

1. Κινηματική

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholtz και B. J. Moyer, *Μηχανική*.
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 2.

{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M1 Παράγωγος*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M2 Σειρές Τέηλορ και Μακλώριν*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M3 Διανύσματα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M4 Παραγωγή διανυσμάτων*}

1.1 Η διαφορική μορφή των νόμων της Φυσικής

Ο σπουδαστής της Φυσικής θα διαπιστώσει, καθώς εμβαθύνει στην αυστηρή μαθηματική διατύπωση των νόμων της, ότι οι νόμοι αυτοί αποκτούν αυξημένη γενικότητα όταν διατυπώνονται στη λεγόμενη *διαφορική μορφή* τους. Αυτή η μορφή συνδέει τα φυσικά μεγέθη και τις διαφορές παραγώγους των (χωρικές, χρονικές, ή άλλες) μέσω εξισώσεων οι οποίες ισχύουν για κάθε τιμή του χρόνου και σε κάθε σημείο μιας περιοχής.

Για παράδειγμα, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, στη μορφή $F = ma$, προσφέρει περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής. Αν όμως γίνει κατανοητό ότι ο νόμος ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή, με τις αντίστοιχες στιγμιαίες τιμές των φυσικών μεγεθών, και ότι η επιτάχυνση είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο, η εξίσωση παίρνει μια γενικότερη μορφή. Έτσι, για κίνηση πάνω στον άξονα των x ,

η ταχύτητα είναι
$$v_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.1)$$

και η επιτάχυνση
$$a_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_x}{\delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (1.2)$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad \text{ή} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad (1.3)$$

όπου F_x είναι η συνιστώσα x της δύναμης που ασκείται πάνω στη μάζα m .

Το πλεονέκτημα αυτής της μαθηματικής διατύπωσης είναι ότι διαθέτουμε τις μαθηματικές μεθόδους για να λύσουμε την εξίσωση για την ταχύτητα $v_x(t)$ ή τη θέση $x(t)$ της μάζας ακόμη και όταν η δύναμη δεν είναι σταθερή, αλλά είναι συνάρτηση της θέσης, του χρόνου, της ταχύτητας κλπ.

Παράδειγμα 1.1

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t , από τη σχέση:

$$x(t) = 4 + 3t^2 - 2\sin 5t$$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του.

Η ταχύτητα του σημείου είναι:
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0 + 3 \cdot 2t - 2 \cdot 5 \cos 5t = 6t - 10 \cos 5t \quad \text{m/s} .$$

Η επιτάχυνσή του είναι:
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 6 - (-10 \cdot 5 \sin 5t) = 6 + 50 \sin 5t \quad \text{m/s}^2 .$$

Παράδειγμα 1.2

Οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t , από τις σχέσεις:

$$x(t) = 4 \sin 5t \quad y(t) = 4 \cos 5t$$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν: (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου. (β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.

(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$v_x(t) = 20 \cos 5t \quad v_y(t) = -20 \sin 5t \quad \text{m/s}$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$a_x(t) = -100 \sin 5t \quad a_y(t) = -100 \cos 5t \quad \text{m/s}^2$$

(β) Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 \cos 5t)^2 + (-20 \sin 5t)^2} = 20 \quad \text{m/s}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-100 \sin 5t)^2 + (-100 \cos 5t)^2} = 100 \quad \text{m/s}^2$$

(γ) Από τις δύο σχέσεις για τις συντεταγμένες του σημείου, απαλείφουμε το t υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας:

$$x^2 + y^2 = (4 \sin 5t)^2 + (4 \cos 5t)^2 = 4^2 \text{ m}^2.$$

Το σωματίδιο κινείται πάνω στον κύκλο $(0, 4 \text{ m})$, με ταχύτητα και επιτάχυνση των οποίων τα μέτρα είναι σταθερά.

Προβλήματα

1.1 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t , από τη σχέση:

$$x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

1.2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t , από τις σχέσεις: $x(t) = 3 \sin 5t$, $y(t) = 4 \cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).

Να βρεθούν: (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.

(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.

(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

1.2 Διάνυσμα θέσης, διανυσματική ταχύτητα και επιτάχυνση

Αν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες ενός κινούμενου σημείου P και t ο χρόνος, τότε το σημείο P έχει:

διάνυσμα θέσης $\vec{r} \equiv x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ (1.4)

διανυσματική ταχύτητα $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z}$ (1.5)

επιτάχυνση $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{z}$. (1.6)

Το διάνυσμα θέσης είναι ένα *δέσμιο διάνυσμα*, που έχει την αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος θέσης κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την *τροχιά* του σημείου P . Μπορεί να αποδειχθεί γεωμετρικά ότι το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{v} είναι εφαπτομενικό της τροχιάς σε κάθε της σημείο.

Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση ενός σώματος με σταθερή μάζα m διατυπώνεται διανυσματικά στις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (1.7)$$

όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης, \vec{v} η ταχύτητα και \vec{a} η επιτάχυνση του σώματος, και \vec{F} η *εξωτερική δύναμη* που ασκείται πάνω στο σώμα. Για να συμπεριληφθεί και το ενδεχόμενο της μεταβολής της μάζας με τον χρόνο, ο νόμος διατυπώνεται στη γενικότερη μορφή

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.8)$$

όπου $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ είναι η *ορμή* του σώματος. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει όταν μια συγκεκριμένη συνάρτηση αντικατασταθεί για τη δύναμη \vec{F} , ονομάζεται *εξίσωση κίνησης* του σώματος. Η \vec{F} μπορεί να είναι σταθερή, ή συνάρτηση της θέσης, του χρόνου ή ακόμη και της ταχύτητας του σώματος.

Πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι κάθε μια από τις διανυσματικές αυτές εξισώσεις εμπεριέχει τρεις εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Έτσι, επειδή

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad \vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}, \quad \vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}, \quad (1.9)$$

$$\vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z} \quad \text{και} \quad \vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}, \quad (1.10)$$

οι διανυσματικές αυτές εξισώσεις μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$m\vec{a} = \vec{F}$	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$	$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$
$ma_x = F_x$	$m \frac{dv_x}{dt} = F_x$	$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x$	$\frac{dp_x}{dt} = F_x$
$ma_y = F_y$	$m \frac{dv_y}{dt} = F_y$	$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y$	$\frac{dp_y}{dt} = F_y$
$ma_z = F_z$	$m \frac{dv_z}{dt} = F_z$	$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$	$\frac{dp_z}{dt} = F_z$

Αναφέρουμε επίσης τη χρήση στη Φυσική και του *συμβολισμού του Νεύτωνα*, σύμφωνα με τον οποίο μια τελεία πάνω από ένα σύμβολο υποδηλώνει παραγωγή ως προς τον χρόνο:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.11)$$

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. Μηχανική: Κεφ. 2, Ασκ. 5, 6, 12, 13, 20.

1.3 Αν $\vec{r}(t) = (3+t)\hat{x} + \cos 2t\hat{y} + 2e^{-2t}\hat{z}$, να βρεθούν τα $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ και $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές ($t=0$) $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$ και $\ddot{\vec{r}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

1.4 Οι συντεταγμένες μιας σημειακής μάζας m είναι

$$x = 3a \sin \omega t \quad y = 4a \sin \omega t \quad z = 5a \cos \omega t$$

όπου t είναι ο χρόνος και τα a και ω είναι θετικές σταθερές.

- (α) Να βρεθούν: το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της μάζας.
 (β) Να βρεθούν τα μέτρα των τριών διανυσμάτων του (α).
 (γ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι είναι της μορφής $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο $(0,0,0)$ και \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{r}(t)$. Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται *κεντρική*.
 (δ) Δείξτε ότι η μάζα κινείται πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο και ότι η τροχιά της είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα ίση με $5a$. Σχεδιάστε την τροχιά στο χώρο.
 (ε) Δείξτε ότι η *στροφορμή* της μάζας $\vec{L} \equiv m\vec{r} \times \vec{v}$ ως προς το σημείο $(0, 0, 0)$ (όπου \vec{v} είναι η ταχύτητα της μάζας) είναι σταθερή και ίση με $\vec{L} = ma^2\omega(-20\hat{x} + 15\hat{y}) = mav(-\frac{4}{5}\hat{x} + \frac{3}{5}\hat{y})$, ή $\vec{L} = mav\hat{L}$. Αυτή είναι ιδιότητα όλων των σωμάτων που κινούνται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης.

1.5 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο $(0, 0, 0)$ μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο \vec{r} και κινείται με ταχύτητα \vec{v} , ορίζεται ως $\vec{L} \equiv m\vec{r} \times \vec{v}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο $(0, 0, 0)$ και \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{r}(t)$. Δείξτε ότι η *στροφορμή* της μάζας διατηρείται σταθερή.

