 . \quad (6.21)$$

Θεωρώντας ότι η μέγιστη απόκλιση ($\pm \theta_0$) αντιστοιχεί στις θέσεις μηδενισμού της ταχύτητας ($\dot{\theta} = 0$), οπότε

$$E = \frac{1}{2} M g L \theta_0^2 , \quad \theta_0^2 = \frac{2E}{M g L} \quad (6.22)$$

βρίσκουμε:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \quad (6.23)$$

ή

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} dt \quad (6.24)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι τελικά της μορφής: $\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$.

Η φυσική σημασία της ω_0 .

Όπως ορίστηκε η γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης, ισχύει:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{M} = \frac{Cx}{Mx} \quad \text{ή} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} = \frac{Mg\theta}{ML\theta} = \frac{Mg\theta}{Ms} \quad (6.25)$$

Ο τελευταίος όρος εκφράζει τη δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα μάζας και ανά μονάδα μετατόπισης. Δηλαδή, το τετράγωνο της γωνιακής συχνότητας εκφράζει τη συμπεριφορά του ταλαντούμενου συστήματος όταν αυτό απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του.

(γ) Χρησιμοποιώντας τη στροφορμή και την εξίσωση για την περιστροφική κίνηση περί σταθερό άξονα

Μια τρίτη μέθοδος προκύπτει, αν θεωρήσουμε την κίνηση του εκκρεμούς ως περιστροφική κίνηση του συστήματος μάζα - ράβδος περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο στήριξης P και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης. Τότε για τις προβολές πάνω στον άξονα περιστροφής των διανυσμάτων της στροφορμής και της ροπής (ως προς το σημείο P), αν επιλέξουμε τον άξονα x να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής, ισχύει η βασική εξίσωση:

$$\frac{dL_x}{dt} = N_x \quad (6.26)$$

Στο πρόβλημα αυτό είναι:

$$L_x = ML^2\dot{\theta} \quad (6.27)$$

και

$$N_x = -LMg \sin \theta . \quad (6.28)$$

Οπότε, εξισώνοντας το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής με τη ροπή, προκύπτει:

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg \sin \theta \quad (6.29)$$

ή

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (6.30)$$

η οποία, για $\theta \ll 1$, καταλήγει, όπως και με τις άλλες δύο μεθόδους, στην εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 . \quad (6.31)$$

Παράδειγμα 1

Κύκλωμα LC.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής της απλής αρμονικής ταλάντωσης προσφέρει το ηλεκτρικό κύκλωμα ενός πυκνωτή και μιας αυτεπαγωγής σε σειρά.

Η τάση στους ακροδέκτες του πυκνωτή με χωρητικότητα C και φορτίο Q είναι $V_C = \frac{Q}{C}$.

Η ένταση του ρεύματος είναι $I = \frac{dQ}{dt}$, άρα $Q = \int I dt$.

Η τάση στα άκρα της αυτεπαγωγής L είναι $V_L = L \frac{dI}{dt}$.

Επειδή το άθροισμα των τάσεων κατά μήκος του κυκλώματος είναι ίσο με μηδέν, βρίσκουμε

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{ή} \quad L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Η τελευταία είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης και έχει λύση την

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Το ρεύμα dQ/dt είναι:

$$I = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = I_0 \cos(\omega_0 t + \phi).$$

Παράδειγμα 2

Το φυσικό εκκρεμές. Στερεό σώμα μάζας M μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο O . Να ευρεθεί η εξίσωση κίνησης του στερεού, να αποδειχτεί ότι για μικρές γωνιακές αποκλίσεις από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί η συχνότητα αυτής της ταλάντωσης.

