ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

7.1 Χρήσιμες σχέσεις από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία

Εξισώσεις του Maxwell

$\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Νόμος επαγωγής του Faraday. (7.1)

$\nabla\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{J}$ Εξ. του Μ. με ρεύμα μετατόπισης $\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. (7.2)

$\nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon}$ Νόμος του Gauss $\longleftrightarrow$ Νόμος του Coulomb. (7.3)

$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ Ανυπαρξία μαγνητικών μονοπόλων. (7.4)

Στο κενό, η διηλεκτρική σταθερά ε και η μαγνητική διαπερατότητα μ είναι ε_0 και μ_0 αντίστοιχα.

Επίσης: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. (7.5)

Νόμος του Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ (σ = ηλεκτρική αγωγιμότητα υλικού). (7.6)

Πυκνότητες ενέργειας ηλεκτρική: $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ μαγνητική: $\frac{1}{2}\mu H^2$. (7.7)

7.2 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα όταν $\varrho = 0$ και $\mathbf{J} = 0$

Σε ένα μονωτικό υλικό όπου $\sigma = 0$ και $\varrho = 0$, παίρνοντας το στροβιλισμό της πρώτης εξίσωσης του Maxwell, Εξ.(7.1):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.8}$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά των τελεστών παραγώγισης ∇ και $\dfrac{\partial}{\partial t}$ (ως προς x,y,z και t αντίστοιχα) έχουμε:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{7.9}$$

Επειδή $\nabla\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ η εξίσωση αυτή γίνεται:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{7.10}$$

Στη διανυσματική ταυτότητα $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

αντιστοιχεί η ταυτότητα για το ∇: $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{E}$ (7.11)

Εδώ, επειδή $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ για $\varrho = 0$ και $\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, έχουμε

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E} \tag{7.12}$$

και τελικά

$$\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{7.13}$$

η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο και ομοίως

$$\nabla^2\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{7.14}$$

η κυματική εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο.

Ας σημειωθεί ότι αυτές είναι διανυσματικές εξισώσεις και επομένως η καθεμιά αντιστοιχεί σε τρεις εξισώσεις, για τις τρεις συνιστώσες:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Αυτές είναι κυματικές εξισώσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, με φασική ταχύτητα κύματος

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{η οποία στο κενό είναι} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{7.15}$$

Στο σύστημα S.I., οι τιμές των c, ε_0 και μ_0 ορίζονται ακριβώς ίσες με

$$c \equiv 2\ 9979\ 2458 \ \ \text{m/s} \qquad \varepsilon_0 \equiv \frac{10^7}{4\pi c^2} \ \ \text{F/m} \qquad \mu_0 \equiv 4\pi\ 10^{-7} \ \ \text{N/A}^2.$$

7.3 Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Ως επίπεδο κύμα ορίζεται το κύμα εκείνο του οποίου το πλάτος είναι σταθερό (διάνυσμα) σε κάθε σημείο ενός επιπέδου που είναι κάθετο σε μια δεδομένη κατεύθυνση.

Αν επιλέξουμε την κατεύθυνση αυτή ως τον άξονα των z, τοτε

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = 0 \tag{7.16}$$

και οι κυματικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial t^2} \tag{7.17}$$

και για τις συνιστώσες,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

7.4 Επίπεδο, μονοχρωματικό, γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Έστω επίπεδο κύμα μιας μοναδικής συχνότητας ω που κινείται στην κατεύθυνση + z και που δίνεται από το πραγματικό μέρος του διανύσματος

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0\, e^{i(\omega t - kz)} \tag{7.18}$$

όπου $\mathbf{E}_0$ είναι το πλάτος του κύματος και $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την κυματική εξίσωση για ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Επειδή το κύμα είναι επίπεδο, το $\mathbf{E}_0$ δεν εξαρτάται από τα x και y.

Αν $\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} + E_{0z}\hat{\mathbf{z}}$, τότε, για να ικανοποιείται η εξίσωση $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, θα πρέπει να είναι $E_{0z} = 0$.