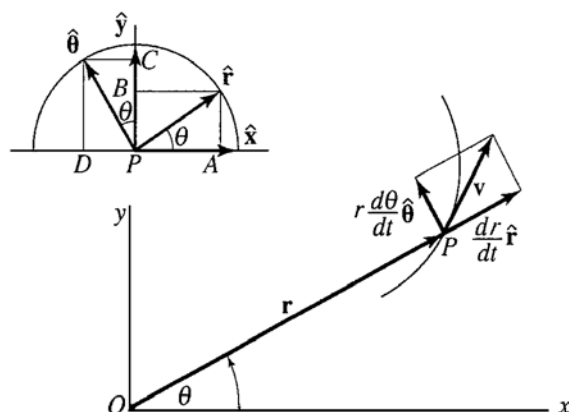
[Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της *στροφορμής* ως προς το χρόνο είναι $d\vec{L}/dt = 0$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittel κ.ά., *Μηχανική*, σελ. 197-8.]

1.3 Ταχύτητα και επιτάχυνση σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες

Σε μερικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, είναι πιο βολική η χρήση πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο, (r, θ) . Χρειαζόμαστε επομένως εκφράσεις για τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες. Για να εκφράσουμε διανύσματα στο σύστημα αυτό, ορίζουμε μοναδιαία διανύσματα \hat{r} και $\hat{\theta}$, στις κατευθύνσεις αυξανόμενου r και θ , αντίστοιχα. Αυτές οι κατευθύνσεις είναι μεταβλητές καθώς το \vec{r} μεταβάλλεται, αλλά τα δύο μοναδιαία διανύσματα παραμένουν κάθετα μεταξύ τους. Όπως φαίνεται στο Σχήμα, (για απόδειξη βλ. *Μηχανική*, σελ. 38) τα μοναδιαία διανύσματα συνδέονται με τα αντίστοιχα \hat{x} και \hat{y} μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Σε αντίθεση με τα \hat{x} και \hat{y} , τα \hat{r} και $\hat{\theta}$ μεταβάλλονται με το χρόνο, ως συναρτήσεις του θ . Βρίσκουμε ότι,



$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}} \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\theta}{dt}. \quad (1.13)$$

Αυτές οι σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των εκφράσεων για την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες, παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς το χρόνο το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{\mathbf{r}} = r \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.14)$$

Βρίσκουμε, για την ταχύτητα:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{v}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.15)$$

και για την επιτάχυνση:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_r \hat{\mathbf{r}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.16)$$

ή

$$\vec{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (1.17)$$

Η γωνιακή συνιστώσα της επιτάχυνσης μπορεί να γραφτεί και ως

$$a_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \quad (1.18)$$

η οποία είναι μια σχέση που θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις στις οποίες η στροφορμή του σώματος διατηρείται, οπότε και είναι

$$a_\theta = 0, \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{σταθερό}. \quad (1.19)$$

Προβλήματα

1.5 Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (3t + 2t^2)\hat{\mathbf{x}} + (4 + 4t^2)\hat{\mathbf{y}} + (5 + 2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = (20 - t - t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1 + 4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου $t =$ χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

- Αποδείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό.
- Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα;
- Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι;
- Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

1.7 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\vec{\mathbf{r}} = bt\hat{\mathbf{x}} - ct^2\hat{\mathbf{y}}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c θετικές σταθερές. Να βρεθούν:

- Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.
- Η ταχύτητα του σωματιδίου $\vec{\mathbf{v}}$ και η επιτάχυνσή του $\vec{\mathbf{a}}$, καθώς και τα μέτρα τους.
- Η γωνία μεταξύ των $\vec{\mathbf{v}}$ και $\vec{\mathbf{a}}$, ως συνάρτηση του χρόνου.
- Η το μήκος της διαδρομής που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 0$ και $t = b/2c$.

$$\text{Δίνεται: } \int_0^1 \sqrt{1+z^2} dz = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] = 1,15\dots$$

1.8 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a \sin \omega t$, $y = 4a \sin \omega t$, $z = 5a \cos \omega t$, όπου $t =$ χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε

τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 , τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ είναι συνεπίεδα. Συνθήκη: $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = 0$.

1.9 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = a \sin(\omega t), \quad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

- (α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης \vec{r} , η ταχύτητα \vec{v} και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.
- (β) Αν K είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{c} = z\hat{z} = bt^2\hat{z}$, και $\vec{R} = \vec{r} - \vec{c}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο K στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα \vec{R} και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο K ή τον άξονα των z είναι σταθερή.
- (γ) Βρείτε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο K , και μία σταθερή στην κατεύθυνση z .
- (δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $\vec{F} \cdot \vec{v}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z .
-