5. Η ταυτότητα του Όιλερ

5.1 Η ταυτότητα του Όιλερ

Αν στο ανάπτυγμα για την εκθετική συνάρτηση

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{5.1}$$

αντικαταστήσουμε $z = ix$, $\left(i = \sqrt{-1}\right)$, έχουμε

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

Αναγνωρίζουμε τις σειρές στις παρενθέσεις ως αυτές των $\cos x$ και $\sin x$, αντίστοιχα. Έτσι,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{5.2}$$

μια σχέση που είναι γνωστή ως *ταυτότητα του Όιλερ* (Euler).

Είναι μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα και χρήσιμη σχέση, όπως θα δούμε παρακάτω.

5.2 Εφαρμογές της ταυτότητας του Όιλερ

5.2.1 Μια απίστευτη εξίσωση

Για μια θεαματική επίδειξη του τι μπορεί να προσφέρει η σχέση αυτή, ας θέσουμε $x = \pi$. Τότε, επειδή $\cos\pi = -1$ και $\sin\pi = 0$, ο τύπος δίνει τη σχέση

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.3}$$

η οποία συνδυάζει σε μια εξίσωση τις θεμελιώδεις μαθηματικές σταθερές: 0, 1, i, π και e ! (Εκτός αυτού, περιέχει και τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της ύψωσης σε δύναμη και της εξίσωσης !!)

5.2.2 Μερικές ειδικές τιμές του e^{ix}

Μερικές ειδικές τιμές του e^{ix} είναι οι εξής: $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$.

5.2.3 Η ταυτότητα του ντε Μουάβρ

Αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, σε κάποια δύναμη n, έχουμε: $e^{inx} = (\cos x + i\sin x)^n$, και επειδή $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$, προκύπτει η ταυτότητα:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx \tag{5.4}$$

η γνωστή *ταυτότητα του ντε Μουάβρ* (de Moivre).

5.2.4 Η πολική μορφή μιγαδικών μεγεθών

Ένα μιγαδικό μέγεθος μπορεί να εκφραστεί ως $z = x + iy$, όπου x είναι το *πραγματικό* και y το *φανταστικό* του μέρος. Αν θέσουμε, εναλλακτικά, $z = re^{i\phi}$, έχουμε:

$$z = x + iy = re^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{5.5}$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ και επομένως,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \tag{5.6}$$

Το z έχει *μέτρο* r και *όρισμα* ϕ. Η $z = re^{i\phi}$ είναι η *πολική μορφή* του μιγαδικού μεγέθους z.

Το γινόμενο δύο μιγαδικών μεγεθών μπορεί να γραφτεί ως: $z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1}\, r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)}$, και ο λόγος τους ως: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2\, e^{i\phi_2}}{r_1\, e^{i\phi_1}} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\phi_2 - \phi_1)}$.

5.2.5 Η σχέση της εκθετικής και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι σχέσεις $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ και $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, δίνουν:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ . \tag{5.7}$$

5.2.6 Οι σχέσεις τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων

Θέτοντας $x \to ix$ στις σχέσεις $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, έχουμε

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i \sinh x \qquad \cos ix = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x \ .$$

Επομένως,

$$\sin ix = i \sinh x \qquad \cos ix = \cosh x \tag{5.8}$$

$$\sinh ix = i \sin x \qquad \cosh ix = \cos x \tag{5.9}$$

5.2.7 Οι ρίζες της μονάδας

Επειδή $e^{i2\pi k} = 1$ $k = 0, 1, 2, \ldots$, οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$\sqrt[n]{1} = e^{i2\pi k/n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \ . \tag{5.10}$$

Υπάρχουν n διαφορετικές n-οστές ρίζες. Για $k \geq n$ οι ρίζες επαναλαμβάνονται.

5.2.8 Μια διαφορική εξίσωση για το e^{ix}

Αν $y = e^{ix}$, τότε $y' = ie^{ix}$ και $y'' = -e^{ix}$. Επομένως $y'' = -y$ και η συνάρτηση $y = e^{ix}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + y = 0 \ . \tag{5.11}$$

Λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης είναι και η συνάρτηση $y = e^{-ix}$. Η γενική λύση της (5.11) είναι ο γραμμικός τους συνδυασμός $y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$, $(A, B = \text{σταθερά})$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση

$$y(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{είναι η γενική λύση της} \quad y'' + k^2 y = 0 \ . \tag{5.12}$$

5.2.9 Η λογαριθμική συνάρτηση στο μιγαδικό επίπεδο

Για τον μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\phi}$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$, ορίζουμε ως *πρωτεύουσα τιμή* του λογαρίθμου του z τον

$$\ln z = \ln r + i\phi \, , \quad -\pi < \phi \leq \pi \, , \tag{5.13}$$

όπου $\ln r$ είναι ο πραγματικός αριθμός για τον οποίο είναι $e^{\ln r} = |z|$.

Επειδή όμως είναι $e^{i2n\pi} = 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, μπορούμε επίσης να γράψουμε το z ως $z = re^{i(\phi + 2n\pi)}$. Ως λογάριθμος του z μπορεί επομένως να θεωρηθεί οποιαδήποτε τιμή της *πλειονότιμης συνάρτησης*

$$\mathrm{Ln}\, z \equiv \ln r + i(\phi + 2n\pi) \, , \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \ . \tag{5.14}$$

Μερικές ειδικές τιμές λογαρίθμων είναι οι:

$$\ln 1 = 0, \quad \ln 0 = -\infty, \quad \ln(-1) = i\pi, \quad \ln(-i) = -\tfrac{1}{2} i\pi, \quad \ln(i) = \tfrac{1}{2} i\pi$$

Έτσι, για παράδειγμα, για έναν αρνητικό αριθμό $-|x|$ έχουμε: $\ln\left(-|x|\right) = \ln|x| + i\pi$.

Προβλήματα

1 Υπολογίστε το i^i.

2 Υπολογίστε το $\sqrt{i}$. Απ.: $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

3 Να βρεθούν οι ρίζες $\sqrt[3]{1}$. Απ.: 1, $\frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$

4 Πολλαπλασιάστε τα $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ και $e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$, για να βρείτε τα $\cos(\alpha+\beta)$ και $\sin(\alpha+\beta)$ συναρτήσει των $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ και $\cos\beta$.

5 Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$C=1+a\cos\theta+a^2\cos 2\theta+\ldots+a^n\cos n\theta$$

και

$$S=a\sin\theta+a^2\sin 2\theta+\ldots+a^n\sin n\theta\ .$$

Υπόδειξη: Αθροίστε τη σειρά $C+iS$, οι όροι της οποίας αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, αν χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα του Όιλερ.

6 Με τη βοήθεια της ταυτότητας του Όιλερ, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$C\equiv\int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad \text{και} \qquad S\equiv\int e^{ax}\sin bx\,dx\ .$$

7 Αν $Z=R+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}$, και $Z=|Z|e^{i\theta}$, να βρεθούν τα $|Z|$ και θ.

8 Δείξτε ότι η λύση $y=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$ ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή, $m\ddot{y}=-ky$, και ότι ανάγεται στις μορφές

$$y=C\sin\omega t+D\cos\omega t \qquad \text{και} \qquad y=F\sin(\omega t+\phi)\ .$$

Βιβλιογραφία

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 1, 8.

M. R. Spiegel, *Μιγαδικές Μεταβλητές*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1980. Κεφ. 1.