2. Οι νόμοι της κίνησης, οι δυνάμεις και οι εξισώσεις κίνησης

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 2, 3.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 1, 2, 3.

{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *Μ3 Διανύσματα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *Μ5 Το αόριστο ολοκλήρωμα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *Μ6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *Μ7 Λύση απλών διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων κίνησης*}

2.1 Οι νόμοι της κίνησης

Οι τρεις νόμοι της κίνησης, του Νεύτωνα:

1. Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (ή ηρεμεί) όταν δεν ασκείται πάνω του καμμιά εξωτερική δύναμη:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

$\vec{\mathbf{F}} =$ δύναμη, $\vec{\mathbf{a}} =$ επιτάχυνση.

2. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\vec{\mathbf{p}} = M\,\vec{\mathbf{v}}$ ενός σώματος ως προς τον χρόνο είναι ίσος με τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}(M\vec{\mathbf{v}}) . \tag{2.2}$$

3. Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, είναι: $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$, (2.3)

όπου $\vec{\mathbf{F}}_{12} =$ η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα 1 από το σώμα 2,

και $\vec{\mathbf{F}}_{21} =$ η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα 2 από το σώμα 1.

2.2 Δυνάμεις και εξισώσεις κίνησης

Εξίσωση κίνησης ενός σώματος ονομάζεται η διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \qquad \text{ή} \qquad M\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}} \tag{2.4}$$

όταν αντικατασταθεί σε αυτήν η μαθηματική έκφραση για τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα.

Η δύναμη μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσης του σώματος, του χρόνου, της ταχύτητας του σώματος κλπ

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}, t, ..) .$$

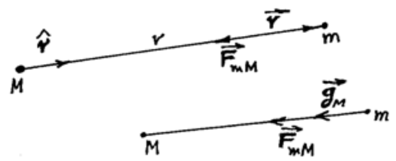
Λύση της εξίσωσης κίνησης ονομάζεται η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δεδομένες αρχικές ή άλλες συνθήκες του προβλήματος. Αυτή είναι συνήθως η συνάρτηση $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ που δίνει τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Ενδιάμεση λύση μπορεί να είναι η $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(t)$ που δίνει την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου. Όπου αυτές οι λύσεις δεν είναι εφικτές, είναι μερικές φορές επιθυμητό να βρεθεί η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$.

2.3 Οι θεμελιώδεις δυνάμεις της κλασικής Μηχανικής

Η βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m από τη μάζα M είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_{mM} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{2.5}$$

όπου r είναι η απόσταση των δύο μαζών, και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την M στην m. Το αρνητικό πρόσημο υπάρχει γιατί η δύναμη είναι ελκτική.



Ορίζοντας την ένταση του βαρυτικού πεδίου (επιτάχυνση της βαρύτητας),

$$\vec{\mathbf{g}}_M \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_{mM}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.6}$$

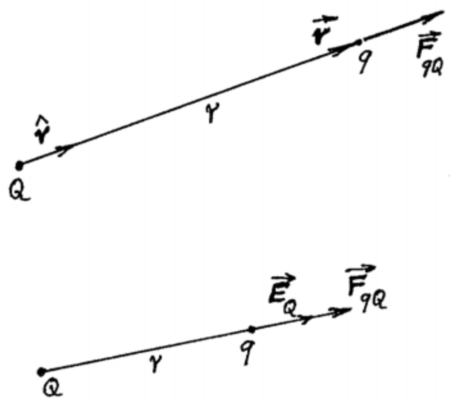
η δύναμη είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_{mM} = m\vec{\mathbf{g}}_M\,. \tag{2.7}$$

Η δύναμη Coulomb που ασκείται πάνω στο φορτίο q από το φορτίο Q είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{2.8}$$

όπου r είναι η απόσταση των δύο φορτίων, και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το Q στο q.
Η δύναμη είναι αρνητική ή θετική, αν είναι ελκτική ή απωστική, αντίστοιχα.



