ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΑ

5.1 Διαμήκη κύματα σε λεπτή ράβδο

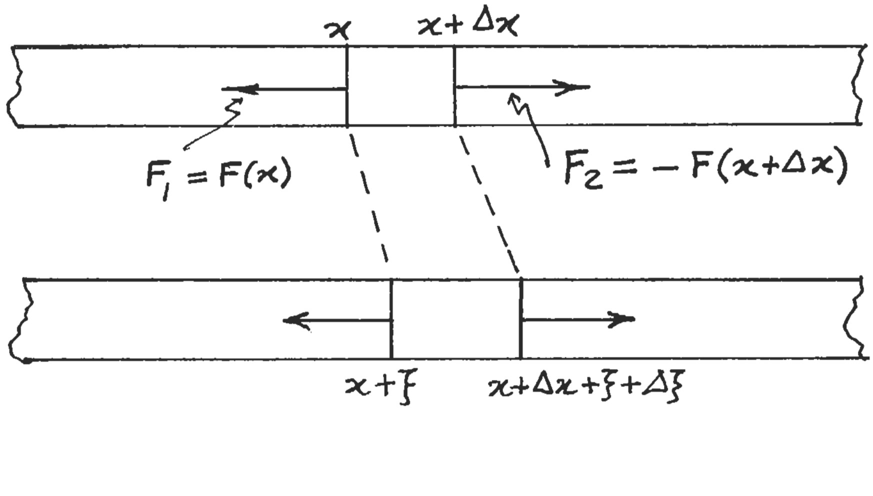
Μια στερεά ράβδος έχει ελαστικότητα και μπορεί, αν διεγερθεί, να εκτελέσει **διαμήκεις ταλαντώσεις** κατά μήκος του άξονά της. Σε αυτές, η μετατόπιση σε κάθε σημείο της ράβδου είναι παράλληλη με τον άξονα της ράβδου και έχει την ίδια τιμή για κάθε επίπεδο κάθετο σε αυτόν.

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke, σε μια ράβδο σταθερής διατομής, με εγκάρσιες διαστάσεις πολύ μικρότερες από το μήκος της, η σχέση μεταξύ της παραμόρφωσης και του αιτίου που την προκαλεί είναι γραμμική, για μικρές παραμορφώσεις. Η δύναμη ανά μονάδα εγκάρσιας επιφάνειας, F/S, ονομάζεται **τάση**. Αν η μεταβολή στο μήκος l της ράβδου είναι Δl, ο λόγος $\Delta l/l$ ονομάζεται **κλασματική επιμήκυνση**. Ο λόγος των δύο είναι σταθερός και ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας του Young** Y,

$$Y = \frac{F/S}{\Delta l/l}. \tag{5.1}$$

Για τα μέταλλα, έχει τιμές της τάξης του $10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$. Η εξίσωση των διαμήκων κυμάτων σε μια λεπτή ράβδο βασίζεται σε αυτή τη σχέση, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί με αρκετή ακρίβεια αν $\Delta l/l < 0{,}1\ \%$.

Για την εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης των διαμήκων κυμάτων, θα εξετάσουμε μια λεπτή ράβδο κατά μήκος του άξονα των x. Η διαμήκης μετατόπιση κάποιου σημείου της ράβδου, που βρίσκεται στο σημείο x, θα συμβολιστεί με $\xi(x,t)$. Εξετάζουμε ένα τμήμα της ράβδου που στην κατάσταση ισορροπίας βρίσκεται μεταξύ των σημείων x και $x + \Delta x$ (Σχ.5.1).



Σχ.5.1 Οι διαμήκεις μετατοπίσεις $\xi(x,t)$ σε ράβδο και οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο τμήμα της ράβδου μεταξύ x και $x + \Delta x$.