Επίσης, η εξίσωση $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ δίνει τη σχέση

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - e^{i\omega t} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} e^{-ikz} & E_{0y} e^{-ikz} & 0 \end{vmatrix} \tag{7.19}$$

ή $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - ik\,(E_{0y}\hat{\mathbf{x}} - E_{0x}\hat{\mathbf{y}})\, e^{i(\omega t - kz)}$ η οποία με ολοκλήρωση δίνει

$$\mathbf{B} = - \frac{k}{\omega}\,(E_{0y}\hat{\mathbf{x}} - E_{0x}\hat{\mathbf{y}})\, e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{F}(x,y,z). \tag{7.20}$$

Αγνοούμε την άγνωστη συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)$ γιατί μας ενδιαφέρει μόνο το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος του **B**. Επομένως

$$\mathbf{B} = \left(- \frac{E_{0y}}{c}\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_{0x}}{c}\hat{\mathbf{y}} \right) e^{i(\omega t - kz)}. \tag{7.21}$$

Έστω ότι $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\, e^{i(\omega t - kz)}$ (7.22)

όπου $\mathbf{B}_0 = B_{0x}\hat{\mathbf{x}} + B_{0y}\hat{\mathbf{y}} = - \frac{E_{0y}}{c}\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_{0x}}{c}\hat{\mathbf{y}}$ είναι το πλάτος του **B**.

Τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου βρέθηκαν ότι είναι:

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} \quad \text{και} \quad \mathbf{B}_0 = - \frac{E_{0y}}{c}\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_{0x}}{c}\hat{\mathbf{y}} \tag{7.23}$$

και οι συνιστώσες τους συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων:

$$E_{0x} = cB_{0y} \qquad E_{0y} = - cB_{0x}. \tag{7.24}$$

Οι σχέσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του επίπεδου κύματος προς τα θετικά z είναι:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}.$$

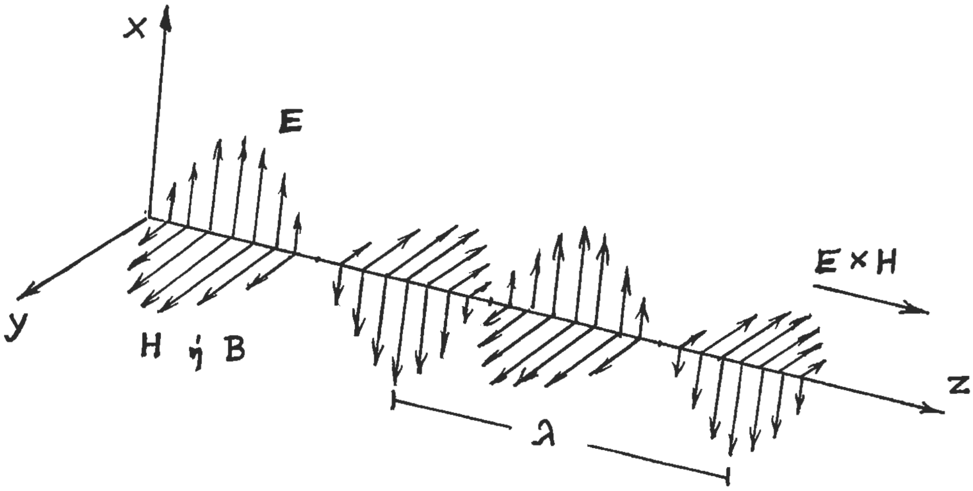
Επίσης, $$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \left(E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} \right)\cdot\left(- \frac{E_{0y}}{c}\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_{0x}}{c}\hat{\mathbf{y}} \right) e^{2i(\omega t - kz)} = 0 \tag{7.25}$$

και επομένως τα **E** και **B** είναι παντού κάθετα μεταξύ τους.

Τα **E** και **B** που βρέθηκαν ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell. Τα $\mathbf{E}_0$ και $\mathbf{B}_0$ και επομένως και τα **E** και **B** είναι κάθετα μεταξύ τους και επίσης δεν έχουν συνιστώσα z, δηλαδή βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης, τον άξονα των z. Είναι επομένως **εγκάρσια κύματα**. Για τον λόγο αυτό, μπορούν να πολωθούν.

Αν θεωρήσουμε **γραμμικά πολωμένο** κύμα, για το οποίο η ταλάντωση του **E** γίνεται κατά μήκος του άξονα των x (δηλαδή είναι $E_y = 0$) τότε $E_{0y} = 0$ και $B_{0x} = 0$. Οι λύσεις είναι

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\, E_{0x}\, e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}\, B_{0y}\, e^{i(\omega t - kz)} \tag{7.26}$$



Σχ.7.1 Η μεταβολή στο χώρο, των εντάσεων του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, E και H αντίστοιχα, για επίπεδο, μονοχρωματικό και γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

και παίρνοντας τα πραγματικά μέρη, έχουμε

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\, E_{0x}\cos(\omega t - kz) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}\, B_{0y}\cos(\omega t - kz) \tag{7.27}$$

με
$$\frac{B_{0y}}{E_{0x}} = \frac{1}{c}. \tag{7.28}$$

Άλλη, ισοδύναμη μορφή, είναι:

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z)\right) \tag{P.7.20}$$

$$B_y = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z)\right) \qquad H_y = H_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z)\right) \tag{P.7.21}$$

Η ημιτονική εξάρτηση δείχνει ότι δεν υπάρχει εξασθένηση στην περίπτωση των επίπεδων κυμάτων γιατί το μέσον δεν είναι αγώγιμο και $\varrho=0$.