Ορίζοντας την *ένταση* του ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{\mathbf{E}}_Q \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_{qQ}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.9}$$

η δύναμη είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_{qQ} = q\vec{\mathbf{E}}_Q\,. \tag{2.10}$$

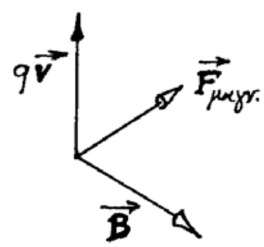
Η βαρυτική δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών και η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων είναι της μορφής

$$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.11}$$

δηλαδή είναι *κεντρικές δυνάμεις*.

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω στο φορτίο q όταν αυτό κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$ είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mu\alpha\gamma\nu.} = q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\,. \tag{2.12}$$



Αν υπάρχει και ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathbf{E}}$, η ολική δύναμη (δύναμη Lorentz) είναι:

$$\vec{\mathbf{F}}_L = q\vec{\mathbf{E}} + q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\,. \tag{2.13}$$

2.4 Λύσεις της εξίσωσης κίνησης

Σε προβλήματα κίνησης σε τρεις διαστάσεις, οι εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή αναλύονται σε τρεις διαφορικές εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Έτσι, αν η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}, \tag{2.14}$$

η λύση βρίσκεται συνήθως αφού αυτή αναλυθεί στις τρεις εξισώσεις:

$$M\frac{d\upsilon_x}{dt}=F_x\,,\qquad M\frac{d\upsilon_y}{dt}=F_y\,,\qquad M\frac{d\upsilon_z}{dt}=F_z\;. \tag{2.15}$$

2.4.1 Μηδενική δύναμη

Εξίσωση κίνησης: $$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\vec{\mathbf{F}}=\mathbf{0}\,. \tag{2.16}$$

Λύση: $$\vec{\mathbf{v}}=\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}=\text{σταθ.}=\vec{\mathbf{v}}_0\,,\qquad \vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0+\vec{\mathbf{v}}_0 t\;. \tag{2.17}$$

όπου $\vec{\mathbf{r}}_0=$ η αρχική θέση του σώματος, $\vec{\mathbf{v}}_0=$ η αρχική ταχύτητα του σώματος.

Σε συνιστώσες: $$x=x_0+\upsilon_{0x}t\,,\qquad y=y_0+\upsilon_{0y}t\,,\qquad z=z_0+\upsilon_{0z}t\,. \tag{2.18}$$

2.4.2 Σταθερή δύναμη

Εξίσωση κίνησης: $$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\vec{\mathbf{F}}=\text{σταθ.} \tag{2.19}$$

Λύση: $$\vec{\mathbf{v}}(t)=\vec{\mathbf{v}}_0+\frac{\vec{\mathbf{F}}}{M}t\,,\qquad \vec{\mathbf{r}}(t)=\vec{\mathbf{r}}_0+\vec{\mathbf{v}}_0 t+\frac{1}{2}\frac{\vec{\mathbf{F}}}{M}t^2\;. \tag{2.20}$$

όπου $\vec{\mathbf{r}}_0=$ η αρχική θέση του σώματος, $\vec{\mathbf{v}}_0=$ η αρχική ταχύτητα του σώματος.

Σε συνιστώσες: $$\upsilon_x(t)=\upsilon_{0x}+\frac{F_x}{M}t\,,\qquad \upsilon_y(t)=\upsilon_{0y}+\frac{F_y}{M}t\,,\qquad \upsilon_z(t)=\upsilon_{0z}+\frac{F_z}{M}t\,, \tag{2.21}$$

$$x(t)=x_0+\upsilon_{0x}t+\frac{1}{2}\frac{F_x}{M}t^2\,,\qquad y(t)=y_0+\upsilon_{0y}t+\frac{1}{2}\frac{F_y}{M}t^2\,,\qquad z(t)=z_0+\upsilon_{0z}t+\frac{1}{2}\frac{F_z}{M}t^2\,. \tag{2.22}$$