Αν C είναι το κέντρο μάζας του στερεού, τότε η ευθεία OC στη θέση ισορροπίας συμπίπτει με την κατακόρυφο. Όπως φαίνεται στο σχήμα η γωνία θ παριστάνει τη γωνιακή εκτροπή από την κατακόρυφο. Αν ο άξονας περιστροφής (κάθετος στο επίπεδο του σχήματος) συμπίπτει με τον άξονα z , τότε για το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας θα ισχύει $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Η θεμελιώδης εξίσωση για την περιστροφική κίνηση του στερεού είναι:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{N}_O$$

όπου \mathbf{L}_O είναι η στροφορμή του στερεού και \mathbf{N}_O η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο O . Για τις προβολές των διανυσμάτων της στροφορμής και της ροπής των εξωτερικών δυνάμεων πάνω στον άξονα περιστροφής η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dL_O}{dt} = N_O.$$

Είναι $L_O = I_O \omega$, όπου I_O είναι η ροπή αδράνειας του στερεού περί τον άξονα περιστροφής που περνά από το O . Για τη γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης ισχύει $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.

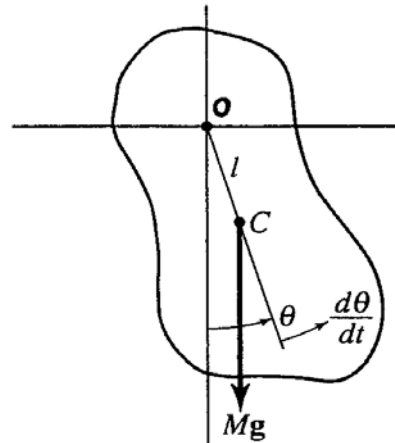
Στο πρόβλημα, η δύναμη της βαρύτητας, η οποία θεωρούμε ότι εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας του στερεού C , έχει ροπή ως προς το σημείο O : $N_O = -Mgl \sin \theta$. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η ροπή της δύναμης της βαρύτητας αντιτίθεται στην αύξηση της γωνιακής απόκλισης θ .

Τελικά η εξίσωση κίνησης του στερεού έχει τη μορφή:

$$I_O \frac{d\omega}{dt} = -Mgl \sin \theta \quad \text{ή} \quad I_O \ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta \quad \text{ή} \quad \ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{I_O} \sin \theta.$$

Αν περιοριστούμε σε μικρές γωνίες θ για τις οποίες ισχύει $\sin \theta \approx \theta$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{Mgl}{I_O}\right)\theta.$$



Η εξίσωση αυτή παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας, με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_0^2 = \frac{Mgl}{I_0}.$$

Παράδειγμα 3

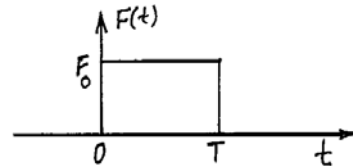
Απλός αρμονικός ταλαντωτής αποτελούμενος από μάζα m και ελατήριο σταθεράς C , είναι αρχικά ακίνητος στη θέση ισορροπίας του. Μια σταθερή δύναμη F_0 ασκείται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t=0$ και $t=T$. Να βρεθεί η κίνηση του ταλαντωτή.

Η λύση του προβλήματος πρέπει να γίνει σε δύο βήματα:

(α) Για $0 \leq t \leq T$ κατά την οποία ασκείται δύναμη F_0 , και

(β) Για $t \geq T$ κατά την οποία ασκείται μηδενική δύναμη.

(α) $0 \leq t \leq T$



Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}$$

όπου $\omega_0^2 = \frac{C}{m}$ η γωνιακή συχνότητα του ταλαντωτή (ιδιοσυχνότητα).

Αν ορίσουμε τη νέα μεταβλητή

$$y = x - \frac{F_0}{m\omega_0^2} = x - \frac{F_0}{C},$$

τότε

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

η οποία είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης με μεταβλητή την $y(t)$ και την ίδια γωνιακή συχνότητα με τον ταλαντωτή του προβλήματος.