Το διάνυσμα
$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})\, E_{0x}\, H_{0y} \cos^2(\omega t - kz) \tag{7.29}$$

που λέγεται **διάνυσμα Poynting**, έχει την διεύθυνση $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ η οποία είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

7.5 Το διάνυσμα Poynting

Η απόκλιση του διανύσματος $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ δίνεται από τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}). \tag{7.30}$$

Για $\mathbf{J} = 0$ και επειδή $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ και $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, προκύπτει ότι

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \quad \text{ή}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right). \tag{7.31}$$

Ολοκληρώνοντας σε όγκο V που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S_0, έχουμε

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d\upsilon = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d\upsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d\upsilon. \tag{7.32}$$

Από το θεώρημα του Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, d\upsilon = \oint_{S_o} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \tag{7.33}$$

προκύπτει ότι

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d\upsilon = \oint_{S_o} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \tag{7.34}$$

και επομένως

$$\oint_{S_o} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d\upsilon = -\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{7.35}$$

όπου

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d\upsilon. \tag{7.36}$$

Όμως, W είναι η ολική ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στον όγκο V, δεδομένου ότι $\frac{1}{2} \varepsilon E^2$ και $\frac{1}{2} \mu H^2$ είναι οι πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Η τελευταία εξίσωση δηλώνει επομένως ότι η ολική προς τα έξω ροή του διανύσματος Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, μέσα από την κλειστή επιφάνεια S_0, είναι ίση με το ρυθμό μείωσης της ολικής ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που περικλείεται από την επιφάνεια.

Το διάνυσμα Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως η ροή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας (σε $J/s \cdot m^2$ ή W/m^2). Στην περίπτωση κύματος, η διεύθυνσή του δίνεται από την διεύθυνση του **S**. Είναι όμως λάθος να πάρουμε κυριολεκτικά τη δήλωση ότι το διάνυσμα Poynting δίνει τη ροή ενέργειας σε κάθε σημείο του χώρου. Η χρήση της έννοιας αυτής έχει νόημα μόνο στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου, που δόθηκε πιο πάνω (Εξ.7.35). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η απόδειξη που δόθηκε δεν προυποθέτει την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού κύματος και η σχέση έχει γενική εφαρμογή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για ένα αγώγιμο μέσον ισχύει η σχέση

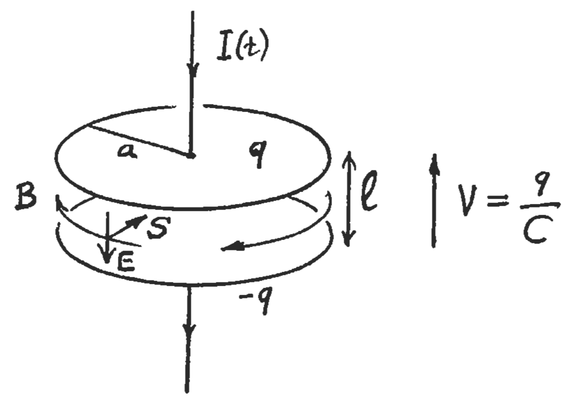
$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) d\upsilon = \oint_{S_o} (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} + \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\, d\upsilon \tag{7.37}$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα εκφράζει τις ωμικές απώλειες στον όγκο V λόγω της ύπαρξης ηλεκτρικών ρευμάτων στον αγωγό. Πράγματι, η πυκνότητα ρεύματος είναι $\mathbf{J} = \sum q_i\mathbf{u}_i$, όπου το άθροισμα εκτείνεται σε μοναδιαίο όγκο. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\mathbf{E}$, η δύναμη που ασκείται πάνω σε κάθε φορτίο είναι $\mathbf{E}q_i$ και αν η ταχύτητα του φορτίου είναι $\mathbf{u}_i$, το πεδίο παράγει έργο επί του φορτίου με ρυθμό $(q_i\mathbf{E})\cdot\mathbf{u}_i$. Ο ρυθμός παραγωγής έργου ανά μονάδα όγκου είναι $\sum q_i\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_i$ ή $\mathbf{E}\cdot\sum q_i\mathbf{u}_i = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$. Ο τελευταίος όρος της (7.37) βρίσκεται με ολοκλήρωση του $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ σε όλο τον όγκο V.