Ειδική περίπτωση: Βολή σε ομογενές βαρυτικό πεδίο

Η αρχική ταχύτητα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια κατεύθυνση. Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xy. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}}\right)=-mg\,\hat{\mathbf{y}}\,,\qquad \text{ή}\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=0\,,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g\;. \tag{2.23}$$

Λύση: $$x=x_0+(\upsilon_0\cos\theta)t\,,\qquad y=y_0+(\upsilon_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2.24}$$

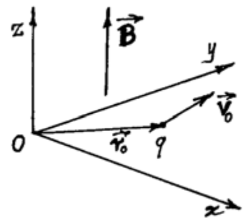
Εξίσωση της τροχιάς:

$$y-\left(y_0+\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2g}\right)=-\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\theta}\left[x-\left(x_0+\frac{\upsilon_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)\right]^2\,. \tag{2.25}$$

2.4.3 Κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Επιλέγουμε τους άξονες ώστε: μαγνητικό πεδίο: $\vec{\mathbf{B}}=B\hat{\mathbf{z}}$ και αρχική ταχύτητα: $\vec{\mathbf{v}}_0=\upsilon_1\hat{\mathbf{y}}+\upsilon_z\hat{\mathbf{z}}$.
Η αρχική θέση είναι: $\vec{\mathbf{r}}_0=x_0\hat{\mathbf{x}}+y_0\hat{\mathbf{y}}+z_0\hat{\mathbf{z}}$.
Εξίσωση κίνησης:

$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}=M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}} \tag{2.26}$$



Σε συνιστώσες:

$$\dot{\upsilon}_x = \frac{qB}{M}\upsilon_y \qquad \dot{\upsilon}_y = -\frac{qB}{M}\upsilon_x \qquad \dot{\upsilon}_z = 0\,. \tag{2.27}$$

Λύση:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_1 \sin\omega t \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_1 \cos\omega t \qquad \upsilon_z = \text{σταθ.} \tag{2.28}$$

$$x = x_0 + r_c(1-\cos\omega t) \qquad y = y_0 + r_c \sin\omega t \qquad z = z_0 + \upsilon_z t \tag{2.29}$$

όπου $\omega = \dfrac{qB}{M} \equiv \omega_c$ η κυκλοτρονική συχνότητα, $r_c = \dfrac{\upsilon_1}{\omega_c} = \dfrac{M\upsilon_1}{qB}$ η κυκλοτρονική ακτίνα.

2.4.4 Κίνηση με δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας

Δύναμη τριβής: $\vec{\mathbf{F}}_{\text{τρ}} = -\beta\,\vec{\mathbf{v}}$. Αρχική ταχύτητα: $\vec{\mathbf{v}}_0$. Αρχική θέση: (0, 0, 0).

Εξίσωση κίνησης:

$$M\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -\beta\,\vec{\mathbf{v}}\,. \tag{2.30}$$

Αν $\vec{\mathbf{v}}_0 = \upsilon_0\hat{\mathbf{x}}$, η εξίσωση κίνησης είναι $\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -\dfrac{\upsilon_x}{\tau}$, όπου $\tau = \dfrac{M}{\beta}$ σταθερά χρόνου.

Λύση:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0\, e^{-t/\tau}\,, \qquad x(t) = \frac{M\upsilon_0}{\beta}(1-e^{-t/\tau})\,. \tag{2.31}$$

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. Μηχανική: Κεφ. 3 Ασκ. 3, 11, 14, 15.

2.1 Ένα σωματίδιο με μάζα *m* κινείται στο επίπεδο xy υπό την επίδραση δύναμης $\mathbf{F} = -C\mathbf{r}$, όπου *C* μια θετική σταθερά και $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Ζητούνται:

(α) Να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x και *y*.

(β) Ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι περιφέρεια κύκλου και ποια είναι τότε η περίοδος της κίνησης;

(γ) Ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι ευθεία με κλίση 45° ως προς τον άξονα *x*;

2.2 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y=0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, υ, ως συνάρτηση του χρόνου.