Μια κατάλληλη μορφή της λύσης για την εξίσωση αυτή είναι (βλ. *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ11*):

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Για τη μετατόπιση του ταλαντωτή $x(t)$ θα ισχύει τότε:

$$x(t) = \frac{F_0}{C} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Η ταχύτητα $v(t) = \dot{x}(t)$ είναι:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t.$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι για $t=0$:

$$x(0) = \frac{F_0}{C} + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{F_0}{C}$$

και

$$\dot{x}(0) = \omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Οπότε τελικά προκύπτει:

$$x(t) = \frac{F_0}{C} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq T.$$

(β) $t \geq T$

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι τώρα:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0$$

Η λύση θα έχει τη μορφή:

$$x(t) = D \cos \omega_0 t + E \sin \omega_0 t .$$

Για τις αρχικές συνθήκες τώρα, από τη λύση στην περίπτωση (α), για $t = T$ παίρνουμε:

$$x(T) = \frac{F_0}{C} (1 - \cos \omega_0 T) \quad \text{και} \quad v(T) = \dot{x}(T) = \omega_0 \frac{F_0}{C} \sin \omega_0 T .$$

Από τη λύση για την περίπτωση (β) ($t \geq T$) θα ισχύει:

$$x(T) = D \cos \omega_0 T + E \sin \omega_0 T \quad \text{και} \quad v(T) = \dot{x}(T) = -\omega_0 D \sin \omega_0 T + \omega_0 E \cos \omega_0 T .$$

Εξισώνοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις προκύπτει:

$$D \cos \omega_0 T + E \sin \omega_0 T = \frac{F_0}{C} (1 - \cos \omega_0 T)$$

και

$$-D \sin \omega_0 T + E \cos \omega_0 T = \frac{F_0}{C} \sin \omega_0 T .$$

Τελικά είναι:

$$D = \frac{F_0}{C} (\cos \omega_0 T - 1) \quad \text{και} \quad E = \frac{F_0}{C} \sin \omega_0 T .$$

Επομένως για $t \geq T$ η μετατόπιση θα είναι:

$$x(t) = \frac{F_0}{C} [(\cos \omega_0 T - 1) \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 T \sin \omega_0 t] = \frac{F_0}{C} \{ \cos[\omega_0(t - T)] - \cos \omega_0 t \}$$

ή

$$x(t) = 2 \frac{F_0}{C} \sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right) \sin\left[\omega_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] \quad \text{για} \quad t \geq T .$$

Η μετατόπιση για $t \geq T$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t - \phi) .$$

Η συνάρτηση αυτή παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω_0 , με πλάτος

$$a = 2 \frac{F_0}{C} \sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$

και με σταθερά φάσης

$$\phi = \frac{\omega_0 T}{2} .$$

6.3 Κίνηση συστημάτων που μετατοπίστηκαν από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας

Έστω ότι $U(a)$ είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος, όπου η συντεταγμένη a εκφράζει την απόκλιση από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας. Το a μπορεί να είναι μια απόσταση, μια γωνία ή κάποια περισσότερο σύνθετη μορφή συντεταγμένης. Η συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας απαιτεί για $a=0$ ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας και μηδενισμό της δύναμης (αν το a είναι απόσταση), ή ροπή (αν το a είναι γωνία) κ.λ.π.

Δηλαδή:

$$F(a=0) = -\left(\frac{dU}{da}\right)_{a=0} = 0. \quad (6.32)$$

Αναπτύσσοντας την $U(a)$ σε σειρά Maclaurin, έχουμε

$$U(a) = U_0 + \left(\frac{dU}{da}\right)_0 a + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_0 a^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3U}{da^3}\right)_0 a^3 \dots \quad (6.33)$$

όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται στη θέση $a=0$. Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις και αμελώντας τους όρους με δυνάμεις του a μεγαλύτερες του 2, για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας, βρίσκουμε

$$U(a) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_0 a^2 \quad (6.34)$$

και

$$F(a) = -\frac{dU}{da} = -\left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_0 a. \quad (6.35)$$