Παράδειγμα 7.1

Το διάνυσμα Poynting κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

Ο πυκνωτής του σχήματος έχει παράλληλους οπλισμούς κυκλικού σχήματος ακτίνας a που απέχουν μεταξύ τους απόσταση l. Έχει χωρητικότητα C και φορτίζεται με ροή ρεύματος I(t) που οδηγεί σε συσσώρευση φορτίων $\pm$ q(t) στους οπλισμούς και διαφορά δυναμικού V(t) ανάμεσά τους.



Ισχύουν οι σχέσεις

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \qquad q = CV \qquad I(t) = C\,\frac{dV}{dt}.$$

Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στον πυκνωτή είναι:

$$P = IV = C\frac{dV}{dt}V = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2\right).$$

Ανάμεσα στους πυκνωτές δεν υπάρχει ροή ρεύματος αλλά ρεύμα μετατόπισης ίσο με $I(t) = C\frac{dV}{dt}$ που προκαλεί μαγνητικό πεδίο που στα άκρα των οπλισμών, σύμφωνα με το νόμο του Ampère, είναι ίσο με

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a}C\frac{dV}{dt}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $E = V/l$. Έτσι, το διάνυσμα Poynting στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{V}{l}\frac{1}{2\pi a}C\frac{dV}{dt}.$$

Η ολική ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, προς τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς, είναι:

$$2\pi a l S = V C\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = P.$$

Βλέπουμε ότι οι δύο τρόποι υπολογισμού δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

7.8 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε αγώγιμο μέσον (σ≠0)

Για μονωτή (σ=0) χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση $\nabla\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ και καταλήξαμε στην κυματική εξίσωση $\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$.

Αν το μέσον είναι αγώγιμο, τότε $\nabla\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{J}$, όπου σύμφωνα με το νόμο του Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Σε αυτή την περίπτωση, η κυματική εξίσωση τροποποιείται σε

$$\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{7.38}$$

Ο τελευταίος όρος (ο οποίος, σημειωτέον, αλλάζει πρόσημο αν αλλάξει το πρόσημο του χρόνου και επομένως περιγράφει μια μη αντιστρέψιμη διεργασία) εκφράζει τις απώλειες μέσα στο μέσον και οδηγεί σε εξασθένηση του κύματος.

Για επίπεδα κύματα στην κατεύθυνση $+z$, η κυματική εξίσωση είναι

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{7.39}$$

Δοκιμάζοντας λύση της μορφής $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i(\omega t-kz)}$ και αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση, βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση: $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\omega\sigma\mu$. (Σημ.:Στον συμβολισμό του Pain, Εξ.Ρ.7.43 κ.ε., $k^2 = -\gamma^2$). Έχουμε επομένως μιγαδικό κυματικό αριθμό k, ο οποίος έστω ότι έχει πραγματικό μέρος k_r και φανταστικό μέρος $-ik_i$, δηλαδή $k = k_r - ik_i$.

Ας ορίσουμε για το μέσον το μέγεθος

$$Q = \frac{|\partial \mathbf{D}/\partial t|}{|\mathbf{J}|} = \frac{|\partial D/\partial t|}{\sigma E} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \tag{7.40}$$

που είναι ο λόγος του ρεύματος μετατόπισης προς το ρεύμα αγωγιμότητας. Τότε,

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2\left(1 - \frac{i}{Q}\right) \tag{7.41}$$

και επομένως,

$$k_r = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2} \qquad k_i = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2} \tag{7.42}$$

Επίσης,
$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} e^{-i\phi} \tag{7.43}$$

όπου
$$\tan\phi = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} - 1}{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2} + 1}\right]^{1/2} = \frac{k_i}{k_r} \tag{7.44}$$

η οποία είναι γνωστή ως **εφαπτομένη απωλειών**.