Απ.: $\upsilon = -\dfrac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα τείνει σε μια ορική τιμή και βρείτε την τιμή αυτή. Απ.: $\upsilon_{o\rho} = -\dfrac{mg}{b}$

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου.

Απ.: $y = -\dfrac{m^2 g}{b^2}\left[\dfrac{b}{m}t - \left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]$

(δ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t.

Απ.: $y \approx -\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{1}{6}g\dfrac{b}{m}t^3, \quad \upsilon \approx -gt + \tfrac{1}{2}g\dfrac{b}{m}t^2$

2.3 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45^{o} με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Μετά πόσο χρόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της γίνεται $\upsilon_0/2$; Απ.: $\upsilon_x=\upsilon_0/\sqrt{2},\quad \upsilon_y=(\upsilon_0/\sqrt{2})e^{-kt},\quad \tau=(\ln 2)/2k$

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy;

Απ.: $y=\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}\left[1-\exp\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,k}{\upsilon_0}x\right)\right]$

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά; Απ.: $y_m=\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}$

2.4 Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο (0, 0) με αρχική ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ο άξονας y είναι κατακόρυφος. Η σφαίρα κινείται στο επίπεδο xy. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $\upsilon_x(t)$ και $\upsilon_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας.

(γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε.

(δ) Δείξτε ότι για $\tau>>m/b$ ο χρόνος αυτός είναι $\tau\approx\dfrac{hb}{mg}+\dfrac{\upsilon_0}{g}\sin\theta$.

2.5 Μια βάρκα κινείται με ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0=\upsilon_0\hat{\mathbf{x}}$ ($\upsilon_0>0$) και βρίσκεται στη θέση $x=0$ όταν τη χρονική στιγμή $t=0$ σβήνεται η μηχανή της. Η αντίσταση του νερού είναι τέτοια ώστε η δύναμη τριβής που ασκείται πάνω στη βάρκα να είναι ίση με $-be^{\alpha\upsilon}$, όπου υ είναι το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας και α και b είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα της βάρκας, υ, ως συνάρτηση του χρόνου για $t>0$.

(β) Να βρεθεί η θέση της βάρκας, x, ως συνάρτηση του χρόνου για $t>0$.

(γ) Πόσος χρόνος, τ, θα απαιτηθεί για να σταματήσει η βάρκα; Σε ποια τιμή τείνει ο τ για πολύ μεγάλες τιμές της υ_0;

$$\left(\int \ln(1+ct)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{c}(1+ct)\left[\ln(1+ct)-1\right]\right)$$

2.6 **Σ**ώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ ($V>0$) κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y=0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}$ δείξτε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση

$$y=\frac{V-\upsilon}{k}-\frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{1+kV/g}{1+k\upsilon/g}\right).$$

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Απ.: $H = \frac{V}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kV}{g}\right)$

(δ) Αν $\upsilon = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y = 0$, δείξτε ότι:

$$\left(1 - \frac{kU}{g}\right)e^{kU/g} = \left(1 + \frac{kV}{g}\right)e^{-kV/g} .$$

2.7 Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία θ που σχηματίζει το επίπεδο με την οριζόντια κατεύθυνση είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται πολύ αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Τότε η γωνία διατηρείται σταθερή. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ_s και μ_k αντίστοιχα ($\mu_s > \mu_k$), να βρεθούν ως συναρτήσεις του χρόνου: (α) Η ταχύτητα της μάζας, και (β) Η θέση της.

2.8 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στο σημείο $y = 0$, και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα κάτω). Κατά την κίνηση του σώματος στο πεδίο βαρύτητας, το οποίο θεωρούμε ομογενές, η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος, και ίση με $-a\upsilon^2$, όπου υ η ταχύτητα του σώματος και a μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, $\upsilon(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Δείξετε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια οριακή ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, $y(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου.