Επειδή η συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας είναι

$$\frac{d^2U}{da^2} > 0, \quad (6.36)$$

βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή:

$$M \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_0 a \Rightarrow \frac{d^2a}{dt^2} + \omega_0^2 a = 0 \quad (6.37)$$

με

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_0}. \quad (6.38)$$

Είναι δυνατόν, άρα, να χρησιμοποιήσουμε την απλή αρμονική ταλάντωση ως πρότυπη κίνηση για να περιγράψουμε γενικά τη συμπεριφορά ενός συστήματος όταν εκτρέπεται ελαφρώς από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας.

6.4 Μέση κινητική και μέση δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή

Η χρονική μέση τιμή ενός μεγέθους $K(t)$, στο χρονικό διάστημα $t=0$ ως $t=T$ ορίζεται:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt. \quad (6.39)$$

Για την περιοδικά επαναλαμβανόμενη κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή η χρονική μέση τιμή για μια περίοδο θα είναι ίδια με τη μέση τιμή για πολλές περιόδους. Με μετατόπιση $x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ και περίοδο $T = 2\pi / \omega_0$, η μέση τιμή της κινητικής του ενέργειας ως προς τον χρόνο είναι

$$\langle K \rangle = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} M \dot{x}^2 dt}{T} = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \phi) dt}{2\pi/\omega_0} \quad (6.40)$$

και μετά την ολοκλήρωση (βλ. *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ6*):

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2. \quad (6.41)$$

Η δυναμική ενέργεια (με $\phi = 0$) είναι:

$$U = \frac{1}{2} C x^2 = \frac{1}{2} C A^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (6.42)$$

Επειδή $\omega_0^2 = C/M$, προκύπτει:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} C A^2 = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \quad (6.43)$$

Δηλαδή, για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι

$$\langle U \rangle = \langle K \rangle. \quad (6.44)$$

Η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή θα είναι:

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2. \quad (6.45)$$

Η ολική ενέργεια, όπως αναμένεται, είναι σταθερή, δηλαδή ισχύει:

$$E = \langle E \rangle. \quad (6.46)$$

6.5 Τριβή

Για να λάβουμε υπόψη την παρουσία τριβής κατά την κίνηση του ταλαντωτή, μια προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τη δράση μιας δύναμης τριβής η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας του ταλαντωτή. Αν υποθέσουμε ότι μια τέτοια δύναμη τριβής είναι η μόνη δύναμη του προβλήματος, τότε

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\tau} = -b \frac{dx}{dt} = -b \dot{x} \quad (6.47)$$

όπου b είναι μια θετική σταθερά που ονομάζεται *συντελεστής απόσβεσης*. Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι η τριβή είναι δύναμη με κατεύθυνση πάντοτε αντίθετη προς την ταχύτητα. Ορίζοντας τον *χρόνο αποκατάστασης* τ , ως

$$\tau = \frac{M}{b} \quad (6.48)$$

θα έχουμε

$$M \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} \right) = 0. \quad (6.49)$$

Για την ταχύτητα θα ισχύει

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = 0, \quad (6.50)$$

η λύση της οποίας είναι:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad (6.51)$$

όπου v_0 η είναι η ταχύτητα για $t=0$. Έχουμε, δηλαδή, μείωση της ταχύτητας με σταθερά χρόνο τ .

Για την κινητική ενέργεια έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 e^{-2t/\tau} = K_0 e^{-2t/\tau} \quad (6.52)$$

όπου K_0 είναι η κινητική ενέργεια για $t=0$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή βρίσκουμε:

$$\dot{K} = -\frac{2}{\tau} K. \quad (6.53)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις φαίνεται ότι ο χρόνος αποκατάστασης για την κινητική ενέργεια είναι ο μισός εκείνου για την ταχύτητα. Η δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας μπορεί να εκφράσει ικανοποιητικά την τριβή σε συγκεκριμένα πραγματικά προβλήματα (βλ. *Μηχανική*).

6.6 Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

Αν στην κίνηση του ταλαντωτή συμπεριλάβουμε και μια δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας, τότε η εξίσωση κίνησης είναι

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0. \quad (6.54)$$

Έχουμε και τώρα μια γραμμική εξίσωση η οποία μπορεί να γραφεί και με μορφή:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.55)$$

όπου

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M}, \quad \omega_0^2 = \frac{C}{M}. \quad (6.56)$$

(Για τη λύση αυτής της εξίσωσης συμβουλευθείτε το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ11*).

Από τη σχέση των δύο μεγεθών:

- ω_0 , της γωνιακής συχνότητας του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση (ιδιοσυχνότητα του αρμονικού ταλαντωτή) και
- τ , του χρόνου αποκατάστασης, που χαρακτηρίζει την απόσβεση καθορίζεται η μορφή της λύσης και το είδος της κίνησης.

Αν $\omega_0 \leq 1/2\tau$ τότε η κίνηση δεν είναι ταλαντωτική (έχουμε κίνηση με *κρίσιμη απόσβεση* ή *υπεραπόσβεση*)

Αν $\omega_0 > 1/2\tau$ τότε η λύση έχει τη μορφή:

$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin \left\{ \omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0 \tau} \right)^2} + \phi \right\} \quad (6.57)$$

ή
$$x = x_0 e^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi) \quad (6.58)$$

όπου
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0 \tau} \right)^2}. \quad (6.59)$$

Η κίνηση αυτή είναι *αποσβεννόμενη ταλάντωση* με γωνιακή συχνότητα $\omega > \omega_0$.

Αν $\omega_0 \tau \gg 1$, τότε έχουμε λύση της μορφής:

$$x \approx x_0 e^{-t/2\tau} \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (6.60)$$

Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται ως *ταλάντωση με ασθενή απόσβεση* και είναι, κατά προσέγγιση, ταλάντωση με τη γωνιακή συχνότητα του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, ω_0 , και με πλάτος που ελαττώνεται εκθετικά με σταθερά χρόνου 2τ .

6.7 Συντελεστής ποιότητας Q

Ο συντελεστής ποιότητας ή Q ενός ταλαντούμενου συστήματος ορίζεται ως:

$$Q = 2\pi \frac{\text{αποθηκευμένη ενέργεια}}{\text{απώλεια ενέργειας σε μια περίοδο}} = \frac{2\pi E}{P/f} = \frac{E}{P/\omega} \quad (6.61)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί το ότι $2\pi f = \omega$.

Αποτελεί μέτρο της απόσβεσης του ταλαντούμενου συστήματος. Για έναν ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση ($\omega_0\tau \gg 1$), έχουμε

$$Q \approx \frac{E}{E/\omega\tau} \approx \omega_0\tau. \quad (6.62)$$

6.8 Εξαναγκασμένος αρμονικός ταλαντωτής

Αν, εκτός από την τριβή, στον ταλαντωτή ασκείται και μια εξωτερική δύναμη $F(t)$, τότε η εξίσωση κίνησης είναι

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t) \quad (6.63)$$

ή

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M} \quad (6.64)$$

Εδώ ω_0 είναι η γωνιακή ή κυκλική συχνότητα του συστήματος χωρίς απόσβεση και χωρίς τη διεγείρουσα δύναμη. Υποθέτουμε ότι η διεγείρουσα είναι ημιτονική με κυκλική συχνότητα ω , γενικά διαφορετική από την ω_0 :

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \sin \omega t}{M} \equiv a_0 \sin \omega t, \quad a_0 \equiv \frac{F_0}{M}. \quad (6.65)$$

Τότε έχουμε

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin \omega t. \quad (6.66)$$

Για τη λύση αυτής της εξίσωσης συμβουλευθείτε: *Μηχανική Κεφ 7* και το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα M11*.

Σε *μόνιμη κατάσταση* (δηλαδή στην κατάσταση που επικρατεί μετά την εξάλειψη κάθε μεταβατικού φαινομένου) η απόκριση του συστήματος έχει τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης, ονομαζόμενη *διεγείρουσα συχνότητα*.

Θεωρώντας ως απόκριση τη μετατόπιση x , για τη μόνιμη κατάσταση έχουμε ένα *εξαναγκασμένο αρμονικό ταλαντωτή* με απόκριση

$$x = x_0 \sin(\omega t + \phi). \quad (6.67)$$

Το πλάτος της κίνησης είναι

$$x_0 = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}}. \quad (6.68)$$

Η γωνία ϕ εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ της μετατόπισης του ταλαντωτή και της διεγείρουσας δύναμης, και είναι

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.69)$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε πάντα ασθενή απόσβεση ($\omega_0\tau \gg 1$) μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένες οριακές περιπτώσεις:

Χαμηλή διεγείρουσα συχνότητα $\omega \ll \omega_0$.

Τότε, για χαμηλές συχνότητες,

$$\cos \phi \rightarrow 1 \quad \sin \phi \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \phi \rightarrow 0. \quad (6.70)$$

Δηλαδή, η απόκριση είναι σε φάση με τη διεγείρουσα δύναμη και προκύπτει ότι

$$x_0 \rightarrow \frac{a_0}{\omega_0^2} = \frac{Ma_0}{C} = \frac{F_0}{C}. \quad (6.71)$$

Τότε το ελατήριο και όχι η μάζα ρυθμίζει την αποκριση.

Απόκριση στο συντονισμό $\omega = \omega_0$.

Έχουμε:

$$\cos \phi \rightarrow 0 \quad \sin \phi \rightarrow -1 \quad \text{και} \quad \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}. \quad (6.72)$$

οπότε για το πλάτος προκύπτει:

$$x_0 = \frac{a_0\tau}{\omega_0}. \quad (6.73)$$

Αν F_0 είναι σταθερό, τότε

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0\tau/\omega_0}{\alpha_0/\omega_0^2} = \omega_0\tau = Q. \quad (6.74)$$

Η μέγιστη απόκριση συμβαίνει όταν

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}, \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}}. \quad (6.75)$$

Υψηλή διεγείρουσα συχνότητα $\omega \gg \omega_0$.

Εδώ έχουμε

$$\cos \phi \rightarrow -1 \quad \sin \phi \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \phi \rightarrow -\pi \quad (6.76)$$

και

$$x_0 \rightarrow \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}. \quad (6.77)$$

Δηλαδή, στις υψηλές συχνότητες, η απόκριση ελαττώνεται όπως το $1/\omega^2$. Η αδράνεια της μάζας ρυθμίζει την απόκριση.

Η διαφορά φάσης ϕ της μετατόπισης x ως προς τη διεγείρουσα δύναμη F , ξεκινά από το μηδέν για χαμηλές συχνότητες, περνάει από την τιμή $-\pi/2$ στο συντονισμό και φτάνει την τιμή $-\pi$ για υψηλές συχνότητες. Η μετατόπιση πάντοτε υστερεί ως προς τη διεγείρουσα δύναμη.

Απορρόφηση ισχύος

Η χρονική μέση τιμή του έργου που παράγεται ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή η μέση ισχύς που η διεγείρουσα δύναμη αποδίδει στο ταλαντούμενο σύστημα, εκφράζεται από τη σχέση

$$P = \langle F \dot{x} \rangle = \frac{Ma_0^2\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \langle \sin \omega t \cos(\omega t + \phi) \rangle \quad (6.78)$$

ή

$$P = -\frac{1}{2} \frac{M\alpha_0^2 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \sin \phi. \quad (6.79)$$

Στη σχέση αυτή φαίνεται ο σημαντικός ρόλος της διαφοράς φάσης (ή φάσης) ϕ .

Η μέση ισχύς μπορεί ακόμη να εκφραστεί ως

$$P = \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} = \frac{\frac{1}{2} M\alpha_0^2 \tau}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega/\tau}\right)^2}. \quad (6.80)$$

Η απορρόφηση ισχύος γίνεται μέγιστη στο συντονισμό, για $\omega = \omega_0$, είναι

$$P_{\text{συντ}} = \frac{1}{2} M\alpha_0^2 \tau. \quad (6.81)$$

Στα διαγράμματα της ισχύος P συναρτήσει της συχνότητας ω , το πλάτος της καμπύλης συντονισμού στο μισό της μέγιστης ισχύος, $2(\Delta\omega)_{1/2}$, είναι ίσο με $1/\tau$ οπότε μπορούμε να πάρουμε:

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}}. \quad (6.82)$$

Στη σχέση αυτή φαίνεται ότι ο συντελεστής ποιότητας Q μετράει την οξύτητα του συντονισμού.

Προβλήματα

6.1 Μάζα m , συνδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς s , εκτελεί απλή αρμονική κίνηση χωρίς απώλειες. Η κίνηση της μάζας δίνεται από τη σχέση $x = A \sin \omega t$ για τιμές του χρόνου μέχρι και $t \leq \tau$. Για $t > \tau$, εφαρμόζεται στον ταλαντωτή σταθερή δύναμη F προς τα θετικά x ($F > 0$). Τα A, s, ω, τ και F είναι γνωστά.

(α) Βρείτε την κίνηση του ταλαντωτή για $t > \tau$.

(β) Βρείτε το πλάτος των ταλαντώσεων για $t > \tau$.

6.2 Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $s = m\omega_0^2$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακίνητο σημείο. Η μάζα κινείται πάνω στον άξονα των x και υφίσταται δύναμη τριβής ίση με $-rx = -m\lambda x$. Εξωτερική δύναμη ίση με $F = F_0 \cos \omega t$ ασκείται επίσης πάνω στη μάζα, στην κατεύθυνση x .

Υποθέτοντας ότι $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, στη μόνιμη κατάσταση,

(α) Βρείτε τα A και B .

(β) Δείξτε ότι η μέση απορροφούμενη από τον ταλαντωτή ισχύς είναι $\bar{P} = \frac{1}{2} \omega F_0 A$. Γιατί η

κίνηση με πλάτος το B δεν επηρεάζει την ισχύ;

(γ) Δείξτε ότι η μέση τιμή της ολικής ενέργειας του ταλαντωτή, για χρονικό διάστημα μιας περιόδου, είναι ίση με $\bar{E} = \frac{1}{4} m(\omega_0^2 + \omega^2)(A^2 + B^2)$.

6.3 Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα m , έχει γωνιακή συχνότητα συντονισμού ίση με ω_0 . Τη στιγμή $t = 0$, και όταν η μετατόπιση του ταλαντωτή είναι ίση με μηδέν και η ταχύτητά του ίση με v , ασκείται στον ταλαντωτή δύναμη ίση με $F = F_0 \cos \omega t$, στην κατεύθυνση της θετικής μετατόπισής του.

(α) Επαληθεύσετε ότι η μετατόπιση του ταλαντωτή για $t > 0$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{F_0 \cos \omega t - \cos \omega_0 t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

(β) Υποθέτοντας ότι $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, δείξτε ότι η λύση καθώς $\delta\omega \rightarrow 0$ και επιτυγχάνεται συντονισμός είναι:

$$x(t) = \left(\frac{v}{\omega_0} + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \right) \sin \omega_0 t .$$

(Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital στον πρώτο όρο της λύσης, θεωρώντας την ω ως μια μεταβλητή της οποίας η τιμή τείνει στην ω_0 .)