Για $\mathbf{E}$ στην κατεύθυνση $+x$, $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}}$ όπου

$$E_x = E_0\,e^{i(\omega t - kz)} = E_0\,e^{i(\omega t - k_r z) - k_i z}\,. \tag{7.45}$$

Από την εξίσωση $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, με $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}}$, βρίσκουμε ότι

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu}E_x \qquad \mathbf{H} = H_y\hat{\mathbf{y}}. \tag{7.46}$$

Επομένως,

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} E_0\,e^{i(\omega t - k_r z - i\phi) - k_i z}\,. \tag{7.47}$$

Έτσι,
$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/4}} \tag{7.48}$$

και επομένως

$$\frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon E^2}{\frac{1}{2}\,\mu H^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}}. \tag{7.49}$$

Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη των E_x και H_y, έχουμε τις λύσεις

$$E_x = E_0\, e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \qquad H_y = H_0\, e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z - \phi) \tag{7.50}$$

από τις οποίες φαίνεται ότι για ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε αγώγιμο μέσον, τα E_x και H_y είναι εκτός φάσης κατά γωνία ϕ. Τα πεδία έχουν πλάτη που φθίνουν εκθετικά με την απόσταση, $E_0\, e^{-k_i z}$ και $H_0\, e^{-k_i z}$.

Παράδειγμα 7.2

Απορρόφηση ενέργειας ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε αγώγιμο μέσον.

Για επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά z μέσα σε αγώγιμο μέσον, βρέθηκε ότι τα πεδία είναι

$$E_x = E_0\, e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \qquad H_y = H_0\, e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z - \phi)$$

με τις σταθερές k_r και k_i, που είναι χαρακτηριστικές του μέσου, να συνδέονται με την ϕ μέσω των σχέσεων,

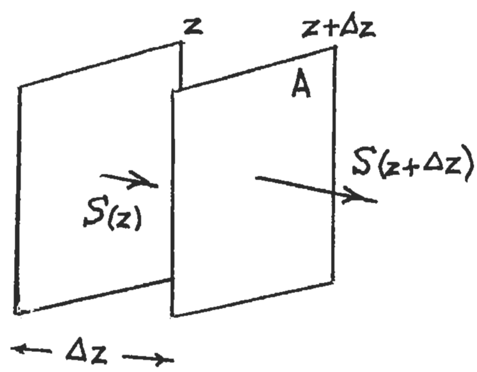
$$\tan\phi = \frac{k_i}{k_r} \qquad \text{και} \qquad \sin\phi = \frac{k_i}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} \qquad \cos\phi = \frac{k_r}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}}.$$

Το μέτρο του διανύσματος Poynting είναι:

$$S = E_0 H_0\, e^{-2k_i z} \cos(\omega t - k_r z)\cos(\omega t - k_r z - \phi)$$

$$S = E_0 H_0\, e^{-2k_i z} \left[\cos^2(\omega t - k_r z)\cos\phi + \cos(\omega t - k_r z)\sin(\omega t - k_r z)\sin\phi\right]$$

Θα εξετάσουμε τη ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας μέσα από έναν όγκο που ορίζεται από δύο ίσες επιφάνειες με εμβαδόν A, κάθετες στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, και με τις υπόλοιπες έδρες παράλληλες με τον άξονα των z. Η μία επιφάνεια βρίσκεται στη θέση z και η άλλη στη θέση $z + \Delta z$ (βλ. σχήμα).



Η ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου μέσα από την επιφάνεια στο z είναι $A\,S(z)$, προς τα μέσα.

Η ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου μέσα από την επιφάνεια στο $z + \Delta z$ είναι $A\ S(z+\Delta z)$, προς τα έξω.

Ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου στον όγκο $A\Delta z$ είναι $A\ S(z) - A\ S(z+\Delta z)$.

Ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου στον όγκο $A\Delta z$ είναι:

$$\frac{A\ S(z) - A\ S(z+\Delta z)}{A\ \Delta z} = -\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z}$$

Στο όριο, καθώς $\Delta z \longrightarrow 0$, ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου στον όγκο $A\Delta z$ είναι:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(-\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} \right) = -\frac{dS}{dz}.$$

Έτσι, ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα όγκου είναι

$$r(z) = -\frac{dS}{dz} = E_0 H_0\, e^{-2k_i z} \Big(4k_i \cos^2(\omega t - k_r z) \cos\phi - k_i \cos\phi + $$
$$+ 2 \sin(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z) (k_i \sin\phi - k_r \cos\phi) \Big).$$

ή, συναρτήσει των k_r και k_i,

$$r(z) = E_0 H_0\, e^{-2k_i z} \left[\left(4k_i \cos^2(\omega t - k_r z) - 1 \right) \frac{k_r k_i}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} + \right.$$
$$\left. + 2 \sin(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z) \frac{k_i^2 - k_r^2}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} \right].$$

Επειδή οι μέσες τιμές ως προς το χρόνο, των $\cos^2(\omega t - k_r z)$ και $\sin(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z)$ είναι

$$\langle\cos^2(\omega t - k_r z)\rangle = \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \langle\sin(\omega t - k_r z) \cos(\omega t - k_r z)\rangle = 0,$$

η μέση ως προς το χρόνο τιμή του ρυθμού απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου είναι

$$\langle r(z)\rangle = \frac{k_r k_i}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} E_0 H_0\, e^{-2k_i z}.$$

Οι μονάδες του r είναι W/m^3.