Έστω ότι στη χρονική στιγμή t τα σημεία της ράβδου που αρχικά βρίσκονταν στο x έχουν μετατοπιστεί στο $x + \xi$, και αυτά που βρίσκονταν στο $x + \Delta x$ έχουν μετατοπιστεί στο $x + \Delta x + \xi + \Delta\xi$. Η μέση κλασματική επιμήκυνση του στοιχείου αυτού της ράβδου είναι $\Delta\xi/\Delta x$. Στο όριο, καθώς $\Delta x \longrightarrow 0$, η κλασματική επιμήκυνση σε ένα σημείο είναι $\partial\xi/\partial x$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου του Young, $F = SY\dfrac{\Delta l}{l}$ είναι η δύναμη που προκαλεί την κλασματική επιμήκυνση $\Delta l/l$. Επομένως, σε ένα σημείο όπου η κλασματική επιμήκυνση είναι $\partial\xi/\partial x$, η τάση είναι

$$\frac{F}{S} = Y\,\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Εδώ είναι το κατάλληλο σημείο να υπολογίσουμε την **μεταδιδόμενη δύναμη** σε μια ράβδο εγκάρσιας διατομής S, σε ένα σημείο x, όπου η κλασματική επιμήκυνση είναι $\partial\xi/\partial x$. Αυτή ορίζεται ως η δύναμη που ασκείται από το μέρος της ράβδου στα αριστερά του σημείου x, πάνω στη ράβδο που βρίσκεται στα δεξιά του σημείου x. Σύμφωνα με την Εξ.(5.2), αυτή είναι

$$F = -\,YS\,\frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{5.3}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι για θετικό $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$, που σημαίνει αύξηση του μήκους ενός στοιχείου της ράβδου στο σημείο x, η δύναμη είναι προς τα αρνητικά x (προς τα αριστερά).

Στη χρονική στιγμή t, το στοιχείο της ράβδου που βρισκόταν αρχικά μεταξύ x και $x + \Delta x$, υφίσταται δυνάμεις στα δύο του άκρα που σύμφωνα με την (5.3) είναι ίσες με

$$F_1 = F(x) = -\,YS\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x} \qquad \text{και} \qquad F_2 = -\,F(x + \Delta x) = YS\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}. \tag{5.4}$$

Η ολική δύναμη στο στοιχείο είναι:

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F_1 + F_2 = \\ &= F(x) - F(x+\Delta x) = -\,YS\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x} + YS\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} = YS\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x}\right).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Στο όριο, καθώς $\Delta x \longrightarrow dx \longrightarrow 0$, θα είναι και $\Delta F \longrightarrow dF$, όπου

$$dF = \lim_{dx \to 0} YS\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x}\right) = YS\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,dx. \tag{5.6}$$

Το στοιχείο μεταξύ x και $x + dx$ έχει μάζα ίση με $\rho S\,dx$, όπου ρ είναι η πυκνότητα της ράβδου. Η επιτάχυνσή του είναι $\partial^2\xi/\partial t^2$. Η εξίσωση κίνησης του στοιχείου αυτού είναι επομένως

$$\rho S\,dx\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = YS\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,dx \qquad \text{ή}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{5.7}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η κυματική εξίσωση, για τη διαμήκη μετατόπιση $\xi(x,t)$ των σημείων της ράβδου. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\varrho}}\,. \tag{5.8}$$

Στην προσέγγιση του προβλήματος όπως παρουσιάστηκε, αγνοήθηκε η πλευρική παραμόρφωση που υφίσταται ένα στερεό σώμα όταν συμπιέζεται. Επίσης αγνοήθηκαν οι εγκάρσιες διατμητικές τάσεις που αναπτύσσοναται. Για μια πληρέστερη ανάλυση, βλ. Pain, παράγρ. 5.5

Οι γενική λύση μιας κυματικής εξίσωσης, όπως η (5.7), είναι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\xi(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{5.9}$$

όπου η συνάρτηση με μεταβλητή την $(x - ct)$ παριστάνει ένα κύμα που κινείται προς τα θετικά x, ενώ η συνάρτηση με μεταβλητή την $(x + ct)$ παριστάνει ένα κύμα που κινείται προς τα αρνητικά x.

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση των εγκαρσίων ταλαντώσεων σε τεντωμένη χορδή, οι λύσεις για τις διαμήκεις ταλαντώσεις σε λεπτή ράβδο μπορούν να γραφούν στις ισοδύναμες μορφές:

$$\xi(x,t) = \left(A \cos\frac{\omega x}{c} + B \sin\frac{\omega x}{c} \right)\left(D \cos \omega t + E \sin \omega t \right) \tag{5.10}$$

$$\xi(x,t) = H \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \theta\right) \cos(\omega t + \phi) \tag{5.11}$$

$$\xi(x,t) = G \cos\Big(\frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{(x - ct)}_{\longrightarrow} + \phi_1\Big) + G \cos\Big(\frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{(x + ct)}_{\longleftarrow} + \phi_2\Big). \tag{5.12}$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος και ω η γωνιακή συχνότητα του κύματος, ενώ οι σταθερές A, B, D, E, H, G, θ, ϕ, ϕ_1 και ϕ_2 προσδιορίζονται από τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος.

Η Εξ.(5.12) δείχνει ότι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης για διαμήκεις ταλαντώσεις μπορούν να εκφραστούν ώς άθροισμα δύο οδευόντων κυμάτων με ίσα πλάτη, ένα που κινείται προς τα θετικά x και ένα που κινείται προς τα αρνητικά x.

Η γενική λύση για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελείται, γενικά, από ένα άθροισμα όρων σε μια από τις μορφές (5.10), (5.11) ή (5.12), με τις σταθερές τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές και οι αρχικές συνθήκες.

Συναρτήσει των μεγεθών ν, ω, λ, k, c και T, οι λύσεις μπορούν να γραφούν σε μια από τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\xi(x,t) = \alpha \sin(\omega t - kx) \tag{5.13}$$

$$\xi(x,t) = \alpha \sin\left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \tag{5.14}$$

$$\xi(x,t) = \alpha \sin\left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \tag{5.15}$$

$$\xi(x,t) = \alpha \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \tag{5.16}$$

$$\xi(x,t) = \alpha \sin [k (ct - x)] \tag{5.17}$$

Τα διαμήκη κύματα μπορούν επίσης να εκφραστούν σε μιγαδική μορφή, σύμφωνα με τη γνωστή σύμβαση. Έτσι, αντί της λύσης $\xi(x,t) = \alpha \cos(\omega t - kx + \phi)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\xi(x,t) = \alpha\, e^{i(\omega t - kx + \phi)} \tag{5.18}$$

και να υπονοείται ότι θα πάρουμε το πραγματικό μέρος της συνάρτησης ως λύση. Επίσης, ενσωματώνοντας τη σταθερά φάσης σε ένα μιγαδικό (γενικά) πλάτος A, μπορούμε να γράψουμε τη λύση στη γενική μορφή:

$$\xi(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)}. \tag{5.19}$$

Με τη σύμβαση αυτή, έχουμε την ισοδυναμία:

$$\xi(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)} \quad \longleftrightarrow \quad \xi(x,t) = \alpha \cos(\omega t - kx + \phi). \tag{5.20}$$

5.2 Οριακές συνθήκες για διαμήκεις ταλαντώσεις σε λεπτή ράβδο

Για τη διατύπωση των οριακών συνθηκών στην περίπτωση διαμήκων ταλαντώσεων σε ράβδο με εγκάρσια διατομή εμβαδού S, χρησιμοποιούμε τα εξής δεδομένα για το γενικό σημείο x της ράβδου, στη χρονική στιγμή t:

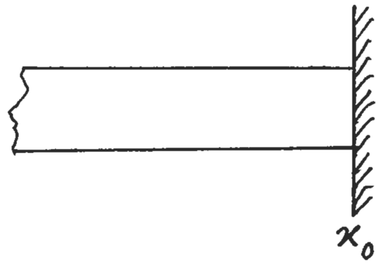
Διαμήκης μετατόπιση:	$\xi(x,t)$
Κλασματική επιμήκυνση:	$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$
Διαμήκης δύναμη που ασκείται από τη ράβδο στα αριστερά, πάνω στη ράβδο στα δεξιά του σημείου στο x:	$-\,YS\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$
Διαμήκης σωματιδιακή ταχύτητα:	$\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$
Διαμήκης σωματιδιακή επιτάχυνση:	$\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

Οι συνηθέστερες οριακές συνθήκες που συναντά κανείς στην πράξη είναι οι ακόλουθες:

1. Ακίνητο σημείο

Αν το σημείο της ράβδου στο σημείο $x = x_0$ είναι ακίνητο για κάθε χρονική στιγμή, τότε

$$\xi(x_0,t) = 0 \qquad (5.21)$$



Το ένα ή και τα δύο άκρα μιας ράβδου (στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, π.χ.) μπορούν να είναι ακίνητα, οπότε

$\xi(0,t) = 0$ ή $\xi(L,t) = 0$.

Στην πράξη, είναι σχεδόν αδύνατο να ακινητοποιηθεί τελείως ένα άκρο για διαμήκεις ταλαντώσεις. Μόνο σε επαφή με ένα πολύ σκληρότερο μέσο (με πολύ μεγαλύτερο μέτρο Young) είναι δυνατό να επιτευχθεί προσεγγιστικά κάτι τέτοιο.

2. Ασυνέχεια στη ράβδο: "Σημειακή" μάζα

Αν στο σημείο $x = x_0$ υπάρχει στερεωμένη στη ράβδο μια "σημειακή" μάζα m, και η μετατόπιση της ράβδου στα αριστερά της μάζας είναι $\xi_1(x,t)$ και στα δεξιά είναι $\xi_2(x,t)$, τότε θα έχουμε δύο οριακές συνθήκες:

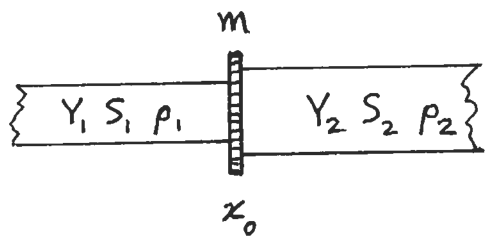
(α) Συνέχεια της ράβδου στο σημείο $x = x_0$

$$\xi_1(x_0,t) = \xi_2(x_0,t) \qquad (5.22)$$

(β) Εξίσωση κίνησης της μάζας

Η δύναμη που ασκείται πάνω στη σημειακή μάζα είναι

$$F = -Y_1S_1 \left.\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right|_{x_o} + Y_2S_2 \left.\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right|_{x_o}$$



όπου η εγκάρσια διατομή της ράβδου και το μέτρο του Young μπορούν να είναι διαφορετικά στα αριστερά και στα δεξιά του σημείου x_0.

Η διαμήκης μετατόπιση της μάζας είναι $\xi_m(t) = \xi_1(x_0,t) = \xi_2(x_0,t)$

και η διαμήκης επιτάχυνσή της είναι $\left.\dfrac{d^2\xi_1}{dt^2}\right|_{x_o,t} = \left.\dfrac{d^2\xi_2}{dt^2}\right|_{x_o,t}$.

Η εξίσωση κίνησης της μάζας και επομένως η δεύτερη οριακή συνθήκη είναι:

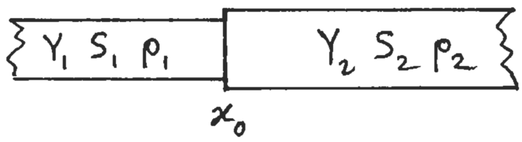
$$m\left.\frac{d^2\xi_1}{dt^2}\right|_{x_o,t} = m\left.\frac{d^2\xi_2}{dt^2}\right|_{x_o,t} = F = -Y_1S_1\left.\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right|_{x_o} + Y_2S_2\left.\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right|_{x_o}. \qquad (5.23)$$

Γενικά, οι ταχύτητες των διαμήκων κυμάτων στα δύο μέρη θα διαφέρουν και αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη.

3. Ασυνέχεια στη ράβδο: Μεταβολή στη διατομή ή στο μέτρο του Young

Η περίπτωση αυτή είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης, όταν $m \longrightarrow 0$. Επομένως οι δύο οριακές συνθήκες προκύπτουν από τις Εξ.(5.22) και (5.23) και είναι:

$$\xi_1(x_0,t) = \xi_2(x_0,t) \qquad (5.24)$$



$$Y_1S_1 \left.\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right|_{x_0} = Y_2S_2 \left.\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right|_{x_0}. \qquad (5.25)$$

Βεβαίως, οι ταχύτητες διάδοσης των διαμήκων κυμάτων στα δύο μέρη της ράβδου μπορούν να διαφέρουν στην περίπτωση αυτή.

4. Ελεύθερο άκρο

Ελεύθερο άκρο θεωρείται ένα άκρο της ράβδου όπου δεν ασκείται διαμήκης δύναμη. Αν το ελεύθερο άκρο βρίσκεται στο σημείο $x = x_0$, τότε, η οριακή συνθήκη στο σημείο αυτό βρίσκεται από την (5.25) στο όριο όταν η ράβδος στα δεξιά εξαφανίζεται καθώς $Y_2S_2 \longrightarrow 0$. Τότε,

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x_0} = 0. \qquad (5.26)$$

που είναι η οριακή συνθήκη για τα διαμήκη κύματα σε ράβδο, σε ελεύθερό της άκρο.

5.3 Κανονικές συχνότητες διαμήκων κυμάτων σε ράβδο

Θα εξετάσουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις αντίστοιχες κανονικές συχνότητες για τρεις περιπτώσεις, αυτές της ράβδου μήκους L με

(α) Δύο ακίνητα άκρα,
(β) Δύο ελεύθερα άκρα, και
(γ) Ενα ακίνητο και ένα ελεύθερο άκρο.

Και στις τρεις περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης στη μορφή (5.11),

$$\xi(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c} \right)\cos(\omega t + \phi).$$

(α) Δύο ακίνητα άκρα

Αν τα άκρα στα σημεία $x = 0$ και $x = L$ είναι ακίνητα, θα είναι:

$$\xi(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad \xi(L,t) = 0.$$

Η πρώτη συνθήκη δίνει $A = 0$.

Η δεύτερη συνθήκη δίνει $\sin \frac{\omega}{c} L = 0$ ή $\frac{\omega}{c} L = n\pi$ $(n = 1,2,...)$.

Οι ιδιοσυχνότητες είναι επομένως, $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ $(n = 1,2,3,...)$. (5.27)

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι, αντίστοιχα,

$$\xi_n(x,t) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{5.28}$$

(β) Δύο ελεύθερα άκρα

Στα ελεύθερα άκρα, ισχύει η συνθήκη: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$.

Επειδή $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{c} \left(- A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \right) \cos(\omega t + \phi)$,

από το άκρο $x = 0$ προκύπτει ότι $B = 0$

και από το άκρο $x = L$, $\sin \frac{\omega}{c} L = 0$ ή $\frac{\omega}{c} L = n\pi$ $(n = 1,2,...)$.

Οι ιδιοσυχνότητες είναι επομένως, $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ $(n = 1,2,3,...)$, (5.29)

όπως και στην περίπτωση των δύο ακίνητων άκρων.

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι, αντίστοιχα,

$$\xi_n(x,t) = A_n \cos \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{5.30}$$

(γ) Ενα ακίνητο και ένα ελεύθερο άκρο

Αν το ακίνητο άκρο είναι στο $x = 0$, τότε είναι $A = 0$. Επομένως,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{c} B \cos \frac{\omega x}{c} \cos(\omega t + \phi)$$

και για ελεύθερο άκρο στο σημείο $x = L$, θα πρέπει να είναι $\cos \frac{\omega L}{c} = 0$.

Επομένως, $\frac{\omega_n x}{c} = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi$ $(n = 1,2,3,...)$ και

$$\omega_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi c}{L} \quad (n = 1,2,3,...). \tag{5.31}$$

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι, αντίστοιχα,

$$\xi_n(x,t) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{5.32}$$

5.4 Ενέργειες για διαμήκη κύματα σε ράβδο

Θα υπολογίσουμε τώρα την κινητική και τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους της ράβδου, για οδεύοντα διαμήκη κύματα, της μορφής $\xi(x,t) = \alpha \cos(\omega t - kx)$.

5.4.1 Κινητική ενέργεια

Η μάζα ανά μονάδα μήκους της ράβδου είναι ρS.
Η σωματιδιακή ταχύτητα στο σημείο (x,t) είναι $\partial\xi/\partial t$.
Επομένως, η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους της ράβδου, είναι

$$\frac{dE_K}{dx} = \frac{1}{2}\rho S \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2. \tag{5.33}$$

Για το συγκεκριμένο οδεύον κύμα, είναι

$$\frac{dE_K}{dx} = \frac{1}{2}\rho S\ \omega^2\alpha^2 \sin^2(\omega t - kx). \tag{5.34}$$

Διαιρόντας δια της επιφάνειας, έχουμε την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.

5.4.2 Δυναμική ενέργεια

Ενα τμήμα της ράβδου με αρχικό μήκος Δx που έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\xi$, έχει κλασματική επιμήκυνση $\Delta\xi/\Delta x$. Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου του Young, η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί αυτό είναι ίση με

$$F = YS\frac{\Delta\xi}{\Delta x}.$$

Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε το τμήμα της ράβδου με μήκος Δx ως ισοδύναμο με ένα ελατήριο με φυσικό μήκος Δx και σταθερά ελατηρίου ίση με

$$s = \frac{YS}{\Delta x}. \tag{5.35}$$

Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο αυτό όταν επιμηκύνεται κατά $\Delta\xi$ είναι, κατά τα γνωστά, ίση με

$$\Delta E_P = \frac{1}{2}s\,(\Delta\xi)^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta\xi)^2 = \frac{1}{2}YS\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)^2\Delta x. \tag{5.36}$$

Στο όριο, καθώς $\Delta x \longrightarrow 0$, η γραμμική πυκνότητα δυναμικής ενέργειας στη ράβδο είναι

$$\frac{dE_P}{dx} = \frac{1}{2}YS\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2. \tag{5.37}$$

Για το συγκεκριμένο οδεύον κύμα, είναι

$$\frac{dE_P}{dx} = \frac{1}{2}YS\ k^2\alpha^2 \sin^2(\omega t - kx). \tag{5.38}$$

και επειδή είναι $k^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2\rho/Y$, έχουμε τελικά,

$$\frac{dE_P}{dx} = \frac{1}{2}\,\varrho S\,\omega^2\alpha^2\,\sin^2(\omega t - kx), \tag{5.39}$$

που είναι ίση με τη γραμμική πυκνότητα κινητικής ενέργειας. Και πάλι, η πυκνότητα ανά μονάδα όγκου βρίσκεται διαιρόντας δια του εμβαδού S.

5.4.3 Ροή ενέργειας, ισχύς και ένταση του κύματος

Η πυκνότητα ολικής ενέργειας ανά μονάδα μήκους είναι, σύμφωνα με τις (5.34) και (5.39),

$$\frac{dE}{dx} = \varrho S\,\omega^2\alpha^2\,\sin^2(\omega t - kx). \tag{5.40}$$

Πολλαπλασιάζοντας επί την ταχύτητα του κύματος, έχουμε τη ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, για όλη την εγκάρσια επιφάνεια της ράβδου,

$$P = \varrho Sc\,\omega^2\alpha^2\,\sin^2(\omega t - kx). \tag{5.41}$$

Η μέση χρονική τιμή αυτής είναι

$$P_{av} = \frac{1}{2}\,\varrho Sc\,\omega^2\alpha^2. \tag{5.42}$$

Η μέση **ένταση** του κύματος, που ορίζεται ως η μέση ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στην κατεύθυνση του κύματος είναι,

$$I = \frac{1}{2}\,\varrho c\,\omega^2\alpha^2. \tag{5.43}$$

'Οπως αναμένεται, η ενταση του κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του.

5.5 Σύνθετη αντίσταση για διαμήκη κύματα

Για ένα οδεύον διαμήκες κύμα της μορφής $\xi(x,t) = \alpha\, e^{i(\omega t-kx)}$, η σωματιδιακή ταχύτητα είναι

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega\,\alpha\, e^{i(\omega t-kx)} \tag{5.44}$$

και η μεταδιδόμενη δύναμη είναι, σύμφωνα με την (5.3),

$$F = -\,YS\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = ik\alpha\,YS\,e^{i(\omega t-kx)}. \tag{5.45}$$

Τα πραγματικά μέρη αυτών των εξισώσεων δίνουν:

$$\xi(x,t) = \alpha\cos(\omega t - kx) \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\,\omega\alpha\,\sin(\omega t - kx) \tag{5.47}$$

$$F = -\,YS\alpha k\,\sin(\omega t - kx). \tag{5.48}$$

Ο λόγος της μεταδιδόμενης δύναμης προς την σωματιδιακή ταχύτητα σε κάποιο σημείο σε μια χρονική στιγμή, ορίζεται ως η **χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση** Z του μέσου. Για τα διαμήκη κύματα, προκύπτει από τις Εξ.(5.44) και (5.45) ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση μιας ράβδου είναι

$$Z = \frac{k}{\omega} YS = \frac{YS}{c} = \rho c S. \tag{5.49}$$

Η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ανά μονάδα επιφάνειας είναι $z = \rho c$ και είναι μια ιδιότητα του υλικού.

5.6 Μετάδοση και ανάκλαση διαμήκων κυμάτων

Υποθέτουμε ότι ένα διάμηκες οδεύον κύμα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο μέσων. Για ευκολία στην ανάλυση, υποθέτουμε ότι πρόκειται για δύο ράβδους με την ίδια διατομή S αλλά από υλικά με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Έτσι,

Προσπίπτον κύμα $$\xi_i(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} \tag{5.50}$$

Ανακλώμενο κύμα $$\xi_r(x,t) = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} \tag{5.51}$$

Μεταδιδόμενο κύμα $$\xi_t(x,t) = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \tag{5.52}$$

Στη ράβδο 1 το κύμα είναι: $$\xi_1 = \xi_i + \xi_r. \tag{5.53}$$

Στη ράβδο 2 το κύμα είναι: $$\xi_2 = \xi_t. \tag{5.54}$$

Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες (5.24) και (5.25), και αν υποθέσουμε ότι η διαχωριστική επιφάνεια βρίσκεται στο σημείο $x = 0$, τότε,

$$\xi_1(0,t) = \xi_2(0,t) \tag{5.55}$$

$$Y_1 \left.\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = Y_2 \left.\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{5.56}$$

Αντικαθιστώντας τις (5.50) – (5.54) στις (5.55) και (5.56) βρίσκουμε, τελικά, ότι είναι

Συντελεστής ανάκλασης πλάτους $$\frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{5.57}$$

Συντελεστής μετάδοσης πλάτους $$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{5.58}$$

όπου, σύμφωνα με την (5.49), οι χαρακτηριστικές σύνθετες αντιστάσεις των δύο ράβδων είναι $Z_1 = \varrho_1 c_1 S$ και $Z_2 = \varrho_2 c_2 S$.

Οι αντίστοιχοι συντελεστές για την ανάκλαση και τη μετάδοση ενέργειας, ή της έντασης του κύματος, είναι:

Συντελεστής ανάκλασης ενέργειας $$R = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right]^2 \qquad (5.59)$$

Συντελεστής μετάδοσης ενέργειας $$T = \frac{4Z_1Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2}. \qquad (5.60)$$

Οι συντελεστές αυτοί έχουν τη γενική μορφή που έχουν για όλα τα είδη κυμάτων όταν εκφραστούν συναρτήσει των χαρακτηριστικών σύνθετων αντιστάσεων.

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 5.7, 5.8, 5.12, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17.

5.1 Δείξετε ότι, για διαμήκη κύματα σε μια ράβδο, σε ένα σημείο όπου η σωματιδιακή ταχύτητα είναι $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, η κλασματική επιμήκυνση είναι $\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}$.

5.2 Δύο ράβδοι ΑΒ και ΒΓ, ίδιου μήκους L, με πυκνότητες ϱ_1 και ϱ_2, εγκάρσιες διατομές S_1 και S_2, και με ταχύτητες διαμήκων κυμάτων c_1 και c_2 αντίστοιχα, είναι ενωμένες σε μία ενιαία ράβδο ΑΓ, μήκους 2L. Αν το άκρο Α αυτής της ράβδου είναι ακίνητο για διαμήκεις ταλαντώσεις και το άκρο Γ είναι ελεύθερο, δείξετε ότι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης

$$\tan\frac{\omega L}{c_1}\,\tan\frac{\omega L}{c_2} = \frac{\varrho_1 c_1 S_1}{\varrho_2 c_2 S_2}.$$

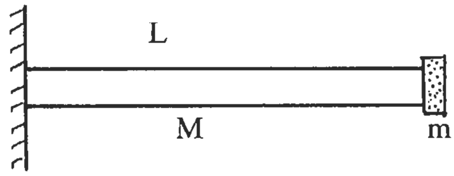
5.3 Δύο λεπτές ράβδοι με εγκάρσιες διατομές S_1 και S_2, μήκη L_1 και L_2, πυκνότητες ϱ_1 και ϱ_2 και μέτρα του Young Y_1 και Y_2 αντίστοιχα, συνδέονται σε μία ενιαία ράβδο μήκους $L_1 + L_2$. Δείξετε ότι οι κανονικές συχνότητες του συστήματος δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης

$$\varrho_1 c_1 S_1 \tan\left(\frac{\omega L_1}{c_1}\right) + \varrho_2 c_2 S_2 \tan\left(\frac{\omega L_2}{c_2}\right) = 0.$$

5.4 Συμπαγής ράβδος έχει μήκος L, εμβαδόν διατομής S και μάζα M. Η ράβδος έχει το άκρο της στο σημείο x=0 ακίνητο ενώ στο άλλο της άκρο (x=L) υπάρχει σημειακή μάζα m. Τα διαμήκη κύματα κατά μήκος της ράβδου είναι της μορφής

$\xi(x,t) = (A \cos kx + B \sin kx) \sin\omega t$

και έχουν ταχύτητα $c = \sqrt{Y/\rho}$, όπου Y είναι το μέτρο του Young του υλικού της ράβδου και ρ η πυκνότητά της.



Να αποδειχθεί ότι οι κανονικές συχνότητες του συστήματος ικανοποιούν την εξίσωση $kL \tan kL = M/m$.