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.16.

7.1 Επαληθεύσετε ότι οι λύσεις

$$\mathbf{E}_0 = \left(E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} \right) e^{i(\omega t - kz)} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}_0 = \left(-\frac{E_{0y}}{c}\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_{0x}}{c}\hat{\mathbf{y}} \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

που βρέθηκαν για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε μονωτές ικανοποιούν τις αντίστοιχες εξισώσεις του Maxwell. Το ίδιο και για τις λύσεις για αγώγιμα μέσα.

7.2 Δίνεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\, E_0\cos(\omega t - kz) - \hat{\mathbf{y}}\, E_0\sin(\omega t - kz) \qquad (E_0,\ \omega,\ k \text{ σταθερά}).$$

(α) Δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα διάνυσμα με σταθερό μέτρο, που σε ένα σημείο στο χώρο περιστρέφεται με γωνιακή συχνότητα ω (το πεδίο είναι κυκλικά πολωμένο). Σχεδιάστε το διάνυσμα $\mathbf{E}$ σε διάφορα σημεία του άξονα των z σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.

(β) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ που σχετίζεται με το $\mathbf{E}$ που δόθηκε.

(γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για το μαγνητικό πεδίο.

(δ) Βρείτε το διάνυσμα Poynting για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Απ.: (β) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{E_0}{c}\sin(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{y}}\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)$ (δ) $\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2\, \hat{\mathbf{z}}$.

7.3 Υπολογίστε τη μέση χρονική τιμή του διανύσματος Poynting για ένα ακέραιο αριθμό περιόδων, για επίπεδο μονοχρωματικό γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, (α) σε μονωτή και (β) σε αγώγιμο μέσον.

Απ.: (α) $\langle S\rangle = \frac{1}{2} E_0H_0 = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 c$ (β) $\langle S\rangle = \frac{1}{2} E_0H_0\, e^{-2k_1z}\cos\phi$.

7.4 Αν $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $q(u)$, $r(u)$ και $s(u)$ είναι συναρτήσεις μόνο της μεταβλητής $z = z - ct$ (και όχι των x και y), δείξετε ότι τα πεδία

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\, f(u) + \hat{\mathbf{y}}\, g(u) + \hat{\mathbf{z}}\, h(u) \qquad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}\, q(u) + \hat{\mathbf{y}}\, r(u) + \hat{\mathbf{z}}\, s(u)$$

ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell μόνο αν είναι:

$$h(u) = 0 \qquad s(u) = 0 \qquad f(u) = c\, r(u) \qquad g(u) = -c\, q(u).$$

7.5 Χρησιμοποιώντας τη σχέση $E = mc^2$ για την ισοδυναμία μάζας και ενέργειας στη θεωρία της σχετικότητας, βρείτε το ισοδύναμο σε μάζα της ροής ενέργειας σε ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Υποθέτοντας ότι αυτή η ισοδύναμη μάζα κινείται με ταχύτητα c, βρείτε τη μέση ροή ορμής ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας. Αν μια επιφάνεια απορροφά πλήρως το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, ποια είναι η μέση πίεση που ασκεί το κύμα στην επιφάνεια;

7.6 Η διαφορική εξίσωση για ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ιονόσφαιρα είναι

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_p^2 E = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

όπου ω_p είναι μια σταθερά, γνωστή ως συχνότητα πλάσματος, c είναι η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό και $E(x,t)$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Δοκιμάζοντας λύση της μορφής $E(x,t) = A\ e^{i(kx-\omega t)}$, δείξετε ότι για τα κύματα αυτά ισχύει η σχέση διασποράς: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$.

7.7 Η κυματική εξίσωση στη γενική της μορφή είναι: $\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$.

Σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r,θ,ϕ) και για κύμα που εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο, η λαπλασιανή του ψ είναι

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right).$$

Αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\psi(r,t) = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης.